

博士論文

次元6演算子による核子崩壊を用いた
超対称大統一模型特定

名古屋大学大学院理学研究科

素粒子宇宙物理学専攻

素粒子論研究室（E研）

学生番号：461101211

村松 祐

2014年3月

目次

1	序論	4
2	SUSY	7
2.1	Introduction	7
2.2	Notation for SUSY	9
2.3	Gauge coupling unification in MSSM	9
2.4	SUSY contribution for FCNC and EDM	12
3	Anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT	14
3.1	Anomalous $U(1)_A$ gauge symmetry	14
3.2	Anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model における真空期待値	15
3.3	Anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model における Doublet-Triplet splitting 実現 -Higgs VEVs-	19
3.4	Gauge coupling unification の実現	21
3.5	low energy における測定される quark、lepton の質量と混合の実現	26
3.5.1	$SU(5)$ GUT model における測定される quark、lepton の質量と混合の実現	27
3.5.2	$SO(10)$ GUT model における測定される quark、lepton の質量と混合の実現	28
3.5.3	E_6 GUT model における測定される quark、lepton の質量と混合の実現	32
3.5.4	$E_6 \times SU(2)_F$ GUT model における測定される quark、lepton の質量と混合の実現	37
3.6	Anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT における核子崩壊	43
3.7	Anomalous $U(1)_A$ $E_6 \times SU(2)_F$ SUSY GUT model が SUSY FCNC、CP process に与える影響	45
3.8	Simple E_6 unification with anomalous $U(1)_A$ symmetry	46
4	次元 6 演算子による核子崩壊を用いた超対称大統一模型特定	49
4.1	核子崩壊の崩壊幅計算	49
4.2	次元 6 演算子の係数 C^I の計算	51
4.2.1	X-type gauge boson 交換による核子崩壊次元 6 演算子	52

4.2.2	Anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model における対角化行列	54
4.2.3	次元 6 演算子への繰り込み群の効果	58
4.3	Anomalous $U(1)$ $SU(5)$, $SO(10)$, E_6 SUSY GUT model における核子崩壊による模型特定	61
4.3.1	模型の設定	62
4.3.2	陽子の各崩壊過程における寿命	64
4.4	核子崩壊による模型特定	67
4.5	Anomalous $U(1)$ $E_6 \times SU(2)_F$ SUSY GUT model における核子崩壊による模型特定	72
4.5.1	模型の設定	72
4.5.2	陽子の各崩壊過程における寿命	73
4.5.3	核子崩壊による模型特定	75
5	まとめと議論	80
A	Yukawa coupling matrix の対角化 (main order)	84
B	$SO(10)$ GUT model における gauge interaction	87
B.1	$SO(6)$ 、 $SO(4)$ 群における定義	87
B.1.1	$SO(6)$ γ -matrix	88
B.1.2	$SO(4)$ γ -matrix	90
B.2	$SO(10)$ γ -matrix	91
B.3	$SO(10)$ generator	92
B.4	$\mathbf{16}$ spinor の gauge boson	93
B.5	spinor $\mathbf{16} : \psi$ の gauge 変換	95
B.6	fundamental $\mathbf{10}$ の gauge 変換	95
C	E_6 GUT model における gauge interaction	97
D	Anomalous $U(1)_A$ $E_6 \times SU(2)_F$ SUSY GUT model において対角化行列が持つ条件	100
E	その他の模型における模型特定	102
E.1	GUT scale での Yukawa structure が模型特定に与える影響	102
E.2	$SU(5)$ model, $SO(10)$ model 1 における 10^6 model point .	103

1 序論

素粒子物理学には標準模型 (Standard Model, SM) [1] と呼ばれる多くの研究者が信じる模型が存在する。この標準模型は数多くの実験 [2] を満たすことが出来る模型である。加えて近年標準模型の最後のピースである Higgs が発見された [3]。しかし、標準模型の枠組みの中だけでは解決できない、説明できない問題もいくつか存在する。例えば Higgs mass の階層性問題や標準模型粒子の charge 設定などである。これらの問題を解決するためにいくつかの標準模型を超える物理が考えられている。大統一理論 (Grand Unified Theory, GUT) と超対称性 (supersymmetry, SUSY) はその有力な候補である。この二つの理論は相性が良いため二つを合わせた超対称大統一理論は特に有力な候補である。

超対称大統一理論にはいくつかの現実的な模型が存在している。しかし、これらの模型からどの模型がこの自然を記述する超対称大統一理論なのかを判別するには多くの困難が存在している。一番の問題は大統一を実現する energy scale (GUT scale) が極めて大きいことである。超対称性を加えることにより追加される粒子の効果を考えると GUT scale は 2×10^{16} GeV であり、SM particle のみの場合だと g_1 と g_2 が交わる $\sim 10^{13}$ GeV¹² である。これはもちろん現在の加速器が実現できる energy scale である ~ 10 TeV より極めて大きい。このため、超対称大統一理論で加わる GUT scale 付近の質量を持つ粒子を加速器で直接生成して観測するのは不可能に近い。また、decoupling theorem [5] によりこのような high energy の現象の多くは low energy の現象に埋もれてしまう。

そのような状況の中で (超対称) 大統一理論の現象の中でほとんど唯一の観測可能と考えられている現象が核子崩壊 [6, 7] である。核子崩壊とは陽子、中性子などの核子が meson や antilepton などに baryon 数を破って崩壊する現象である。SM は偶然ではあるが baryon 数と lepton 数が保存する理論であるため、SM の枠組みでは核子崩壊は起きない。これにより、(超対称) 大統一理論からの核子崩壊は観測可能になる。加えて、当

¹ g_3 の測定は g_1, g_2 に比べて誤差が大きい。このため、 g_1 と g_2 が交わる点を GUT scale とした。しかし、 g_3 の誤差だけでは一点で交わることはない。また、 g_1 の大きさは $SU(5)$ 群で統一されると仮定して規格化を行った。このため、 g_1 には規格化の自由度があるから GUT scale は g_2 と g_3 の交わる $10^{17} \sim 10^{18}$ GeV 付近であるという主張もある。どちらにしろ極めて高エネルギーの話である。

²もちろん 10^{13} GeV という GUT scale はこれから述べる核子崩壊の実験によって否定される。ただし、核子崩壊への QCD からの寄与である hadron matrix element からの影響が一般的に考えられているより極めて小さくなる場合 [4] は否定されないこともある。

たり前ではあるが核子崩壊の観測は dark matter, neutrino mixing のように標準模型を超える物理の存在を示唆する。このため、多くの実験が核子崩壊を観測しようと試みている [8, 9, 10]。現在の lifetime の下限は

$$\tau_{p \rightarrow \pi^0 + e^c} \geq 1.2 \times 10^{34} \text{ years} \quad (1.1)$$

$$\tau_{p \rightarrow K^+ + \nu^c} \geq 3.9 \times 10^{33} \text{ years} \quad (1.2)$$

などである。

多くの場合、超対称大統一模型では2種類の演算子によって核子崩壊が生じる。1つは X-type gauge boson を媒介することによって生じる質量次元6の演算子による核子崩壊である。もう一つは triplet (colored) Higgsino, Higgs を媒介し、squark や slepton が現れる次元5の演算子による核子崩壊である。sparticle からの寄与があるとはいえ、最も効果の大きい GUT scale 質量からの抑制が弱いため、多くの場合、次元5演算子による核子崩壊の方が重要になる。しかし、minimal な模型に限らなければ次元5演算子を抑制することはそれほど困難なことではない [11, 12]。また、多くの場合にはすべての sparticle 質量が 1 TeV 付近と超対称性模型への仮定を加えて考えられてきた。現在の観測からは sparticle 質量は数 TeV 以上が期待されるためこの仮定を用いない模型も考えられている。この仮定を取り除き、high energy SUSY を考えることによって次元5演算子による核子崩壊を抑制できる [13, 14]。この論文において主に見る模型である anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model も次元5演算子による核子崩壊を抑制できるような模型の一例であり、次元6演算子による核子崩壊の方が重要になる。このため次元6演算子による核子崩壊を用いて超対称大統一模型判別が行えないかを研究した。

今回の研究において特に注目したのが対角化行列である。対角化行列は Yukawa matrix を対角化する行列である。つまり、超対称大統一模型において重要である GUT scale での Yukawa structure の情報を対角化行列は持っている。また、対角化行列は不定性を持っている。なぜなら実験的には対角化行列を直接測定できないからである。観測可能な SM interaction のなかでは対角化行列は weak interaction に現れる。しかし、weak interaction 上では2つの left-handed 物質に対する対角化行列の積である CKM 行列 [15] MNS 行列 [16] として現れるため、観測されるのは CKM, MNS 行列である。つまり、観測によってすべての対角化行列を決定することはできない。特に right-handed 物質に対する対角化行列には実験からの制限はない。加えて理論的にはたとえば minimal $SU(5)$ GUT

model においては対角化行列には不定性はない。これはこの模型において Yukawa matrix がもつ自由度が極めて少ないからである。しかし、この模型には low energy における観測結果を満たすためには不都合がある。それは down-type quark と charged lepton の質量に関わる関係式 $Y_d = Y_e^t$ である [17]。この関係式を崩して low energy において観測を満たすために $SU(5)$ GUT model では高次元表現の Higgs を加えたり [18, 19] 高次元演算子の効果を導入したりする [20]。これにより Yukawa matrix には自由度が加わり、加わった自由度が対角化行列の不定性になる。これらの対角化行列の不定性を考慮しても超対称大統一模型が判別できるかどうかを研究することは重要である。とくに GUT scale での Yukawa structure が判別できるかは重要である。核子崩壊には対角化行列 (Yukawa structure) によるため、low energy において観測されている quark、lepton の質量と混合を満たす模型である anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model において模型判別ができるかをみた [21]。

この論文ではまず初めに超対称大統一理論のレビューを行う。2 節において超対称性についてレビューを行う。3 節においては今回核子崩壊による模型特定を行うときに考えた anomalous $U(1)_A$ 超対称大統一模型のレビューを行う。そして 4 節において本論文の主内容である次元 6 演算子による核子崩壊を用いた超対称大統一模型特定について述べる。

2 SUSY

2.1 Introduction

超対称性 (supersymmetry, SUSY) [22, 23] を加えた理論は標準模型 (Standard Model, SM) を超える物理として期待されている理論の一つである。超対称性は Coleman Mandula による定理 [24] によって強く制限された S-matrix の可能な対称性である [25]。この定理は与えられた任意の質量より軽い粒子の種類が有限である、ほぼすべてのエネルギーにおいて散乱が存在する、S-matrix の解析性という3つの仮定をおいた。そして、この仮定の基において1粒子状態を1粒子状態に変換し、多粒子状態にはその各粒子への作用の直和として働く S-matrix と「可換」な対称性演算子のなすもっとも一般的な Lie 代数は、ポアンカレ群の生成子に加えて通常の内部対称性の生成子からなるということを示した。この定理には適用外が存在し、その適用外が超対称性である。なぜなら boson、fermion 間の対称性である超対称性は「交換関係」ではなく「反交換関係」を満たす演算子によって生成される変換の対称性であるからである。加えて、この論文の主題である大統一理論 (Grand Unified Theory, GUT) [6] と極めて相性のよい理論である。SM には Higgs mass の階層性問題 [26] と呼ばれる問題がある、これは GUT を考える上で解決すべき重要な問題である。Higgs mass の量子補正には2次発散があり、SM の weak scale $\sim 10^2$ GeV と GUT scale の間に大きな hierarchy があるため weak scale の質量をもつ Higgs は実現できない。これが階層性問題である。しかし、超対称性が導入されると Higgs mass の量子補正への2次発散は打ち消されるため weak scale と GUT scale の間に大きな hierarchy があっても2次発散による階層性問題は生じなくなる。また、SUSY は boson と fermion の間の対称性であるため SM に存在する粒子たちにはそれぞれ新しい粒子である superpartner, supersymmetric particle (sparticle) が存在する。この新しい粒子 sparticle は gauge coupling の繰り込み群方程式に影響を与える。その結果、標準模型では1点で統一されなかった標準模型の3つの gauge coupling が sparticle たちの影響によってほぼ1点で統一され、きれいな gauge coupling unification が実現される [27]。これらの理由により超対称性は大統一理論と極めて相性のよい理論であるため、2つの理論を合わせた超対称大統一理論 (SUSY GUT) は SM を超える物理として強く期待される。

SUSY にはそれ以外にも多くの利点がある。たとえば SUSY は暗黒物

質 (Dark Matter, DM) の候補を持つ [28]。sparticle から sparticle を含まない粒子たちへの崩壊を禁止する R-parity を導入することによって最も軽い sparticle (lightest sparticle, LSP) は R-parity によって崩壊が禁止される。これにより charge を持たない LSP は DM の有力な候補になる。R-parity はもともと SUSY に存在する次元 4 以下の baryon、lepton number を破る演算子を禁止するために導入されている。これらの演算子が禁止されないとそれぞれの演算子の係数が極めて小さくない限り核子の寿命が実験からの下限を下回ることになる。

階層性問題の解決などから weak scale より少し上の energy scale に sparticle たちが存在する SUSY model が好まれる。そのため、LHC において sparticle search が行われている。現在は衝突エネルギーを上げるために一時中断しているが現在までの観測で sparticle らしき兆候は見られない [29]。sparticle の兆候は見つかっていないが LHC では SM 最後の piece である Higgs が発見され、質量が 126 GeV 付近であることが分かった [3]。元々 SUSY model における Higgs 質量は Z gauge boson より軽いと考えられてきた。なぜなら tree-level では最も軽い CP-even Higgs h^0 の質量が

$$m_{h^0} < m_Z |\cos 2\beta| \quad (2.1)$$

となるからである。ここで β は最小超対称標準模型 (Minimal Supersymmetric Standard Model, MSSM) に 2 つ存在する Higgs H_u, H_d の真空期待値 (Vacuum Expectation Value, VEV) v_u, v_d の比であり

$$\tan \beta \equiv \frac{v_u}{v_d} \quad (2.2)$$

で定義される。しかし、この Higgs 質量には大きな loop 補正がかかることが知られている [30]。この補正は特に top の superpartner である stop の loop からの補正が強く、その補正の大きさは stop mass が重ければ重いほど大きくなることが知られている。つまり、loop 補正を用い 126 GeV という比較的重い Higgs mass を実現するには sparticle、特に stop の質量を重くすればよい³。これらの理由により現在 weak scale より少し上の energy scale に sparticle たちが存在する SUSY model は窮地に立たされているといってもよい。

³もちろん新しい粒子を加えることによって sparticle たちの質量は重くせずに実験で観測された Higgs mass を実現するという方法もある。例えば top と同じ量子数を持つ $SU(5)$ 群における $\mathbf{10} + \overline{\mathbf{10}}$ を新しく導入することによって stop による loop 補正と同様の mechanism を新しい粒子で実現するため Higgs mass は重くできる [31]。

他にも、SUSYには多くの問題点、満たすべき多くの実験からの制限がある。ここでは世代構造への制限をみる。SUSY modelにおいて世代構造への制限を満たすために Constrained MSSM と呼ばれる model を考えることがある。この模型では squark、slepton の持つ世代間の質量行列の比対角成分をゼロとしたり、squark、slepton、Higgs の scalar の 3 点相互作用の coupling matrix を Yukawa matrix に比例すると仮定したりする。加えて全世代を縮退させる「universal」な条件をとる。これらの条件は必要な世代構造への制限、特に squark、slepton が持つ異なる世代間の相互作用を禁止するための条件である。

この世代構造への制限を解決する方法は世代構造への制限を加える以外にも contribution の原因である sparticle たちの質量を重くするという方法もある [32]。これは極めて単純な解決方法ではあるが sparticle search、Higgs mass などの実験結果からも支持される解決方法である。このため現在重い sparticle をもつ model に対する研究が進んでいる。

2.2 Notation for SUSY

SUSY 導入時の notation をまとめる。MSSM に存在する粒子たちは表 1 の通りである。

2.3 Gauge coupling unification in MSSM

ここでは SUSY の重要な特徴の一つである MSSM での Gauge coupling unification についてみるため gauge coupling の繰り込み群方程式をみる。SM 群 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ の gauge coupling g_1, g_2, g_3 について見るが、 $SU(5)$ 群への統一を実現するために g_1 は次のよう定義される。electroweak gauge coupling $g, g' (e \equiv g \sin \theta_W \equiv g' \cos \theta_W, \theta_W: \text{Weinberg angle})$ に対して $g_2 = g, g_1 = \sqrt{5/3}g'$ と定義される。これらの gauge coupling g_a にたいして SM における 1-loop 繰り込み群方程式は

$$\beta_{g_a} \equiv \frac{d}{dt} g_a = \frac{1}{16\pi^2} b_a g_a^3 \quad (b_1, b_2, b_3) = \left(\frac{41}{10}, -\frac{19}{6}, -7\right) \quad (2.3)$$

表 1: 最小超対称標準模型 (Minimal Supersymmetric Standard Model, MSSM) における粒子のまとめ

Chiral multiplet		spin 0	spin 1/2	$(SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y)$
squarks, quarks (各 3 世代)	Q	$(\tilde{u}_L \ \tilde{d}_L)$	$(u_L \ d_L)$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6})$
	u^c	\tilde{u}_R^c	u_R^c	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, -\frac{2}{3})$
	d^c	\tilde{d}_R^c	d_R^c	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \frac{1}{3})$
sleptons, leptons (各 3 世代)	L	$(\tilde{\nu} \ \tilde{e}_L)$	$(\nu \ e_L)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$
	e^c	\tilde{e}_R^c	e_R^c	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1)$
Higgs, higgsinos	H_u	$(H_u^+ \ H_u^0)$	$(\tilde{H}_u^+ \ \tilde{H}_u^0)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, +\frac{1}{2})$
	H_d	$(H_d^0 \ H_d^-)$	$(\tilde{H}_d^0 \ \tilde{H}_d^-)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$
Vector multiplet		spin 1/2	spin 1	$(SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y)$
gluino, gluon	G	\tilde{g}	g	$(\mathbf{8}, \mathbf{1}, 0)$
winos, W bosons	W	$\tilde{W}^\pm \ \tilde{W}^0$	$W^\pm \ W^0$	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0)$
bino, B boson	B	\tilde{B}^0	B^0	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)$

である。ここで $t = \ln(Q/Q_0)$ であり Q は繰り込み scale である。対して MSSM では

$$\begin{aligned}
\beta_{g_a} &= \frac{d}{dt} g_a = \frac{1}{16\pi^2} g_a^3 \left[\sum_i I_a(i) - 3C_a(G) \right] \\
&= \frac{1}{16\pi^2} b_a g_a^3 \quad (b_1, b_2, b_3) = \left(\frac{33}{5}, 1, -3 \right)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

となる。ここで $C_a(G)$ は generator T^α に対して

$$(T^\alpha T^\alpha)_i^j = C_a(i) \delta_i^j \tag{2.5}$$

と定義される quadratic Casimir invariant $C_a(i)$ であり、adjoint representation $i = G$ に対して $U(1)$ group では 0、 $SU(N)$ group では N になる。 $I_a(i)$ は

$$\text{Tr}[T^\alpha T^\beta] = I_a(i) \delta^{\alpha\beta} \tag{2.6}$$

と定義される chiral supermultiplet Φ_i の Dynkin index である ($SU(N)$ の fundamental rep. においては $1/2$ 、 $U(1)_Y$ においては $3Y_i^2/5$ である。)

1-loop level で $\alpha_a = g_a^2/4\pi$ の running をみる。1-loop level では

$$\frac{d}{dt} \alpha_a^{-1} = -\frac{b_a}{2\pi} \tag{2.7}$$

である。図 1 の結果により 1TeV 付近に sparticle が集まっている MSSM

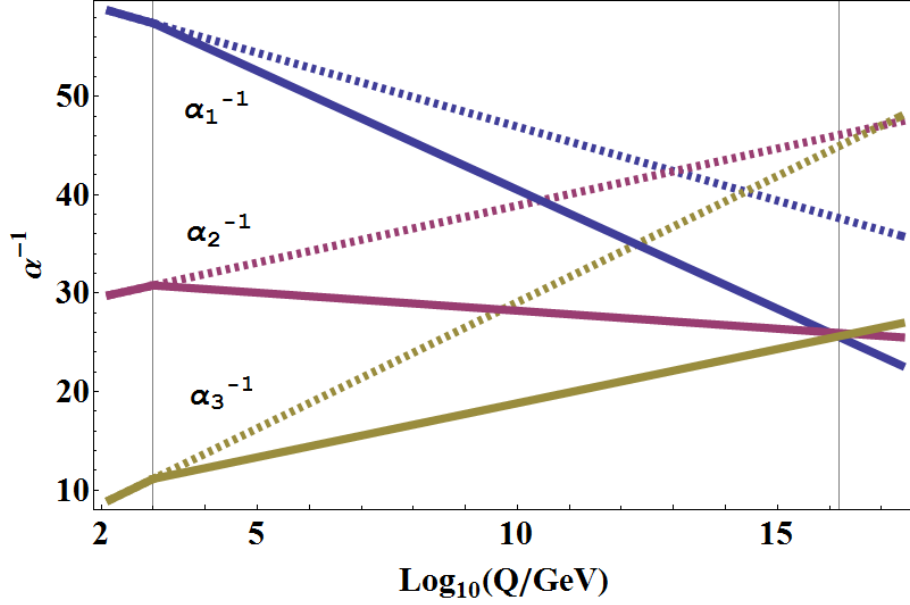


図 1: MSSM、SM における gauge coupling unification

gauge coupling の逆数 $\alpha_a^{-1}(Q)$ に対する 1-loop level の running。点線が SM における結果で、実線が MSSM における結果である。MSSM における全 sparticle からの contribution を 1TeV において入れている。初期条件は $m_Z = 91.19$ GeV において $\alpha_1 = 0.01695$ 、 $\alpha_2 = 0.03381$ 、 $\alpha_3 = 0.1184$ [2, 33] を用いた。

においては gauge coupling が

$$\Lambda_G \sim 2 \times 10^{16} \text{GeV} \quad (2.8)$$

近辺で統一されることがわかる。

1TeV 付近にすべての sparticle が集まっているという仮定は現在の実験の結果と一致しているとは言い難い。そのため、gaugino を抜かした sparticle たちが重い質量をもつ High-scale SUSY という現在の実験結果を満たす模型が考えられている。この模型においても gauge coupling が一点で統一することができる、それどころかより高い精度で統一されることが知られている [34]。高い精度とは一点での統一を実現するために導入される GUT scale 付近の効果が low energy での MSSM より小さくてよいという意味である。

2.4 SUSY contribution for FCNC and EDM

SUSY modelにおいてFCNCやEDMなどのflavorからの制限は極めて厳しい制限である。なぜならSMにおいてこれらはGlashow, Iliopoulos, Maiani mechanism (GIM mechanism) [35] によって強く抑制される。これはSMにおいてflavorを変えるような相互作用がYukawa matrixが対角化されたことによってweak interactionにしか現れないからである。SMからの予言は実験と一致している。しかし、SUSY modelはFCNCなどへの寄与は極めて危険である。なぜならYukawa matrixを対角化してもSUSYからの世代を変えるような相互作用が現れてしまうからである。MSSMにおいては次のような超対称性を破る項であるsoft breaking termが導入される。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{soft} = & -\frac{1}{2} \left(M_3 \tilde{g} \tilde{g} + M_2 \tilde{W} \tilde{W} + M_1 \tilde{B} \tilde{B} + h.c. \right) \\ & - \left(\tilde{u}^c A_u \tilde{Q} H_u - \tilde{d}^c A_d \tilde{Q} H_d - \tilde{e}^c A_e \tilde{L} H_d + h.c. \right) \\ & - \tilde{q}^c \tilde{m}_q^2 \tilde{q} - \tilde{l}^c \tilde{m}_l^2 \tilde{l} - \tilde{u}^c \tilde{m}_u^2 \tilde{u} - \tilde{d}^c \tilde{m}_d^2 \tilde{d} - \tilde{e}^c \tilde{m}_e^2 \tilde{e} \\ & - m_{H_u}^2 H_u^* H_u - m_{H_d}^2 H_d^* H_d - (b H_u H_d + h.c.). \quad (2.9)\end{aligned}$$

ここでflavorを変えるような相互作用に関わる A_ψ 項と \tilde{m}_ψ^2 項が現れる。これらの項は本来SMのYukawa matrixとは独立であるためYukawa matrixを対角化したとしても同時に対角化されるとは限らない。そして、もし非対角成分が残るとその成分がflavorを変える相互作用になってしまう。このような相互作用には強い制限が付けられている [36]。

これらの問題を解決する模型の例としてConstrained MSSM (CMSSM) と呼ばれるSUSY模型を挙げる。この模型では先の A_ψ 項と \tilde{m}_ψ^2 は次のような値をGUT scaleにおいて持つと仮定する。

$$\tilde{m}_q^2 = \tilde{m}_l^2 = \tilde{m}_u^2 = \tilde{m}_d^2 = \tilde{m}_e^2 = \begin{pmatrix} m_0^2 & & \\ & m_0^2 & \\ & & m_0^2 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

$$a_u = a_d = a_e = \begin{pmatrix} A_0 & & \\ & A_0 & \\ & & A_0 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

$$m_{H_u}^2 = m_{H_d}^2 = m_0^2, \quad M_1 = M_2 = M_3 = m_{1/2}. \quad (2.12)$$

ここで a_ψ は A_ψ と Yukawa matrix Y_ψ の間に $A_\psi = a_\psi Y_u$ という関係を持つ。このように GUT scale において全世代をまとめるような仮定を課しているためこの仮定は「universal」と呼ばれる。この「universal」な仮定は世代間の相互作用を消すことが出来る。まず、 \tilde{m}_ψ^2 項においてはこの仮定によって質量項が単位行列に比例しているため物質の chiral superfield に Yukawa matrix を対角行列にするための変換を行っても世代間の相互作用が出ることはない。 A_ψ 項においても Yukawa matrix に比例しているため世代間の相互作用が出ることはない。SM において Yukawa matrix Y_ψ は対角化行列 L_ψ 、 R_ψ によって

$$L_\psi^t Y_\psi R_\psi = Y_\psi \text{diag} \quad (2.13)$$

と対角化される。この変換を A_ψ 項に対して行くと

$$L_\psi^t A_\psi R_\psi = L_\psi^t (A_0 \mathbf{1} Y_\psi) R_\psi = A_0 Y_\psi \text{diag} \quad (2.14)$$

となり、 A_ψ 項が Yukawa に比例することと世代に対して universal な値を持つという仮定によってこの項も世代間の相互作用を出すことはない。加えて、CP 対称性の破れからくる EDM への寄与を禁止するために parameter を実に取り。これにより CMSSM においては parameter の数が極めて制限されることになる。以上より universal な仮定に基づく CMSSM は FCNC や EDM などの flavor からの制限を満たすことが出来る。しかし、全世代が GUT scale で縮退しているため重い squark、slepton を考えるとき全世代の squark、slepton が重くなることになる。

この CMSSM 以外にも flavor からの制限を満たす方法は考えられている。最も単純なのはこの制限に関わる相互作用において媒介される squark、slepton の質量を重くすることである。

3 Anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT

Anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT は anomalous $U(1)_A$ という対称性を導入する SUSY GUT model である。この model の最大の特徴は以下の 3 つの前提を満たす極めて自然な模型であることである。

- 対称性で許される全ての項の影響を考慮する。
- 全ての項は higher-order term を含む。
- 各項の係数はすべて order 1 とする。

この模型はこれらの前提を満たしながら様々な SUSY GUT model が解決すべき困難を解決することが出来る模型である。

ここではこの anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT の mechanism を見る。まず初めに anomalous $U(1)_A$ gauge symmetry とは何かを見る。次に anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model において真空期待値がどのように決定されるかを見る。そして、 $U(1)_A$ symmetry を破る真空期待値を持つことによって Froggatt-Nielsen(FN) mechanism [37] によって相互作用の強さが決まる。つまり、anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT においては $U(1)_A$ charge によって相互作用の強さが決まるため以降に記述するすべての要素は $U(1)_A$ charge を通してつながっているという極めて面白い性質を持つ。最後にこの模型が持つ興味深い特徴、SUSY GUT model が持つ困難をどのように解決していくのかを見ていく。ここでは anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model における Doublet-Triplet splitting の実現、gauge coupling unification の実現、測定される quark、lepton の質量と混合の実現を $SU(5)$ 、 $SO(10)$ 、 E_6 、 $E_6 \times SU(2)_F$ 群に基づく模型についてみる。そして、anomalous $U(1)_A$ $E_6 \times SU(2)_F$ SUSY GUT model が SUSY FCNC、CP process に与える影響を見る。最後に E_6 model においてより Higgs sector を simple にした simple E_6 unification model について見る。

3.1 Anomalous $U(1)_A$ gauge symmetry

Anomalous $U(1)_A$ gauge symmetry とは以下のような性質を持つ symmetry である。

- string motivated

string theory のある low energy effective theory 達が持つと考えられている symmetry である。

- anomaly free な symmetry

Anomalous $U(1)_A$ gauge symmetry は SM における gauge symmetry のように GUT multiplet に対応した charge を持つわけではない。これにより anomalous $U(1)_A$ が chiral anomaly (ABJ anomaly) を cancel しているか心配になる [38]。しかし、 $U(1)_A^3$ anomaly、他の gauge group との混合における anomaly、加えて重力との混合における anomaly は cancel 出来ることが分かっている [39]。これらの anomaly は dilaton (または moduli) と呼ばれる chiral supermultiplet D の nonlinear transformation

$$D \rightarrow D + \frac{i}{2}\delta_{GS}\Lambda \quad (3.1)$$

と $U(1)_A$ symmetry の vector supermultiplet V_A の gauge transformation

$$V_A \rightarrow V_A + \frac{i}{2}(\Lambda - \Lambda^\dagger) \quad (3.2)$$

によって cancel する。ここで、 Λ は chiral superfield parameter である。また、 δ_{GS} は anomaly cancellation を実現するために条件を持つ。この anomaly cancellation は Green-Schwarz mechanism として知られている [40]。

- Fayet-Iliopoulos D-term

radiative に FI D-term をもつ [39]。その値は anomaly cancellation から求まる。この FI D-term は次節における anomalous $U(1)_A$ symmetry が破れるときに持つ真空期待値の値を決定するときに重要な役割を果たす。

3.2 Anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model における真空期待値

Anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model において真空期待値 (VEV) は superfield の anomalous $U(1)_A$ charge によって決定することが出来る [41]。

その mechanism は以下のとおりである。まず簡単のため Z_i^\pm という singlet superfield について考える。 i は粒子の種類であり、 $i = 1, 2, \dots, n_\pm$ と

する。 Z_i^+ は正の anomalous $U(1)_A$ charge z_i^+ を持つ。 Z_i^- は負の anomalous $U(1)_A$ charge z_i^- を持つ。以降において大文字で書いた superfield の持つ anomalous $U(1)_A$ charge を小文字で書くことにする。

このような superfield が作る superpotential W を考える。この時、VEV を決定するための F-flatness condition (VEV を得る energy scale は SUSY が成り立っている scale のためこの条件を考える)

$$\frac{\delta W}{\delta Z_i} = 0 \quad (3.3)$$

により $n = n_+ + n_-$ 個の条件式が得られる。加えて、anomalous $U(1)_A$ symmetry の D-flatness condition

$$D_A = g_A \left(\sum_i z_i |Z_i|^2 + \xi^2 \right) = 0 \quad (3.4)$$

によって 1 個の条件式が得られる。ここで ξ は $\xi^2 = \lambda^2 \Lambda^2$ となる Fayet-Iliopoulos D-term の係数 [39] であり、 Λ は理論の cutoff scale である。以降では特別に断りのない限り $\Lambda = 1$ と省略する。これらの 2 種類の条件式を合わせると VEV を決定する条件式の数としては余剰に思える。しかし、全ての F-flatness condition は superpotential の gauge 不変性の条件式

$$\frac{\delta W}{\delta Z_i} z_i Z_i = 0 \quad (3.5)$$

があるために独立ではない。これによりこれらの条件式は VEV を決定するためにちょうど良い数になっていることがわかる。

これによって superfield Z_i の VEV $\langle Z_i \rangle$ が $\langle Z_i \rangle \sim \Lambda$ となるような場合があることがわかる。(Vacuum a) これは、上の条件式の係数が一般的には order 1 だからである。しかし、 $n_+ < n_-$ の時、異なる VEV も存在する (Vacuum b)。この時 $\langle Z_i^+ \rangle = 0$ とすると、必ず 1 つは Z_i^+ が残っている Z_i^- の F-flatness condition $\frac{\delta W}{\delta Z_i} = 0$ は自動的に満たす。残りの $\langle Z_i^- \rangle$ は Z_i^+ の F-flatness condition と D-flatness condition によって決まる。ここで、もし $\xi = \lambda < 1$ だとしたら $\langle Z_i^- \rangle$ は cutoff scale より小さくなり、FN mechanism [37] を導く。 $\xi = \lambda < 1$ となるのはこの Fayet-Iliopoulos D-term が radiative に現れるため一般的に cutoff scale より小さくなると期待できるからである。

この Fayet-Iliopoulos D-term による symmetry breaking を考えるときに moduli の安定性は重要である。なぜなら moduli が安定でないと Fayet-Iliopoulos D-term が定数にならないからである。のちに導入される SUSY

zero mechanism を満たしながら moduli を安定にする手法は spontaneous SUSY breaking を起こす模型においてはすでに知られている [42]。

ここで一番大きな負の charge を持つ superfield Z_1^- を考え、その charge を $z_1^- = -1$ と固定する。すると、D-flatness condition から $\langle Z_1^- \rangle \sim \lambda$ となることがわかる。この時、この superfield を FN field と呼び以降は Θ と記述する。残りの負の charge を持つ superfield の VEV は F-flatness condition から決定できる。では VEV 決定のために各正の charge を持つ superfield の一次の線形関数で表された superpotential を考える (二次以降は $\langle Z_i^+ \rangle = 0$ により VEV を考えるときは自動的にゼロになるため無視)。

$$W = \sum_i^{n_+} W_{Z_i^+} \quad (3.6)$$

$$W_{Z_i^+} = \Theta^{z_i^+} Z_i^+ \left(1 + \sum_j^{n_-} \Theta^{z_j^-} Z_j^- + \sum_{j,k}^{n_-} \Theta^{z_j^- + z_k^-} Z_j^- Z_k^- + \dots \right) \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} W_{Z_i^+} \Big|_{(\Theta)} &= \lambda^{z_i^+} Z_i^+ \left(1 + \sum_j^{n_-} \lambda^{z_j^-} Z_j^- + \sum_{j,k}^{n_-} \lambda^{z_j^- + z_k^-} Z_j^- Z_k^- + \dots \right) \\ &= \tilde{Z}_i^+ \left(1 + \sum_j^{n_-} \tilde{Z}_j^- + \sum_{j,k}^{n_-} \tilde{Z}_j^- \tilde{Z}_k^- + \dots \right) \end{aligned}$$

ここで $\tilde{Z}_i \equiv \lambda^{z_i} Z_i$ としている。ここで Z_i^+ superfield の F-flatness condition $\frac{\delta W}{\delta Z_i^+} = 0$ より、

$$\lambda^{z_i^+} \left(1 + \sum_j^{n_-} \tilde{Z}_j^- + \sum_{j,k}^{n_-} \tilde{Z}_j^- \tilde{Z}_k^- + \dots \right) = 0. \quad (3.8)$$

$\lambda^{z_i^+} \neq 0$ より

$$\langle Z_i^- \rangle \sim O(\lambda^{-z_i^-}) \quad (3.9)$$

となることがわかる。ここで n_+ と n_- の関係に注意すべきである。 $n_+ = n_-$ の時、一般的にすべての superfield の VEV を固定することが出来るため、potential に flat direction は存在しない。これは massless field が新しい対称性によって出ることはないということを保障している。しかし、 $n_+ + 1 < n_-$ の時 n_+ 個の F-flatness condition と 1 個の D-flatness condition だけでは条件式が足らず n_- 個の superfield Z_i^- の VEV をすべて決定する

ことが出来ない。つまり、potential に flat direction が存在し、massless field が存在する。新しい massless field は gauge coupling の running などに極めて大きな影響を与える。よって massless field を出したくないときは $n_+ + 1 = n_-$ とする。

これによって singlet superfield の VEV を求めることに成功した。では singlet 以外はどうかだろう。ここで重要になるのは GUT model における Lagrangian 内の演算子が演算子全体でみて singlet になっているということである。つまり、演算子 \mathcal{O} 全体の anomalous $U(1)_A$ charge が正の o を持つとき、 $U(1)_A$ 不変になるために FN field $\Theta^{\mathcal{O}}$ が入る。つまり、演算子の係数として現れる FN field の VEV は

$$\langle \Theta^{\mathcal{O}} \rangle \sim \lambda^{-o} \quad (3.10)$$

となる。

また、演算子を考えることにおいてもう一つ重要な mechanism がある。それは、統一群の gauge symmetry を考え singlet になる演算子を考えたととき、その演算子の anomalous $U(1)_A$ charge の合計が負になる演算子を禁止できることである。anomalous $U(1)_A$ charge の合計がゼロ以上の演算子が禁止されない理由は以下のとおりである。まず、ゼロになる演算子は anomalous $U(1)_A$ symmetry も含めて全ての symmetry で singlet になっているため禁止されない。そして、正になる演算子は anomalous $U(1)_A$ symmetry によって禁止される様に思われる。しかし、前述の統一群の symmetry においては singlet であり、 -1 の anomalous $U(1)_A$ charge を持つ FN field を入れることによって、anomalous $U(1)_A$ charge の和もゼロにすることが出来る。これを SUSY zero mechanism [43] と呼び、次小節において説明する adjoint Higgs field の DW-form を満たす VEV などを考える時に重要になる。

以上より GUT Higgs VEV を求めることが出来る。 $SO(10)$ 、 E_6 群による GUT model において Doublet-Triplet splitting を実現するための Dimopoulos Wilczek-form VEV を持つ adjoint Higgs VEV については次節においてみる。 $SO(10)$ 群を $SU(5)$ 群に破るために GUT Higgs C 、 \bar{C} の $SU(5)$ 群 singlet 方向に VEV $\langle C \rangle$ 、 $\langle \bar{C} \rangle$ をもち、 E_6 群を $SO(10)$ 群に破るために GUT Higgs Φ 、 $\bar{\Phi}$ の $SO(10)$ 群 singlet 方向に VEV $\langle \Phi \rangle$ 、 $\langle \bar{\Phi} \rangle$ をもつ模型において考える。FN field と同様に singlet $CC\bar{C}$ 、 $\Phi\bar{\Phi}$ の VEV は

$$\langle CC\bar{C} \rangle \sim \lambda^{-(c+\bar{c})}, \quad \langle \Phi\bar{\Phi} \rangle \sim \lambda^{-(\phi+\bar{\phi})} \quad (3.11)$$

となる。これに加えてこのような GUT Higgs を持つ模型では D-flatness condition により

$$\langle C \rangle = \langle \bar{C} \rangle \sim \lambda^{-\frac{1}{2}(c+\bar{c})}, \quad \langle \Phi \rangle = \langle \bar{\Phi} \rangle \sim \lambda^{-\frac{1}{2}(\phi+\bar{\phi})} \quad (3.12)$$

となる。

3.3 Anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model における Doublet-Triplet splitting 実現 -Higgs VEVs-

超対称大統一模型において Doublet-Triplet(DT) splitting は実現しなくてはならない。なぜなら、triplet(colored) Higgs を媒介することによって生じる核子崩壊からの制限を満たすために極めて重い triplet Higgs が求められるからである。また、統一群において同じ表現に属する標準模型の doublet Higgs は electro weak scale の質量をもつ必要がある。このため両者の質量の間に splitting が必要になるのである。

Anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model において DT splitting は adjoint Higgs field A が Dimopoulos Wilczek-form (DW-form) [44] を満たす VEV $\langle A \rangle$

$$\langle A \rangle = i\sigma_2 \times \begin{pmatrix} x & & & \\ & x & & \\ & & x & \\ & & & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

を取るなどによって実現する [41]。2つの $SO(10)$ $\mathbf{10}$ H, H' を考える。 $\mathbf{10}$ は2つの SUSY doublet Higgs を含む $SU(5)$ $\mathbf{5}, \bar{\mathbf{5}}$ を含んでいる。 H の anomalous $U(1)$ charge h が負とすると (SUSY zero mechanism によって HH 項は禁止される)、2つの $\mathbf{10}$ H, H' と1つの adjoint A によって以下の superpotential がある。

$$W_{Hmass} = \lambda^{h+h'+a} H A H' + \lambda^{2h'} H' H' \quad (3.14)$$

これにより $\mathbf{5}, \bar{\mathbf{5}}$ の質量行列は

$$\begin{pmatrix} \mathbf{5}_H & \mathbf{5}_{H'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{h+h'+a} \langle A \rangle \\ \lambda^{h+h'+a} \langle A \rangle & \lambda^{2h'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{5}}_H \\ \bar{\mathbf{5}}_{H'} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

表 2: $SO(10)$ model における Higgs sector

小文字は anomalous $U(1)_A$ charge を表す。

45	$A(a < 0), \quad A'(a' > 0)$
16	$C(c < 0), \quad C'(c' > 0)$
$\overline{16}$	$\overline{C}(\bar{c} < 0), \quad \overline{C}'(\bar{c}' > 0)$
1	$S(s > 0)$

ここで $\langle A \rangle$ が DW-form VEV を持つことにより SUSY doublet Higgs の質量行列には寄与を与えないが triplet Higgs には寄与を与えるようになる。これにより doublet Higgs だけには massless mode が存在することになる。以上により GUT scale の質量をもつ superheavy triplet Higgs と massless doublet Higgs を GUT scale にて実現することが出来る。

しかし、この DW-form は必ず満たせるものではない。前小節における VEV 決定機構を用いて adjoint Higgs field の VEV を実際に求め DW-form を満たすかどうかを確かめる必要がある。これを anomalous $U(1)_A$ $SO(10)$ SUSY GUT model においてみる。

DW-form は次のような superpotential $W_{A'}(-3a \leq a' < -5a$ の時) から求まる。 $W_{A'}$ とは Higgs A' の linear term をもつ superpotential である。

$$W_{A'} = \lambda^{a'+a} \alpha A' A + \lambda^{a'+3a} (\beta (A' A)_1 (A^2)_1) + \gamma (A' A)_{54} (A^2)_{54} \quad (3.16)$$

superpotential 中の multiplet は表 2 のとおりである。ここで複合演算子の index **1**, **54** は $SO(10)$ 群における演算子の表現が持つ次元である。 α, β そして γ は各項の order 1 parameter である。この superpotential 式 (3.16) において Higgs A が次の VEV を持つと仮定する。

$$\langle A \rangle = i\sigma_2 \times \text{diag}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \quad (3.17)$$

そして superpotential 式 (3.16) において Higgs A' に対する F-flatness condition を考えると、次のような二つの解を得ることが出来る。

$$x_i^2 = 0, \frac{\alpha}{(2N-1)\gamma - 2N\beta} \lambda^{-2a} \quad (3.18)$$

ここで N は $x_i \neq 0$ となる解の数である。これにより $N = 3$ のとき DW-form を持つことが出来る。これによりこの superpotential 式 (3.16) において Higgs field A は DW-form を持つこと VEV の値 x は $x = X \lambda^{-a}$ を持

つことが分かる。ここで X は superpotential 式 (3.16) の各項の order 1 parameter からくる係数であり、order 1 程度だと期待される。

しかし、このような DW-form を持つような解は $\overline{C}A'AC$ のような Higgs A' の linear term によって邪魔される。この term があると DW-form に必要な $x_i = 0$ が出なくなるためである。このためにこの term を SUSY zero mechanism によって禁止する必要がある。そのために anomalous $U(1)_A$ charge は次のような条件を持つ。

$$a + a' + c + \bar{c} < 0 \quad (3.19)$$

次に Higgs C, \overline{C} の $SU(5)$ singlet part が持つ VEV を計算する。この VEV は singlet S の linear term をもつ superpotential W_S

$$W_S = \lambda^{s+c+\bar{c}} S \left((\overline{C}C) + \lambda^{-(c+\bar{c})} + \sum_k \lambda^{-(c+\bar{c})+2ka} A^2 k \right) \quad (s \leq -(c+\bar{c})) \quad (3.20)$$

より求めることが出来る。 S の F-flatness condition より、 $\langle \overline{C}C \rangle \sim \lambda^{-(c+\bar{c})}$ となる。加えて D-flatness condition を考えることによって、 $|\langle C \rangle| = |\langle \overline{C} \rangle| \sim \lambda^{-(c+\bar{c})/2}$ となる。

DW-form を実現するための条件 $-3a \leq a'$ と $a + a' + c + \bar{c} < 0$ は GUT model に興味深い影響を与える。この 2 式により $\frac{1}{2}(c + \bar{c}) < a$ となる。つまり、 $\lambda^{-\frac{1}{2}(c+\bar{c})} < \lambda^{-a}$ となり、統一群から SM 群までの対称性の破れを実現する Higgs の VEV に関係を与えることになる。これにより $SO(10)$ 群から SM 群までの 2 つの対称性が破れる energy scale に関係が生まれる。この関係は核子崩壊などに興味深い影響を与える。

3.4 Gauge coupling unification の実現

SUSY GUT model において gauge coupling の running、特に一点で gauge coupling unification を実現することが出来るかは極めて重要である。MSSM においては SM に MSSM から新しく入る粒子の効果を入れることによって綺麗に一点で gauge coupling unification を実現することが出来る。もちろん MSSM に singlet を加える NMSSM も singlet は gauge coupling の running に影響を与えないためきれいに一点で gauge coupling unification を実現することが出来る。ここでは anomalous $U(1)_A$ SUSY $SO(10)$ GUT model の 1 loop level において gauge coupling unification を実現できるか、

実現するための条件を見ていく [45, 46]。本来 gauge coupling unification は $SU(5)$ GUT model においては GUT scale から質量を得る物質を無視する（正確には一点で一致していない gauge coupling を完全に一致させるための用いる）ことによって実現できる。 $SO(10)$ GUT model においては $SU(5)$ 群に統一される energy scale、ここでは $\langle A \rangle$ 、と $SO(10)$ 群に統一される energy scale、ここでは $\langle C \rangle$ 、 $\langle \bar{C} \rangle$ の間の関係が $\langle A \rangle \leq \langle C \rangle = \langle \bar{C} \rangle$ を満たしているときは $SU(5)$ GUT model と同様に実現できる。しかし、anomalous $U(1)$ SUSY GUT model においては前小節でみたように DT splitting を満たすために $\langle C \rangle = \langle \bar{C} \rangle \ll \langle A \rangle$ という関係を満たすために $\langle C \rangle$ 、 $\langle \bar{C} \rangle$ から質量を得る物質によって gauge coupling unification が実現できるか不透明になる。このため gauge coupling unification の実現についてみる。

ここでは前小節における DT splitting を実現するために Higgs VEV が持つ条件である、 $\langle A \rangle \sim \lambda^{-a} > \lambda^{-(c+\bar{c})/2} \sim \langle C \rangle = \langle \bar{C} \rangle$ を満たすとする。 $\langle A \rangle$ は adjoint Higgs の VEV であり、 $\langle C \rangle$ 、 $\langle \bar{C} \rangle$ は $SO(10)$ **16** rep. Higgs における $SU(5)$ singlet 部がもつ VEV である。これにより $SO(10)$ gauge group はまず energy scale $\Lambda_A \equiv \langle A \rangle \sim \lambda^{-a}$ において $SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ に破れ、次に $\Lambda_C \equiv \langle C \rangle = \langle \bar{C} \rangle \sim \lambda^{-(c+\bar{c})/2}$ において SM 群 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ に破れることになる [47]。

Gauge coupling unification が実現するための条件は

$$\alpha_1(\Lambda_A) = \alpha_2(\Lambda_A) = \frac{5}{3}\alpha_Y(\Lambda_A) \equiv \alpha_1(\Lambda_A) \quad (3.21)$$

ここで $\alpha_1^{-1}(\mu > \Lambda_C) \equiv \frac{3}{5}\alpha_R^{-1}(\mu > \Lambda_C) + \frac{2}{5}\alpha_{B-L}^{-1}(\mu > \Lambda_C)$ と定義される。 $\alpha_X \equiv \frac{g_X^2}{4\pi}$ であり、parameter $g_X (X = 3, 2, Y, R, B-L)$ はそれぞれ $SU(3)_C$ 、 $SU(2)_L$ 、 $U(1)_Y$ 、 $SU(2)_R$ 、 $U(1)_{B-L}$ gauge group における gauge coupling である。

Energy scale Λ_A における gauge coupling は SUSY brealing scale M_{SM} から Λ_A までの gauge coupling runnig を考えることによって次のようになる。

$$\alpha_1^{-1}(\Lambda_A) = \alpha_1^{-1}(M_{SB}) + \frac{1}{2\pi} \left(b_1 \ln \left(\frac{M_{SB}}{\Lambda_A} \right) + \sum_i \Delta b_{1i} \ln \left(\frac{m_i}{\Lambda_A} \right) - \frac{12}{5} \ln \left(\frac{\Lambda_C}{\Lambda_A} \right) \right) \quad (3.22)$$

$$\alpha_2^{-1}(\Lambda_A) = \alpha_2^{-1}(M_{SB}) + \frac{1}{2\pi} \left(b_2 \ln \left(\frac{M_{SB}}{\Lambda_A} \right) + \sum_i \Delta b_{2i} \ln \left(\frac{m_i}{\Lambda_A} \right) \right) \quad (3.23)$$

表 3: 各表現が gauge coupling の running に与える影響

i	$Q + \overline{Q}$	$U^c + \overline{U}^c$	$E^c + \overline{E}^c$	$D^c + \overline{D}^c$	$L + \overline{L}$	G	W	$X + \overline{X}$
Δb_{1i}	1/5	8/5	6/5	2/5	3/5	0	0	5
Δb_{2i}	3	0	0	0	1	0	2	3
Δb_{3i}	2	1	0	1	0	3	0	2

$$\alpha_3^{-1}(\Lambda_A) = \alpha_3^{-1}(M_{SB}) + \frac{1}{2\pi} \left(b_3 \ln \left(\frac{M_{SB}}{\Lambda_A} \right) + \sum_i \Delta b_{3i} \ln \left(\frac{m_i}{\Lambda_A} \right) \right) \quad (3.24)$$

ここで $(b_1, b_2, b_3) = (33/5, 1, -3)$ は MSSM における gauge coupling running の renormalization group 係数であり、 $\Delta b_{ai} (a = 1, 2, 3)$ は質量 m_i を持つ massive field からの renormalization group 係数への correction である。式 (3.22) における最後の term は VEV $\langle C \rangle$ による $SU(2)_R \times U(1)_{B-L} \rightarrow U(1)_Y$ symmetry breaking から来る。Chiral superfield の各 rep. が持つ Δb_{ai} の値は以下の table の通りである [48]。また、MSSM における gauge coupling の running は

$$\alpha_1^{-1}(M_{SB}) = \alpha_G^{-1}(\Lambda_G) + \frac{1}{2\pi} \left(b_1 \ln \left(\frac{\Lambda_G}{M_{SB}} \right) \right) \quad (3.25)$$

$$\alpha_2^{-1}(M_{SB}) = \alpha_G^{-1}(\Lambda_G) + \frac{1}{2\pi} \left(b_2 \ln \left(\frac{\Lambda_G}{M_{SB}} \right) \right) \quad (3.26)$$

$$\alpha_3^{-1}(M_{SB}) = \alpha_G^{-1}(\Lambda_G) + \frac{1}{2\pi} \left(b_3 \ln \left(\frac{\Lambda_G}{M_{SB}} \right) \right) \quad (3.27)$$

であり、energy scale $\Lambda_G \sim 2 \times 10^{16}$ GeV において gauge coupling unification が実現し、 $\alpha_G^{-1}(\Lambda_G) \sim 25$ である。この MSSM における gauge coupling unification を表す 3 つの式と M_{SM} から Λ_A までの gauge coupling running を表す 3 つの式を組み合わせることによって以下の式を得

ることが出来る。

$$\begin{aligned}
& b_1 \ln \left(\frac{\Lambda_A}{\Lambda_G} \right) + \sum_I \Delta b_{1I} \ln \left(\frac{\Lambda_A^{\bar{r}_I}}{\det \bar{M}_I} \right) - \frac{12}{5} \ln \left(\frac{\Lambda_A}{\Lambda_C} \right) \quad (3.28) \\
& = b_2 \ln \left(\frac{\Lambda_A}{\Lambda_G} \right) + \sum_I \Delta b_{2I} \ln \left(\frac{\Lambda_A^{\bar{r}_I}}{\det \bar{M}_I} \right) \\
& = b_3 \ln \left(\frac{\Lambda_A}{\Lambda_G} \right) + \sum_I \Delta b_{3I} \ln \left(\frac{\Lambda_A^{\bar{r}_I}}{\det \bar{M}_I} \right)
\end{aligned}$$

ここで \bar{M}_I は粒子 I の質量行列 M_I から massless mode を抜いた質量行列である、 \bar{r}_I は \bar{M}_I の rank である。massless mode を抜いた質量行列 \bar{M}_I の全固有値の積から $\det \bar{M}_I$ は現れる。

Anomalous $U(1)_A$ SUSY $SO(10)$ GUT model [45] において質量行列は次のようになる。 $I = D^c, L$ 表現に対する質量行列 M_I は次のとおりである。

$$M_I \sim \begin{matrix} & I_H & I_{H'} & I_C & I_{C'} \\ \begin{matrix} \bar{I}_H \\ \bar{I}_{H'} \\ \bar{I}_{\bar{C}} \\ \bar{I}_{\bar{C}'} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{h+h'+a} \langle A \rangle & 0 & 0 \\ \lambda^{h+h'+a} \langle A \rangle & \lambda^{2h'} & 0 & \lambda^{h'+c'+c} \langle C \rangle \\ 0 & \lambda^{h'+2\bar{c}} \langle \bar{C} \rangle & 0 & \lambda^{\bar{c}+c'+a} x \\ 0 & \lambda^{h'+\bar{c}'+\bar{c}} \langle \bar{C} \rangle & \lambda^{c+\bar{c}'+a} x & \lambda^{c'+\bar{c}'} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (3.29)$$

$\langle A \rangle$ において doublet は質量を持たない。ここで重要なのは massless Higgs doublet は

$$\bar{\mathbf{5}}_H + \lambda^{h-c+\frac{1}{2}(\bar{c}-c)} \bar{\mathbf{5}}_C \quad (3.30)$$

のように H と C の mixing によって得られるということである。 $I = Q, U^c, E^c$ 表現に対する質量行列 M_I は次のとおりである。

$$M_I \sim \begin{matrix} & I_A & I_{A'} & I_C & I_{C'} \\ \begin{matrix} \bar{I}_A \\ \bar{I}_{A'} \\ \bar{I}_{\bar{C}} \\ \bar{I}_{\bar{C}'} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{a'+a} \alpha_I & 0 & \lambda^{\bar{c}+c'+a} \langle \bar{C} \rangle \\ \lambda^{a+a'} \alpha_I & \lambda^{2a'} & 0 & \lambda^{\bar{c}+c'+a'} \langle \bar{C} \rangle \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^{\bar{c}+c'+a} \beta_I x \\ \lambda^{c+\bar{c}'+a} \langle C \rangle & \lambda^{c+\bar{c}'+a'} \langle C \rangle & \lambda^{c+\bar{c}'+a} \beta_I x & \lambda^{c'+\bar{c}'} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (3.31)$$

ここで $I = Q, U^c$ において $\alpha_I = 0$ である、 $I = E^c$ において $\beta_I = 0$ であ

る。最後に、 $I = G, W, X$ 表現に対する質量行列 M_I は次のとおりである。

$$M_I = \begin{matrix} & I_A & I_{A'} \\ \begin{matrix} \bar{I}_A \\ \bar{I}_{A'} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \alpha_I \lambda^{a+a'} \\ \alpha_I \lambda^{a+a'} & \lambda^{2a'} \end{pmatrix} \end{matrix}. \quad (3.32)$$

ここで $I = X$ において $\alpha_I = 0$ である。

この模型においては GUT scale, symmetry breaking scale $\Lambda_A \sim \lambda^{-a}$, $\Lambda_C \sim \lambda^{-\frac{1}{2}(c+\bar{c})}$ であり、massless mode を抜いた質量行列、または massless mode がない場合は質量行列そのものの determinant が $\text{anomalous } U(1)_A$ charge より

$$\begin{aligned} \det \bar{M}_Q &\sim \det \bar{M}_{U^c} \sim \lambda^{2a'+c+\bar{c}+c'+\bar{c}'} & (3.33) \\ \det \bar{M}_{E^c} &\sim \lambda^{2a+2a'+c'+\bar{c}'} \\ \det M_{D^c} &\sim \lambda^{2h+2h'+c+\bar{c}+c'+\bar{c}'} \\ \det \bar{M}_L &\sim \lambda^{2h'+c+\bar{c}+c'+\bar{c}'} \\ \det M_G &\sim \det M_W \sim \lambda^{2a+2a'} \\ \det \bar{M}_X &\sim \lambda^{2a'} \end{aligned}$$

となる。Energy scale Λ_A において gauge coupling unification が実現されるという条件 $\alpha_1(\Lambda_A) = \alpha_2(\Lambda_A)$, $\alpha_1(\Lambda_A) = \alpha_3(\Lambda_A)$, $\alpha_2(\Lambda_A) = \alpha_3(\Lambda_A)$ より

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Lambda_A}{\Lambda_G}\right)^{14} \left(\frac{\Lambda_C}{\Lambda_A}\right)^6 \left(\frac{\det \bar{M}_L}{\det M_{D^c}}\right) \left(\frac{\det \bar{M}_Q}{\det \bar{M}_U}\right)^4 \left(\frac{\det \bar{M}_Q}{\det \bar{M}_{E^c}}\right)^3 \left(\frac{\det M_W}{\det \bar{M}_X}\right)^5 \\ = \Lambda_A^{-\bar{r}_{D^c}+\bar{r}_L-4\bar{r}_{U^c}-3\bar{r}_{E^c}+7\bar{r}_Q-5\bar{r}_X+5\bar{r}_W} \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Lambda_A}{\Lambda_G}\right)^{16} \left(\frac{\Lambda_C}{\Lambda_A}\right)^4 \left(\frac{\det M_{D^c}}{\det \bar{M}_L}\right) \left(\frac{\det \bar{M}_Q}{\det \bar{M}_U}\right) \left(\frac{\det \bar{M}_Q}{\det \bar{M}_{E^c}}\right)^2 \left(\frac{\det M_G}{\det \bar{M}_X}\right)^5 \\ = \Lambda_A^{-\bar{r}_L+\bar{r}_{D^c}-\bar{r}_{U^c}-2\bar{r}_{E^c}+3\bar{r}_Q-5\bar{r}_X+5\bar{r}_G} \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Lambda_A}{\Lambda_G}\right)^4 \left(\frac{\det M_{D^c}}{\det \bar{M}_L}\right) \left(\frac{\det \bar{M}_U}{\det \bar{M}_Q}\right) \left(\frac{\det M_G}{\det M_W}\right)^2 \left(\frac{\det M_G}{\det \bar{M}_X}\right) \\ = \Lambda_A^{-\bar{r}_L+\bar{r}_{D^c}-\bar{r}_Q+\bar{r}_U-2\bar{r}_W-\bar{r}_X+3\bar{r}_G} \end{aligned} \quad (3.36)$$

となる。これらに、energy scale の値と質量行列の determinant の値を代入すると、それぞれ $\Lambda \sim \lambda^{\frac{h}{7}} \Lambda_G$ 、 $\Lambda \sim \lambda^{-\frac{h}{8}} \Lambda_G$ 、 $\Lambda \sim \lambda^{-\frac{h}{2}} \Lambda_G$ となる。これらを満たすためには $SO(10)$ group 10 rep. Higgs H の anomalous $U(1)_A$ charge h が $h \sim 0$ でなくてはならず、これを満たすとき cutoff scale Λ は

MSSMにおける GUT scale Λ_G にほぼ等しくなる。これまでも言及しているように energy scale や質量行列などには Lagrangian の order 1 係数から来る order 1 程度の不定性がある。このため gauge coupling unification は $h = 0$ を必要とするわけではなく、あくまで rough に考えて $h \sim 0$ 程度を実現すればいいという事である。(実際に $h \neq 0$ でも coupling unification は満たせることを後に見る。) これにより、anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model においては GUT scale までの間に様々な粒子が存在していたとしても coupling unification を実現することが出来るという事が分かった。

この gauge coupling unification が実際に実現されることを繰り込み群方程式からの gauge coupling の energy scale 依存性を実際に見ることから確認する。gauge coupling の energy scale 依存性を実際に見るためには質量行列の固有値を求める必要がある。これまでは各粒子の anomalous $U(1)_A$ charge に依存しない議論であったが固有値を求めるためには charge を決める必要がある。Anomalous $U(1)_A$ SUSY $SO(10)$ GUT model [45] Fig. 1. における charge においては質量行列 M_{D^c} の固有値 $m_{D^c_i}$ は $m_{D^c_i} \sim \lambda\Lambda_G, \lambda\Lambda_G, \lambda^2\Lambda_G, \lambda^2\Lambda_G$ 、質量行列 \bar{M}_L の固有値 m_{L_i} は $m_{L_i} \sim \lambda^2\Lambda_G, \lambda^2\Lambda_G, \lambda^8\Lambda_G$ 、質量行列 \bar{M}_Q の固有値 m_{Q_i} は $m_{Q_i} \sim \lambda^2\Lambda_G, \lambda^2\Lambda_G, \lambda^6\Lambda_G$ 、質量行列 \bar{M}_{U^c} の固有値 $m_{U^c_i}$ は $m_{U^c_i} \sim \lambda^2\Lambda_G, \lambda^2\Lambda_G, \lambda^6\Lambda_G$ 、質量行列 \bar{M}_{E^c} の固有値 $m_{E^c_i}$ は $m_{E^c_i} \sim \lambda^2\Lambda_G, \lambda^2\Lambda_G, \lambda^7\Lambda_G$ 、質量行列 M_G の固有値 m_{G_i} は $m_{G_i} \sim \lambda^2\Lambda_G, \lambda^2\Lambda_G$ 、質量行列 M_W の固有値 m_{W_i} は $m_{W_i} \sim \lambda^2\Lambda_G, \lambda^2\Lambda_G$ 、質量行列 \bar{M}_X の固有値 m_X は $m_X \sim \lambda^6\Lambda_G$ である。これらの固有値を用いて実際に gauge coupling の energy scale 依存を計算すると GUT scale $\Lambda_A \sim \lambda\Lambda_G$ において gauge coupling unification が実現していることがわかる。(正確には $SU(3)_C$ の gauge coupling が少しずれるが order 1 の不定性で調整できる範囲である。) この計算において重要な点はこの模型においては $h = 0$ ではなく、 $h = -3$ であることである。

ここでは具体的な anomalous $U(1)_A$ $SO(10)$ SUSY GUT model において gauge coupling unification を実現する条件を見たがここでの考え方は一般的な模型に拡張することが出来る [49]。

3.5 low energy における測定される quark、lepton の質量と混合の実現

Anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model においては $SU(5)$ GUT model のみでなく、 $SO(10)$ GUT model においても SM quark と lepton の観測結

果を満たす正しい質量と世代の混合を実現することができる。Anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model においてこれらを実現するために $\mathbf{10}$ rep. の世代構造に CKM 行列のような強い階層性を、 $\bar{\mathbf{5}}$ rep. に MNS 行列のような弱い階層性を課すことによって実現する。これによって $\mathbf{10}$ rep. は q_L を含むため CKM 行列を $\bar{\mathbf{5}}$ rep. は l_L を含むため MNS 行列を実現できるため測定される混合を実現する。加えて、現在測定されている quark、lepton の質量の階層性である up-type quark が強く、down-type quark と charged lepton は中間的で、neutrino は弱いという事実も説明することが出来る。これは u_L 、 u_R^c はともに $\mathbf{10}$ に含まれ、 d_L 、 d_R^c と e_L 、 e_R^c は $\mathbf{10}$ と $\bar{\mathbf{5}}$ に含まれ、軽い neutrino の主要素になる ν_L は $\bar{\mathbf{5}}$ に含まれるからである。以上により anomalous $U(1)_A$ $SU(5)$ SUSY GUT model においては容易に質量、混合の階層性を満たすことができる。しかし、 $SO(10)$ GUT model は $SU(5)$ $\bar{\mathbf{5}}$ 、 $\mathbf{10}$ が spinor $\mathbf{16}$ に統一されるため $\bar{\mathbf{5}}$ 、 $\mathbf{10}$ に異なる階層性を与えることは困難である。多くの場合 $SO(10)$ GUT model では neutrino に弱い階層性を持たせることによって測定される質量、混合の階層性を実現する。しかし、anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model において階層性は $U(1)_A$ charge によってのみ得られる。そのため、neutrino を含めた全ての物質が $\mathbf{16}$ に統一されるため neutrino だけに特別な階層性を持たせることは出来ない。anomalous $U(1)_A$ $SO(10)$ SUSY GUT model においてこれらを実現するためには minimal model に含まれる 3 つの $\mathbf{16}$ rep. に加えて $\mathbf{10}$ rep. を加える [41]。 $\mathbf{10}$ rep. を加えることによってすべての物質を一つの表現に統一するために E_6 GUT model を考えることが自然になる [50]。ここでも今までと同様に質量と混合の階層性、つまり Yukawa matrix の大きさを FN mechanism によって anomalous $U(1)_A$ charge から決定する。 [37]

この小節では各小節で $SU(5)$ 、 $SO(10)$ 、 E_6 の各統一群の模型において正しい質量と混合を実現するための mechanism をみる。

3.5.1 $SU(5)$ GUT model における測定される quark、lepton の質量と混合の実現

前述の通り minimal $SU(5)$ GUT model においてはおおまかに正しい各物質に対する質量と混合の大きさを実現することができる。しかし、minimal model では $Y_d = Y_e^T$ という関係を持つ、つまり各世代の down type quark と charged lepton の質量が同じになってしまうという問題があった。

ここで紹介する $SU(5) \times U(1)_A$ model においては model に含まれている higher dimensional term の効果によって $Y_d = Y_e^T$ という関係を破りより正しい mass を実現することができる。

$Y_d = Y_e^T$ という関係を破る higher dimensional term は

$$\lambda^{a_i + \bar{f}_j + a + h_d} A_i A \bar{F}_j H_d \quad (3.37)$$

である。ここで A は **10** rep. 物質であり、 \bar{F}_j は $\bar{\mathbf{5}}$ rep. 物質である。adjoint Higgs が VEV を持つことによって Y_d と Y_e に違った大きさの影響を与えることができる。この higher dimensional term は adjoint Higgs A が VEV $\langle A \rangle \sim \lambda^{-a}$ を持つため、Yukawa matrix Y_d, Y_e に影響を与える元々の Yukawa interaction

$$\lambda^{a_i + \bar{f}_j + h_d} A_i \bar{F}_j H_d \quad (3.38)$$

と同じ大きさの contribution を Yukawa matrix に与えるため、確かに $Y_d = Y_e^T$ の関係を破ることができる。

3.5.2 $SO(10)$ GUT model における測定される quark、lepton の質量と混合の実現

$SO(10)$ GUT model において **10** rep. を新しく導入することによって正しい測定される quark、lepton の質量と混合を実現する方法を見る。これまで見てきたとおり測定される quark、lepton の質量と混合は $SU(5)$ **10** rep. に CKM 行列の階層性を持たせ、 $SU(5)$ $\bar{\mathbf{5}}$ rep. に MNS 行列の階層性を持たせることによって実現することができる。このモデルではまず $SO(10)$ **16** rep. 全体に CKM type の階層性を持たせる。次に新しい $SO(10)$ **10** rep. を導入し、**16** rep. と **10** rep. 中の $SU(5)$ $\bar{\mathbf{5}}$ rep. が mixing することによって $\bar{\mathbf{5}}$ rep. が MNS type の階層性を持たせることによって正しい quark、lepton の質量と混合を実現する。ではその mechanism の詳細を見る。

表 2 における Higgs sector に加えて物質 sector として 3 つの **16**: $\Psi_i (i = 1, 2, 3)$ と **10**: T を導入する。それぞれの anomalous $U(1)_A$ charge は $\psi_1 = n + 3, \psi_2 = n + 2, \psi_3 = n, t$ とする。すると $SU(5)$ の **5** と $\bar{\mathbf{5}}$ の間の質量

項は次のようになる。

$$\begin{aligned}
& \sum_i \lambda^{t+\psi_i+c} T \Psi_i \langle C \rangle + \lambda^{2t} T T \\
& \rightarrow \mathbf{5}_T \left(\lambda^{t+\psi_1+c} \langle C \rangle, \lambda^{t+\psi_2+c} \langle C \rangle, \lambda^{t+\psi_3+c} \langle C \rangle, \lambda^{2t} \right) \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{5}}_{\Psi_1} \\ \bar{\mathbf{5}}_{\Psi_2} \\ \bar{\mathbf{5}}_{\Psi_3} \\ \bar{\mathbf{5}}_T \end{pmatrix} \\
& = \mathbf{5}_T \left(\lambda^{t+\psi_1+(c-\bar{c})/2}, \lambda^{t+\psi_2+(c-\bar{c})/2}, \lambda^{t+\psi_3+(c-\bar{c})/2}, \lambda^{2t} \right) \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{5}}_{\Psi_1} \\ \bar{\mathbf{5}}_{\Psi_2} \\ \bar{\mathbf{5}}_{\Psi_3} \\ \bar{\mathbf{5}}_T \end{pmatrix} \quad (3.39)
\end{aligned}$$

$\psi_3 < \psi_2 < \psi_1$ より $\bar{\mathbf{5}}$ の massive mode(の主となる成分) は質量項の値が一番大きくなる可能性のある $\bar{\mathbf{5}}_{\Psi_3}$ または $\bar{\mathbf{5}}_T$ である。どちらが massive mode になるかは $\lambda^{2t}/\lambda^{t+\psi_3+(c-\bar{c})/2} \equiv \lambda^\Delta$ より定義される Δ を見ればよく、 $\Delta > 0$ では $\bar{\mathbf{5}}_{\Psi_3}$ が $\Delta < 0$ では $\bar{\mathbf{5}}_T$ が massive mode になる。 $\Delta > 0$ のとき massive mode $\bar{\mathbf{5}}_M$ と 3 つの massless mode $\bar{\mathbf{5}}_1, \bar{\mathbf{5}}_2, \bar{\mathbf{5}}_3$ の成分は次のように $\bar{\mathbf{5}}$ が mixing することによって得ることができる。

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{5}}_1 \\ \bar{\mathbf{5}}_2 \\ \bar{\mathbf{5}}_3 \\ \bar{\mathbf{5}}_M \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{5}}_{\psi_1} + \lambda^{\psi_1-\psi_3} \bar{\mathbf{5}}_{\psi_3} \\ \bar{\mathbf{5}}_T + \lambda^\Delta \bar{\mathbf{5}}_{\psi_3} \\ \bar{\mathbf{5}}_{\psi_2} + \lambda^{\psi_2-\psi_3} \bar{\mathbf{5}}_{\psi_3} \\ \bar{\mathbf{5}}_{\psi_3} + \lambda^\Delta \bar{\mathbf{5}}_T + \lambda^{\psi_2-\psi_3} \bar{\mathbf{5}}_{\psi_2} + \lambda^{\psi_1-\psi_3} \bar{\mathbf{5}}_{\psi_1} \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

では 3 つの massless mode $\bar{\mathbf{5}}_i$ を用いて quark、lepton の Dirac mass matrix を見る。Dirac mass matrix は

$$\lambda^{\psi_i+\psi_j+h} \Psi_i \Psi_j H + \lambda^{\psi_i+t+c} \Psi_i T C \quad (3.41)$$

項から求めることができる。Higgs C は式 (3.30) のように SM doublet Higgs の成分であるため C に比例する項も Dirac mass matrix に影響を与える。これにより up quark sector と down quark sector の mass matrix は次のようになる。

$$M_u = \begin{pmatrix} \lambda^6 & \lambda^5 & \lambda^3 \\ \lambda^5 & \lambda^4 & \lambda^2 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \langle H_u \rangle, \quad M_d = \lambda^2 \begin{pmatrix} \lambda^4 & \lambda^{\Delta+1} & \lambda^3 \\ \lambda^3 & \lambda^\Delta & \lambda^2 \\ \lambda & \lambda^{\Delta-2} & 1 \end{pmatrix} \langle H_d \rangle \quad (3.42)$$

ここで realistic な m_s/m_b を得るために $1 \leq \Delta \leq 3$ としている。これらの mass matrix を対角化することによって、質量と対角化行列を得ることができる。

付録 A を参考にして left-handed up、down quark の対角化行列 L_u, L_d を求めると

$$L_u \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^3 \\ \lambda & 1 & \lambda^2 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_d \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^3 \\ \lambda & 1 & \lambda^2 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

となるため CKM matrix は

$$U_{CKM} = L_u^\dagger L_d \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^3 \\ \lambda & 1 & \lambda^2 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

となり、 $\lambda \sim 0.2$ と Cabibbo angle 付近の値を取ることによって実験を満たすことができる。

次に lepton sector を見る。まず、charged lepton の Dirac mass matrix は GUT scale においては down type quark の Dirac mass matrix の転置に等しい。これにより

$$L_e \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda^{3-\Delta} & \lambda \\ \lambda^{3-\Delta} & 1 & \lambda^{\Delta-2} \\ \lambda & \lambda^{\Delta-2} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

となっている。

次に neutrino の Dirac mass matrix M_{ν_D} は

$$M_{\nu_D} = \lambda^2 \begin{pmatrix} \lambda^4 & \lambda^3 & \lambda \\ \lambda^{\Delta+1} & \lambda^\Delta & \lambda^{\Delta-2} \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \langle H_u \rangle \quad (3.46)$$

となる。加えて right-handed neutrino の Majorana mass M_R は interaction

$$\lambda^{\psi_i + \psi_j + 2\bar{c}} \Psi_i \Psi_j \bar{C} \bar{C} \quad (3.47)$$

より

$$M_R = \lambda^{\psi_i + \psi_j + 2\bar{c}} \langle \bar{C} \rangle^2 = \lambda^{2n + \bar{c} - c} \begin{pmatrix} \lambda^6 & \lambda^5 & \lambda^3 \\ \lambda^5 & \lambda^4 & \lambda^2 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

となる。これより See-Saw mechanism [51] より light neutrino の mass matrix M_ν は

$$M_\nu = M_{\nu_D} M_R^{-1} M_{\nu_D}^T = \lambda^{4-2n+c-\bar{c}} \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda^{\Delta-1} & \lambda \\ \lambda^{\Delta-1} & \lambda^{2\Delta-4} & \lambda^{\Delta-2} \\ \lambda & \lambda^{\Delta-2} & 1 \end{pmatrix} \langle H_u \rangle^2 \quad (3.49)$$

となる。 $M_R^T = M_R$ より $M_\nu^T = M_\nu$ となっている。これにより neutrino mass M_ν の対角化は対角化行列 L_ν によって

$$L_\nu^T M_\nu L_\nu = M_\nu \text{diag} \quad (3.50)$$

のように行われ、

$$L_\nu \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda^{3-\Delta} & \lambda \\ \lambda^{3-\Delta} & 1 & \lambda^{\Delta-2} \\ \lambda & \lambda^{\Delta-2} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

となる。ここで neutrino mass の対角化行列にたいして L_ν つまり、left-handed neutrino の対角化行列と記述している。この対角化行列は本来 light neutrino の対角化行列である。しかし、この model における See-Saw mechanism においては light neutrino と left-handed neutrino はほぼ等しいためこの記述は正しい。以上より MNS matrix は

$$U_{MNS} = L_\nu^\dagger L_e \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda^{3-\Delta} & \lambda \\ \lambda^{3-\Delta} & 1 & \lambda^{\Delta-2} \\ \lambda & \lambda^{\Delta-2} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

となる。これまでの議論はもちろん Δ の値に依存する今回は $2 \leq \Delta \leq 3$ の場合である。

残りの対角化行列 R_u 、 R_d 、 R_e は

$$R_u \sim R_e \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^3 \\ \lambda & 1 & \lambda^2 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

$$R_d \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda^{3-\Delta} & \lambda \\ \lambda^{3-\Delta} & 1 & \lambda^{\Delta-2} \\ \lambda & \lambda^{\Delta-2} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

となっている。

以上より $SO(10)$ 群の **10** rep. を加えることによって $SO(10)$ GUT model において $SU(5)$ 群の **10** rep. に属する物質は CKM type matrix、 $\bar{\mathbf{5}}$ rep. に属する物質は MNS type matrix によって対角化されることがわかる。これによって、quark と lepton の混合の違いを自然に実現することができる。

これまでの議論では quark と lepton の混合の違いを自然に実現することができた。しかし、minimal $SU(5)$ GUT model と同様に $Y_d = Y_e^T$ という関係を満たしてしまうという問題がのこっている。この問題は前少少節と同様に higher dimensional term の効果を考えることによって解決することができる。この模型において考えるべきは次の higher dimensional term である。

$$\lambda^{\psi_i + \psi_j + 2a + h} \Psi_i A^2 \Psi_j H \quad (3.55)$$

3.5.3 E_6 GUT model における測定される quark、lepton の質量と混合の実現

前少少節において $SO(10)$ GUT model において minimal model の 3 世代の **16** rep. に **10** rep. を加えることによって測定される quark、lepton の質量と混合を実現できることがわかった。すると E_6 群においては fundamental rep. **27** が $SO(10)$ 群の **16** rep. と **10** rep. を統一するため E_6 群へ拡張することによって、すべての物質が fundamental rep. に含まれるより自然な model を作ることができると期待される。ここではその E_6 群への拡張を議論する。

前述のとおり E_6 群の fundamental rep. **27** は以下のように $SO(10)$ 群の **10**, **16** rep. を以下のように含む。

$$\mathbf{27} \rightarrow \underbrace{\mathbf{10} + \bar{\mathbf{5}} + \mathbf{1}}_{\mathbf{16}} + \underbrace{\mathbf{5} + \bar{\mathbf{5}}'}_{\mathbf{10}} + \underbrace{\mathbf{1}'}_{\mathbf{1}} \quad (3.56)$$

前述の $SO(10)$ 群の模型のように $SO(10)$ 群の **10**, **16** rep. 中の $SU(5)$ 群の $\bar{\mathbf{5}}$ rep. が重要な役割を果たす。区別のため **16** rep. に属するものを $\bar{\mathbf{5}}$ と記述し、**10** rep. に属するものを $\bar{\mathbf{5}}'$ と記述する。

E_6 群から標準模型の群への symmetry breaking を実現するには一例として次のような Higgs が必要になる。

- E_6 群から $SO(10)$ 群への symmetry breaking を実現するために $SO(10)$ 群の singlet 部分に VEV v_ϕ を持つ **27** rep. Φ (D-flatness condition を満たすために同様に singlet 部分に VEV v_ϕ を持つ **27** rep. $\bar{\Phi}$)
- $SO(10)$ 群から $SU(5)$ 群への symmetry breaking を実現するために $SU(5)$ 群の singlet 部分に VEV v_c を持つ **27** rep. C (D-flatness condition を満たすために同様に singlet 部分に VEV v_c を持つ **27** rep. \bar{C})
- DT splitting を実現するために DW form VEV をもつ adjoint **78** rep. A

また、標準模型物質が質量を持つために **27** rep. Higgs H が MSSM Higgs doublet を含む。

これにより Yukawa interaction は物質を含む 3 世代の **27** rep. Ψ_i と Higgs H によって次のように記述される。

$$W_Y = \lambda^{\psi_i + \psi_j + h} \Psi_i \Psi_j H \quad (3.57)$$

ここで Ψ_i は $SU(5)$ 群の $\bar{\mathbf{5}}$ rep. をそれぞれに 2 つ、つまり 3 世代で 6 つ持つ。この $\bar{\mathbf{5}}$ rep. は mixing し 3 つは同様に 3 世代の Ψ_i に含まれる 3 つの $\mathbf{5}$ rep. と superheavy 質量項を持ち、3 つは massless になる。この 3 つの massless が標準模型に現れる物質になる。 $\bar{\mathbf{5}}$ rep. の mixing を見るため、 $\bar{\mathbf{5}}$ rep. と $\mathbf{5}$ rep. の質量項を見る。

$$W = \lambda^{\psi_i + \psi_j + c} \Psi_i \Psi_j C + \lambda^{\psi_i + \psi_j + \phi} \Psi_i \Psi_j \Phi \quad (3.58)$$

C 、 Φ が VEV を持つことによって $\bar{\mathbf{5}}$ rep. と $\mathbf{5}$ rep. の質量項が得られる。parameter r を

$$\lambda^r \equiv \frac{\lambda^c v_c}{\lambda^\phi v_\phi} \quad (3.59)$$

と定義することによって mass matrix は

$$\begin{array}{c} \Psi_1(\bar{\mathbf{5}}) \quad \Psi_2(\bar{\mathbf{5}}) \quad \Psi_3(\bar{\mathbf{5}}) \quad \Psi_1(\bar{\mathbf{5}}') \quad \Psi_2(\bar{\mathbf{5}}') \quad \Psi_3(\bar{\mathbf{5}}') \\ \Psi_1(\mathbf{5}) \left(\begin{array}{cccccc} \lambda^{2\psi_1+r} & \lambda^{\psi_1+\psi_2+r} & \lambda^{\psi_1+\psi_3+r} & \lambda^{2\psi_1} & \lambda^{\psi_1+\psi_2} & \lambda^{\psi_1+\psi_3} \\ \lambda^{\psi_1+\psi_2+r} & \lambda^{2\psi_2+r} & \lambda^{\psi_2+\psi_3+r} & \lambda^{\psi_1+\psi_2} & \lambda^{2\psi_2} & \lambda^{\psi_2+\psi_3} \\ \lambda^{\psi_1+\psi_3+r} & \lambda^{\psi_2+\psi_3+r} & \lambda^{2\psi_3+r} & \lambda^{\psi_1+\psi_3} & \lambda^{\psi_2+\psi_3} & \lambda^{2\psi_3} \end{array} \right) \lambda^\phi v_\phi \\ \Psi_2(\mathbf{5}) \quad \Psi_3(\mathbf{5}) \end{array} \quad (3.60)$$

となる。 $SO(10)$ 群の模型と同様に $\psi_1 > \psi_2 > \psi_3$ となっている。 $SO(10)$ 群の模型との違いは **16**, **10** rep. が統一されたことによって anomalous $U(1)_A$ charge の parameter t がなくなったことと、Higgs Φ の VEV によって $\bar{\mathbf{5}}'$ rep. と $\mathbf{5}$ rep. の質量項が得られることである。以上より $\bar{\mathbf{5}}$ rep. と $\mathbf{5}$ rep. の質量項から求められる $\bar{\mathbf{5}}$ rep. の mixing は r によって決まることがわかる。

ここでは SM における 3 世代の物質になる $\Psi_1^0(\bar{\mathbf{5}})$ 、 $\Psi_2^0(\bar{\mathbf{5}})$ 、 $\Psi_3^0(\bar{\mathbf{5}})$ の main mode が $(\Psi_1^0(\bar{\mathbf{5}}), \Psi_2^0(\bar{\mathbf{5}}), \Psi_3^0(\bar{\mathbf{5}})) = (\Psi_1(\bar{\mathbf{5}}), \Psi_1(\bar{\mathbf{5}}'), \Psi_2(\bar{\mathbf{5}}))$ となる場合、つまり $0 < r < 1$ となるときを考える。この時、 $\bar{\mathbf{5}}$ rep. の mixing は次のようになっている。

$$\begin{aligned}\Psi_1^0(\bar{\mathbf{5}}) &\sim \Psi_1(\bar{\mathbf{5}}) + \lambda^{\psi_1-\psi_3} \Psi_3(\bar{\mathbf{5}}) + \lambda^{\psi_1-\psi_2+r} \Psi_2(\bar{\mathbf{5}}') + \lambda^{\psi_1-\psi_3+r} \Psi_3(\bar{\mathbf{5}}') \\ \Psi_2^0(\bar{\mathbf{5}}) &\sim \Psi_1(\bar{\mathbf{5}}') + \lambda^{\psi_1-\psi_3-r} \Psi_3(\bar{\mathbf{5}}) + \lambda^{\psi_1-\psi_2} \Psi_2(\bar{\mathbf{5}}') + \lambda^{\psi_1-\psi_3} \Psi_3(\bar{\mathbf{5}}') \\ \Psi_3^0(\bar{\mathbf{5}}) &\sim \Psi_2(\bar{\mathbf{5}}) + \lambda^{\psi_2-\psi_3} \Psi_3(\bar{\mathbf{5}}) + \lambda^r \Psi_2(\bar{\mathbf{5}}') + \lambda^{\psi_2-\psi_3+r} \Psi_3(\bar{\mathbf{5}}')\end{aligned}\quad (3.61)$$

ここで注目すべきは $SO(10)$ model に比べ E_6 model では $\mathbf{5}$ rep. の mixing が生じていることと、mixing をする $\bar{\mathbf{5}}$ rep. の数が増えていることである。これらの効果により、 $\Psi_i^0(\bar{\mathbf{5}})$ は主要素以外からも大きな寄与を持つことがある。

この E_6 model においても $SO(10)$ model のときと同様に MSSM Higgs は mixing によって生じる場合がある。しかし、その効果はここでは大きく現れないためここでは省略する。

では Yukawa interaction 式 (3.57) から各 fermion の mass matrix がどのように出るかを見ていく。まず、up-type quark の mass matrix は up-type は $SU(5)$ 群の **10** rep. に属するため、 $\bar{\mathbf{5}}$ rep. の mixing はかわらず、

$$M_u = \begin{pmatrix} \lambda^6 & \lambda^5 & \lambda^3 \\ \lambda^5 & \lambda^4 & \lambda^2 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \langle H_u \rangle \quad (3.62)$$

となる。これより、left-handed, right-handed up-type quark の対角化行列 L_u, R_u は次のようになる。

$$L_u \sim R_u \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^3 \\ \lambda & 1 & \lambda^2 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

次に down-type quark の mass matrix を見る。right-handed down-type quark が $SU(5)$ 群の $\bar{\mathbf{5}}$ rep. に属するため $\bar{\mathbf{5}}$ rep. の mixing が影響する。こ

の mixing によって Yukawa interaction 式 (3.57) からは Yukawa interaction に現れない $\Psi_1(\bar{\mathbf{5}}')$ を含む Yukawa interaction が現れる。これにより down-type quark の mass matrix M_d は

$$M_d = \begin{pmatrix} \lambda^6 & \lambda^{6-r} & \lambda^5 \\ \lambda^5 & \lambda^{5-r} & \lambda^4 \\ \lambda^3 & \lambda^{3-r} & \lambda^2 \end{pmatrix} \langle H_d \rangle \quad (3.64)$$

となる。これより、left-handed、right-handed down-type quark の対角化行列 L_d, R_d は次のようになる。

$$L_d \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^3 \\ \lambda & 1 & \lambda^2 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}, R_d \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda^r & \lambda \\ \lambda^r & 1 & \lambda^{1-r} \\ \lambda & \lambda^{1-r} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

となる。以上より CKM matrix は $SO(10)$ 群の模型のように

$$U_{CKM} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^3 \\ \lambda & 1 & \lambda^2 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

となる。GUT scale においては charged lepton の mass matrix M_e は

$$M_e = M_d^T = \begin{pmatrix} \lambda^6 & \lambda^5 & \lambda^3 \\ \lambda^{6-r} & \lambda^{5-r} & \lambda^{3-r} \\ \lambda^5 & \lambda^4 & \lambda^2 \end{pmatrix} \langle H_d \rangle \quad (3.67)$$

である。これにより対角化行列は

$$L_d \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda^r & \lambda \\ \lambda^r & 1 & \lambda^{1-r} \\ \lambda & \lambda^{1-r} & 1 \end{pmatrix}, R_d \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^3 \\ \lambda & 1 & \lambda^2 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.68)$$

である。最後は neutrino sector である。 E_6 model の **27** rep. には二つの singlet がある。このため neutrino sector を考えるときにはその効果も考える必要がある。 $\bar{\mathbf{5}}$ の mixing の効果を考慮すると neutrino の Dirac mass

matrix は 3×6 行列 M_{N_D}

$$\begin{aligned}
M_{N_D} &\sim \begin{pmatrix} \Psi_1(\mathbf{1}') & \Psi_2(\mathbf{1}') & \Psi_3(\mathbf{1}') & \Psi_1(\mathbf{1}) & \Psi_2(\mathbf{1}) & \Psi_3(\mathbf{1}) \\ \Psi_1'(\mathbf{\bar{5}}) & \Psi_2'(\mathbf{\bar{5}}) & \Psi_3'(\mathbf{\bar{5}}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^{r+6} & \lambda^{r+5} & \lambda^{r+3} & \lambda^6 & \lambda^5 & \lambda^3 \\ \lambda^6 & \lambda^5 & \lambda^3 & \lambda^{6-r} & \lambda^{5-r} & \lambda^{3-r} \\ \lambda^{r+5} & \lambda^{r+4} & \lambda^{r+2} & \lambda^5 & \lambda^4 & \lambda^2 \end{pmatrix} \lambda^{2n} \langle H_u \rangle \\
&\equiv \begin{pmatrix} \lambda^{r+2} & \lambda^2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \lambda^4 & \lambda^3 & \lambda \\ \lambda^{4-r} & \lambda^{3-r} & \lambda^{1-r} \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \lambda^{2n} \langle H_u \rangle \quad (3.69)
\end{aligned}$$

となる。right-handed neutrino の Majorana mass は相互作用

$$\lambda^{\psi_i+\psi_j+2\bar{\phi}} \Psi_i \Psi_j \bar{\Phi} \bar{\Phi} + \lambda^{\psi_i+\psi_j+\bar{\phi}+\bar{c}} \Psi_i \Psi_j \bar{\Phi} \bar{C} + \lambda^{\psi_i+\psi_j+2\bar{c}} \Psi_i \Psi_j \bar{C} \bar{C} \quad (3.70)$$

より得られる。これにより 6×6 の Majorana neutrino mass matrix M_R は

$$\begin{aligned}
M_R &\sim \lambda^{\psi_i+\psi_j+2\bar{\phi}} \Psi_i(\mathbf{1}') \Psi_j(\mathbf{1}') \langle \bar{\Phi} \rangle^2 + \lambda^{\psi_i+\psi_k+\bar{\phi}+\bar{c}} \Psi_i(\mathbf{1}') \Psi_k(\mathbf{1}) \langle \bar{\Phi} \rangle \langle \bar{C} \rangle \\
&+ \lambda^{\psi_k+\psi_m+2\bar{c}} \Psi_k(\mathbf{1}) \Psi_m(\mathbf{1}) \langle \bar{C} \rangle^2 \\
&= \begin{pmatrix} \lambda^{\bar{\phi}-\phi} & \lambda^{(\bar{\phi}-\phi+\bar{c}-c)/2} \\ \lambda^{(\bar{\phi}-\phi+\bar{c}-c)/2} & \lambda^{\bar{c}-c} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \lambda^6 & \lambda^5 & \lambda^3 \\ \lambda^5 & \lambda^4 & \lambda^2 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \lambda^{2n} \quad (3.71)
\end{aligned}$$

となり、see-saw mechanism より light neutrino の mass matrix M_ν は

$$M_\nu = M_{N_D} M_R^{-1} M_{N_D}^T = \lambda^{4-2n+c+\bar{c}} \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda^{2-r} & \lambda \\ \lambda^{2-r} & \lambda^{2-2r} & \lambda^{1-r} \\ \lambda & \lambda^{1-r} & 1 \end{pmatrix} \langle H_u \rangle \quad (3.72)$$

となることがわかる。これより light neutrino の対角化行列は

$$L_\nu \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda^r & \lambda \\ \lambda^r & 1 & \lambda^{1-r} \\ \lambda & \lambda^{1-r} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

となるので、MNS matrix は

$$U_{MNS} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda^r & \lambda \\ \lambda^r & 1 & \lambda^{1-r} \\ \lambda & \lambda^{1-r} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.74)$$

表 4: Field content と $E_6 \times SU(2)_F \times U(1)_A \times Z_6$ 群における charge

	Ψ_a	Ψ_3	F_a	\bar{F}^a	Φ	$\bar{\Phi}$	C	\bar{C}	A	Z_3	Θ
E_6	27	27	1	1	27	$\bar{27}$	27	$\bar{27}$	78	1	1
$SU(2)_F$	2	1	2	$\bar{2}$	1	1	1	1	1	1	1
$U(1)_A$	4	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	-3	1	-4	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-1
Z_6	3	3	1	0	0	0	5	0	0	0	0

である。これにより E_6 model においても neutrino の Bi-large mixing を実現することができた。

また、 $SO(10)$ model と同様に $Y_d = Y_e^T$ の関係を破るために higher dimensional term $\Psi_i A^2 \Psi_j H$ の効果を考える必要がある。

3.5.4 $E_6 \times SU(2)_F$ GUT model における測定される quark、lepton の質量と混合の実現

$E_6 \times SU(2)_F$ GUT model においてどのようにして測定される quark、lepton の質量と混合を実現するのかを見る。実現するための mechanism は基本的には前小節における E_6 model におけるものと同様である。しかし、この模型においては世代対称性によって GUT scale での Yukawa structure が厳しく制限されるため Yukawa matrix への GUT scale での parameter 数が low energy での質量や混合などの input parameter よりも少なくなるという性質を持つ。ここでは Yukawa matrix がもともと持つ parameter に加えて、Yukawa matrix の各成分の係数を新しい parameter として定義しておく。この parameter は後節においてこの模型における核子崩壊への制限を見るのに便利な parameter である。これらの新しい parameter を定義するときに簡単のために parameter を実とおいている。

ここでは実際に quark、lepton の Yukawa matrix が GUT scale においてどのようになり、その結果 CKM 行列や MNS 行列などの mixing がどのようなになっているかを見る。Yukawa matrix を見るために必要な field は表 4 のとおりである。 Ψ_a ($a=1,2$) は $SU(2)_F$ doublet の物質であり、 Ψ_3 は $SU(2)_F$ singlet の物質である。 F_a, \bar{F}^a は $SU(2)_F$ symmetry を破る VEV をもつ Higgs であり、その VEV $\langle F_a \rangle, \langle \bar{F}^a \rangle$ は

$$\langle F_a \rangle \sim \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\rho} \lambda^{-(f+\bar{f})/2} \end{pmatrix}, \langle \bar{F}^a \rangle \sim \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda^{-(f+\bar{f})/2} \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

となる。

これらの field content によって Yukawa matrix を記述できる。

この model において GUT scale において massless になる MSSM Higgs doublet は次のような field の mixing によって実現される [52]。

$$H_u \subset \mathbf{5}_\Phi \quad (3.76)$$

$$H_d \subset \bar{\mathbf{5}}'_\Phi + \beta_H e^{i\delta} \lambda^{0.5} \bar{\mathbf{5}}_C \quad (3.77)$$

ここで β_H は実 $O(1)$ 係数である。 δ は field の mixing から出る複素 phase である。この複素 phase は Higgs の VEV の持つ複素 phase から求めることができるもので、値は模型に依存する。今回の模型においては $\bar{\mathbf{5}}_C$ からの寄与も重要である。これにより、この model において Yukawa matrix は次の superpotential から作られる。

$$\begin{aligned} W_Y = & (a\Psi_3\Psi_3 + b\Psi_3\bar{F}^a\Psi_a + c\bar{F}^a\Psi_a\bar{F}^b\Psi_b)\Phi + d(\Psi_a, \Phi, \bar{\Phi}, A, Z_3, \Theta) \\ & + f'\Theta\bar{F}^a\Psi_a\bar{F}^b\Psi_bC + g'\Theta\Psi_3\bar{F}^a\Psi_aC, \end{aligned} \quad (3.78)$$

a, b, c, f', g' は実 $O(1)$ 係数である。ここで $d(\Psi_a, \Phi, \bar{\Phi}, A, Z_3, \Theta)$ は $\Psi_a, \Phi, \bar{\Phi}, A, Z_3, \Theta$ による gauge 不変関数であり $\Psi_1\Psi_2\Phi$ に寄与する。注意すべきことは $\epsilon^{ab}\Psi_a\Psi_b\Phi$ は ϵ^{ab} の反対称性より許されない項になることである。ここで ϵ^{ab} は $SU(2)_F$ 群の反対称テンソルであり、 $\epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = 1$ を満たす。これにより関数 d は例えば $\Theta^2 Z_3 \epsilon^{ab} \Psi_a A \Psi_b \Phi, \bar{\Phi} Z_3 \epsilon^{ab} \Psi_a A \Psi_b \Phi, \dots$ を含む。この関数は $A, \Phi, \bar{\Phi}, Z_3$ そして Θ が VEV を持つことによって次のような項をもつ。

$$\begin{aligned} d(\Psi_a, \Phi, \bar{\Phi}, A, Z_3, \Theta) \rightarrow & \frac{2}{3} d_5 \lambda^5 \epsilon^{ab} D_{R\Psi_a}^c \overline{D_{R\Psi_b}^c} \mathbf{1}'_\Phi, \frac{1}{3} d_q \lambda^5 \epsilon^{ab} q_{L\Psi_a} u_{R\Psi_b}^c(L)_\Phi, \\ & \frac{1}{3} d_q \lambda^5 \epsilon^{ab} q_{L\Psi_a} d_{R\Psi_b}^c(\bar{L})_\Phi, -d_l \lambda^5 \epsilon^{ab} l_{L\Psi_a} e_{R\Psi_b}^c(\bar{L})_\Phi, h \lambda^5 \epsilon^{ab} l_{L\Psi_a} \nu_{R\Psi_b}^c(L)_\Phi, \end{aligned} \quad (3.79)$$

ここで d_5, d_q, d_l, h は実 $O(1)$ 係数である。式 (3.79) 右辺の始めの 4 項は $B - L$ charge に比例する。これはまず $SU(2)_F$ 反対称テンソルによって $SO(10)$ 群の $\epsilon^{ab} \mathbf{16}_a \mathbf{16}_b \mathbf{10}_\Phi$ と $\epsilon^{ab} \mathbf{10}_a \mathbf{10}_b \mathbf{1}_\Phi$ が禁止される。そのため、ゼロでない項を持つためには $SO(10)$ 群の破れつまり adjoint Higgs VEV $\langle A \rangle$ を拾う必要がある。そしてこの adjoint Higgs VEV は $B - L$ charge に比例するため、式 (3.79) の始めの 4 項は $B - L$ charge に比例する。

以上より up-type quark の Yukawa matrix Y_u は次のようになる。

$$Y_u = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3}d_q\lambda^5 & 0 \\ -\frac{1}{3}d_q\lambda^5 & c\lambda^4 & b\lambda^2 \\ 0 & b\lambda^2 & a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3}y_{u12}\lambda^5 & 0 \\ -\frac{1}{3}y_{u12}\lambda^5 & y_{u22}\lambda^4 & y_{u23}\lambda^2 \\ 0 & y_{u23}\lambda^2 & y_{u33} \end{pmatrix} \quad (3.80)$$

$y_{uij}(i, j = 1, 2, 3)$ は実 $O(1)$ 係数である。 Y_u の $(1, 2)$, $(2, 1)$ 成分 $(Y_u)_{12}$, $(Y_u)_{21}$ に現れる係数 $\frac{1}{3}$ は up-type quark mass の測定結果を満たすため、小さい up quark 質量を得るために重要な役割を果たしている。

次に down-type quark と charged lepton の Yukawa matrix を見る。この時、重要なのは E_6 fundamental rep. **27** が $\bar{\mathbf{5}}$ を各世代で 2 つ含んでいることである。この合計 6 つの $\bar{\mathbf{5}}$ が mixing をすることによって、同じく **27** に含まれる $\mathbf{5}$ と mass term を組む 3 つの $\bar{\mathbf{5}}$ と GUT scale において massless のままで SM に現れる $\bar{\mathbf{5}}$ 物質になる 3 つの $\bar{\mathbf{5}}$ になる。これを見るために $\bar{\mathbf{5}}$ と $\mathbf{5}$ の mass term を見る。まず次の比を定義する。

$$\frac{\lambda^c \langle C \rangle}{\lambda \phi \langle \Phi \rangle} \equiv r \lambda^{0.5}, \quad (3.81)$$

r は実 $O(1)$ 係数である。

Higgs が VEV を持つことにより $\mathbf{5}_i$ と $(\bar{\mathbf{5}}_i, \bar{\mathbf{5}}_i)$ の間の mass matrix は次のようになる。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \alpha d_5 \lambda^5 & 0 & 0 & f e^{i\rho} \lambda^{5.5} & g e^{i\rho} \lambda^{3.5} \\ -\alpha d_5 \lambda^5 & c \lambda^4 & b \lambda^2 & f e^{i\rho} \lambda^{5.5} & 0 & 0 \\ 0 & b \lambda^2 & a & g e^{i\rho} \lambda^{3.5} & 0 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(M_1 \mid M_2 \right) \quad (3.82)$$

ここで実 $O(1)$ parameter を $f \equiv r f'$ と $g \equiv r g'$ のように再定義している。 α は triplet (colored) component に対しては $\alpha = 1$ であり、doublet component に対しては $\alpha = 0$ になる。ここから SM matter として現れる massless mode を求めるために次のように 3×6 行列の対角化

$$V^\dagger (M_1 \ M_2) \begin{pmatrix} U_{10}^H & U_{10}^0 \\ U_{16}^H & U_{16}^0 \end{pmatrix} = (M_H^{\text{diag}} \ 0) \quad (3.83)$$

を考える。ここで V は 3×3 unitary matrix であり、

$$U \equiv \begin{pmatrix} U_{10}^H & U_{10}^0 \\ U_{16}^H & U_{16}^0 \end{pmatrix} \quad (3.84)$$

は 6×6 unitary matrix である。この 6×6 unitary matrix のなかで SM 物質に関わる U_{10}^0, U_{16}^0 の求め方は [53, 54] などに詳しく載っている。計算の結果 U_{10}^0, U_{16}^0 は

$$U_{10}^0 = \begin{pmatrix} -\frac{a\alpha d_5(bg-af)}{(ac-b^2)^2}\lambda^{2.5}e^{i\rho} & 1 & \mathcal{O}(\lambda^{5.5}) \\ \frac{bg-af}{ac-b^2}\lambda^{1.5}e^{i\rho} & \frac{a\alpha d_5}{ac-b^2}\lambda & \mathcal{O}(\lambda^{4.5}) \\ -(\frac{g}{a} + \frac{b}{a}\frac{bg-af}{ac-b^2})\lambda^{3.5}e^{i\rho} & -\frac{b\alpha d_5}{ac-b^2}\lambda^3 & \mathcal{O}(\lambda^{6.5}) \end{pmatrix}, \quad (3.85)$$

$$U_{16}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathcal{O}(\lambda^6) & 0 & 1 \\ -\frac{bg-af}{ac-b^2}\frac{\alpha d_5}{g}\lambda^3 & -\frac{\alpha d_5^2}{ac-b^2}\frac{a}{g}\lambda^{2.5}e^{-i\rho} & -\frac{f}{g}\lambda^2 \end{pmatrix} \quad (3.86)$$

となる。これにより 3 世代の massless SM $\bar{\mathbf{5}}_i$ である $\bar{\mathbf{5}}_i^0$ は

$$\bar{\mathbf{5}}_i^0 \equiv (U_{10}^{0\dagger})_{ij}\bar{\mathbf{5}}'_j + (U_{16}^{0\dagger})_{ij}\bar{\mathbf{5}}_j = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{5}}_1 + \cdots \\ \bar{\mathbf{5}}'_1 + \cdots \\ \bar{\mathbf{5}}_2 + \cdots \end{pmatrix} \quad (3.87)$$

となる。

以上より down-type quark の Yukawa matrix Y_d を求めることができる。down-type quark の Yukawa interaction は Higgs H_d との相互作用である。 H_d は式 (3.77) より Φ, C の両方からの寄与を持つ。これにより Y_d は

$$\begin{aligned} Y_d &= Y^\Phi U_{16}^0 + \beta_H e^{-i\delta} \lambda^{0.5} Y^C U_{10}^0 \\ &= \begin{pmatrix} [\frac{bg-af}{ac-b^2}(f' - \frac{bg'}{a}) - \frac{gg'}{a}]\beta_H e^{i(2\rho-\delta)}\lambda^6 \\ \left(-\frac{d_q}{3} - \frac{bg-af}{ac-b^2}\frac{b^2 d_5}{g}\right)\lambda^5 \\ -\frac{bg-af}{ac-b^2}\frac{a^2 d_5}{g}\lambda^3 \\ -\frac{bg'-af'}{ac-b^2}\frac{2}{3}d_5\beta_H e^{i(\rho-\delta)}\lambda^{5.5} \\ \left(-\frac{(\frac{2}{3}d_5)^2}{ac-b^2}\frac{ab}{g}e^{-i\rho} + f'\beta_H e^{i(\rho-\delta)}\right)\lambda^{4.5} \\ \left(-\frac{(\frac{2}{3}d_5)^2}{ac-b^2}\frac{a^2}{g}e^{-i\rho} + g'\beta_H e^{i(\rho-\delta)}\right)\lambda^{2.5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3}d_q\lambda^5 \\ \left(\frac{ac-b^2}{a} + \frac{bg-af}{g}\frac{b}{a}\right)\lambda^4 \\ \frac{bg-af}{g}\lambda^2 \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} y_{d11}\lambda^6 & \frac{2}{3}y_{d12}\lambda^{5.5} & \frac{1}{3}y_{d13}\lambda^5 \\ \frac{2}{3}y_{d21}\lambda^5 & y_{d22}\lambda^{4.5} & y_{d23}\lambda^4 \\ \frac{2}{3}y_{d31}\lambda^3 & y_{d32}\lambda^{2.5} & y_{d33}\lambda^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.88)$$

となる。ここで y_{dij} は複素 phase を含む $O(1)$ 係数である。しかし、以降の anomalous $U(1)_A E_6 \times SU(2)_F$ SUSY GUT 模型における核子崩壊の

計算においては簡単のため実 $O(1)$ 係数として扱う。ここで、

$$Y^\Phi = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}d_q\lambda^5 & 0 \\ \frac{1}{2}d_q\lambda^5 & c\lambda^4 & b\lambda^2 \\ 0 & b\lambda^2 & a \end{pmatrix}, \quad Y^C = \begin{pmatrix} 0 & f'e^{i\rho}\lambda^4 & g'e^{i\rho}\lambda^2 \\ f'e^{i\rho}\lambda^4 & 0 & 0 \\ g'e^{i\rho}\lambda^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.89)$$

である。

down-type quark Yukawa Y_d と charged lepton Yukawa Y_e の間の関係より Y_e は Y_d の転置を取り、 $\alpha = 0$ ($d_5 = 0$ に相当) かつ $d_q/3 \rightarrow -d_l$ とすることによって得られる。

$$Y_e = \begin{pmatrix} [\frac{bg-af}{ac-b^2}(f' - \frac{bg'}{a}) - \frac{gg'}{a}]\beta_H e^{i(2\rho-\delta)}\lambda^6 & d_l\lambda^5 & \\ 0 & f'\beta_H e^{i(\rho-\delta)}\lambda^{4.5} & \\ -d_l\lambda^5 & \left(\frac{ac-b^2}{a} + \frac{bg-af}{g}\frac{b}{a}\right)\lambda^4 & 0 \\ & g'\beta_H e^{i(\rho-\delta)}\lambda^{2.5} & \frac{bg-af}{g}\lambda^2 \end{pmatrix} \\ \equiv \begin{pmatrix} y_{d11}\lambda^6 & y_{e12}\lambda^5 & 0 \\ 0 & y_{e22}\lambda^{4.5} & y_{e23}\lambda^{2.5} \\ -y_{e12}\lambda^5 & y_{d23}\lambda^4 & y_{d33}\lambda^2 \end{pmatrix} \quad (3.90)$$

ここで y_{eij} も y_{dij} と同様に複素 phase を含む $O(1)$ 係数である。この係数も以降の計算においては簡単のため実 $O(1)$ 係数として扱う。以上より Y_u, Y_d, Y_e は 16 個の $y_{uij}, y_{dij}, y_{eij}$ という parameter を持っている。

neutrino sector はこれまでと同様に see-saw mechanism によって求められるため他とは少し異なる。各世代の neutrino mass を出すために $d\Psi^a(A, Z_3, \bar{H}H)\Psi_a$ 項の $h\lambda^5\epsilon^{ab}l_{L\Psi_a}\nu_{R\Psi_b}^c(L)_\Phi$ は重要な役割を果たす [53]。なぜならこの項がなければ 2 世代目の neutrino は massless になってしまうからである。neutrino の Dirac term は $H_u \sim \mathbf{5}_\Psi$ より

$$Y_{\nu D} = (U_{10}^{0t} Y^\Phi U_{16}^{0t} Y^C) \quad (3.91)$$

$$= \begin{pmatrix} h\frac{bg-af}{ac-b^2}\lambda^{6.5}e^{i\rho} & -f\lambda^{5.5}e^{i\rho} & -g\lambda^{3.5}e^{i\rho} & 0 & (h-d_l)\lambda^5 & 0 \\ 0 & h\lambda^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (h+d_l)\lambda^5 & (\frac{cg-bf}{g})\lambda^4 & (\frac{bg-af}{g})\lambda^2 \end{pmatrix} \quad (3.92)$$

ここで Y^C は式 (3.89) におけるものと同様であり、

$$Y^\Phi = \begin{pmatrix} 0 & -h\lambda^5 & 0 \\ h\lambda^5 & c\lambda^4 & b\lambda^2 \\ 0 & b\lambda^2 & a \end{pmatrix} \quad (3.93)$$

である。

Majorana mass term は3つの行列 $Y_{1'1'}$ 、 $Y_{1'1}$ 、 Y_{11} を係数として持つ次の3つの項から求められる。

$$W = (Y_{1'1'})_{ij} \mathbf{1}'_i \mathbf{1}'_j \Lambda + (Y_{1'1})_{ij} \mathbf{1}'_i \mathbf{1}_j \Lambda + (Y_{11})_{ij} \mathbf{1}_i \mathbf{1}_j \Lambda \quad (3.94)$$

これらは Higgs $\bar{\Psi}\Psi$ 、 $\bar{\Psi}\bar{C}$ 、 $\bar{C}\bar{C}$ との結合による項である。これから次の 6×6 行列 Y_{NR}

$$Y_{NR} \equiv \begin{pmatrix} Y_{1'1'} & Y_{1'1} \\ Y_{1'1}^t & Y_{11} \end{pmatrix} \quad (3.95)$$

を得ることが出来る。see-saw mechanism のために $Y_{\nu_R}^{-1}$ を用いる。 $O(1)$ parameter N_{ij} を用いて $Y_{\nu_R}^{-1}$ は大まかに

$$Y_{\nu_R}^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} N_{11}\lambda^{-13} & N_{12}\lambda^{-12} & N_{13}\lambda^{-10} & N_{14}\lambda^{-12.5} & N_{15}\lambda^{-11.5} & N_{16}\lambda^{-9.5} \\ N_{12}\lambda^{-12} & N_{22}\lambda^{-11} & N_{23}\lambda^{-9} & N_{24}\lambda^{-11.5} & N_{25}\lambda^{-10.5} & N_{26}\lambda^{-8.5} \\ N_{13}\lambda^{-10} & N_{23}\lambda^{-9} & N_{33}\lambda^{-7} & N_{34}\lambda^{-9.5} & N_{35}\lambda^{-8.5} & N_{36}\lambda^{-6.5} \\ \hline N_{14}\lambda^{-12.5} & N_{24}\lambda^{-11.5} & N_{34}\lambda^{-9.5} & N_{44}\lambda^{-12} & N_{45}\lambda^{-11} & N_{46}\lambda^{-9} \\ N_{15}\lambda^{-11.5} & N_{25}\lambda^{-10.5} & N_{35}\lambda^{-8.5} & N_{45}\lambda^{-11} & N_{55}\lambda^{-10} & N_{56}\lambda^{-8} \\ N_{16}\lambda^{-9.5} & N_{26}\lambda^{-8.5} & N_{36}\lambda^{-6.5} & N_{46}\lambda^{-9} & N_{56}\lambda^{-8} & N_{66}\lambda^{-6} \end{array} \right) \quad (3.96)$$

となる。

これより see-saw mechanism によって求められる light neutrino は大まかな計算より

$$M_\nu \equiv Y_\nu \frac{\langle H_u \rangle^2}{\Lambda}, \quad Y_\nu = Y_{\nu_D} Y_{NR}^{-1} Y_{\nu_D}^t = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12}\lambda^{-0.5} & y_{13}\lambda^{-1} \\ y_{12}\lambda^{-0.5} & y_{22}\lambda^{-1} & y_{23}\lambda^{-1.5} \\ y_{13}\lambda^{-1} & y_{23}\lambda^{-1.5} & y_{33}\lambda^{-2} \end{pmatrix} \quad (3.97)$$

となる。より細かい計算は論文 [53] に詳しい。

以上より対角化行列は次のようになる。

$$L_u \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3}\lambda & 0 \\ \frac{1}{3}\lambda & 1 & \lambda^2 \\ \frac{1}{3}\lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_u \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3}\lambda & 0 \\ \frac{1}{3}\lambda & 1 & \lambda^2 \\ \frac{1}{3}\lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.98)$$

$$L_d \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3}\lambda & \frac{1}{3}\lambda^3 \\ \frac{2}{3}\lambda & 1 & \lambda^2 \\ \frac{2}{3}\lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}, R_d \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3}\lambda^{0.5} & \frac{2}{3}\lambda \\ \frac{2}{3}\lambda^{0.5} & 1 & \lambda^{0.5} \\ \frac{2}{3}\lambda & \lambda^{0.5} & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.99)$$

$$L_e \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda^{0.5} & 0 \\ \lambda^{0.5} & 1 & \lambda^{0.5} \\ \lambda & \lambda^{0.5} & 1 \end{pmatrix}, R_e \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^3 \\ \lambda & 1 & \lambda^2 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.100)$$

$$L_\nu \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda^{0.5} & \lambda \\ \lambda^{0.5} & 1 & \lambda^{0.5} \\ \lambda & \lambda^{0.5} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.101)$$

加えて CKM 行列、MNS 行列は次のようになる。

$$U_{CKM} = L_u^\dagger L_d \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3}\lambda & \lambda^4 \\ \frac{2}{3}\lambda & 1 & \lambda^2 \\ \frac{2}{3}\lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}, U_{MNS} = L_\nu^\dagger L_e \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda^{0.5} & \lambda \\ \lambda^{0.5} & 1 & \lambda^{0.5} \\ \lambda & \lambda^{0.5} & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.102)$$

$(U_{CKM})_{13}$ の λ^4 は main order の λ^3 が打ち消されるためである。これは adjoint Higgs VEV $\langle A \rangle$ が $B - L$ charge に比例するからである [54]。

3.6 Anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT における核子崩壊

anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model は核子崩壊において興味深い予言を持つ。それは SUSY GUT model において核子崩壊に大きな影響を持つ質量次元 6、次元 5 演算子のなかで次元 6 演算子が支配的になるということである。ここでは簡単にその原因を見ていく。

まず次元 6 演算子が強くなるのは anomalous $U(1)_A$ model における GUT scale Λ_A が minimal SUSY GUT model における GUT scale Λ_G より小さくなるからである。ここでの anomalous $U(1)_A$ model における GUT scale とは $SU(5)$ 群を SM 群に破る adjoint Higgs の VEV に等しい。これにより少し GUT scale が小さくなるだけでも予言される次元 6 演算子からの寿命の長さは劇的に短くなる。なぜなら寿命は GUT scale の 4 乗に比例するからである (本当はほかの Higgs VEV からの寄与があるため厳密には 4 乗ではない)。これにより GUT scale が 1/2 倍になれば寿命は 1/16 倍になり極めて短くなる。

次元 5 演算子は主に DW-form VEV によって DT splitting を実現することによって抑制される。この抑制機構は論文 [12] のもつ抑制機構と主

に同じである。次元5 演算子による核子崩壊は sparticle が関わる 2 つの Yukawa 相互作用によって引き起こされる。2 つの Yukawa 相互作用に関わる triplet Higgs (Higgsino) は片方が H_u の GUT partner $\mathbf{3}_H$ であり、もう片方が H_d の GUT partner $\bar{\mathbf{3}}_H$ である。一般的には $\mathbf{3}_H$ と $\bar{\mathbf{3}}_H$ が質量項 M_T を持ち triplet Higgsino を媒介時にこの質量項を介することによって核子崩壊が生じる。しかし、今回の模型では式 (3.15) よりこのような質量項は存在しない。これにより、triplet Higgs (Higgsino) 媒介による核子崩壊は少し複雑な手順を介して引き起こされる。この模型においては $\mathbf{3}_H$ と $\bar{\mathbf{3}}_H$ を結びつけるため以下の手順を踏む。

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{3}_H \\ \mathbf{2}_H \end{pmatrix}}_{\mathbf{5}_H} \xleftrightarrow{\lambda^{h+h'}} \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{3}}_{H'} \\ \bar{\mathbf{2}}_{H'} \end{pmatrix}}_{\mathbf{5}_{H'}} \xleftrightarrow{\lambda^{2h'}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{3}_{H'} \\ \mathbf{2}_{H'} \end{pmatrix}}_{\mathbf{5}_{H'}} \xleftrightarrow{\lambda^{h+h'}} \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{3}}_H \\ \bar{\mathbf{2}}_H \end{pmatrix}}_{\mathbf{5}_H} \quad (3.103)$$

以上より確かに $\mathbf{3}_H$ と $\bar{\mathbf{3}}_H$ は複雑だが結びついていることがわかる。この複雑さが次元5 演算子抑制の原因である。 $\mathbf{3}_H$ と $\bar{\mathbf{3}}_H$ が結びつく間に別の粒子と相互作用することによって様々な coupling と propagator を介する。これらをまとめて次元5 演算子の強さは一般的な triplet Higgs の質量項 M_T から triplet Higgs の有効質量 $m_{T \text{ eff}}$

$$m_{T \text{ eff}} \sim \frac{\lambda^{h+h'} \cdot \lambda^{h+h'}}{\lambda^{2h'}} = \lambda^{2h} \quad (3.104)$$

に変化する。これにより anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model において $U(1)_A$ charge h が負のより小さい値を持つことによって次元5 演算子による核子崩壊が抑制されることがわかる。実験からの制限を満たすためには $h \leq -2$ となればよい。

典型的な anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model では light neutrino の質量からの制限を満たすために $h = -3$ が好まれる。これにより次元5 演算子による核子崩壊の寿命は現在の制限より極めて長くなる。逆に a は -0.5 、 -1 などの値が好まれる。これにより逆に次元6 演算子による核子崩壊の寿命は現在の制限に極めて近くなる。これについては次節において詳しく見る。

3.7 Anomalous $U(1)_A E_6 \times SU(2)_F$ SUSY GUT model が SUSY FCNC、CP process に与える影響

2.4 節において SUSY FCNC、CP process への制限を満たすための「universal」な模型、CMSSM について紹介した。しかし、この模型は極めて人為的な仮定の基に成り立つ模型である。なぜなら、3 世代の squark、slepton が universal な質量をもつとするばかりか、 A_ψ 項が Yukawa matrix に比例するという仮定を置くからである。

A_ψ 項が Yukawa matrix に比例するという仮定を除いても universal squark、slepton 質量を大きくすることによって SUSY FCNC、CP process への制限を満たすことはできる。しかし、その手法にも問題はある。それは制限を満たすために universal squark、slepton 質量を大きくすると stop 質量ももちろん大きくなり弱い階層性問題に大きな影響を与えてしまうという問題である。

Anomalous $U(1)_A E_6 \times SU(2)_F$ SUSY GUT model ではこの問題を解決することが出来る。その mechanism を大まかにみる。

まず、SUSY FCNC process への制限についてである。 $SU(2)_F$ 世代対称性により 1、2 世代目の squark、slepton の質量は対称性が成立する energy scale において縮退する。加えてこの模型において前述のとおり 3 つの SM $\bar{5}$ は $SU(2)_F$ 対称性によって縮退している $\mathbf{27}_1$ 、 $\mathbf{27}_2$ 中の $\bar{5}$ を主成分に持つ。これによりこの模型では世代対称性が成立する energy scale において squark、slepton の質量項は

$$m_{\mathbf{10}}^2 = \begin{pmatrix} m_0^2 & & \\ & m_0^2 & \\ & & m_3^2 \end{pmatrix}, m_{\bar{\mathbf{5}}}^2 = \begin{pmatrix} m_0^2 & & \\ & m_0^2 & \\ & & m_0^2 \end{pmatrix} \quad (3.105)$$

となっている。このような sfermion mass を「modified universal sfermion mass」と呼ぶ。これによって $\mathbf{10}$ に属する sfermion、特に stop の質量は他の sfermion の質量と縮退していないことになる。これによって軽い stop と重くて縮退した他の sfermion が実現できるため SUSY FCNC からの制限と弱い階層性問題の解決を同時に行うことが出来ると期待される⁴。

このような mass を持つ模型の現象については論文 [55] において議論されている。

⁴もちろん stop の質量は 126 GeV Higgs を実現できるほど重くなる、または他の mechanism によって実現する必要がある。stop 質量のみで Higgs 質量を説明しようとすると、stop 質量は弱い階層性問題解決のためにある程度の tuning が必要なほど重くはならない。

軽い stop と重い他の sfermion を持つ模型を考えたとき心配になるのは stop からの CP process への寄与である。しかし、この模型ではその寄与の心配はない。なぜなら spontaneous CP violation mechanism により式 (3.80) のように up-type quark の Yukawa matrix が実になっているため up-type quark の対角化行列はもちろん A-term から CP violating phase が出ないからである [52, 56]。これにより stop からの CP process への寄与はないため制限を心配する必要はない。

しかし、この模型において sparticle 質量の縮退を考えると本来ならば加えるべき寄与がある。それは scalar mass への D-term contribution [57, 58] である。この D-term contribution は対称性が破れたときに生じる。これによって先ほど述べた sparticle 質量の縮退は解ける。しかし、縮退が解けても SUSY FCNC process への制限が満たせるとき、逆にこの D-term contribution は GUT model を、大統一群を特定する手段となる [58]。特に、この模型においては世代対称性が加わっているだけでなく、3 世代の SM $\bar{5}$ が $\mathbf{27}_1$ 、 $\mathbf{27}_2$ に入るため D-term contribution は他の模型に比べて特徴的な影響を持つ。

3.8 Simple E_6 unification with anomalous $U(1)_A$ symmetry

これまで anomalous $U(1)_A$ E_6 SUSY GUT model の様々な現象を見てきた。しかし、この模型には low energy から cut-off scale までの間に多くの新粒子が存在する。その影響によりこの模型では GUT scale において gauge coupling が non-perturbative region に近づくという傾向がある。この傾向を和らげるために考えられたのが anomalous $U(1)_A$ simple E_6 SUSY GUT model [59] である。

これまで見てきた anomalous $U(1)_A$ E_6 SUSY GUT model において Higgs sector は表 5 のように多くの新粒子を含む Higgs 達が存在する。この Higgs をより simple な者たちにして high-energy において gauge coupling を大きくする新粒子たちを減らそうというのがこの模型の考え方である。

Higgs をより simple にするために C 、 \bar{C} が $SO(10)$ の $\mathbf{16}$ 、 $\bar{\mathbf{16}}$ 中の singlet 部分に持つ VEV $\langle \mathbf{16}_C \rangle$ 、 $\langle \bar{\mathbf{16}}_{\bar{C}} \rangle$ を adjoint Higgs に持たせることによって C を省くことが出来ないか試す。新たに $\langle \mathbf{16} \rangle$ または $\langle \bar{\mathbf{16}} \rangle$ を持つ adjoint Higgs の候補は A 、 A' の 2 つがあるが A' がこれらの VEV を持った場合前述の測定される quark、lepton の質量と混合、特に lepton の大きな混合

表 5: E_6 模型の Higgs sector

小文字は anomalous $U(1)_A$ charge を表す。

	non-vanishing VEV	vanishin VEV
78	$A(a = -1)$	$A'(a' = 4)$
27	$\Phi(\phi = -3) C(c = -6)$	$C'(c' = 7)$
$\overline{27}$	$\bar{\Phi}(\bar{\phi} = 2) \bar{C}(\bar{c} = -2)$	$\bar{C}'(\bar{c}' = 8)$

を満たすことできないため、ここでは A が VEV を持つ場合を見ていく。

A が $\langle \mathbf{16}_A \rangle$ を持つ場合、 A は 2 種類の VEV $\langle \mathbf{45}_A \rangle \neq 0$ 、 $\langle \mathbf{16}_A \rangle \neq 0$ の 2 つを持つことになる。 $\langle \mathbf{45} \rangle$ は adjoint が持つ DW-form VEV である。これにより $\overline{\mathbf{16}}$ 方向の D-flatness conditon は non-trivial な条件を与えることになる。この時に D-flatness conditon は以下の通りである。

$$D_{-\frac{1}{5}V+V'} : |\mathbf{1}_\Phi|^2 = |\mathbf{16}_A|^2 + |\mathbf{1}_{\bar{C}}|^2 \quad (3.106)$$

$$D_V : |\overline{\mathbf{16}}_{\bar{C}}|^2 = |\mathbf{16}_A|^2 + |\mathbf{16}_\Phi|^2 \quad (3.107)$$

$$D_{\overline{\mathbf{16}}} : \mathbf{45}_A^* \mathbf{16}_A = \mathbf{1}_\Phi^* \mathbf{16}_\Phi - \overline{\mathbf{16}}_{\bar{C}}^* \mathbf{1}_{\bar{C}} \quad (3.108)$$

ここで $|\mathbf{1}_\Phi|$ は Φ 中の E_6 singlet 部である。 V 、 V' は $SU(5) \times U(1)_V \subset SO(10)$ 、 $SO(10) \times U(1)_{V'} \subset E_6$ となる $U(1)$ 群である。加えて F-flatness condition より

$$\begin{aligned} \langle \overline{\mathbf{16}}_{\bar{C}} \rangle \langle \mathbf{16}_A \rangle \langle \mathbf{1}_\Phi \rangle &\sim \langle \overline{\mathbf{16}}_{\bar{C}} \rangle \langle \mathbf{45}_A \rangle \langle \mathbf{16}_\Phi \rangle \\ &\sim \langle \mathbf{1}_{\bar{C}} \rangle \langle \mathbf{45}_A \rangle \langle \mathbf{1}_\Phi \rangle \\ &\sim \lambda^{-(\bar{c}+a+\phi)} \equiv \lambda^{-3k} \end{aligned} \quad (3.109)$$

$$\langle \mathbf{45}_A \rangle \sim \lambda^{-a} \quad (3.110)$$

が得られる。以上より $\lambda^{-a} \gg \lambda^{-k}$ の時 VEV は

$$\langle \overline{\mathbf{16}}_{\bar{C}} \rangle \sim \langle \mathbf{16}_A \rangle \sim \langle \mathbf{1}_\Phi \rangle \sim \lambda^{-k} \quad (3.111)$$

$$\langle \mathbf{1}_{\bar{C}} \rangle \sim \langle \mathbf{16}_\Phi \rangle \sim \lambda^{a-2k} \quad (3.112)$$

$$\langle \mathbf{45}_A \rangle \sim \lambda^{-a} \quad (3.113)$$

となる。VEV が決まることによって現象論的に重要な parameter を見ることが出来る。それは式 (3.59) において定義される r parameter である。

この parameter は測定される quark、lepton の質量と混合、特に lepton の大きい混合を実現するために重要な parameter であり $\frac{1}{2}$ 付近が好まれる。この模型において r parameter は

$$\lambda^r \sim \frac{\lambda^{a+\phi} \langle \mathbf{16}_A \rangle \langle \mathbf{1}_\Phi \rangle}{\lambda^\phi \langle \mathbf{1}_\Phi \rangle} = \lambda^{a-k} \quad (3.114)$$

と定義され $(a, \phi, \bar{c}) = (-1, -3, 0)$ のとき $r = \frac{1}{3}$ となり測定される quark、lepton の質量と混合を実現することが出来る。

Higgs sector を simple にしたことによってこの模型の目標である GUT scale において gauge coupling が non-perturbative region に近づくのを和らげるだけでなく、これから見る核子崩壊にも強い影響を与えると考えられる。なぜなら次元 6 演算子において媒介される gauge boson たちの質量は GUT Higgs VEV によって決まるため、大きく Higgs sector を変化させたこの simple E_6 model ではその他の E_6 model と違う結果を与えると期待される。

4 次元6演算子による核子崩壊を用いた超対称大統一模型特定

ここではこの論文の主な内容である次元6演算子による核子崩壊を用いた超対称大統一模型特定についてみる。

まず、初めに核子崩壊の崩壊幅計算の方法における模型に依存しない部分を見る。次に模型に強く依存する部分である核子崩壊を起こす次元6演算子における係数の求め方を anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model において見る。ここでそれぞれの anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model においてどのような対角化行列が現れるのかを見るが、その mechanism の多くは前節で見た、anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT における測定された quark、lepton の質量と混合を実現するための mechanism であるため説明は省略する。最後に計算結果を示す。まずは、 $SU(5)$ 、 $SO(10)$ 、 E_6 群においてどのように核子崩壊が変わるのか、それぞれの模型を核子崩壊で見分けることができるのかを見る。ここでは極めて典型的な anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model における結果を見る。次に $E_6 \times SU(2)_F$ model において世代対称性を課したことによって世代対称性を課していない E_6 model と核子崩壊によってどのような影響が現れるのかを見る。その他、様々な設定による結果は付録に記載する。

4.1 核子崩壊の崩壊幅計算

ここでは核子崩壊を起こす effective Lagrangian から核子崩壊の崩壊幅を計算する方法をまとめる。つまり、model によって effective Lagrangian が決まったら一般的に成り立つ話である。

標準模型の枠組みにおいて核子崩壊を起こす次元6演算子は完全に分類されている [60]。次元6演算子は3つの quark と1つの lepton によって $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}(\bar{l}_\Gamma^c q_{1\Gamma\alpha})(\bar{q}_{2\Gamma'\beta}^c q_{3\Gamma'\gamma})$ と表記される。ここで α, β, γ は color の足であり、 l^c は lepton を charge conjugation したものである。charge conjugation と chirality の間の関係は l_Γ^c が $(l_\Gamma)^c$ を意味している、ここで $\Gamma, \Gamma' = L, R$ は chirality の足である。以下では color の足を省略して $(\bar{l}_\Gamma^c q_{1\Gamma})(\bar{q}_{2\Gamma'}^c q_{3\Gamma'})$ と書く。核子崩壊を起こす effective Lagrangian が

$$\mathcal{L}_{eff} = \sum_I C^I [(\bar{l}_\Gamma^c q_{1\Gamma})(\bar{q}_{2\Gamma'}^c q_{3\Gamma'})]^I, \quad (4.1)$$

表 6: 各 matrix element に対応する form factor

Lattice [61] によって計算される。 W_0^{RL} 、 W_0^{LR} の誤差は初めが statistical error であり、つぎが systematic error である。

matrix element	W_0^{RL}, W_0^{LR}
$\langle \pi^0 (ud)u p \rangle, \langle \pi^0 (du)d n \rangle$	-0.103(23)(34)
$\langle \pi^+ (ud)d p \rangle, -\langle \pi^- (du)u n \rangle$	-0.146(33)(48)
$\langle K^0 (us)u p \rangle, -\langle K^- (ds)d n \rangle$	0.098(15)(12)
$\langle K^+ (us)d p \rangle, -\langle K^0 (ds)u n \rangle$	-0.054(11)(9)
$\langle K^+ (ud)s p \rangle, -\langle K^0 (du)s n \rangle$	-0.093(24)(18)
$\langle K^+ (ds)u p \rangle, -\langle K^0 (us)d n \rangle$	-0.044(12)(5)
$\langle \eta (ud)u p \rangle, -\langle \eta (du)d n \rangle$	0.015(14)(17)

と計算されたら、次元 6 演算子の係数 C^I を用いて核子崩壊の崩壊幅を計算することができる。

核子崩壊を計算するためには QCD からの効果である hadron matrix element を知る必要がある。hadron matrix element は始状態の運動量 \mathbf{k} , spin s をもつ nucleon state $|N(\mathbf{k}, s)\rangle$ と終状態の運動量 \mathbf{p} をもつ meson state $\langle \text{meson}(\mathbf{p})|$ にたいして

$$\langle \text{meson}(\mathbf{p}) | q_{1\Gamma} (\overline{q_{2\Gamma'}^c} q_{3\Gamma'}) | N(\mathbf{k}, s) \rangle = P_\Gamma [W_0^{\Gamma\Gamma'}(q^2) - i \not{q} W_q^{\Gamma\Gamma'}(q^2)] u_N(\mathbf{k}, s), \quad (4.2)$$

となっている。 $W_0^{\Gamma\Gamma'}$ 、 $W_q^{\Gamma\Gamma'}$ は form factor と呼ばれるものであり、 $\mathbf{q} \equiv \mathbf{p} - \mathbf{k}$ は antilepton の運動量である。 P_Γ は chiral projection operator であり、 $u_N(\mathbf{k}, s)$ は核子の波動関数である。たいてい、式 (4.2) の右辺において第 1 項は第 2 項より antilepton が核子より軽いことによって支配的である。よって matrix element は

$$\langle \text{meson}(\mathbf{p}) | q_{1\Gamma} (\overline{q_{2\Gamma'}^c} q_{3\Gamma'}) | N(\mathbf{k}, s) \rangle \simeq P_\Gamma W_0^{\Gamma\Gamma'}(q^2) u_N(\mathbf{k}, s). \quad (4.3)$$

となり、form factor $W_0^{\Gamma\Gamma'}$ を計算すれば求まることになる。この論文では lattice によって計算された $W_0^{\Gamma\Gamma'}$ を用いて核子崩壊を計算する、計算結果は表 4.1 の通りである。

以上より崩壊幅は $N \rightarrow \text{meson} + l^c$ as

$$\begin{aligned}\Gamma(N \rightarrow \text{meson} + l^c) &= \frac{1}{2m_N} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_q} |\mathcal{M}(m_N \rightarrow p + q)|^2 \times \\ &\quad (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k - p - q) \\ &\simeq \frac{m_N}{32\pi} \left\{ 1 - \left(\frac{m_{\text{meson}}}{m_N} \right)^2 \right\}^2 \times \\ &\quad \left| \sum_I C^I W_0^I(N \rightarrow \text{meson}) \right|^2\end{aligned}\tag{4.4}$$

となる。ここで m_N と m_{meson} は核子と meson の質量である。核子の寿命は崩壊幅の逆数から求められる。

4.2 次元 6 演算子の係数 C^I の計算

前小節では核子の崩壊幅の求め方をまとめ、核子崩壊の演算子の係数 C^I が計算されれば崩壊幅が求められるようになった。ここでは模型を特定して核子崩壊の演算子、特に次元 6 演算子の係数の求め方を見る。

初めに、X-type gauge boson の交換によってどのような次元 6 演算子が出てくるのかを見てみる。次に、対角化行列がどのように求まり、次元 6 演算子に現れるのかを見る。ここではまず $SU(5)$ 、 $SO(10)$ 、 E_6 群の模型においてどのような対角化行列が現れるかを示す。次に E_6 群に世代対称性を課した $E_6 \times SU(2)_F$ 群における対角化行列を見る。最後に核子崩壊の実験 energy scale $\mu = m_N$ での C^I の求め方を見る。これは GUT scale で求めた C^I を renormalization group を用いて実験 energy scale に変換する計算である。

この係数は model に強く依存する。特に対角化行列、つまり GUT scale での Yukawa structure をどのように決定するのか、加えて、統一群は何かに強く依存する。今回は $SU(5)$ 、 $SO(10)$ 、 E_6 群、それぞれの adjoint gauge particle に含まれる X-type gauge boson を媒介することによる次元 6 演算子を見る。加えて、 $SO(10)$ 群において測定された quark、lepton の質量と混合を実現するために物質 sector に一般的な模型に入っている spinor **16** 以外に **10** を加える模型をみる [41, 45]。このため **10** 物質と X-type gauge boson との gauge interaction も見る。これらの **16**、**10** は E_6 GUT model においては fundamental representation **27** に統一される。この模

型においては測定された quark、lepton の質量と混合を実現するために **10** 物質の対角化行列には CKM matrix のような階層性を、 $\bar{\mathbf{5}}$ 物質の対角化行列には MNS matrix のような階層性をを持たせる。

4.2.1 X-type gauge boson 交換による核子崩壊次元 6 演算子

まず、核子崩壊次元 6 演算子を見る前にどのような粒子たちが GUT model においてどのように統一されるのかを見る。このときに E_6 群を基準として見る。なぜなら、 E_6 群はそれ以外に考える $SU(5)$ 、 $SO(10)$ 群を内部に含むからである。

E_6 model においてすべての quark、lepton は fundamental 表現 **27** に含まれる。**27** は $SO(10)$ 群において spinor 表現 **16** と vector 表現 **10** に分解される。

$$\mathbf{27} \rightarrow \mathbf{16} + \mathbf{10} + \mathbf{1}. \quad (4.5)$$

$SO(10)$ 群の **16** と **10** は次のように SM multiplet を含んでいる。

$$\mathbf{16} \rightarrow \underbrace{q_L(\mathbf{3}, \mathbf{2})_{\frac{1}{6}} + u_R^c(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-\frac{2}{3}} + e_R^c(\mathbf{1}, \mathbf{1})_1}_{\mathbf{10}} + \underbrace{d_R^c(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{\frac{1}{3}} + l_L(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-\frac{1}{2}}}_{\bar{\mathbf{5}}} + \underbrace{\nu_R^c(\mathbf{1}, \mathbf{1})_0}_{\mathbf{1}}, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{10} \rightarrow \underbrace{D_R^c(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{\frac{1}{3}} + L_L(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-\frac{1}{2}}}_{\bar{\mathbf{5}}'} + \underbrace{\overline{D}_R^c(\mathbf{3}, \mathbf{1})_{-\frac{1}{3}} + \overline{L}_L(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{\frac{1}{2}}}_{\mathbf{5}}, \quad (4.7)$$

ここで表現は SM 群 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ における表現である。前節でも言及したが 1 つの **27** には 2 つの $\bar{\mathbf{5}}$ が含まれている。この $\bar{\mathbf{5}}$ が mixing することによって $\bar{\mathbf{5}}$ に MNS 行列のような階層性を持たせることができるようになる。ここでは前節で見た模型である標準模型の 3 世代分の $\bar{\mathbf{5}}$ 物質が 1、2 世代の **27**₁ と **27**₂ から $(\bar{\mathbf{5}}_1, \bar{\mathbf{5}}_1', \bar{\mathbf{5}}_2)$ のように現れる模型を見る。これにより $SO(10)$ 、 E_6 群による模型では $SO(10)$ 群で一般的な **16** 以外にも **10** を考慮する。

$SU(5)$ GUT model において核子崩壊起こす X-type gauge boson は $SU(5)$ adjoint **24** に属している X と \bar{X} である。 $SU(5)$ 群は $SO(10)$ 、 E_6 群に含まれる群であるため、 X は $SO(10)$ 、 E_6 群において導入する $SU(5)$ $\bar{\mathbf{5}}$ と gauge interaction 行う。 X の交換によって導入される次元 6 演算子 (核子崩壊をすることは限らない) は $(10_i^\dagger 10_i + \bar{\mathbf{5}}_i^\dagger \bar{\mathbf{5}}_i + \bar{\mathbf{5}}_i^\dagger \bar{\mathbf{5}}_i')(10_j^\dagger 10_j + \bar{\mathbf{5}}_j^\dagger \bar{\mathbf{5}}_j + \bar{\mathbf{5}}_j^\dagger \bar{\mathbf{5}}_j)$ である。ここで $SU(5)$ 群の 10_i 、 $\bar{\mathbf{5}}_i$ は flavor の足 i, j をもつ物質 field で

ある。 $SO(10)$ GUT model では X' と $\overline{X'}$ が加わる。これらも adjoint **45** に含まれ、

$$\begin{aligned}
\mathbf{45} \rightarrow & \underbrace{G(\mathbf{8}, \mathbf{1})_0 + W(\mathbf{1}, \mathbf{3})_0 + \overline{X}(\mathbf{3}, \mathbf{2})_{-\frac{5}{6}} + X(\overline{\mathbf{3}}, \mathbf{2})_{\frac{5}{6}} + N^c(\mathbf{1}, \mathbf{1})_0}_{\mathbf{24}} \\
& + \underbrace{X'(\mathbf{3}, \mathbf{2})_{\frac{1}{6}} + U_R'^c(\overline{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-\frac{2}{3}} + E_R'^c(\mathbf{1}, \mathbf{1})_1}_{\mathbf{10}} \\
& + \underbrace{\overline{X'}(\overline{\mathbf{3}}, \mathbf{2})_{-\frac{1}{6}} + \overline{U_R'}^c(\mathbf{3}, \mathbf{1})_{\frac{2}{3}} + \overline{E_R'}^c(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{-1}}_{\overline{\mathbf{10}}} + \underbrace{N'^c(\mathbf{1}, \mathbf{1})_0}_{\mathbf{1}}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

と分解される。 X' field による次元 6 演算子は $(\mathbf{10}_i^\dagger \overline{\mathbf{5}}_i) \cdot (\overline{\mathbf{5}}_j^\dagger \mathbf{10}_j)$ である。ここで重要なのは X' による次元 6 演算子に $\overline{\mathbf{5}}'$ が含まれていないことである。 E_6 GUT model では X'' と $\overline{X''}$ が加わる。これらも adjoint **78** に含まれ、 $SO(10)$ 群分解すると

$$\mathbf{78} \rightarrow \mathbf{45} + \mathbf{16} + \overline{\mathbf{16}} + \mathbf{1}. \tag{4.9}$$

となる。 X'' は **16** 中の $SU(5)$ 群 **10** に含まれている。 X'' field による次元 6 演算子は $(\mathbf{10}_i^\dagger \overline{\mathbf{5}}'_i) \cdot (\overline{\mathbf{5}}'_j^\dagger \mathbf{10}_j)$ のみであり、 $SO(10)$ 群のものとは逆に $\overline{\mathbf{5}}'$ が必ず含まれる。つまり、 E_6 群で新しく加わる次元 6 演算子が核子崩壊にかかるのは $\overline{\mathbf{5}}'$ が標準模型の $\overline{\mathbf{5}}$ と関わる模型のみである。この模型では前述の通り標準模型の $\overline{\mathbf{5}}$ と関わる。

E_6 群を subgroup $SU(3)_C \times SU(3)_L \times SU(3)_R$ 群に分解する手法 [62, 63] より核子崩壊を起こす次元 6 演算子は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{eff} = & \frac{g_{GUT}^2}{M_X^2} \{ (\overline{e}_{Ri}^c u_{Rj}) (\overline{u}_{Lj}^c d_{Li}) + (\overline{e}_{Ri}^c u_{Rj}) (\overline{u}_{Li}^c d_{Lj}) \\
& + (\overline{e}_{Li}^c u_{Lj}) (\overline{u}_{Rj}^c d_{Ri}) + (\overline{E}_{Li}^c u_{Lj}) (\overline{u}_{Rj}^c D_{Ri}) \\
& - (\overline{\nu}_{Li}^c d_{Lj}) (\overline{u}_{Rj}^c d_{Ri}) - (\overline{N}_{Li}^c d_{Lj}) (\overline{u}_{Rj}^c D_{Ri}) \} \\
& + \frac{g_{GUT}^2}{M_{X'}^2} \{ (\overline{e}_{Li}^c u_{Lj}) (\overline{u}_{Ri}^c d_{Rj}) - (\overline{\nu}_{Li}^c d_{Lj}) (\overline{u}_{Ri}^c d_{Rj}) \} \\
& + \frac{g_{GUT}^2}{M_{X''}^2} \{ (\overline{E}_{Li}^c u_{Lj}) (\overline{u}_{Ri}^c D_{Rj}) - (\overline{N}_{Li}^c d_{Lj}) (\overline{u}_{Ri}^c D_{Rj}) \},
\end{aligned} \tag{4.10}$$

ここで g_{GUT} は unified gauge coupling であり、各演算子内の quark、lepton は flavor eigenstate である。この計算の詳細は付録にて記述する。X-type gauge boson の質量である M_X , $M_{X'}$, $M_{X''}$ は E_6 群を標準模型群に破る

GUT Higgs VEV に依存している。ここでは前節にて導入した anomalous $U(1)_A$ E_6 SUSY GUT model の VEV である x 、 v_c 、 v_ϕ を用いて

$$M_X^2 = g_{GUT}^2 x^2, \quad M_{X'}^2 = g_{GUT}^2 (x^2 + v_c^2), \quad M_{X''}^2 = g_{GUT}^2 \left(\frac{1}{4}x^2 + v_\phi^2\right) \quad (4.11)$$

となる。ここでとても重要なのは典型的な anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model においては $M_X \sim M_{X'}$ となることである。前述の通り anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model では doublet-triplet splitting を実現するために adjoint A は DW-type VEV を持つ。そして、DW-type VEV を実現するために $v_c \ll x$ となる。これより $M_X \sim M_{X'}$ となる。つまり、この模型では $SO(10)$ 群で追加される核子崩壊が最大限に、 $SU(5)$ 群で元々あった核子崩壊に対して同じくらいに効いてくるということである。これは核子崩壊による模型判別において極めて重要な性質である。

4.2.2 Anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model における対角化行列

ここでは anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model がどのような対角化行列を持つのかを挙げる。ここで挙げる対角化行列を実現する mechanism は前節で見たためここでは省略する。最後に対角化行列への繰り込み群の影響を見る。

$SU(5)$, $SO(10)$, E_6 GUT model においてここではまず $SU(5)$, $SO(10)$, E_6 GUT model について、つまり世代対称性を課していない場合を見る。これらの model においては前節で見たように Yukawa matrix Y_u , Y_d , Y_e と軽い neutrino の質量行列 M_ν は次のようになっている。

$$Y_u = \begin{pmatrix} y_{u11}\lambda^6 & y_{u12}\lambda^5 & y_{u13}\lambda^3 \\ y_{u21}\lambda^5 & y_{u22}\lambda^4 & y_{u23}\lambda^2 \\ y_{u31}\lambda^3 & y_{u32}\lambda^2 & y_{u33} \end{pmatrix}, \quad Y_d = \begin{pmatrix} y_{d11}\lambda^6 & y_{d12}\lambda^{5.5} & y_{d13}\lambda^5 \\ y_{d21}\lambda^5 & y_{d22}\lambda^{4.5} & y_{d23}\lambda^4 \\ y_{d31}\lambda^3 & y_{d32}\lambda^{2.5} & y_{d33}\lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$Y_e = \begin{pmatrix} y_{e11}\lambda^6 & y_{e12}\lambda^5 & y_{e13}\lambda^3 \\ y_{e21}\lambda^{5.5} & y_{e22}\lambda^{4.5} & y_{e23}\lambda^{2.5} \\ y_{e31}\lambda^5 & y_{e32}\lambda^4 & y_{e33}\lambda^2 \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

$$M_\nu = \begin{pmatrix} m_{\nu11}\lambda^{-1} & m_{\nu12}\lambda^{-1.5} & m_{\nu13}\lambda^{-2} \\ m_{\nu12}\lambda^{-1.5} & m_{\nu22}\lambda^{-2} & m_{\nu23}\lambda^{-2.5} \\ m_{\nu13}\lambda^{-2} & m_{\nu23}\lambda^{-2.5} & m_{\nu33}\lambda^{-3} \end{pmatrix} \frac{\langle H_u \rangle^2}{\Lambda_G}$$

ここで $y_{\psi ij}$ と $m_{\nu ij}$ は Lagrangian の各項の $O(1)$ 係数から出てくる $O(1)$ 係数である。以上の Yukawa matrix、 mass matrix を対角化すると対角化行列が $L_u \sim L_d \sim R_u \sim R_e \sim U_{CKM \text{ type}}$ 、 $L_e \sim L_\nu \sim R_d \sim U_{MNS \text{ type}}$ となっていることが確かめられる。ここで

$$U_{CKM \text{ type}} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^3 \\ \lambda & 1 & \lambda^2 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}, U_{MNS \text{ type}} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda^{0.5} & \lambda \\ \lambda^{0.5} & 1 & \lambda^{0.5} \\ \lambda & \lambda^{0.5} & 1 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

であり、それぞれの対角化行列に対してその各要素が異なる $O(1)$ 係数を持っている。

$E_6 \times SU(2)_F$ GUT model において次に $E_6 \times SU(2)_F$ GUT model について、つまり世代対称性を課した場合を見る。これらの model においては前節で見たように Yukawa matrix Y_u, Y_d, Y_e と軽い neutrino の質量行列 M_ν は次のようになっている。

$$Y_u = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3}y_{u12}\lambda^5 & 0 \\ -\frac{1}{3}y_{u12}\lambda^5 & y_{u22}\lambda^4 & y_{u23}\lambda^2 \\ 0 & y_{u23}\lambda^2 & y_{u33} \end{pmatrix}, Y_d = \begin{pmatrix} y_{d11}\lambda^6 & \frac{2}{3}y_{d12}\lambda^{5.5} & \frac{1}{3}y_{d13}\lambda^5 \\ \frac{2}{3}y_{d21}\lambda^5 & y_{d22}\lambda^{4.5} & y_{d23}\lambda^4 \\ \frac{2}{3}y_{d31}\lambda^3 & y_{d32}\lambda^{2.5} & y_{d33}\lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$Y_e = \begin{pmatrix} y_{e11}\lambda^6 & y_{e12}\lambda^5 & 0 \\ 0 & y_{e22}\lambda^{4.5} & y_{e23}\lambda^{2.5} \\ -y_{e12}\lambda^5 & y_{d23}\lambda^4 & y_{d33}\lambda^2 \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

$$M_\nu = \begin{pmatrix} m_{\nu 11}\lambda^{-1} & m_{\nu 12}\lambda^{-1.5} & m_{\nu 13}\lambda^{-2} \\ m_{\nu 12}\lambda^{-1.5} & m_{\nu 22}\lambda^{-2} & m_{\nu 23}\lambda^{-2.5} \\ m_{\nu 13}\lambda^{-2} & m_{\nu 23}\lambda^{-2.5} & m_{\nu 33}\lambda^{-3} \end{pmatrix} \frac{\langle H_u \rangle^2}{\Lambda_G}$$

ここで $y_{\psi ij}$ と $m_{\nu ij}$ は Lagrangian の各項の $O(1)$ 係数から出てくる $O(1)$ 係数である。式 (4.12) は $9 \times 3 + 6 = 33$ 個の $O(1)$ 係数を parameter として持っていた。対して式 (4.14) は $4 + 9 + 3 + 6 = 22$ 個の $O(1)$ 係数を parameter として持っている。これより $33 - 22 = 11$ 個の関係式を $E_6 \times SU(2)_F$ model は持っていることが分かる。この関係式は後に見る。以上の Yukawa matrix、 mass matrix を対角化すると対角化行列が

$$L_u \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3}\lambda & 0 \\ \frac{1}{3}\lambda & 1 & \lambda^2 \\ \frac{1}{3}\lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}, R_u \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3}\lambda & 0 \\ \frac{1}{3}\lambda & 1 & \lambda^2 \\ \frac{1}{3}\lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

$$L_d \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3}\lambda & \frac{1}{3}\lambda^3 \\ \frac{2}{3}\lambda & 1 & \lambda^2 \\ \frac{2}{3}\lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}, R_d \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3}\lambda^{0.5} & \frac{2}{3}\lambda \\ \frac{2}{3}\lambda^{0.5} & 1 & \lambda^{0.5} \\ \frac{2}{3}\lambda & \lambda^{0.5} & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

$$L_e \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda^{0.5} & 0 \\ \lambda^{0.5} & 1 & \lambda^{0.5} \\ \lambda & \lambda^{0.5} & 1 \end{pmatrix}, R_e \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^3 \\ \lambda & 1 & \lambda^2 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

$$L_\nu \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda^{0.5} & \lambda \\ \lambda^{0.5} & 1 & \lambda^{0.5} \\ \lambda & \lambda^{0.5} & 1 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

となる。これらの対角化行列は一部の形は異なるがおおまかには $L_u \sim L_d \sim R_u \sim R_e \sim U_{CKM \text{ type}}$ 、 $L_e \sim L_\nu \sim R_d \sim U_{MNS \text{ type}}$ となっている。

最後にこの模型が持っている 11 個の関係式を見る。これらの関係式は $y_{\psi ij} = 0$ と $y_{\psi ij} = y_{\psi' i' j'}$ から求めることができる以下のものたちである。
 $(Y_u)_{13} = (Y_u)_{31} = (Y_e)_{13} = 0$ よりそれぞれ

$$s_{13}^{uL} = 0, s_{13}^{uR} = 0, s_{13}^{eL} = 0, \quad (4.19)$$

が求まる。 $(Y_u)_{23} = (Y_u)_{32}$, $(Y_u)_{12} = -(Y_u)_{21}$, そして $(Y_u)_{11} = 0$ より関係式

$$s_{23}^{uL} = s_{23}^{uR}, s_{12}^{uL} = -s_{12}^{uR}, (s_{12}^{uL})^2 = m_u/m_c, \quad (4.20)$$

が求まる。 $(Y_e)_{31} = -(Y_e)_{12}$ と $(Y_e)_{21} = 0$ より

$$s_{12}^{eR} = s_{23}^{eL} s_{12}^{eL}, s_{13}^{eR} = -s_{12}^{eL} m_\mu / m_\tau, \quad (4.21)$$

という関係式が求まる。 $(Y_d)_{33} = (Y_e)_{33}$ と $(Y_d)_{23} = (Y_e)_{32}$ によって

$$s_{23}^{dL} = s_{23}^{eR}, m_b = m_\tau, \quad (4.22)$$

が求まる。最後にこれまでの関係式に加えて $(Y_e)_{11} = (Y_d)_{11}$ を考えることによって

$$s_{13}^{eL} s_{13}^{eR} m_\tau + s_{12}^{eL} s_{12}^{eR} m_\mu + m_e = s_{13}^{dL} s_{13}^{dR} m_b + s_{12}^{dL} s_{12}^{dR} m_s + m_d, \quad (4.23)$$

が得られる。ここで式 (4.22) の第 2 式は対角化行列に関わらない質量のみの関係式であるため今回は考えない。ここで重要なのはこれらの関係

式は GUT scale にて成立する関係であるということである。つまり核子崩壊の実験のエネルギースケールにおいてどのような関係式が成立しているかは繰り込み群の影響を考えないと分からない。

$E_6 \times SU(2)_F$ model は Y_u, Y_d, Y_e の 3 つの Yukawa matrix の持つ parameter 数が質量、CKM matrix、MNS matrix などの測定値の数よりも少ないという Yukawa sector の parameter 数が極めて小さい模型である。しかし、この模型においても繰り込み群を考えるときには、low energy から GUT scale の間にたくさん存在する GUT Higgs の VEV から superheavy mass を得る粒子たちの効果を考慮しなくてはならない。これらの効果を考慮するにはそれらの superheavy mass を固定しないと繰り込み群の効果を考えるのは困難である。そのため、今回は繰り込み群の効果を考慮するために模型を固定するのではなく繰り込み群の影響を受けない関係式を考えることによって繰り込み群の効果を考慮する。

ここでは対角化行列への繰り込み群の影響を見るために Yukawa matrix への繰り込み群の影響を見る。MSSM において Yukawa matrix への 1-loop level の繰り込み群は

$$\frac{d}{dt} Y_{u,d,e} = \frac{1}{16\pi^2} \beta_{Y_{u,d,e}}^{(1)} \quad (4.24)$$

$$\beta_{Y_u}^{(1)} = Y_u \left\{ 3\text{Tr}(Y_u Y_u^\dagger) + 3Y_u^\dagger Y_u + Y_d^\dagger Y_d - \frac{16}{3}g_3^2 - 3g_2^2 - \frac{13}{15}g_1^2 \right\}, \quad (4.25)$$

$$\beta_{Y_d}^{(1)} = Y_d \left\{ \text{Tr}(3Y_d Y_d^\dagger + Y_e Y_e^\dagger) + 3Y_d^\dagger Y_d + Y_u^\dagger Y_u - \frac{16}{3}g_3^2 - 3g_2^2 - \frac{7}{15}g_1^2 \right\}, \quad (4.26)$$

$$\beta_{Y_e}^{(1)} = Y_e \left\{ \text{Tr}(3Y_d Y_d^\dagger + Y_e Y_e^\dagger) + 3Y_e^\dagger Y_e - 3g_2^2 - \frac{9}{5}g_1^2 \right\}, \quad (4.27)$$

となっている [64]。Yukawa matrix 式 (4.14) を代入して GUT scale における β 関数を見ると

$$\beta_{Y_u}^{(1)}(\Lambda_A) \sim \begin{pmatrix} O(\lambda^{10.5}) & X_u y_{u12} \lambda^5 & O(\lambda^7) \\ -X_u y_{u12} \lambda^5 & (X_u y_{u22} + y_{u23}^2 y_{u33}) \lambda^4 & (X_u + y_{u33}^2) y_{u23} \lambda^2 \\ O(\lambda^5) & (X_u + y_{u33}^2) y_{u23} \lambda^2 & (X_u + y_{u33}^2) y_{u33} \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

$$X_u \equiv 3\text{Tr}(Y_u Y_u^\dagger) - \frac{16}{3}g_3^2 - 3g_2^2 - \frac{13}{15}g_1^2$$

$$\beta_{Y_d}^{(1)}(\Lambda_A) \sim \begin{pmatrix} X_d y_{d11} \lambda^6 & X_u \frac{2}{3} y_{d12} \lambda^{5.5} & (X_d + y_{d33}^2) \frac{2}{3} y_{d13} \lambda^5 \\ X_d \frac{2}{3} y_{d21} \lambda^5 & X_d y_{d22} \lambda^{4.5} & (X_d + y_{u33}^2) y_{d23} \lambda^4 \\ X_d \frac{2}{3} y_{d31} \lambda^3 & X_u y_{d32} \lambda^{2.5} & (X_d + y_{u33}^2) y_{d33} \lambda^2 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned}
X_d &\equiv -\frac{16}{3}g_3^2 - 3g_2^2 - \frac{7}{15}g_1^2 \\
\beta_{Y_d}^{(1)}(\Lambda_A) &\sim \begin{pmatrix} X_e y_{d11} \lambda^6 & X_e y_{e12} & O(\lambda^{11}) \\ O(\lambda^{9.5}) & X_e y_{e22} \lambda^{4.5} & X_e y_{e23} \lambda^{2.5} \\ -X_e y_{d12} \lambda^5 & X_e y_{d23} \lambda^4 & X_e y_{d33} \lambda^2 \end{pmatrix} \\
X_e &\equiv -3g_2^2 - \frac{9}{5}g_1^2
\end{aligned} \tag{4.30}$$

これより全てではないが mixing angle や質量の比などの多くの同じ flavor type の Yukawa matrix 中に含まれる Yukawa coupling の比が繰り込み群の影響を受けないことが分かる。なぜなら関数 A 、 B に対して

$$\frac{d}{dt}A = XA, \quad \frac{d}{dt}B = XB \tag{4.31}$$

となっているとき

$$\frac{d}{dt} \frac{A}{B} \propto \left(\frac{d}{dt}A \right) B - A \left(\frac{d}{dt}B \right) = 0 \tag{4.32}$$

となるからである。逆に違う flavor type の Yukawa matrix 中に含まれる Yukawa coupling の比は繰り込み群の影響を受ける。つまり、down-type quark mass と charged lepton mass の比を含んだ式 (4.23) は繰り込み群の影響を受けると予想される。また、 $y_{\psi ij} = 0$ となっていた Yukawa matrix の要素への繰り込み群の効果は主となる寄与が効かないため弱くなっている。このため $y_{\psi ij} = 0$ から来ている mixing angle は繰り込み群を考慮して low energy における値も無視できるほど小さいと期待できる。これらの期待は SM における繰り込み群においても同じことが成立する [65]。数値計算によってこれらの予想が正しいことを確かめた。このため $E_6 \times SU(2)_F$ model における核子崩壊計算には式 (4.19)、(4.20)、(4.21)、(4.22) の第 1 式の 9 条件を課して考える。

前節においてもみたように、本来この模型において Yukawa matrix Y_u , Y_d , Y_e たちの持つ parameter 数はもっと少ない。このため mixing angle, mass たちの間には他にもいくつかの関係式が成立している。しかし、その関係式は全ての energy scale で成立しない関係式であり、かつあまりきれいな式ではないので、付録にて見る。

4.2.3 次元 6 演算子への繰り込み群の効果

最後に次元 6 演算子への繰り込み群の効果を見る。これは GUT scale で計算した次元 6 演算子の係数を核子崩壊実験の、つまり nucleon mass

scale に落とすための効果である。SUSY GUT model においてはこの効果は2つに分けることができる。1つめが nucleon mass scale から SUSY-breaking scale までの SM particle たちのみが与える影響である。これを”long-distance effect”と呼び、 A_{Rl} と表記する [17]。2つめが SUSY-breaking scale から GUT scale までの SUSY particle たちの影響が加わる効果である。これを”short-distance effect”と呼び、 A_{Rs} と表記する [66, 67]。この二つの効果を合わせた繰り込み軍の効果 (Renormalization Factor, RF) は

$$A_R = A_{Rl} \times A_{Rs}. \quad (4.33)$$

となり、nucleon mass scale での核子崩壊次元6 演算子の係数を得るためには GUT scale での係数に RF を掛け合わせる必要がある。

1-loop level での計算では各 energy region、各 gauge interaction に対して

$$A_{Ri} = \left(\frac{\alpha_i(M_{end})}{\alpha_i(M_{start})} \right)^{\frac{A_i}{b_i}}, \quad (4.34)$$

$$\gamma_i = -2A_i \frac{g_i^2}{(4\pi)^2}, \quad \beta_i = b_i \frac{g_i^3}{(4\pi)^2}, \quad (4.35)$$

となる。ここで γ_i は次元6 演算子の各 gauge interaction に対する anomalous dimension であり、 β_i は各 gauge coupling の β 関数である。”long-distance effect”にたいしては支配的な $SU(3)_C$ からの効果を考え

$$A_3 = 2 \quad (4.36)$$

である。核子崩壊を起こす次元6 演算子

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^{(1)} &= \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \epsilon_{abc} \epsilon_{ij} (\bar{U}^\dagger)^a (\bar{D}^\dagger)^b e^{-\frac{2}{3}g_Y V_1} (e^{2g_3 V_3} Q_i)^c L_j, \\ \mathcal{O}^{(2)} &= \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \epsilon_{abc} \epsilon_{ij} \bar{E}^\dagger e^{\frac{2}{3}g_Y V_1} (e^{-2g_3 V_3} \bar{U}^\dagger)^a Q_i^b Q_j^c, \end{aligned} \quad (4.37)$$

に対して”short-distance effect”に対しては

$$A_{1\mathcal{O}^{(1)}} = \frac{11}{30}, \quad A_{1\mathcal{O}^{(2)}} = \frac{23}{30}, \quad A_2 = \frac{3}{2}, \quad A_2 = \frac{4}{3} \quad (4.38)$$

である。 $A_{1\mathcal{O}^{(1)}}$ は終状態の lepton が left-handed lepton である演算子に対するものであり $A_{1\mathcal{O}^{(2)}}$ は終状態の lepton が right-handed electron である演算子に対するものである。 M_{start} 、 M_{end} は計算を行う region の境界である ($M_{end} > M_{start}$)。

RF の値は GUT model に依存している。ここでは minimal SUSY $SU(5)$ GUT における RF の値を用いる。RF の値は right-handed charged lepton e_R^c を含む次元 6 演算子に対しては $A_R = 3.6$ 、doublet lepton l を含む次元 6 演算子に対しては $A_R = 3.4$ になる [67]。本来 anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model において RF の計算するときには nucleon mass scale から GUT scale までの間に加わる MSSM particle 以外の particle の効果を考慮したり、この模型の持つ GUT scale が MSSM における gauge coupling unification から求まる GUT scale より小さいことを考慮しなくてはならない。それらの効果を考慮すると right-handed charged lepton e_R^c を含む次元 6 演算子に対して $A_R = 3.2$ となる。ここで新しく加わる粒子の質量に関わる anomalous $U(1)_A$ mass は Ref. [45] の Fig. 1 の caption の値を用いた。この model において RF が小さな値を持つのは GUT scale が小さいからである。以上より anomalous $U(1)_A$ $SO(10)$ SUSY GUT model において核子の寿命を計算すると minimal $SU(5)$ SUSY GUT model の RF の値を使ったものより $(3.2/3.6)^{-2} = 1.3$ 倍寿命が長くなる⁵。

2-loop level での”short-distance effect”に対する anomalous dimension は

$$\gamma_{\mathcal{O}^{(I)}}^{(2)} = \sum_{\alpha, \beta=Y, 2, 3} \frac{g_\alpha^2 g_\beta^2}{(16\pi^2)^2} [\gamma_{\mathcal{O}^{(I)}}^{(2)}]_{\alpha\beta} \quad (4.39)$$

であり

$$[\gamma_{\mathcal{O}^{(1)}}^{(2)}]_{33} = [\gamma_{\mathcal{O}^{(2)}}^{(2)}]_{33} = \frac{64}{3} + 8b_3, \quad (4.40)$$

$$[\gamma_{\mathcal{O}^{(1)}}^{(2)}]_{22} = [\gamma_{\mathcal{O}^{(2)}}^{(2)}]_{22} = \frac{9}{2} + 3b_2, \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} [\gamma_{\mathcal{O}^{(1)}}^{(2)}]_{YY} &= \frac{113}{54} + \frac{5}{3}b_Y, \\ [\gamma_{\mathcal{O}^{(2)}}^{(2)}]_{YY} &= \frac{91}{18} + 3b_Y, \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} [\gamma_{\mathcal{O}^{(1)}}^{(2)}]_{23} &= [\gamma_{\mathcal{O}^{(1)}}^{(2)}]_{32} = 6, \\ [\gamma_{\mathcal{O}^{(2)}}^{(2)}]_{23} &= [\gamma_{\mathcal{O}^{(2)}}^{(2)}]_{32} = 10, \end{aligned} \quad (4.43)$$

⁵論文 [45] における GUT scale の値は今回考える模型より $\frac{1}{2}$ 倍小さい、なので寿命を見積もるときにはその効果も考慮する必要がある。

$$\begin{aligned} [\gamma_{\mathcal{O}^{(1)}}^{(2)}]_{Y2} &= [\gamma_{\mathcal{O}^{(1)}}^{(2)}]_{2Y} = 1 , \\ [\gamma_{\mathcal{O}^{(2)}}^{(2)}]_{Y2} &= [\gamma_{\mathcal{O}^{(2)}}^{(2)}]_{2Y} = \frac{1}{3} , \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} [\gamma_{\mathcal{O}^{(1)}}^{(2)}]_{Y3} &= [\gamma_{\mathcal{O}^{(1)}}^{(2)}]_{3Y} = \frac{34}{9} , \\ [\gamma_{\mathcal{O}^{(2)}}^{(2)}]_{Y3} &= [\gamma_{\mathcal{O}^{(2)}}^{(2)}]_{3Y} = \frac{38}{9} \end{aligned} \quad (4.45)$$

となっている。これを用いて 2-loop レベルの繰り込み係数を計算し 1-loop レベルのものと比較すると

$$\begin{aligned} A_{Rs}^{\mathcal{O}^{(1)}}(1\text{loop}) &= 1.960 , \\ A_{Rs}^{\mathcal{O}^{(2)}}(1\text{loop}) &= 2.059 , \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} A_{Rs}^{\mathcal{O}^{(1)}}(2\text{loop}) &= 1.962 , \\ A_{Rs}^{\mathcal{O}^{(2)}}(2\text{loop}) &= 2.053 . \end{aligned} \quad (4.47)$$

となり結果として 2-loop レベルからの効果はあまり効かなかった [68]。これは 2-loop レベルからのそれぞれの効果が打ち消しあうからである。もちろんこの値は gauge coupling の初期値に依存する。加えて gauge coupling の running の途中の値にも依存するため全ての模型において 2-loop レベルからの効果が効かないとは言い切れない。

このため、今回の計算では 1-loop レベルの minimal $SU(5)$ SUSY GUT model の値を用いて計算を行う。

4.3 Anomalous $U(1)$ $SU(5)$, $SO(10)$, E_6 SUSY GUT model における核子崩壊による模型特定

ここでは $SU(5)$ 、 $SO(10)$ 、 E_6 群に基づく anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model において核子崩壊による模型特定、ここでは統一群の特定を行うことができるかを見る。まず初めに今回の計算におけるそれぞれの模型の設定を見る。次に陽子の各崩壊過程における寿命を見ていく。最後に、核子崩壊の測定量が得られた時に 3 つの模型の特定ができるかを見ていく。

4.3.1 模型の設定

まず各統一群における模型の設定を見る。

- (1) **$SU(5)$ model** 本来 $SU(5)$ 群に基づく anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model は作られてはいない。しかし、前節で述べたとおり $SU(5)$ 群に基づく model を考えても、higher order dimensional operator の効果を考慮することによって realistic quark and lepton masses and mixings は実現可能である。加えて doublet-triplet splitting も missing partner mechanism [69] を用いることによって実現可能と思われるため、anomalous $U(1)_A$ $SU(5)$ SUSY GUT model は実現可能であると思われるため、その模型における核子崩壊を考える。

$SU(5)$ model においては、 $\mathbf{10}$ と $\bar{\mathbf{5}}$ の自由度を用いてそれぞれに属する物質たちの対角化行列の中で1つを一般性を失わずに単位行列にすることができる。ここでは $R_u = 1$ 、 $R_d = 1$ とした。CKM, MNS 行列を実現するために2つの対角化行列の自由度を用いるため、この模型には3つの独立な対角化行列が存在する。

- (2) **$SO(10)$ model 1** ここでは1つの $SO(10)$ 群の $\mathbf{10}$ を測定された quark、lepton の質量と混合を実現するために導入する。前節で述べたとおり $\mathbf{10}$ 中の $\bar{\mathbf{5}}'$ と3つの $\mathbf{16}$ 中の $\bar{\mathbf{5}}$ が mixing して3つの SM $\bar{\mathbf{5}}$ になる。ここでは SM $\bar{\mathbf{5}}$ の main mode は $(\bar{\mathbf{5}}_1, \bar{\mathbf{5}}', \bar{\mathbf{5}}_2)$ となっている。

$SO(10)$ model においても1つの対角化行列を単位行列にできる。ここでは $R_u = 1$ とした。CKM, MNS 行列を実現するために2つの対角化行列の自由度を用いるため、この模型には4つの独立な対角化行列が存在する。

- (2) **E_6 model 1** E_6 model においては $SO(10)$ model で加えた $SO(10)$ 群の $\mathbf{10}$ が E_6 fundamental representation $\mathbf{27}$ に $\mathbf{16}$ と共に含まれている。つまり $\bar{\mathbf{5}}$ は6つある。 $\mathbf{27}_3$ に属する2つの $\bar{\mathbf{5}}$ は他の2つに対して coupling が大きいいため superheavy になる。このため SM $\bar{\mathbf{5}}$ は $\bar{\mathbf{27}}_1$ 、 $\bar{\mathbf{27}}_2$ に含まれて、 $(\bar{\mathbf{5}}_1, \bar{\mathbf{5}}'_1, \bar{\mathbf{5}}_2)$ となる。

E_6 model においても $SO(10)$ model と同様に独立な対角化行列は4つである。

今回考える $SO(10)$ 、 E_6 model では $\bar{\mathbf{5}}$ の mixing の影響により測定された quark、lepton の質量と混合を実現する。核子崩壊にもこの mixing の

効果が現れる。しかし、 $SO(10)$ model においてこの mixing の効果は極めて小さいため無視できる。 E_6 model においてこの mixing 自体は大きいため無視できないが、大きい効果が3世代目粒子などへの影響で核子崩壊に関わらないため、mixing を無視する。

核子崩壊を計算する上で GUT Higgs VEV は極めて重要である。Anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model において VEV の値は anomalous $U(1)_A$ charge で決まる。ここでは

$$x = 1 \times 10^{16} \text{GeV}, \quad v_c = 5 \times 10^{14} \text{GeV}, \quad v_\phi = 5 \times 10^{15} \text{GeV}. \quad (4.48)$$

として計算した。これは anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model が持つ2つの典型的な anomalous $U(1)_A$ charge 設定である ($x \sim \lambda^{0.5} \Lambda_G, v_c \sim \lambda^{2.5} \Lambda_G, v_\phi \sim \lambda \Lambda_G$) と ($x \sim \lambda \Lambda_G, v_c \sim \lambda^2 \Lambda_G, v_\phi \sim \lambda^{0.5} \Lambda_G$) のうちの前者である。この charge 設定を見た理由はこの charge 設定においては E_6 gauge boson X'' からの寄与が大きくなるからである。 $SO(10)$ model における模型特定の結果はどちらの charge 設定においても $SO(10)$ gauge boson X' からの寄与が大きいためほとんど変わらない結果を出す。

今回の計算において対角化行列の不定性に注目した。この対角化行列の不定性は GUT scale での Yukawa structure が持つ $O(1)$ 係数の不定性から来るものであり、 $O(1)$ 程度の大きさである。そのため $O(1)$ の大きさの不定性を許して対角化行列を生成することによって、対角化行列の不定性、つまり GUT scale での Yukawa structure の不定性を考慮した。この小節の計算では各独立な対角化行列に対して次のように10個ずつ行列を生成した。

1. 簡単のため対角化行列を real unitary matrix とする。
2. $L_u \sim L_d \sim R_e \sim U_{CKM \text{ type}}$ と $L_\nu \sim L_e (\sim R_d) \sim U_{MNS \text{ type}}$ より各対角化行列を生成する。ここで、

$$U_{CKM \text{ type}} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^3 \\ \lambda & 1 & \lambda^2 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_{MNS \text{ type}} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda^{0.5} & \lambda \\ \lambda^{0.5} & 1 & \lambda^{0.5} \\ \lambda & \lambda^{0.5} & 1 \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

であり、対角化行列の各要素は $O(1)$ coefficient C_{ij} ($0.5 \leq C_{ij} \leq 2$) を持つ。

3. L_u と L_ν は $L_u = L_d U_{CKM}^{(exp)\dagger}$ と $L_\nu = L_e U_{MNS}^{(exp)\dagger}$ から求める。ここで

$$U_{CKM}^{(exp)} = \begin{pmatrix} 0.97 & 0.23 & 0.0035 \\ -0.23 & 0.97 & 0.041 \\ 0.0086 & -0.040 & 1.0 \end{pmatrix}, U_{MNS}^{(exp)} = \begin{pmatrix} 0.83 & 0.54 & 0.15 \\ -0.48 & 0.53 & 0.70 \\ 0.30 & -0.65 & 0.70 \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

である [2, 70]。

各独立な対角化行列に対して 10 個の real unitary matrix を生成するため $SU(5)$ GUT model では 3 つの独立な対角化行列があるため 10^3 個の model point がある。 $SO(10)$ 、 E_6 GUT model では 4 つの独立な対角化行列があるため 10^4 個の model point がある。

4.3.2 陽子の各崩壊過程における寿命

陽子の各崩壊過程に対して寿命を計算した。結果は図 2、3、4 の通りである。図において横軸に次元 6 演算子による核子崩壊において重要な崩壊過程である $p \rightarrow \pi^0 + e^c$ 崩壊過程の寿命を縦軸にその他の崩壊過程をとった。図 2 における大きな灰色の点は VEV を anomalous $U(1)_A$ $SU(5)$ SUSY GUT model と同じ値を用いた minimal $SU(5)$ GUT model の結果である。この模型では全ての対角化行列を固定することができる [71]。しかし、この模型においては down-type quark Yukawa matrix と charged lepton Yukawa matrix の間に好ましくない関係が生じてしまう。

これらの結果から以下のことが読み取れる。1 つめは予言された $p \rightarrow \pi^0 + e^c$ mode の寿命が現在の実験からの下限である $\tau(p \rightarrow \pi^0 + e^c) > 1.29 \times 10^{34}$ 年 [8] に近いことである。もちろんこの結果は GUT scale に極めて依存している。今回は $\Lambda_A \sim 1 \times 10^{16}$ GeV において求めた。つまり、 $a = -1$ ($\Lambda_A \sim 5 \times 10^{15}$ GeV) の時は寿命が 1 桁近く短くなるので下限を下回ってしまう。しかし、GUT scale は $O(1)$ 程度の不定性を持つ、加えて hadron matrix element も誤差を持つため、その効果を考慮すると $a = -1$ model が否定されたわけではない。ここで強調しておきたいことはこの模型において次元 6 演算子による核子崩壊はいつ観測されてもおかしくない状況にあるということである。2 つめは antineutrino を終状態に含む崩壊過程についてである。これらの崩壊過程において decay width を計算するときに全ての neutrino の flavor を足し合わせている。これは実験機器が neutrino の flavor を特定できないからである。このため

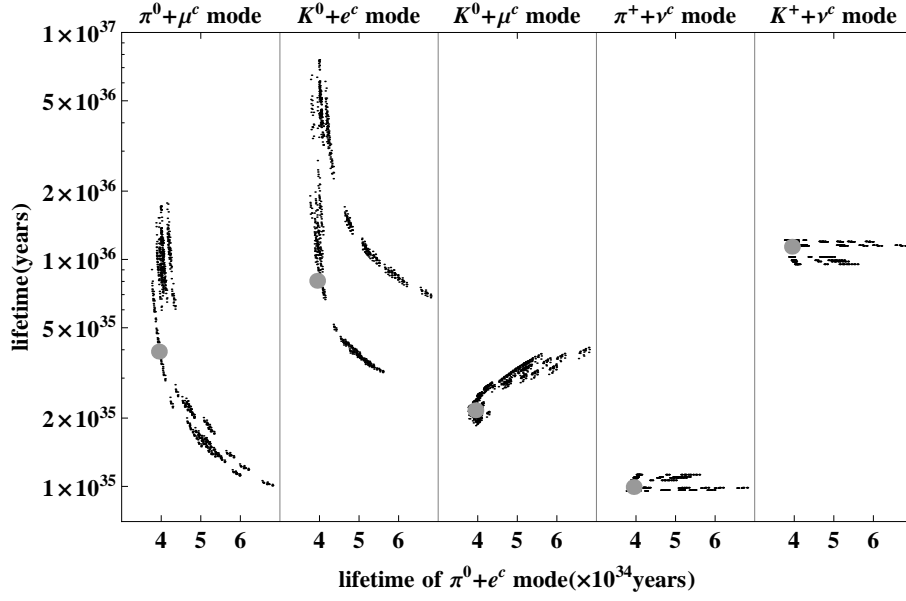


図 2: $SU(5)$ model での陽子の各崩壊過程の寿命
 $M_X = g_{GUT}x$, $x = 1 \times 10^{16}$ GeV とした。灰色の大きな点は minimal $SU(5)$ GUT model [71] が予言する対角化行列を用いた時の寿命である。

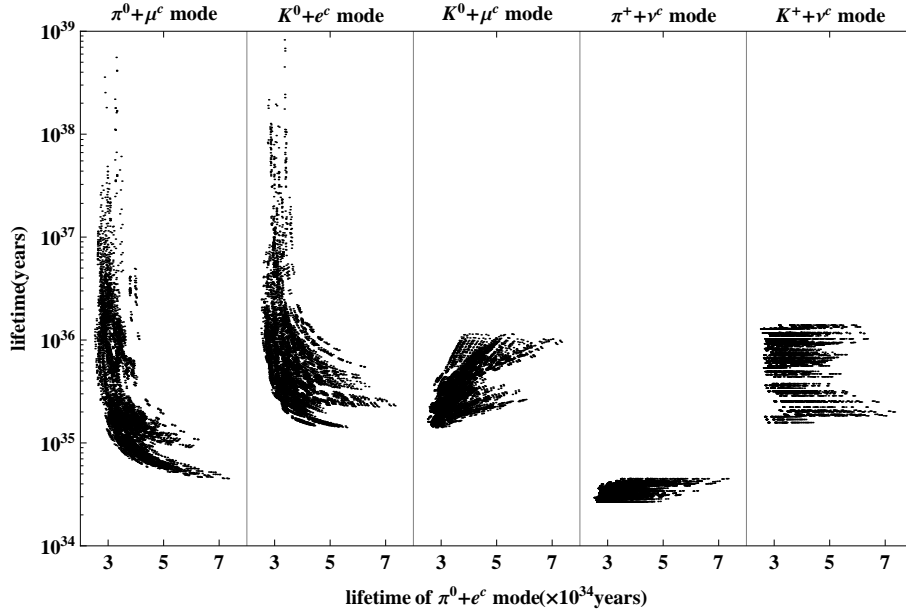


図 3: $SO(10)$ model 1 での陽子の各崩壊過程の寿命
 $M_X = g_{GUT}x$, $M_{X'} = g_{GUT}\sqrt{x^2 + v_c^2}$, $x = 1 \times 10^{16}$ GeV, $v_c = 5 \times 10^{14}$ GeV とした。

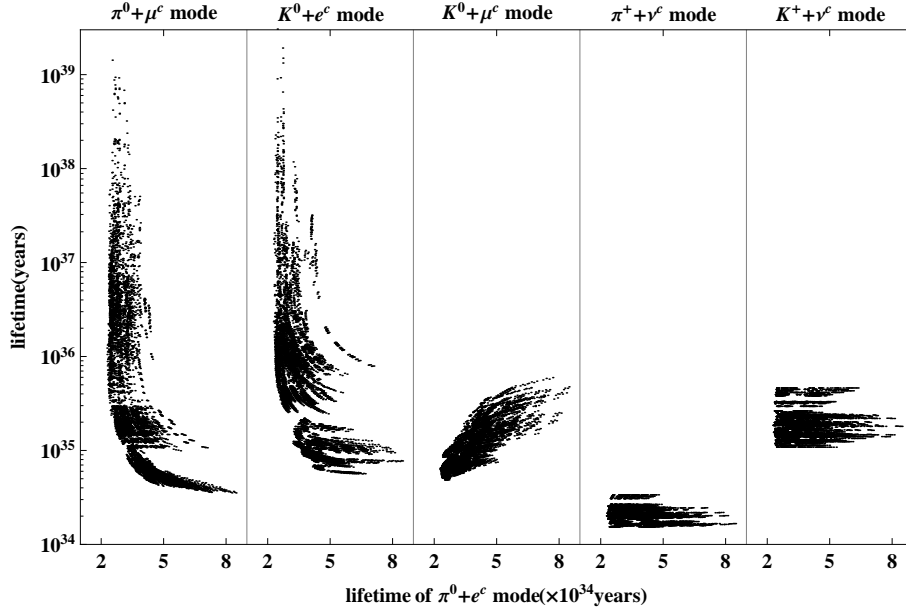


図 4: E_6 model 1 での陽子の各崩壊過程の寿命

$M_X = g_{GUT}x$, $M_{X'} = g_{GUT}\sqrt{x^2 + v_c^2}$, $M_{X''} = g_{GUT}\sqrt{\frac{x^2}{4} + v_\phi^2}$, $x = 1 \times 10^{16}$ GeV, $v_c = 5 \times 10^{14}$ GeV, $v_\phi = 5 \times 10^{15}$ GeV とした。

対角化行列の unitary 性により、 L_ν の不定性は annineutrino を終状態に含む崩壊過程に現れなくなる。これによりこれらの崩壊過程の不定性は小さくなっている [72]。3 つめは $p \rightarrow \pi^0 + \mu^c$, $p \rightarrow K^0 + e^c$ 過程のような flavor-changing 崩壊過程についてである。これらの flavor-changing 崩壊過程は $p \rightarrow \pi^0 + e^c$, $p \rightarrow K^0 + \mu^c$ 過程のような flavor-unchanging 崩壊過程に比べて scatter plot の範囲、つまり対角化行列の不定性から受ける影響が大きい。これは flavor-changing 過程が対角化行列の非対角成分から来るのに対して、flavor-unchanging 過程が対角化行列の対角成分から来ることが原因である。対角化行列について各成分が $O(1)$ の不定性を持つとしたが、対角化行列の持つ階層性を考えると本体対角成分はあまり不定性を持たない、対して非対角成分は $O(1)$ の不定性をもつ。これが flavor-changing 過程の scatter plot の範囲が大きい理由である。4 つめが $p \rightarrow \pi^0 + \mu^c$, $p \rightarrow K^0 + e^c$, $p \rightarrow K^0 + \mu^c$ 崩壊過程の scatter plot の形である。これは対角化行列の階層性と unitarity から理解できる。 L_e , R_e において small mixing が成り立つ場合 $p \rightarrow \pi^0 + e^c$ 崩壊過程の寿命は短くなる。small mixing により anti-ekectoron flavor が変化しにくくなるので

$p \rightarrow \pi^0 + \mu^c$, $p \rightarrow K^0 + e^c$ 崩壊過程の寿命は長くなる。逆に $p \rightarrow K^0 + \mu^c$ 崩壊過程の寿命は短くなる。この関係が scatter plot において現れている。最後に antineutrino を終状態に持つ崩壊過程についてである。それぞれの図において、特に $SU(5)$ model においてこれらの崩壊過程において横軸と平行な線が見える。これは L_e , R_e が $p \rightarrow \pi^0 + e^c$ には影響を与えるが antineutrino を終状態に持つ崩壊過程には影響を与えないからである。 L_e は L_ν が $L_\nu = L_e U_{MNS}^{(exp)\dagger}$ より求められるため antineutrino を終状態に持つ崩壊過程に影響を与えるように思われる。しかし、前述の通り L_ν の不定性は unitary 性と flavor の足し合わせより antineutrino を終状態に持つ崩壊過程に影響を与えないため、 L_e の違いが antineutrino を終状態に持つ崩壊過程に影響を与えることはない。横軸に平行な線の本数は antineutrino を終状態に持つ崩壊過程には影響を与え $p \rightarrow \pi^0 + e^c$ 崩壊過程には影響を与えない対角化行列の数に依存している。

次の小節では核子崩壊によってどの GUT model が実際にこの世界を記述する GUT であるのか特定できるのかを見る。特定のために、 $p \rightarrow \pi^0 + e^c$, $n \rightarrow \pi^0 + \nu^c$, $pK^0 + \mu^c$ 崩壊過程を用いた。これらを用いる理由はこれらに対角化行列の不定性からの影響が小さいからである。 $n \rightarrow \pi^0 + \nu^c$ は $p \rightarrow \pi^+ + \nu^c$ 崩壊過程と同じ対角化行列の不定性からの影響を持つ。

4.4 核子崩壊による模型特定

ここでは核子崩壊を用いて模型特定ができるのかを見る。模型特定において $p \rightarrow \pi^0 + e^c$, $n \rightarrow \pi^0 + \nu^c$, $p \rightarrow K^0 + \mu^c$ 崩壊過程は重要である。これまで見てきた寿命や崩壊幅は GUT Higgs VEV に極めて強く依存する。このため今回は崩壊幅の比を用いて模型特定ができないかを確認した。崩壊幅の比は VEV の大きさそのものには依存せず、それぞれの VEV の比に依存することになる。これより、以降の結果は VEV の大きさが違って、比の大きさが同じ模型には適応可能である。

まず初めに $p \rightarrow \pi^0 + e^c$ 崩壊過程と $n \rightarrow \pi^0 + \nu^c$ 崩壊過程の崩壊幅の比 $R_1 \equiv \frac{\Gamma_{n \rightarrow \pi^0 + \nu^c}}{\Gamma_{p \rightarrow \pi^0 + e^c}}$ についてみていく。この値は統一群を特定するのに特に $SU(5)$ 群か $SO(10)$ 群かを特定するのに重要な値として知られている [73]。今回我々は E_6 群を含めても R_1 が統一群を特定するために重要な値であることを見た。なぜなら、 $SU(5)$ 、 $SO(10)$ 、 E_6 統一群のなかで統一群が大きくなればなるほどより R_1 が大きくなるからである。これは式 (4.10) から分かる。まず $SU(5)$ GUT model には終状態に e^c を含む次元 6 演算

子は3つある。⁶ 対して終状態に ν^c を含む次元6 演算子は1つである。つまり R_1 は1より小さくなる。 $SO(10)$ GUT model では両方の次元6 演算子がそれぞれ1つずつ増える。⁷ これにより R_1 の値は $SU(5)$ GUT model に比べて大きくなると期待される。 E_6 model においても基本的に $SO(10)$ model と同様である。しかし、一つだけ異なるのは E_6 model では mixing を通して $p \rightarrow \pi^0 + e^c$ 崩壊過程と $n \rightarrow \pi^0 + \nu^c$ 崩壊過程に影響を与えるということである。これにより ν^c を終状態に持つ崩壊過程は neutrino flavor を足し合わせるため e^c を終正体に持つ崩壊過程より強い影響を受けるため、より R_1 が大きくなりやすいと期待される。加えて mixing を通して影響を受けるため、 R_1 の不定性は大きくなると予想される。これらの結果はもちろん VEV の比に依存する。これらの結果は $SU(5)$ model は **10** のみからできる核子崩壊を起こす次元6 演算子を持つものに対して、 $SO(10)$ 、 E_6 は必ず **5** 含む次元6 演算子しか現れないことが原因である。 X' 、 X'' が decouple するほど重い模型では R_1 は期待したほど大きくはならない。しかし、anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model のような X' 、 X'' の効果が効くような模型では R_1 は極めて重要になる。

R_1 を $SU(5)$ model、 $SO(10)$ model 1、 E_6 model 1 で計算した。結果は以下のとおりである。

$$R_1 = \frac{\Gamma_{n \rightarrow \pi^0 + \nu^c}}{\Gamma_{p \rightarrow \pi^0 + e^c}} = \begin{cases} 0.18 - 0.34 & SU(5) \text{ model} \\ 0.35 - 0.90 & SO(10) \text{ model 1} \\ 0.38 - 2.5 & E_6 \text{ model 1} \end{cases} \quad (4.51)$$

これより確かに統一群が大きくなるについて R_1 も大きくなっていることが分かる。しかし、対格化行列の $O(1)$ 不定性を考慮すると完全に判別がつくというほどではなく、 $SO(10)$ model 1 と E_6 model 1 の両方が実現できる値の領域が存在している。

$SO(10)$ model 1 と E_6 model 1 を区別するためにもう一つの崩壊幅の比、 $R_2 \equiv \frac{\Gamma_{p \rightarrow K^0 + \mu^c}}{\Gamma_{p \rightarrow \pi^0 + e^c}}$ を見る。これは終状態に1世代目のみを持つ崩壊過程と2世代目を含む崩壊過程の比のため GUT scale での Yukawa structure の影響を見ることができると期待される。この R_2 は特に anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model において模型特定を行うときに極めて重要な役割を

⁶ $SU(5)$ X-type gauge boson X による次元6 演算子によるものでも E^c を含むものは $SO(10)$ model から現れる。

⁷もちろん X による次元6 演算子によるものも増えるが、その演算子は **5** の mixing によって元々の演算子で減ってしまった効果を埋め合わせるものなのでここでの数に含めない。

果たす。理由は以下の通りである。anomalous $U(1)_A$ $SO(10)$, E_6 SUSY GUT において SM の 2 世代目の $\bar{5}$ は共に $SO(10)$ $\mathbf{10}$ 中の $\bar{5}$ である $\bar{5}'$ が main mode である。そして、 $SO(10)$ model において加わる X-type gauge boson X' による核子崩壊次元 6 演算子は $\bar{5}'$ を含まない。つまり、 $\bar{5}$ 由来の 2 世代目の粒子たちは mixing を通してしか現れない。これにより $SO(10)$ model では R_2 は小さくなるのが期待される。一方、 E_6 model において加わる X-type gauge boson X'' による核子崩壊次元 6 演算子は $\bar{5}'$ のみしか含まない。つまり、 E_6 model において加わる演算子からは主に 2 世代目の粒子を終状態に持つ。これにより E_6 model においては R_2 は大きくなるのが期待される。図 5 では実際にその効果を見た。横軸を R_1 、縦軸を R_2 として scatter plot を行った。その結果、多くの場合 $SU(5)$ 、 $SO(10)$ 、 E_6 それぞれの群に基づく 3 つの anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model が 2 つの比を観測することによって特定することができるということが分かった。

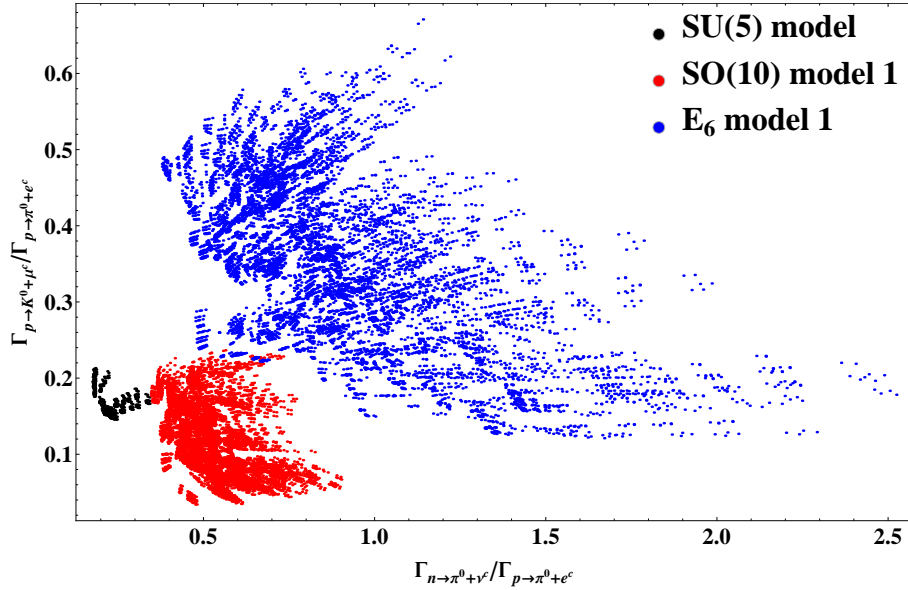


図 5: R_1 、 R_2 による模型特定 その 1

独立な対角化行列に対してそれぞれ 10 個の実 unitary matrix を生成する。よって、独立な対角化行列を 3 つ持つ $SU(5)$ model は 10^3 個の model point を、独立な対角化行列を 4 つ持つ $SO(10)$, E_6 model は 10^4 個の model point を持つ。VEV は $x = 1 \times 10^{16}$ GeV, $v_c = 5 \times 10^{14}$ GeV, $v_\phi = 5 \times 10^{15}$ GeV とした。

もちろんこの結果は model に強く依存する。特に今回の計算においては $x = 1 \times 10^{16}$ GeV, $v_c = 5 \times 10^{14}$ GeV, $v_\phi = 5 \times 10^{15}$ GeV とした VEV には強く依存する。しかし、今回の VEV 設定 $v_c \ll x$ は $SO(10)$ model で加わった核子崩壊次元 6 演算子の効果を最も強く得ることの得ることのできる設定である。つまり、今回の VEV 設定で $SU(5)$ 、 $SO(10)$ model において R_1 は 1 を越えなかったため、1 より大きい R_1 が観測されたときには統一群は E_6 群であることを強く示唆する。

Anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model 以外では VEV の関係は多くの場合 $v_c, v_\phi \geq x$ となる。これはこの関係を満たさないと v_c, v_ϕ の真空期待値から質量を得た粒子たちが多くの場合 gauge coupling unification を阻害するからである。もちろん $v_c, v_\phi \ll x$ となると $SO(10)$ 、 E_6 model の予言は $SU(5)$ model と同じになる。ここでは anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model 以外での gauge coupling unification を満たす条件の中で最も X' 、 X'' の寄与を受けることになる $x = v_c = v_\phi$ という条件の基で模型特定がどのようになるのかを見る。この条件は今回考えた模型と Higgs sector はかなり異なるが”one scale symmetry breaking” と呼ばれる機構を実現する模型の持つ真空期待値の条件である [74]。結果は図 5 の通りである。たしかにこの VEV 設定においては $SO(10)$ model の model point は $SU(5)$ model のものに近づき、 E_6 model の model point は $SO(10)$ model のものに近づいた。

最後に比 R_1 において $p \rightarrow \pi^+ + \nu^c$ 崩壊過程でなく $n \rightarrow \pi^0 + \nu^c$ 崩壊過程を用いた理由を述べる。これには 2 つの理由がある、一つ目は $n \rightarrow \pi^0 + \nu^c$ 崩壊過程の方が観測しやすいからである。なぜなら π^+ の崩壊は neutrino を含むため、観測が難しくなるためである。もう一つは $n \rightarrow \pi^0 + \nu^c$ 崩壊過程は $p \rightarrow \pi^0 + e^c$ 崩壊過程と同じ hadron matrix element を持つため比をとることによってその影響を打ち消すことができるということである。

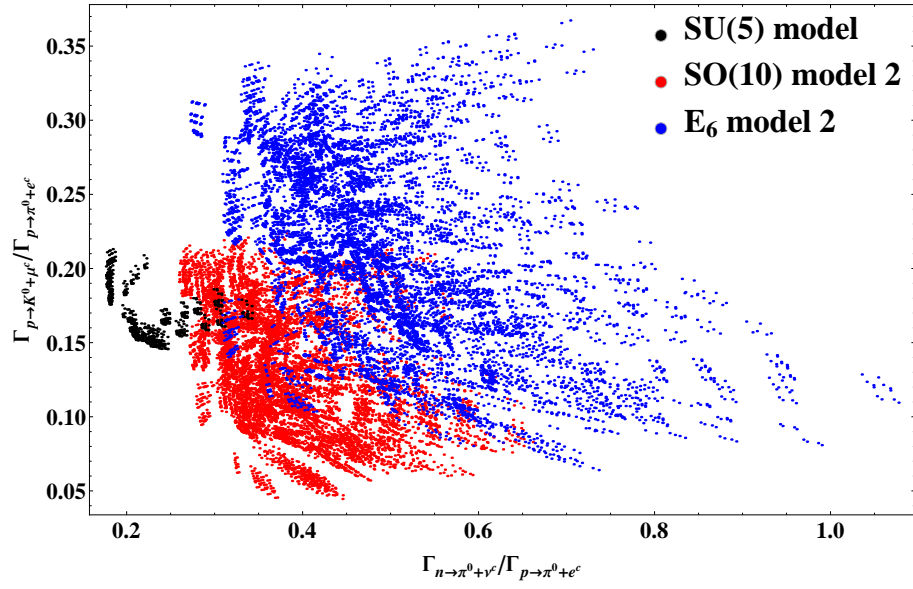


図 6: R_1 、 R_2 による模型特定 その 2

図 5 の caption で見たように $SU(5)$ は 10^3 model point を持つ $SO(10)$, E_6 は 10^4 model point を持つ。VEV は $x = v_c = v_\phi$ とした。

4.5 Anomalous $U(1) E_6 \times SU(2)_F$ SUSY GUT model における核子崩壊による模型特定

Anomalous $U(1) E_6 \times SU(2)_F$ SUSY GUTにおいて前小節の anomalous $U(1) E_6$ model と核子崩壊による模型特定がどのように変化するかを見る。この模型では世代対称性などによって GUT scale での Yukawa structure が制限される。これにより、これまでの核子崩壊に与える影響を見てきた対角化行列の不定性も小さくなる。具体的には E_6 model には核子崩壊の計算に用いる 7 つの対角化行列のうち 4 つが独立であった。このため、各対角化行列は 3 つの mixing angle を持つため parameter 数はそれぞれ 3 つであり、 E_6 model の対角化行列の持つ parameter の総数は 12 個であった。対して、 $E_6 \times SU(2)_F$ model においては、まず CKM, MNS matrix を満たすために 2 つの対角化行列、つまり 6 つの parameter を使う。くわえて式 (4.19)~(4.22) 中の 9 条件を課して考えるため parameter の総数は $21 - 6 - 9 = 6$ 個と 1 つの符号である。1 つの符号は式 (4.20) の最後の条件において mixing angle の符号が決められないためである。つまり、対角化行列の持つ parameter が半分に減ることになる。これにより E_6 model と同様に崩壊幅の比 R_1, R_2 に対する scatter plot を行うとその値の領域は狭くなることが期待される。模型特定のための 2 つの比の scatter plot では比較するに当たって前小節では E_6 model において 10^4 個であった model point を同じ計算を 10^2 回行うことにより 10^6 個に増やした。主な比較対象である E_6 model 1 においては model point を増やすことでどのように scatter plot の領域が変化したのかも示す。他の $SU(5)$ model、 $SO(10)$ model 1 での変化は付録に記載する。

4.5.1 模型の設定

この模型による設定は E_6 model 1 と比較するために GUT scale での Yukawa structure つまり、対角化行列以外は同じ設定である。特に核子崩壊への影響の大きい GUT Higgs VEV は E_6 model 1 と同じ

$$x = 1 \times 10^{16} \text{GeV}, \quad v_c = 5 \times 10^{14} \text{GeV}, \quad v_\phi = 5 \times 10^{15} \text{GeV}, \quad (4.52)$$

である。この VEV を持つ模型を $E_6 \times SU(2)_F$ model 1 と呼ぶ。この模型に加えて $x = 5 \times 10^{15} \text{GeV}$ 、 $v_c = 5 \times 10^{14} \text{GeV}$ 、 $v_\phi = 5 \times 10^{15} \text{GeV}$ という VEV を持つ模型における結果も見ると。この模型では E_6 特有の、 X'' を媒介する次元 6 演算子による核子崩壊が弱くなる。この VEV を持つ模

型を $E_6 \times SU(2)_F$ model 2 と呼ぶ。この model における GUT scale での Yukawa structure は model 1 のものと同じである。

ここでは次のように対角化行列を生成する。

1. θ_{23}^{uL} ($s_{23}^{uL} = \sin \theta_{23}^{uL}$) を $\theta_{23}^{uL} = B_{23}^{uL} \lambda^2$ の関係式から生成することによって L_u 、 R_u は関係式 (4.19)、(4.20) から固定することが出来る。ここで B_{23}^{uL} は大きさ $O(1)$ の係数であり、0.5 から 2 の間の大きさにランダムに生成している。
2. R_d の 3 つの parameter を θ_{23}^{uL} と同様にしてランダムに生成する。 L_d は $L_d = L_u U_{CKM}^{(exp)}$ より決定される。
3. L_e 、 R_e の持つ 6 つの parameter の内 2 つをランダムに生成する。その結果関係式 (4.19)、(4.21)、(4.22) より残りの 4 つの parameter を決定することが出来る。
4. L_ν は $L_\nu = L_e U_{MNS}^{(exp)}$ より決定される。
5. 生成した対角化行列がこの模型が予言する対角化行列 (4.15)-(4.18) から $O(1)$ の大きさの範囲にあるかテストする。これまでと同様に $O(1)$ の大きさの範囲とは 0.5 から 2 までである。

ここで $m_u/m_c = 0.0021$ 、 $m_\mu/m_\tau = 0.059$ [75]、

$$U_{CKM}^{(exp)} = \begin{pmatrix} 0.97 & 0.23 & 0.0035 \\ -0.23 & 0.97 & 0.041 \\ 0.0086 & -0.040 & 1.0 \end{pmatrix}, U_{MNS}^{(exp)} = \begin{pmatrix} 0.83 & 0.54 & 0.15 \\ -0.48 & 0.53 & 0.70 \\ 0.30 & -0.65 & 0.70 \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

[2, 70] を用いた。

ここで注意すべきことはこれまでの世代対称性を課していなかったときとの生成手順の違いである。世代対称性を課していないときにはそれぞれの対角化行列が独立であったため、独立に生成しそれぞれを組み合わせさせて計算を行っていた。しかし、今回の計算においては生成時に条件を課するためそれぞれに関係がある。そのため、世代対称性を課した時は関係を持つそれぞれの対角化行列を計算する回数分生成した。

4.5.2 陽子の各崩壊過程における寿命

$E_6 \times SU(2)_F$ model 1 において陽子の各崩壊過程における寿命を計算した。結果は図 7 の通りである。基本的な図の設定は前小節でのものと同

様である。ここでは模型の比較のために赤い model point の $E_6 \times SU(2)_F$ model 1 と青い model point の E_6 model 1 を重ねて表示している。

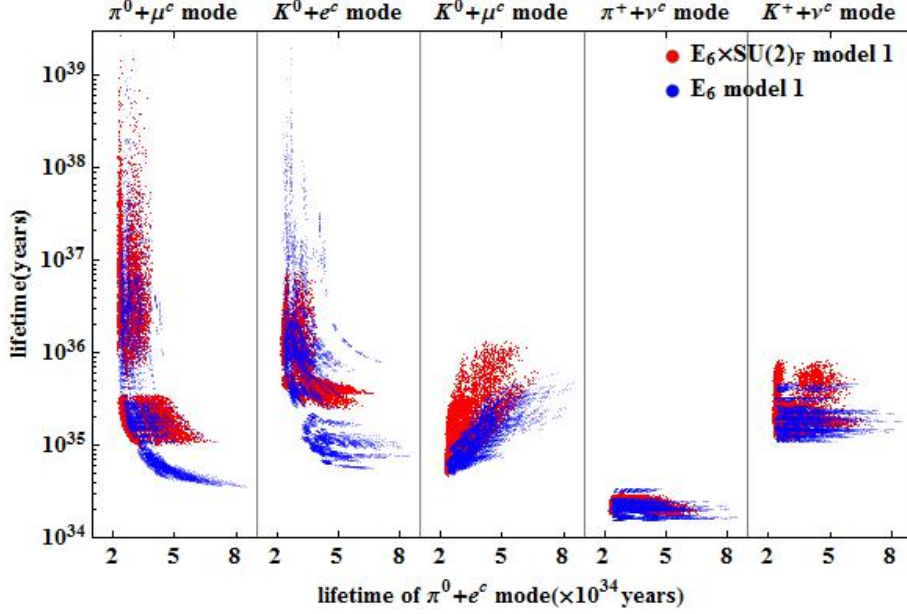


図 7: $E_6 \times SU(2)_F$ model 1 と E_6 model 1 における陽子の各崩壊過程 $M_X = g_{GUT}x$, $M_{X'} = g_{GUT}\sqrt{x^2 + v_c^2}$, $M_{X''} = g_{GUT}\sqrt{\frac{x^2}{4} + v_\phi^2}$, $x = 1 \times 10^{16}$ GeV, $v_c = 5 \times 10^{14}$ GeV, $v_\phi = 5 \times 10^{15}$ GeV とした。それぞれ 10^4 個の点を持つ。

この結果からいくつかのことが読み取れる。多くは前節での結果から読み取れることと同じである。今回の新しい模型から次の2つが読み取れる。1つ目は E_6 model 1 に比べて $p \rightarrow \pi^0 + e^c$ mode の寿命が短い範囲に集まっているということである。これは electron から他の世代への mixing が極めて小さいからである。式 (4.21) 最後の条件と R_e 行列への test により θ_{12}^{eL} は小さい値に制限される。加えて $\theta_{13}^{eL} = 0$ より L_{e11} は大きな値になる。これにより electron から他の世代への mixing が極めて小さくなる。一方、 θ_{12}^{eL} が小さくなると式 (4.21) の1番目の条件より θ_{23}^{eL} はおおきくなる傾向にある。これにより L_{e22} の値はあまり大きくなる傾向はないため $p \rightarrow K^0 + \mu^c$ mode の寿命は短い範囲にあまり集まらない。2つ目は $p \rightarrow \pi^0 + \mu^c$, $p \rightarrow K^0 + e^c$ mode の寿命が長くなっていることである。これも θ_{12}^{eL} が小さい値に制限されることが原因である。

4.5.3 核子崩壊による模型特定

$E_6 \times SU(2)_F$ model において GUT 模型の判別がどのように変化するのを見る。前節と同様に GUT 模型判別のため 2 つの decay width の比 $R_1 = \frac{\Gamma_{n \rightarrow \pi^0 + \nu^c}}{\Gamma_{p \rightarrow \pi^0 + e^c}}$ と $R_2 = \frac{\Gamma_{p \rightarrow K^0 + \mu^c}}{\Gamma_{p \rightarrow \pi^0 + e^c}}$ を用いる。

$E_6 \times SU(2)_F$ model 1 における結果は図 8 の通りである。比較対象である E_6 model 1 における結果は図 9 の通りである。今回の計算では前節の計算に比べて model point の数を増やし 10^6 点とした。これは E_6 model 1 における R_1 、 R_2 の最小値と $E_6 \times SU(2)_F$ model 1 における最小値を比較するためである。くわえて、どの R_1 、 R_2 がより実現されやすいかを見るためにグラフを散布図から等高線グラフに変えた。各図において等高線は R_1 軸、 R_2 軸の目盛りにおける最小値、最大値の間を 50 等分することにより得られる領域における model point の数が等しい部分を結んでいる。

図 8 と図 9 を比較することにより次のことが読み取れる。1 つめは $E_6 \times SU(2)_F$ model は E_6 model 1 に比べて多くの model point で R_1 、 R_2 が小さくなるということである。これは前小節において述べた electron から他の世代への mixing が極めて小さくなることによって $\Gamma_{p \rightarrow \pi^0 + e^c}$ が大きくなるためである。2 つめは $E_6 \times SU(2)_F$ model において R_1 、 R_2 のばらつきが狭くなっているということである。これは各対角化行列が条件 (4.19)～(4.22) によって制限されるからである。 R_1 、 R_2 のばらつきは狭くなったが模型判別は逆に困難になってしまった。これは $SO(10)$ model 1 の R_1 、 R_2 に近づき、 $E_6 \times SU(2)_F$ の scatter plot の領域を E_6 model 1 と $SO(10)$ model 1 の両方が実現可能であるからである。

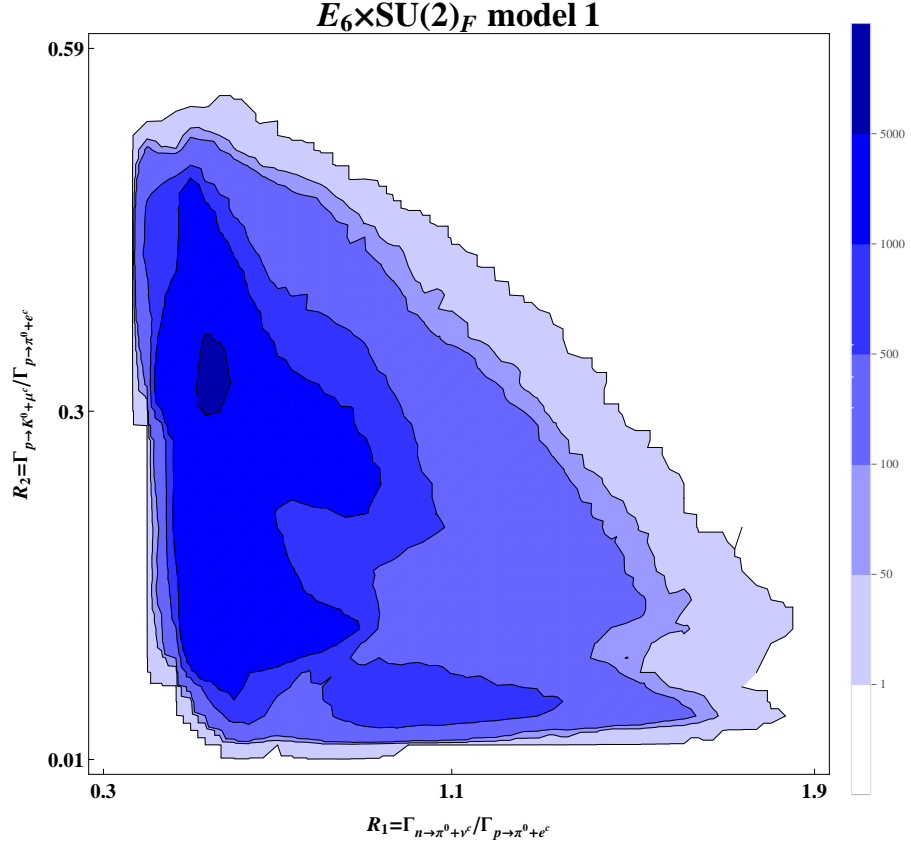


図 8: $E_6 \times SU(2)_F$ model 1 における R_1 、 R_2 等高線グラフ
 10^6 個の model point において計算した。VEV は $x = 1 \times 10^{16} \text{ GeV}$, $v_c = 5 \times 10^{14} \text{ GeV}$, $v_\phi = 5 \times 10^{15} \text{ GeV}$ とした。model point を数えるための領域は R_1 軸、 R_2 軸の目盛りにおける最小値、最大値（この図においては R_1 軸は 0.3 から 1.9 であり R_2 軸は 0.01 から 0.59 である。）の間を 50 等分することにより得られる領域である。

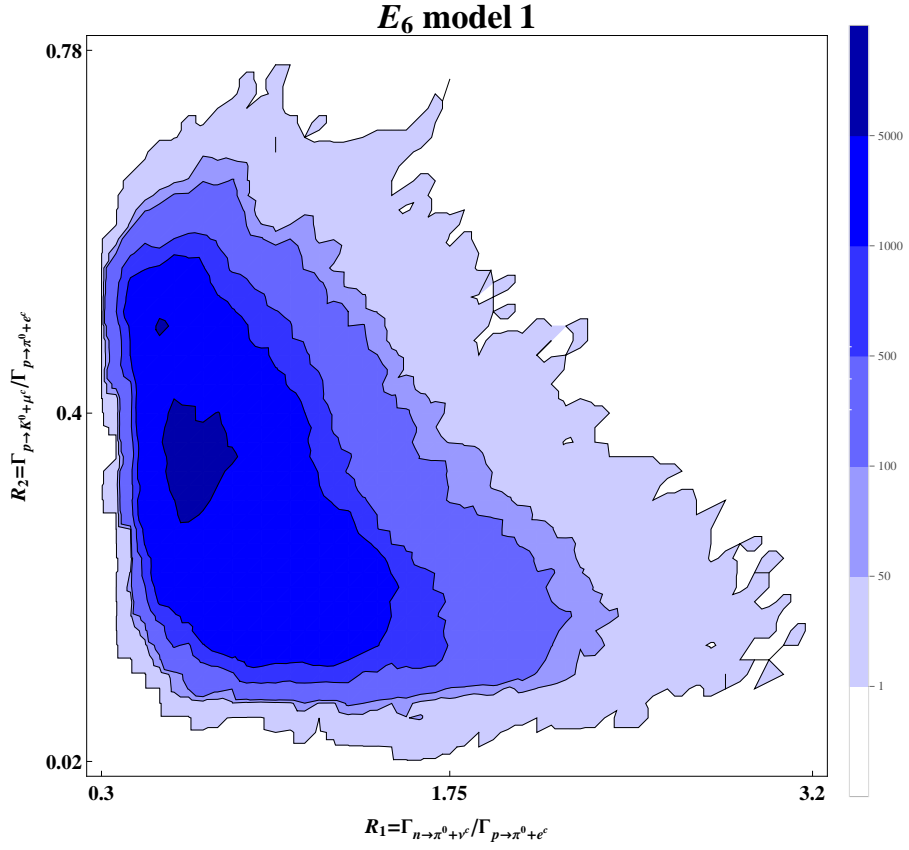


図 9: E_6 model 1 における R_1 、 R_2 等高線グラフ
 10^6 個の model point において計算した。VEV は $x = 1 \times 10^{16} \text{ GeV}$, $v_c = 5 \times 10^{14} \text{ GeV}$, $v_\phi = 5 \times 10^{15} \text{ GeV}$ とした。model point を数えるための領域は R_1 軸、 R_2 軸の目盛りにおける最小値、最大値の間を 50 等分することにより得られる領域である。

最後に $E_6 \times SU(2)_F$ model 2 についてみる。 $E_6 \times SU(2)_F$ model 1 との違いは真空期待値の設定のみである。図 10 より、 $E_6 \times SU(2)_F$ model 1 に比べて R_1 と R_2 の値がより小さくなり、ばらつきの範囲がより狭くなっていることがわかる。これは model 2 においては R_1 と R_2 に対して大きな不定性を持ち、 R_1 と R_2 を大きな値にする効果を持つ X'' を媒介することによって生じる次元 6 有効相互作用の効果が model 1 に比べて弱くなっているからである。これは model 1 における真空期待値の関係 $v_c < v_\phi < x$ の関係式が model 2 において $v_c < v_\phi = x$ と変化したため次元 6 有効相互作用において媒介される X type gauge boson の質量 M_X の間の関係が model 1 の $\frac{M_{X'}}{M_X} < \frac{M_{X''}}{M_X} < 1$ から model 2 においては $\frac{M_{X'}}{M_X} < 1 < \frac{M_{X''}}{M_X}$ と変化するからである。

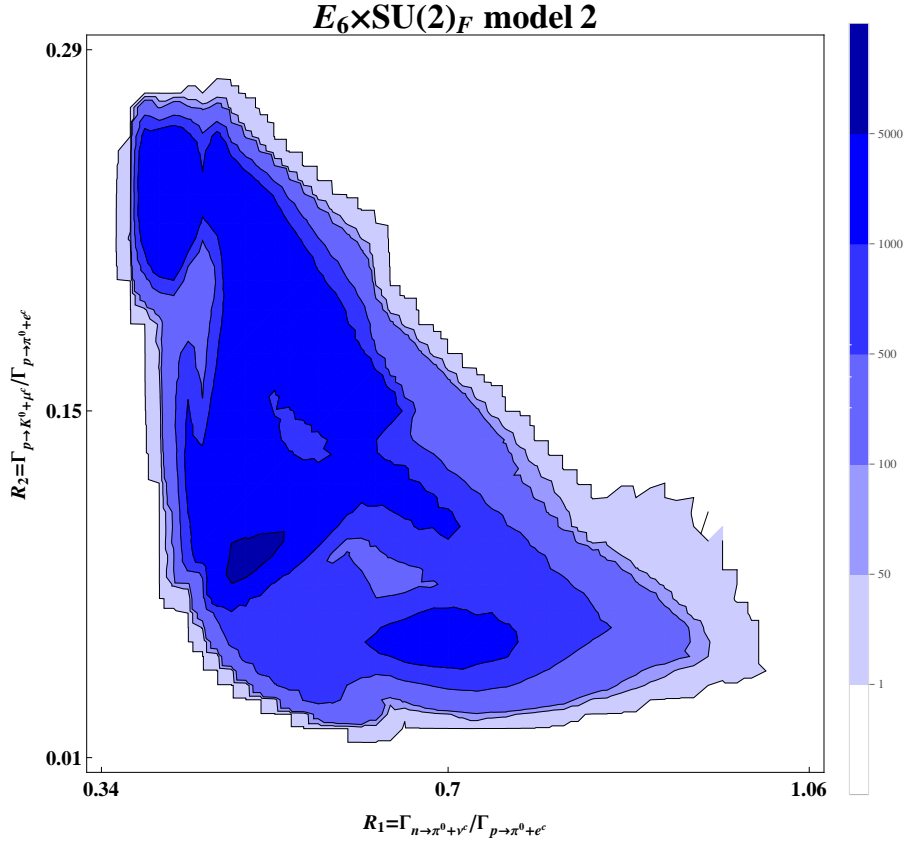


図 10: $E_6 \times SU(2)_F$ model 2 における R_1 、 R_2 等高線グラフ
 10^6 個の model point において計算した。VEV は $x = 5 \times 10^{15}$ GeV、 $v_c = 5 \times 10^{14}$ GeV、 $v_\phi = 5 \times 10^{15}$ GeV とした。model point を数えるための領域は R_1 軸、 R_2 軸の目盛りにおける最小値、最大値の間を 50 等分することにより得られる領域である。

5 まとめと議論

本論文では次元 6 演算子による核子崩壊を用いた超対称大統一模型特定について研究した。模型特定を考えるとときに特に GUT scale における Yukawa matrix が持つ不定性を考慮しても模型が特定できるかに着目した。

核子崩壊はほぼ唯一の観測可能な超対称大統一理論特有の現象であるため模型特定のための現象としては極めて有用であると考えられる。しかし、核子崩壊にはいくつかの不定性がある。特に GUT scale からの不定性は極めて大きい。次元 6 演算子による核子崩壊における核子の寿命は GUT scale の 4 乗に比例する。このため核子崩壊の寿命そのものを用いて模型特定を行うのは極めて困難である。本論文ではこの不定性を減らすために核子崩壊の崩壊幅の比を用いて核子崩壊による模型特定を行うことが出来ないかを見た。崩壊幅の比は標準模型群までに対称性が破れる energy scale が 1 つしかない $SU(5)$ 群では GUT scale からの破れを完全に打ち消すことが出来る。 $SO(10)$ 、 E_6 群では対称性が破れる energy scale が複数個あるので energy scale の比に依存する。崩壊幅の比を考えてもまだいくつかの不定性がある。その 1 つが GUT scale における Yukawa matrix が持つ不定性、つまり、対角化行列が持つ不定性から来るものである。今回はこの不定性に特に注目した。そのため、核子崩壊を考える模型は Yukawa matrix が持つ不定性の範囲で low energy で観測される quark、lepton の質量と混合を実現している模型が好ましい。

Anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model はそのような模型の一つである。超対称大統一模型では主に次元 6、次元 5 演算子によって核子崩壊が生じる。この模型では次元 6 演算子による核子崩壊が支配的になるため次元 6 演算子による核子崩壊を用いて超対称大統一模型の特定を試みた。加えて、この模型では $SO(10)$ 群において加わる次元 6 演算子の影響は一般的に $SU(5)$ 群にある $SO(10)$ 、 E_6 群にも共通にある次元 6 演算子の影響と同じくらいになる。 E_6 群において加わる次元 6 演算子の影響は模型に依存するが $SU(5)$ 群にある演算子よりも強い影響を持つことがある。今回はそれぞれ新しく加わる次元 6 演算子の効果が大きい模型において超対称大統一模型特定が行えないか見た。

模型特定を行う上で 2 つの比に注目した。1 つ目は $R_1 = \frac{\Gamma_{n \rightarrow \pi^0 + \nu^c}}{\Gamma_{p \rightarrow \pi^0 + e^c}}$ であり、この比は大統一群特定に有用だと知られている比であるだけでなく、崩壊幅の比のもつもう 1 つの不定性 hadron matrix element からの不定性を打ち消しているため極めて有用な観測値である。2 つ目は $R_2 = \frac{\Gamma_{p \rightarrow K^0 + \mu^c}}{\Gamma_{p \rightarrow \pi^0 + e^c}}$

である。この比は終状態に 1 世代目のみをもつ崩壊過程と 2 世代目をもつ崩壊過程の比であるため GUT scale での Yukawa structure からの情報を見ることが出来る。

GUT scale が 10^{16} GeV 近辺である典型的な anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model において核子崩壊の計算を行った。この時、 $p \rightarrow \pi^0 + e^c$ 崩壊過程の核子の寿命が現在の実験からの下限に極めて近い値が出た。つまり、近い将来とくに Hyper-Kamiokande などの次世代の検出器が完成したときには核子崩壊の観測が強く期待されることになる。また、 $SU(5)$ 、 $SO(10)$ 、 E_6 群の 3 つの統一群による典型的な anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model において前述の 2 つの比によって 3 つの模型、統一群が特定できるかどうかを見た。結果、多くの場合、2 つの比を測定することによって統一群を特定することが出来るということが分かった。もちろん、この結果は強く模型に依存している。しかし、 R_1 を用いて E_6 群を特定することは模型に依存せず可能な場合がある。それは R_1 が 1 より大きくなる場合である。今回考えた模型において E_6 群による模型以外ほとんどの場合 R_1 は 1 より小さかった。今回考えた $SO(10)$ 群による模型は gauge interaction による核子崩壊次元 6 演算子を考えたとき R_1 が最も大きくでる模型である。このため、 R_1 が測定され、1 より大きかったとき統一群は E_6 群である可能性が高いことがわかる。

本論文では世代対称性を加えた模型 anomalous $U(1)_A \times E_6 \times SU(2)_F$ SUSY GUT model において核子崩壊による模型特定がどのように変化するのを見た。これは世代対称性が GUT scale での Yukawa matrix の不定性を制限する影響を受けて模型特定に用いた核子崩壊崩壊幅の比の不定性が小さくなると期待されるからである。計算の結果確かに比の不定性が小さくなることが分かった。しかし、制限された値は $SO(10)$ 、 E_6 群ともに実現可能な領域に集中してしまったため、不定性は小さくなったが特定は逆に困難になってしまった。

この核子崩壊による超対称大統一模型特定手法において改良すべき点がある。それは low energy において測定される quark, lepton の質量と混合を厳密に満たす parameter をもとめ、その parameter において計算を行うことである。本論文で計算を行った模型においてはそれらを大まかに満たすことが出来る模型である。厳密に満たしているかを見るためには繰り込み群方程式を真剣に考える必要がある。本論文で計算を行った模型においてこれを行うには 1 つ大きな困難がある。それは low energy scale から GUT scale までの間に多数存在する新しい粒子の影響を考慮し

なくてはならないことである。この影響を考慮して厳密に low energy での測定を満たす parameter をもとめ核子崩壊による超対称大統一模型特定手法を発展させていきたい。

謝辞

本研究遂行、本論文作成にあたって数多くの方にお世話になりました。特に指導教官である前川展祐先生には研究を進めるにおいて様々な面でご指導を頂きありがとうございます。指導教官である前川先生だけでなく研究室の先生方には研究を進めるうえで様々なご指導を頂きました。ありがとうございます。また、研究室の皆様、特に同期の皆様には研究を進めるうえで議論の相手など様々な面でサポートをして頂きました。ありがとうございます。

また、本論文は「名古屋大学グローバル COE プログラム 宇宙基礎原理の探求」と「名古屋大学 博士課程教育リーディングプログラム フロンティア宇宙開拓リーダー養成プログラム」からのサポートによって書き上げることが出来ました。この場を借りて感謝を申し上げます。

A Yukawa coupling matrix の対角化 (main order)

ここでは 3×3 行列である Yukawa coupling matrix の対角化についてまとめる。以下の計算においては Yukawa coupling matrix が hierarchy を持つ、つまり $i < k$ かつ $j < l$ において $Y_{ij} \ll Y_{kj}$ と $Y_{ij} \ll Y_{il}$ が成立することを仮定する。これらの計算は ref [76, 54] を参考にした。

Yukawa interaction の係数である Yukawa coupling matrix は interaction に含まれる Higgs の VEV を拾う事によって fermion の mass matrix (Dirac) になる。そして、この mass matrix M を対角化することによって fermion たちは gauge eigenstate ψ から mass eigenstate ψ' に変換され、対角行列 M_{diag} の各成分は mass eigenstate の mass となる。対角化を行う時に用いる unitary 行列を対角化行列 (diagonalizing matrix) L_ψ, R_ψ と呼び、次のように対角化する。

$$\begin{aligned} \psi_{Li} M_{ij} \psi_{Rj}^c &= (L_\psi^\dagger \psi_L)_i (L_\psi^t M R_\psi)_{ij} (R_\psi^\dagger \psi_R^c)_j \\ &= \psi'_{Li} M_{diag\ ij} \psi'^c_{Rj} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

ここで i, j は 1, 2, 3 を走る世代の足である。

では Yukawa coupling matrix Y_{ij} の対角化を見る。Yukawa coupling matrix の対角化は $L_{ij}^t Y_{i'j'} R_{j'j} = Y_{diag\ ij}$ のように行い、 Y_{diag} は対角行列である。対角化行列 L, R は次のように parametrize することができる。

$$L^t \equiv \begin{pmatrix} c_{12}^L & -s_{12}^L & 0 \\ s_{12}^{L*} & c_{12}^L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13}^L & 0 & -s_{13}^L \\ 0 & 1 & 0 \\ s_{13}^{L*} & 0 & c_{13}^L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23}^L & -s_{23}^L \\ 0 & s_{23}^{L*} & c_{23}^L \end{pmatrix} \equiv P_{12}^L P_{13}^L P_{23}^L, \quad (\text{A.2})$$

$$R \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23}^R & s_{23}^R \\ 0 & -s_{23}^{R*} & c_{23}^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13}^R & 0 & s_{13}^R \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}^{R*} & 0 & c_{13}^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12}^R & s_{12}^R & 0 \\ -s_{12}^{R*} & c_{12}^R & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv P_{23}^{R\dagger} P_{13}^{R\dagger} P_{12}^{R\dagger} \quad (\text{A.3})$$

ここで $s_{ij}^{L/R} \equiv \sin \theta_{ij}^{L/R} e^{i\chi_{ij}^{L/R}}$, $c_{ij}^{L/R} \equiv \cos \theta_{ij}^{L/R}$ であり、 $i, j = 1, 2, 3$ である。Yukawa coupling matrix Y を

$$Y \equiv \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

とすると、次のように対角化されることになる。

$$\begin{aligned}
L^t Y R &= P_{12}^L P_{13}^L P_{23}^L \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix} P_{23}^{R\dagger} P_{13}^{R\dagger} P_{12}^{R\dagger} \simeq P_{12}^L P_{13}^L \begin{pmatrix} y_{11} & y'_{12} & y_{13} \\ y'_{21} & y'_{22} & 0 \\ y_{31} & 0 & y_{33} \end{pmatrix} P_{13}^{R\dagger} P_{12}^{R\dagger} \\
&\simeq P_{12}^L \begin{pmatrix} y'_{11} & y'_{12} & 0 \\ y'_{21} & y'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & y_{33} \end{pmatrix} P_{12}^{R\dagger} = \begin{pmatrix} y''_{11} & 0 & 0 \\ 0 & y'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & y_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})
\end{aligned}$$

この時、対角化行列の mixing angle や固有値は次のようになる。この計算においては main order、つまり $|s_{ij}^{L/R}| \sim |\theta_{ij}| \ll 1$ ($s_{ij}^{L/R} \sim \theta_{ij} e^{i\chi_{ij}^{L/R}}$) と $c_{ij}^{L/R} \simeq 1$ の条件に基づいて計算している。

$$y'_{22} \simeq y_{22} - \frac{y_{23}y_{32}}{y_{33}}, \quad y'_{12} \simeq y_{12} - \frac{y_{13}y_{32}}{y_{33}}, \quad y'_{21} \simeq y_{21} - \frac{y_{23}y_{31}}{y_{33}}, \quad (\text{A.6})$$

$$y'_{11} \simeq y_{11} - \frac{y_{13}y_{31}}{y_{33}}, \quad y''_{11} \simeq y'_{11} - \frac{y'_{12}y'_{21}}{y'_{22}}. \quad (\text{A.7})$$

$$s_{23}^L \simeq \frac{y_{23}}{y_{33}}, \quad s_{13}^L \simeq \frac{y_{13}}{y_{33}}, \quad s_{12}^L \simeq \frac{y_{12}y_{33} - y_{13}y_{32}}{y_{22}y_{33} - y_{23}y_{32}}. \quad (\text{A.8})$$

$$s_{23}^{R*} \simeq \frac{y_{32}}{y_{33}}, \quad s_{13}^{R*} \simeq \frac{y_{31}}{y_{33}}, \quad s_{12}^{R*} \simeq \frac{y_{21}y_{33} - y_{31}y_{23}}{y_{22}y_{33} - y_{23}y_{32}}. \quad (\text{A.9})$$

これまでの結果は以下の 2×2 行列の対角化の積み重ねである。

$$\begin{pmatrix} c_L & -s_L \\ s_L^* & c_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_R & s_R \\ -s_R^* & c_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'_{11} & 0 \\ 0 & y'_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

これまでと同様に $s_{L/R} \equiv \sin \theta_{L/R} e^{i\chi_{L/R}}$ であり、 $c_{L/R} \equiv \cos \theta_{L/R}$ である。対角化されるという条件より $\tan 2\theta_{L/R}$ は次のような値を持つ。

$$\tan 2\theta_L = \frac{2(y_{12}y_{22} + y_{11}y_{21}e^{2i\chi_R})}{y_{22}^2 e^{i\chi_L} - y_{11}^2 e^{-i(\chi_L - 2\chi_R)} + y_{21}^2 e^{i(\chi_L + 2\chi_R)} - y_{12}^2 e^{-i\chi_L}}, \quad (\text{A.11})$$

$$\tan 2\theta_R = \frac{2(y_{11}y_{12} + y_{21}y_{22}e^{2i\chi_L})}{y_{22}^2 e^{-i(\chi_R - 2\chi_L)} - y_{11}^2 e^{i\chi_R} - y_{21}^2 e^{i(\chi_R + 2\chi_L)} + y_{12}^2 e^{-i\chi_R}}. \quad (\text{A.12})$$

また、固有値は

$$y'_{11} = y_{12}c_L \left(\frac{y_{11}}{y_{12}} c_R - s_R^* \right) - y_{22}s_L \left(\frac{y_{21}}{y_{22}} c_R - s_R^* \right), \quad (\text{A.13})$$

$$y'_{22} = y_{12}s_L^* \left(\frac{y_{11}}{y_{12}} s_R + c_R \right) + y_{22}c_L \left(\frac{y_{21}}{y_{22}} s_R + c_R \right). \quad (\text{A.14})$$

となる。ここで 2×2 行列の hierarchy として $y_{11} \ll y_{12} \sim y_{21} \ll y_{22}$ を仮定し、main order までで計算すると

$$s_L^* \sim \frac{y_{12}}{y_{22}} e^{-i\chi_L}, \quad s_R \sim \frac{y_{21}}{y_{22}} e^{i\chi_R}. \quad (\text{A.15})$$

$$y'_{11} \sim y_{11} + \frac{y_{12}y_{21}}{y_{22}}, \quad y'_{22} \sim y_{22} \quad (\text{A.16})$$

となる。

次に CKM 行列を求める。left-handed up quark, down quark の対角化行列 L_u, L_d は

$$L_{u/d}^t = P_{12}^{u/dL} P_{13}^{u/dL} P_{23}^{u/dL} \simeq \begin{pmatrix} 1 & -s_{12}^{u/dL} & -s_{13}^{u/dL} + s_{23}^{u/dL} s_{12}^{u/dL} \\ s_{12}^{u/dL*} & 1 & -s_{23}^{u/dL} \\ s_{13}^{u/dL*} & s_{23}^{u/dL*} & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

である。CKM 行列 U_{CKM} は

$$\begin{aligned} U_{CKM} &\equiv L_u^\dagger L_d \\ &\simeq \begin{pmatrix} 1 & s_3^{dL} - s_3^{uL} & s_2^{dL} - s_2^{uL} - s_3^{uL}(s_1^{dL} - s_1^{uL}) \\ s_3^{uL*} - s_3^{dL*} & 1 & s_1^{dL} - s_1^{uL} \\ s_2^{udL*} - s_2^{dL*} - s_3^{dL*}(s_1^{uL*} - s_1^{dL*}) & s_3^{uL*} - s_3^{dL*} & 1 \end{pmatrix} \\ &\simeq \begin{pmatrix} 1 & U_{us} & U_{ub} \\ -U_{us}^* & 1 & U_{cb} \\ U_{us}^* U_{cb}^* - U_{ub}^* & -U_{cb}^* & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

となる。 $u \leftrightarrow \nu, d \leftrightarrow e$ と入れ替えることによって MNS 行列も同様に計算できる。

B $SO(10)$ GUT model における gauge interaction

ここでは $SO(10)$ GUT model における gauge interaction、特に X-type gauge interaction を見る。この gauge interaction から核子崩壊を起こす次元 6 演算子を求めることが出来る。

ここでまず $SO(10)$ GUT model の spinor 表現の gauge interaction を見る。その時に有用なのは Clifford 代数 Γ_j ($i = 1, \dots, N$) である。Clifford 代数 Γ_j は

$$\{\Gamma_j, \Gamma_k\} = 2\delta_{jk} \quad (j, k = 1, \dots, N) \quad (\text{B.1})$$

という反交換関係を満たす。この Clifford 代数から次のように $SO(N)$ の generator M_{jk} が定義できる。

$$M_{jk} = \frac{1}{4i} \{\Gamma_j, \Gamma_k\} \quad (\text{B.2})$$

Clifford 代数から generator を定義することによって generator の持つべき条件

$$[M_{jk}, M_{lm}] = -i(\delta_{jk}M_{il} - \delta_{ik}M_{jl} - \delta_{jl}M_{ik} + \delta_{il}M_{jk}) \quad (\text{B.3})$$

を満たす。加えてこの Clifford 代数を生成するのも困難ではない。 $SO(2n+1)$ 群にたいして

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \sigma_2^1 \sigma_3^2 \cdots \sigma_3^n, \Gamma_2 = -\sigma_1^1 \sigma_3^2 \cdots \sigma_3^n, \Gamma_3 = \sigma_2^2 \cdots \sigma_3^n, \Gamma_4 = -\sigma_1^2 \cdots \sigma_3^n, \\ &\dots \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\Gamma_{2n-1} = \sigma_2^n, \Gamma_{2n} = -\sigma_1^n, \Gamma_{2n+1} = \sigma_3^1 \sigma_3^2 \cdots \sigma_3^n$$

である。加えてこれらから $SO(2n)$ 群の Clifford 代数を作ることが出来る。しかし、この手法では $SO(10)$ 群の Clifford 代数を作った時に SM 群の表現がどのように入っているかを見分けるのは困難である。

B.1 $SO(6)$ 、 $SO(4)$ 群における定義

そのためここでは $SO(10)$ 群の部分群を用いて SM 群の表現がどのように入っているかを見ながら計算をする。

$$\begin{aligned} SO(10) &\rightarrow SO(6) \otimes SO(4) \\ &= SU(4) \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$SO(6)$ 群、 $SO(4)$ 群の Clifford 代数である γ -matrix γ_m 、 γ_μ を見る。

B.1.1 $SO(6)$ γ -matrix

- γ -matrix

$$\gamma_m = \begin{matrix} 4 & 4^* \\ 4 & 4^* \end{matrix} \begin{pmatrix} (\sigma_m)_{ab} \\ (\sigma_m^\dagger)^{ab} \end{pmatrix} \quad \text{on} \begin{pmatrix} \xi_b \\ \eta^b \end{pmatrix}, \quad \gamma_7 = \begin{pmatrix} 1_4 & \\ & -1_4 \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

4×4 行列 $\sigma_m = (\sigma_{i=1,2,3}, \sigma_{i+3=4,5,6})$ は次のように定義される

$$\sigma_m \begin{cases} (\sigma_i)_{ab} = \epsilon_{i4ab} + \delta_{ab}^{i4} \\ \left(\begin{array}{c|c} & 1 \\ & \\ \hline & \\ -1 & \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|c} -1 & \\ & \\ \hline 1 & \\ -1 & \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|c} & 1 \\ -1 & \\ \hline & \\ -1 & \end{array} \right) \\ (\sigma_{i+3})_{ab} = i(\epsilon_{i4ab} - \delta_{ab}^{i4}) \\ \left(\begin{array}{c|c} & -i \\ & \\ \hline & \\ i & \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|c} -i & \\ & \\ \hline i & \\ i & \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|c} & i \\ -i & \\ \hline & \\ i & \end{array} \right) \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

ここで δ_{ab}^{i4} は「ゲージ場の量子論 I」(九後 汰一郎著)p.248 にて定義される δ である。

- σ_m の性質

$$\sigma_m = -\sigma_m^t \text{ (反対称)} \quad (\text{B.8})$$

$$(\sigma_m)_{ab} = -\frac{1}{2}\epsilon_{abcd}(\sigma_m^\dagger)^{cd} \text{ (anti-self duality)} \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_m)_{ab}(\sigma_m^\dagger)^{cd} = -\delta_{ab}^{cd} \longleftrightarrow \frac{1}{4}\text{Tr}(\sigma_m \sigma_m^\dagger) = \delta_{mn} \quad (\text{B.10})$$

σ_m は 4×4 反対称行列の完全系を張る。

$$\frac{1}{2}(\sigma_m)_{ab}(\sigma_m)_{cd} = \epsilon_{abcd} \quad (\text{B.11})$$

- $SO(6)$ vector $V_m \longleftrightarrow SU(4)$ 2 階反対称表現 $V_{[ab]}$

$$V_{[ab]} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_m)_{ab}V_m \longleftrightarrow V_m = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_m^\dagger\right)^{ab}V_{[ab]} \quad (\text{B.12})$$

$V_{[ab]}$ $\mathbf{6}$ の $SU(3)(\subset SU(4))$ 分解 $\mathbf{3} + \mathbf{3}^*$

$$\begin{cases} \mathbf{3} : V_i \equiv V_{[i4]} \\ \mathbf{3}^* : \bar{V}^i \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}V_{[jk]} \end{cases} \rightarrow \bar{V}^i = V_i^\dagger \text{ if } V_m = V_m^\dagger \quad (\text{B.13})$$

- $SO(6)$ generator

$$[T_{mn}, T_{kl}] = -i(\delta_{nk}T_{ml} + \dots) \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} T_{mn} \rightarrow \Sigma_{mn} &= \frac{1}{4i}(\gamma_m\gamma_n - \gamma_n\gamma_m) \\ &= \frac{1}{4i} \begin{pmatrix} \sigma_m\sigma_n^\dagger - \sigma_n\sigma_m^\dagger & \\ & \sigma_m^\dagger\sigma_n - \sigma_n^\dagger\sigma_m \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} \sigma_{mn} & \\ & \bar{\sigma}_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

- $SO(6) \cong SU(4)$ generator T_a^b

$$T_a^b = \frac{1}{2}(\sigma_{mn})_a^b T_{mn} \longleftrightarrow T_{mn} = (\sigma_{mn})_a^b T_b^a \quad (\text{B.16})$$

$$[T_a^b, T_c^d] = \delta_a^d T_c^b - \delta_c^b T_a^d \quad (\text{B.17})$$

$$T_a^b \rightarrow (T_a^b)_c^d = \delta_c^b \delta_a^d - \frac{1}{4}\delta_a^b (1)_c^d \text{ on } \xi_a \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{1}{4}(1)_a^c (1)_b^d + \frac{1}{2}(\sigma_{mn})_a^c (\sigma_{mn})_b^d = \delta_a^d \delta_b^c \leftrightarrow \text{Tr}(\sigma_{mn}\sigma_{kl}) = \delta_{mn}^{kl} \quad (\text{B.19})$$

これより $(\frac{1}{2}1_4, \sigma_{mn}(m > n))$ は 4×4 行列の完全系となっている。

- Charge conjugation matrix C_6

$$C_6 \gamma_m C_6^{-1} = +\gamma_m^t \quad (\text{B.20})$$

$$C_6 \equiv \begin{matrix} & \mathbf{4} & \mathbf{4}^* \\ \mathbf{4} & \begin{pmatrix} 0 & -1_4 \\ +1_4 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} = -C_6^t \quad (\text{B.21})$$

B.1.2 $SO(4)$ γ -matrix

- γ -matrix

$$\gamma_\mu = \begin{array}{cc} L & R \\ L & \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \sigma_\mu^\dagger & 0 \end{pmatrix} \\ R & \end{array} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (\text{B.22})$$

ここで σ_μ は 2×2 行列 $\sigma_\mu = (1, -i\sigma_i)$ である。

- $SO(4)$ generator

$$\Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{4i} \begin{pmatrix} \sigma_{\mu\nu} & \\ & \bar{\sigma}_{\mu\nu} \end{pmatrix} \quad (\text{B.23})$$

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{4i} \begin{pmatrix} \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i & \\ & \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i \end{pmatrix} = \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \frac{\sigma_k}{2} & \\ & \frac{\sigma_k}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{B.24})$$

$$\Sigma_{0i} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i\sigma_i & \\ & -i\sigma_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_i}{2} & \\ & -\frac{\sigma_i}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{B.25})$$

- Charge conjugation matrix C_4

$$C_4\gamma_\mu C_4^{-1} = +\gamma_\mu^t, \quad C_4^t = -C_4 \quad (\text{B.26})$$

$$C_4 = \gamma_3\gamma_1 = \begin{array}{cc} L & R \\ L & \begin{pmatrix} +i\sigma_2 & \\ & +i\sigma_2 \end{pmatrix} \\ R & \end{array} \quad (\text{B.27})$$

- $SO(4) \cong SU(2)_L \times SU(2)_R$

$$\Sigma_{Li} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \Sigma_{jk} + \Sigma_{0i} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sigma_i & \\ & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.28})$$

$$\Sigma_{Ri} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \Sigma_{jk} - \Sigma_{0i} \right) = \begin{pmatrix} 0 & \\ & \frac{1}{2} \sigma_i \end{pmatrix} \quad (\text{B.29})$$

B.2 $SO(10)$ γ -matrix

$$\Gamma_{11} = \begin{pmatrix} 1_{16} & \\ & -1_{16} \end{pmatrix} \text{ on } \left(\frac{\xi_\alpha}{\eta^\alpha} \right) = \begin{pmatrix} L\mathbf{4} \\ R\mathbf{4}^* \\ R\mathbf{4} \\ L\mathbf{4}^* \end{pmatrix} \quad (\text{B.30})$$

$$\xi_\alpha = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} d^c \\ -u^c \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} e^c \\ \nu^c \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad \mathbf{16} \text{ 表現} \quad (\text{B.31})$$

Charge conjugation matrix C_{10}

$$\begin{aligned} C_{10} = C_6 \otimes C_4 &= \begin{matrix} & L\mathbf{4} & R\mathbf{4}^* & R\mathbf{4} & L\mathbf{4}^* \\ \begin{matrix} L\mathbf{4} \\ R\mathbf{4}^* \\ R\mathbf{4} \\ L\mathbf{4}^* \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & & -1_4 \times i\sigma_2 \\ & & 1_4 \times i\sigma_2 & \\ & 1_4 \times -i\sigma_2 & & \\ 1_4 \times i\sigma_2 & & & \end{pmatrix} \end{matrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} & C \\ C & \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

$$C^t = C^{-1} = C^\dagger = C \quad (\text{B.33})$$

$$\begin{cases} C_{10}\Gamma_M C_{10}^{-1} = \Gamma_M^t \\ C_{10}^t = C_{10} \end{cases} \quad (\text{B.34})$$

これが成立するように Γ_M を次のように定義する。

$$\Gamma_M : \begin{cases} \Gamma_m = \gamma_m \otimes \gamma_5 \\ \Gamma_\mu = 1 \otimes \gamma_\mu \end{cases} \quad \gamma_5 = \begin{matrix} L & R \\ L \begin{pmatrix} 1_2 & \\ & -1_2 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (\text{B.35})$$

つまり

$$\Gamma_M = \begin{pmatrix} & \sigma_M \\ \sigma_M^\dagger & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & (\sigma_M)_{\alpha\beta} \\ (\sigma_M^\dagger)^{\alpha\beta} & \end{pmatrix} \text{ on } \begin{pmatrix} \xi_\beta \\ \eta^\beta \end{pmatrix} \quad (\text{B.36})$$

$$\sigma_{M=m} = \begin{matrix} R\mathbf{4} & L\mathbf{4}^* \\ L\mathbf{4} & \\ R\mathbf{4}^* & \end{matrix} \begin{pmatrix} & \sigma_m \times 1_2 \\ -\sigma_m^\dagger \times 1_2 & \end{pmatrix}, \sigma_{M=\mu} = \begin{matrix} R\mathbf{4} & L\mathbf{4}^* \\ L\mathbf{4} & \\ R\mathbf{4}^* & \end{matrix} \begin{pmatrix} 1_4 \times \sigma_\mu & \\ & 1_4 \times \sigma_\mu^\dagger \end{pmatrix} \quad (\text{B.37})$$

となる。これにより spinor の変換性は

$$\eta^\beta \sim C_\alpha^\beta (\xi_\alpha)^*, \eta_\beta^\dagger \sim (\xi_\alpha^t) (C^\dagger)_\beta^\alpha \quad (\text{B.38})$$

となる。

$$\frac{1}{2}(\delta_\gamma^\alpha \delta_\delta^\beta + \delta_\delta^\alpha \delta_\gamma^\beta) = 2^{-4} \left[(\sigma_M C)_{\gamma\delta} (C \sigma_M^\dagger)^{\alpha\beta} + \frac{1}{2 \cdot 5!} (\sigma_{M_1 \dots M_5} C)_{\gamma\delta} (C \sigma_{M_1 \dots M_5}^\dagger)^{\alpha\beta} \right] \quad (\text{B.39})$$

$$2^{-4} \text{Tr}(C \sigma_M^\dagger \sigma_N C) = \delta_{MN} \quad (\text{B.40})$$

$$2^{-4} \text{Tr}(C \sigma_{M_1 \dots M_5}^\dagger \sigma_{N_1 \dots N_5} C) = \delta_{N_1 \dots N_5}^{M_1 \dots M_5} + i \epsilon_{M_1 \dots M_5 N_1 \dots N_5} \quad (\text{B.41})$$

より $(C \sigma_M^\dagger, C \sigma_{M_1 \dots M_5}^\dagger)$ は 16×16 対称行列 $S^{\alpha\beta}$ の空間での完全系ここで

$$\sigma_{M_1 \dots M_5}^\dagger \equiv \frac{1}{5!} (\sigma_{M_1}^\dagger \sigma_{M_2} \sigma_{M_3}^\dagger \sigma_{M_4} \sigma_{M_5}^\dagger + (\text{完全反対称和})) \quad (\text{B.42})$$

$$\sigma_{M_1 \dots M_5} \equiv \frac{1}{5!} (\sigma_{M_1} \sigma_{M_2}^\dagger \sigma_{M_3} \sigma_{M_4}^\dagger \sigma_{M_5} + (\text{完全反対称和})) \quad (\text{B.43})$$

である。

B.3 $SO(10)$ generator

- $SO(6)$ generator T_{mn}

$$\begin{aligned} T_a^b &\equiv \frac{1}{2} (\sigma_{mn})_a^b T_{mn} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1_2 \otimes (\delta_c^b \delta_a^d - \frac{1}{4} \delta_a^b (1_4)_c^d) & \\ & -1_2 \otimes (\delta_a^c \delta_d^b - \frac{1}{4} \delta_a^b (1_4)_d^c) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

- $SO(4)$ generator $T_{\mu\nu}$

$$T_{Li} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} T_{jk} + T_{0i} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_i \otimes 1_4 & \\ & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.45})$$

$$T_{Ri} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} T_{jk} - T_{0i} \right) = \begin{pmatrix} 0 & \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_i \otimes 1_4 \end{pmatrix} \quad (\text{B.46})$$

他の generator と同じ規格化を行うために $\times \sqrt{2}$ を行っている。

- $SO(10)/SO(6) \times SO(4)$ generator

$$T_{\mu m} = \frac{1}{2i} \Gamma_\mu \Gamma_m = \frac{1}{2i} \left(\frac{\sigma_{M=\mu} \sigma_{M=m}^\dagger}{\sigma_{M=\mu}^\dagger \sigma_{M=m}} \right) \quad (\text{B.47})$$

$$= \frac{1}{2i} \left(\frac{\sigma_m^\dagger \times \sigma_\mu^\dagger}{-\sigma_m \times \sigma_\mu} \right)$$

$$T_{\mu[ab]} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_m)_{ab} \cdot i T_{\mu m} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\epsilon_{abcd} \times \sigma_\mu & \\ -\delta_{ab}^{cd} \times \sigma_\mu^\dagger & \end{pmatrix} \quad (\text{B.48})$$

ここから $\mathbf{3} + \mathbf{3}^*$ operator を定義する。

$$\begin{cases} \mathbf{3} : T_{\mu i} \equiv T_{\mu[4i]} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \epsilon_{i4cd} \times \sigma_\mu & \\ \delta_{i4}^{cd} \times \sigma_\mu^\dagger & \end{pmatrix} \\ \mathbf{3}^* : \bar{T}_\mu^i \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} T_{\mu[jk]} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\delta_{cd}^{i4} \times \sigma_\mu & \\ -\epsilon_{i4cd} \times \sigma_\mu^\dagger & \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{B.49})$$

B.4 16 spinor の gauge boson

$$\frac{1}{2} A_{MN} T_{MN} = \sqrt{2} (\vec{W}_L \cdot \vec{T}_L + \vec{W}_R \cdot \vec{T}_R) + (A_{SU(4)})_a^b \cdot T_b^a + (\bar{X}_\mu^i T_{\mu i} + X_{\mu i} \bar{T}_\mu^i) \quad (\text{B.50})$$

$$(A_{SU(4)})_a^b \cdot T_b^a = \left(\left(\begin{array}{c|c} G_i^j - \frac{1}{2\sqrt{3}}\delta_i^j B' & X_{si} \\ \hline \bar{X}_s^j & \frac{\sqrt{3}}{2}B' \end{array} \right) \middle| \begin{array}{c} \\ * \text{表現} \end{array} \right) \quad (\text{B.51})$$

X-type gauge boson を含む 2×2 行列 $\mathbf{X}^i, \tilde{\mathbf{X}}_i$ の定義

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X}^i \equiv \bar{X}_\mu^i \cdot \sigma_\mu / \sqrt{2} = \left(\begin{array}{cc} \bar{X}_0^i - i\bar{X}_3^i & -i\bar{X}_1^i - \bar{X}_2^i \\ -i\bar{X}_1^i + \bar{X}_2^i & \bar{X}_0^i + i\bar{X}_3^i \end{array} \right) / \sqrt{2} \\ \equiv \left(\begin{array}{cc} \bar{Y}' & X \\ -\bar{X}' & Y \end{array} \right)^i \equiv \left(\begin{array}{cc} \tilde{X}' & X \end{array} \right) \\ \tilde{\mathbf{X}}_i \equiv X_{\mu i} \cdot \sigma_\mu / \sqrt{2} = \left(\begin{array}{cc} X_{0i} - iX_{3i} & -iX_{1i} - X_{2i} \\ -iX_{1i} + X_{2i} & X_{0i} + iX_{3i} \end{array} \right) / \sqrt{2} \\ \equiv \left(\begin{array}{cc} \bar{Y} & X' \\ -\bar{X} & Y' \end{array} \right)_i \equiv \left(\begin{array}{cc} \tilde{X} & X' \end{array} \right)_i \end{array} \right. \quad (\text{B.52})$$

$$(i\sigma_2)\mathbf{X}^t(-i\sigma_2) = \tilde{\mathbf{X}}^\dagger \quad (\text{B.53})$$

以上より X-type gauge boson は

$$\bar{X}_\mu^i T_{\mu i} + X_{\mu i} \bar{T}_\mu^i = \left(\begin{array}{cc} & \epsilon_{i4cd} \otimes X^i \\ \delta_{i4}^{cd} \otimes \tilde{X}^{\dagger i} & \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cc} -\delta_{cd}^{i4} \otimes \tilde{X}_i & \\ \epsilon_{i4cd} \otimes X_i^\dagger & \end{array} \right) \quad (\text{B.54})$$

となる。まとめると **16** spinor の gauge boson は

$$\begin{aligned} \left(\frac{g}{\sqrt{2}} \right) \frac{1}{2} A_{AB} T_{AM} &= g \left(\begin{array}{cc} 1_4 \otimes \vec{W}_{L\frac{\tau}{2}} & 0 \\ 0 & 1_4 \otimes \vec{W}_{R\frac{\tau}{2}} \end{array} \right) \\ &+ g \left(\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cc} G^a \frac{\lambda^a}{2} - \frac{B'}{2\sqrt{6}} 1_3 & \frac{1}{\sqrt{2}} X_s \\ \frac{1}{\sqrt{2}} X_s^\dagger & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} B' \end{array} \right) \otimes 1_2 & 0 \\ 0 & - \left(\begin{array}{cc} G^a \frac{\lambda^a}{2} - \frac{B'}{2\sqrt{6}} 1_3 & \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{X}_s \\ \frac{1}{\sqrt{2}} X_s^t & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} B' \end{array} \right) \otimes 1_2 \end{array} \right) \\ &+ \frac{g}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{cc} 0 & \left(\begin{array}{c|c} \epsilon_{ijk} \otimes \mathbf{X}^i & -\tilde{\mathbf{X}}_j \\ \hline \tilde{\mathbf{X}}_k & 0 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c|c} -\epsilon^{ijk} \otimes \mathbf{X}_i^\dagger & \tilde{\mathbf{X}}^{\dagger j} \\ \hline -\tilde{\mathbf{X}}^{\dagger k} & 0 \end{array} \right) & 0 \end{array} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.55})$$

となる。以上より spinor **16** の gauge 変換を求める準備が整った。以下では SM gauge boson のかかわる gauge 変換は自明なので新しい gauge boson のかかわる部分だけを見る。

B.5 spinor 16 : ψ の gauge 変換

$$\begin{aligned}\delta\psi &= \frac{1}{2}A_{AB}T_{AB}\psi \\ &= \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc} 0 & X_{si} \\ X_s^{\dagger j} & 0 \end{array} \right) \otimes 1_2 & \left(\begin{array}{c|c} \epsilon_{ikj} \otimes \mathbf{X}^k & -\tilde{\mathbf{X}}_i \\ \hline \tilde{\mathbf{X}}_j & 0 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c|c} -\epsilon^{ikj} \otimes \mathbf{X}_k^\dagger & \tilde{\mathbf{X}}^{\dagger i} \\ \hline -\tilde{\mathbf{X}}^{\dagger j} & 0 \end{array} \right) & - \left(\begin{array}{cc} 0 & X_s^i \\ X_{sj}^t & 0 \end{array} \right) \otimes 1_2 \end{array} \right)\end{aligned}\quad (\text{B.56})$$

これより各要素に対して次のような gauge 変換が成り立っていることがわかる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_i = X_{si} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} - \mathbf{X} \begin{pmatrix} d^c \\ -u^c \end{pmatrix} - \tilde{\mathbf{X}} \begin{pmatrix} e^c \\ -\nu^c \end{pmatrix} \\ \delta \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} = \bar{X}_s \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} + \tilde{\mathbf{X}} \begin{pmatrix} d^c \\ -u^c \end{pmatrix} \\ \delta \begin{pmatrix} d^c \\ -u^c \end{pmatrix}^i = -\bar{X}_s^i \begin{pmatrix} e^c \\ -\nu^c \end{pmatrix} + \mathbf{X}^\dagger \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} + \tilde{\mathbf{X}}^\dagger \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} \\ \delta \begin{pmatrix} e^c \\ -\nu^c \end{pmatrix} = -X_s \begin{pmatrix} b^c \\ -u^c \end{pmatrix} - \tilde{\mathbf{X}}^\dagger \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{B.57})$$

B.6 fundamental 10 の gauge 変換

つぎに fundamental **10** : \mathbf{H}_M の gauge 変換を見ておく

- $H_M = (H_\mu, H_m)$ の再定義
 H_M を spinor 表現に対応した行列に再定義する。

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{(2 \times 2)} &\equiv H_\mu \sigma_\mu / \sqrt{2} \equiv (\tilde{H}', H) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} H_0 - iH_3 & -iH_1 - H_2 \\ -iH_1 + H_2 & H_0 + iH_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{H}'_y & H_x \\ -\bar{H}'_x & H_y \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (\text{B.58})$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_{(2 \times 2)} = H_\mu^\dagger \sigma_\mu / \sqrt{2} \quad (\text{B.59})$$

$$\mathbf{H}_{4 \times 4} \equiv H_m \sigma_m / \sqrt{2} \quad (\text{B.60})$$

$$= -\bar{H}'^i \epsilon_{i4ab} - H_i \delta_{ab}^{i4} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\epsilon_{ikj} \bar{H}'^k}{H_j} & -H_i \\ \hline & 0 \end{array} \right)$$

ここで $H_i \equiv \frac{i}{\sqrt{2}}(H_{m=i+3} + iH_{m=i})$ 、 $H'_i \equiv \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{H}_{m=i+3} + i\bar{H}_{m=i})$ とした。これで **10** を $(H_i, H; \bar{H}'^i, \bar{H}') = (\mathbf{3}, \mathbf{2}; \mathbf{3}^*, \mathbf{2}^*)$ に再定義した。

以上より次の 16×16 行列 $\tilde{\mathbf{H}}$ 、 \mathbf{H} を定義できる。

$$\tilde{\mathbf{H}} \equiv H_M \sigma_M^\dagger / \sqrt{2} = \left(\begin{array}{cc} 1_4 \otimes \tilde{\mathbf{H}}_{(2 \times 2)}^\dagger & \left(\begin{array}{c|c} -\epsilon_{ikj} \bar{H}'^k & H_i \\ \hline -H_j & 0 \end{array} \right) \otimes 1_2 \\ \left(\begin{array}{c|c} -\epsilon^{ikj} H_k & \bar{H}'^i \\ \hline -\bar{H}'^j & 0 \end{array} \right) \otimes 1_2 & 1_4 \otimes \mathbf{H}_{(2 \times 2)} \end{array} \right) \quad (\text{B.61})$$

$$\mathbf{H} \equiv H_M \sigma_M / \sqrt{2} = \left(\begin{array}{cc} 1_4 \otimes \mathbf{H}_{(2 \times 2)} & \left(\begin{array}{c|c} \epsilon_{ikj} \bar{H}'^k & -H_i \\ \hline H_j & 0 \end{array} \right) \otimes 1_2 \\ \left(\begin{array}{c|c} \epsilon^{ikj} H_k & -\bar{H}'^i \\ \hline \bar{H}'^j & 0 \end{array} \right) \otimes 1_2 & 1_4 \otimes \tilde{\mathbf{H}}_{(2 \times 2)}^\dagger \end{array} \right) \quad (\text{B.62})$$

- **10** の gauge 変換

$$\delta \xi = \frac{1}{2}(A \cdot T)\xi, \quad \delta \eta^\dagger = \eta^\dagger \frac{1}{2}C(A \cdot T)^t C \quad (\text{B.63})$$

ここで $\eta^\dagger \sim \xi^t C$ である。 $\delta \mathbf{H} = \frac{1}{2}(A \cdot T)\mathbf{H} + \mathbf{H} \frac{1}{2}C(A \cdot T)^t C$ より次の変換を求めることができる。ここでも新しい gauge boson にかかわる変換を見る。

$$\begin{cases} \delta H = H_i X^i - \bar{H}'^i X'_i \\ \delta \bar{H}' = H_i \bar{X}^i - \bar{H}'^i \bar{X}_i \\ \delta H_i = \epsilon_{ijk} \bar{X}_s^j \bar{H}'^k + X_i^\dagger H + H^\dagger X_i \\ \delta \bar{H}'^i = \epsilon^{ijk} X_{sj} H_k - (X^\dagger H + H^\dagger X)^i \end{cases} \quad (\text{B.64})$$

これで $SO(10)$ 群における fundamental **10** と spinor **16** の gauge 変換を知ることが出来た。fundamental **10** への変換から adjoint Higgs が DW-form VEV を持ったとき X-type gauge boson に与える質量も計算することが出来る。

C E_6 GUT modelにおける gauge interaction

ここでは E_6 GUT model における gauge interaction、特に X-type gauge interaction を見る。この gauge interaction から核子崩壊を起こす次元 6 演算子を求めることが出来る。

E_6 GUT model においても先の $SO(10)$ GUT model のように部分群を用いて考えるのが有効である。このとき 2 つの部分群の候補がある 1 つ目は $SO(10) \otimes U(1)$ であり、もう 1 つは $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ である。 $SO(10) \otimes U(1)$ はすでに $SO(10)$ GUT model での変換性を求めているので簡単に思えるが $SO(6)$ 、 $SO(4)$ 群において求めた関係式は $SO(10)$ 群においてはより複雑になるため、実はそこまで簡単ではない。 $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ は極めて一般的な $SU(3)$ 群の代数を用いることができるため表現がの数が多いため面倒ではあるが、計算自体は慣れ親しんだ $SU(3)$ 群の代数のため困難はない。

ここでは論文 [62, 63] を参考にして構成した notation で $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ 群を用いて gauge interaction を見ていく。まず E_6 fundamental rep. **27** と adjoint rep. **78** の定義をする。 $E_6 \supset SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ 分解を行うと

$$\mathbf{27} \rightarrow \underbrace{(\mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{1})}_{L_{\alpha a}} + \underbrace{(\mathbf{1}, \mathbf{3}^*, \mathbf{3})}_{M_p^a} + \underbrace{(\mathbf{3}^*, \mathbf{1}, \mathbf{3}^*)}_{N^{\alpha p}} \quad (\text{C.1})$$

となる。ここで α, a, p はそれぞれ $SU(3)_C, SU(3)_L, SU(3)_R$ の fundamental の足である。そしてこの中に SM matter は次のように含まれている。

$$L_{\alpha a} = \begin{pmatrix} u \\ d \\ D \end{pmatrix}_\alpha, \quad M_p^a = \begin{matrix} 1_L^* & 2_L^* & 3_L^* \\ 1_R \begin{pmatrix} N^c & E^c & -e^c \\ -E & N & \nu^c \\ e & -\nu & -S \end{pmatrix} \\ 2_R \\ 3_R \end{matrix} \quad (\text{C.2})$$

$$N_{\alpha p} = \begin{pmatrix} u^c & d^c & D^c \end{pmatrix}^\alpha \quad (\text{C.3})$$

ここで S は $SO(10)$ singlet であり、大文字で書いてあるものは $SO(10)$ **10**、**1** に属する粒子たちである。次に adjoint **78** の分解を行う。

$$\mathbf{78} \rightarrow \underbrace{(\mathbf{8}, \mathbf{1}, \mathbf{1})}_{t_A} + \underbrace{(\mathbf{1}, \mathbf{8}, \mathbf{1})}_{t_A^L} + \underbrace{(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{8})}_{t_A^R} + \underbrace{(\mathbf{3}, \mathbf{3}^*, \mathbf{3}^*)}_{t_\alpha^{ap}} + \underbrace{(\mathbf{3}^*, \mathbf{3}, \mathbf{3})}_{\bar{t}^{\alpha}_{ap}} \quad (\text{C.4})$$

これより adjoint 中の表現たちの交換関係を求めることによって gauge 変換を求めることが出来る。しかし、adjoint 中の表現たちは $SU(3)$ fundamental と adjoint の表現しか持っていない。このため以下の交換関係は自明である。

$$[t_A, t_B] = if_{ABC}t_c, [t_A^L, t_B^L] = if_{ABC}t_c^L, [t_A^R, t_B^R] = if_{ABC}t_c^R \quad (C.5)$$

$$[t_A, t_B^L] = 0, [t_A, t_B^R] = 0, [t_A^L, t_B^R] = 0 \quad (C.6)$$

$$[t_A, t_\alpha^{ap}] = -\frac{1}{2}(\lambda_A)_\alpha^\beta t_\beta^{ap}, [t_A, \bar{t}_{ap}^\alpha] = \frac{1}{2}(\lambda_A)_\beta^\alpha \bar{t}_{ap}^\beta \quad (C.7)$$

$$[t_A^L, t_\alpha^{ap}] = \frac{1}{2}(\lambda_A)_b^a t_\alpha^{bp}, [t_A^L, \bar{t}_{ap}^\alpha] = -\frac{1}{2}(\lambda_A)_a^b \bar{t}_{bp}^\alpha \quad (C.8)$$

$$[t_A^R, t_\alpha^{ap}] = \frac{1}{2}(\lambda_A)_q^p t_\alpha^{aq}, [t_A^R, \bar{t}_{ap}^\alpha] = -\frac{1}{2}(\lambda_A)_p^q \bar{t}_{aq}^\alpha \quad (C.9)$$

f_{ABC} は構造定数であり、 λ_A は Gell-Mann 行列である。自明ではない交換関係は t_α^{ap} 、 \bar{t}_{ap}^α 間の交換関係であるが、Jacobi identity を用いることで簡単に次のような交換関係が求まる。

$$[t_\alpha^{ap}, t_\beta^{bq}] = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon^{abc}\epsilon^{pqr}\bar{t}_{cr}^\gamma, [\bar{t}_{ap}^\alpha, \bar{t}_{bq}^\beta] = \epsilon^{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{abc}\epsilon_{pqr}t_{\gamma}^{cr} \quad (C.10)$$

$$[t_\alpha^{ap}, \bar{t}_{bq}^\beta] = (\lambda_A)_\beta^\alpha \delta_a^b \delta_p^q - \delta_\beta^\alpha (\lambda_A)_a^b \delta_p^q - \delta_\beta^\alpha \delta_a^b (\lambda_A)_p^q \quad (C.11)$$

以上より以下の変換を求めることが出来る。

$$t_A L = \frac{1}{2}\lambda_A L, \quad t_A^L L = \frac{1}{2}\lambda_A L, \quad t_A^R L = 0 \quad (C.12)$$

$$t_A M = 0, \quad t_A^L M = -\frac{1}{2}\lambda_A M, \quad t_A^R M = \frac{1}{2}\lambda_A M \quad (C.13)$$

$$t_A N = -\frac{1}{2}\lambda_A N, \quad t_A^L N = 0, \quad t_A^R N = -\frac{1}{2}\lambda_A N \quad (C.14)$$

$$t_\alpha^{ap} L_{\beta b} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\delta_b^a N^{\gamma p}, \quad \bar{t}_{ap}^\alpha L_{\beta b} = -\epsilon_{abc}\delta_\beta^\alpha M_p^c \quad (C.15)$$

$$t_\alpha^{ap} M_q^b = \epsilon^{abc}\delta_q^p L_{ac}, \quad \bar{t}_{ap}^\alpha M_q^b = -\epsilon_{pqr}\delta_a^b N^{\alpha r} \quad (C.16)$$

$$t_\alpha^{ap} N^{\beta q} = \epsilon^{pqr}\delta_\beta^\alpha M_\gamma^a, \quad \bar{t}_{ap}^\alpha N^{\beta q} = -\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\delta_p^q L_{\gamma a} \quad (C.17)$$

これより X-type gauge particle を含む A_α^{ap} を

$$A_\alpha^{ap} = \begin{pmatrix} \bar{X} & X' & X'' \\ \bar{Y} & Y' & Y'' \\ \bar{Z} & Z' & Z'' \end{pmatrix} \quad (C.18)$$

と定義して X-type gauge interaction を求めることが出来る。

では X-type gauge interaction を見る。ここでは \bar{X} による gauge interaction を見る。他の X-type gauge interaction も同様にして見る事が出来るのでここでは省略する。**27** : Ψ に対して $\delta\Psi = -igA_kT_k\Psi$ をまず見る。ここで T_k は先ほど見た **78** generator であり、 A_k は gauge particle である。まず \bar{X} による gauge interaction を見るため A_α^{11} についてみる。このとき T_k からは \bar{t}_{11}^α が抜き出されるが normalization のため $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍される。

$$\begin{aligned}\delta\Psi &= -igA_kT_k\Psi \\ &\rightarrow -\frac{i}{\sqrt{2}}g\gamma_\mu\bar{X}_{\alpha\mu}\bar{t}_{11}^\alpha\begin{pmatrix} L_{\beta a} \\ M_p^a \\ N^{\beta p} \end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}}g\gamma_\mu\bar{X}_{\alpha\mu}\begin{pmatrix} \epsilon_{1ac}\delta_\beta^\alpha M_1^c \\ \epsilon_{1pr}\delta_1^a N^{ar} \\ \epsilon^{\alpha\beta\gamma}\delta_1^p L_{\gamma 1} \end{pmatrix} \quad (\text{C.19})\end{aligned}$$

これから運動項の gauge interaction 部 ($i\bar{\Psi}\delta\Psi$) を見る。

$$\begin{aligned}i\bar{\Psi}\delta\Psi &= i\bar{\Psi}^\alpha(-igA_kT_k\Psi)_\alpha \quad (\text{C.20}) \\ &\rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}g\gamma_\mu\bar{X}_{\alpha\mu}(\bar{L}^{\beta a}\epsilon_{1ac}\delta_\beta^\alpha M_1^c + \bar{M}_a^p\epsilon_{1pr}\delta_1^a N^{ar} + \bar{N}_{\beta p}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\delta_1^p L_{\gamma 1}) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}g\bar{X}_{\alpha\mu}(\bar{d}_L^\alpha\gamma^\mu e_L^c + \bar{D}_L^\alpha\gamma^\mu E_L^c - \bar{D}_R^\alpha\gamma^\mu E_R^c - \bar{d}_R^\alpha\gamma^\mu r_R^c + \epsilon^{\alpha\beta\gamma}\bar{u}_{L\gamma}^c\gamma^\mu u_{L\beta})\end{aligned}$$

以上より X-type gauge boson \bar{X} が関わる fundamental 表現 **27** への gauge interaction を見る事が出来た。

D Anomalous $U(1)_A E_6 \times SU(2)_F$ SUSY GUT model において対角化行列が持つ条件

$$\begin{aligned}
 Y_d &= \begin{pmatrix} \left[\frac{bg-af}{ac-b^2} (f' - \frac{bg'}{a}) - \frac{gg'}{a} \right] \beta_H e^{i(2\rho-\delta)} \lambda^6 \\ \left(-\frac{d_q}{3} - \frac{bg-af}{ac-b^2} \frac{bd_5}{g} \right) \lambda^5 \\ -\frac{bg-af}{ac-b^2} \frac{ad_5}{g} \lambda^3 \\ -\frac{bg'-af'}{ac-b^2} d_5 \beta_H e^{i(\rho-\delta)} \lambda^{5.5} \\ \left(-\frac{d_5^2}{ac-b^2} \frac{ab}{g} e^{-i\rho} + f' \beta_H e^{i(\rho-\delta)} \right) \lambda^{4.5} \\ \left(-\frac{d_5^2}{ac-b^2} \frac{a^2}{g} e^{-i\rho} + g' \beta_H e^{i(\rho-\delta)} \right) \lambda^{2.5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} d_q \lambda^5 \\ \left(\frac{ac-b^2}{a} + \frac{bg-af}{g} \frac{b}{a} \right) \lambda^4 \\ \frac{bg-af}{g} \lambda^2 \end{pmatrix} \\
 &\equiv \begin{pmatrix} y_{d11} \lambda^6 & y_{d12} \lambda^{5.5} & \frac{1}{3} y_{d13} \lambda^5 \\ y_{d21} \lambda^5 & y_{d22} \lambda^{4.5} & y_{d23} \lambda^4 \\ y_{d31} \lambda^3 & y_{d32} \lambda^{2.5} & y_{d33} \lambda^2 \end{pmatrix} \quad (D.1)
 \end{aligned}$$

より Y_d においてもともと Lagrangian 上に現れる parameter は a 、 b 、 d 、 d_q 、 d_5 、 f 、 g 、 $e^{i\rho}$ 、 $\beta_H e^{-i\delta}$ 、の9つである (f' と g' の変化は r の変化、つまり β_H の変化で表せれるため parameter ではない)。この9つの parameter を繰り込み群の影響を見やすくするために y_{dij} という9つの parameter に書き換えた。しかし、parameter 数が同じなのでもとの parameter α は y_{dij} の関数である Y_α で書ける。これにより、GUT scale において down-type quark sector と up-type quark sector や charged lepton sector の間に関係式を立てることが出来る。ここではその一部を見る。しかし、これらの関係式は Yukawa coupling を複雑に含んでいるため GUT scale でしか成立しない関係式であった。このため、これらの関係式は用いなかった。これらの関係式は6つあると期待される。なぜならもともとの Lagrangian に現れる実 parameter は a 、 b 、 d 、 d_q 、 d_l 、 d_5 、 f 、 g 、 β_H 、 $\tan \beta$ 、の10個であるのに対して、新しく定義した Yukawa coupling の係数 parameter が16個であるからである。まず、down-type quark sector の parameter から

$$a = \frac{y_{d33}^2 y_{d31} (y_{d11} y_{d32} - y_{d12} y_{d31})}{y_{d12} (y_{d31} (y_{d23} y_{d31} - y_{d33} (y_{d21} + \frac{1}{3} y_{d13})) + y_{d11} y_{d23}^2)} \equiv Y_a \quad (D.2)$$

$$b = \frac{y_{d21} + \frac{1}{3} y_{d13}}{y_{d31}} Y_a \equiv Y_b \quad (D.3)$$

$$c = \frac{Y_a y_{d23} - Y_b y_{d33} + Y_b^2}{Y_a} \equiv Y_c \quad (D.4)$$

$$d_q = y_{d13} \equiv Y_{d_q} \quad (\text{D.5})$$

の4条件が求まる。これより up-type quark sector と down-type quark sector の間に4条件もとまる。この条件の中には GUT scale での $\tan \beta$ を決定する条件が含まれる。同様にして $f = Y_f$ と $g = Y_g$ を求めることによって charged lepton sector と down-type quark sector の間の1条件が求まる。最後に $e^{i\rho} = Y_\rho$ において実条件 $\rho = 0$ を代入することによって最後の1条件が求まる。これらの条件は極めて複雑であり、GUT scale でしか成立しない関係式であるため全てを明記しないが比較的簡単な2条件をここでは記載する。それらは

$$\frac{b}{a} = \frac{y_{d21} + \frac{1}{3}y_{d13}}{y_{d31}} \quad (\text{D.6})$$

$$\frac{f}{g} = \frac{1}{Y_a}(Y_b - y_{d33}) \quad (\text{D.7})$$

の2条件から求まる

$$\theta_{23}^{uL} = \frac{(\theta_{13}^{dL} + \theta_{13}^{dR}\theta_{23}^{dL} + \frac{m_s}{m_b}\theta_{12}^{dR})}{\theta_{13}^{dR}} \quad (\text{D.8})$$

$$\frac{m_\mu/m_\tau + \theta_{23}^{eL}\theta_{23}^{eR}}{\theta_{23}^{eL}}\lambda^2 = \frac{1}{Y_a}(Y_b - y_{d33}) \quad (\text{D.9})$$

である。両式ともに右辺が繰り込み群の影響を受けるため GUT scale でしか成立しない関係式である。

E その他の模型における模型特定

ここでは本文では見なかった模型における R_1 と R_2 の scatter plot を見る。

E.1 GUT scale での Yukawa structure が模型特定に与える影響

4.4 節において $SU(5)$ 、 $SO(10)$ 、 E_6 群に基づく anomalous $U(1)_A$ SUSY GUT model において核子崩壊次元 6 演算子による模型特定を考えた。このとき、 $SO(10)$ と E_6 群に基づく模型においては測定される quark、lepton の質量と混合を実現するために $SO(10)$ 群の $\mathbf{10}$ を新たな物質として導入し、もともとの 3 つの $SU(5)$ 群の $\bar{\mathbf{5}}$ と新たな $\bar{\mathbf{5}}$ である $\bar{\mathbf{5}}'$ が mixing する。この時に SM における 2 世代目の $\bar{\mathbf{5}}$ は $\bar{\mathbf{5}}'$ が主要要素になる。

実験からの制限が厳しくはあるが $\bar{\mathbf{5}}'$ が標準模型における他の世代の主要要素になることも出来る。例えば SM における 1 世代目の $\bar{\mathbf{5}}$ の主要要素が $\bar{\mathbf{5}}'$ になる場合である。この時

$$U_{MNS\ type} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda^{0.5} & \lambda^{1.5} \\ \lambda^{0.5} & 1 & \lambda \\ \lambda^{1.5} & \lambda & 1 \end{pmatrix} \quad (E.1)$$

となる。もちろんこの $U_{MNS\ type}$ で neutrino の 2 世代目と 3 世代目の間の大きな混合を満たすためには $O(1)$ の不定性を最大限に使う必要がある。加えて少しでも大きな混合を得るために $\lambda = 0.25$ とした。この条件のもとにおいて同様に模型特定を試みた。結果は図 11 の通りである。特徴的なのは以前の結果と比べて $SO(10)$ 群に基づく模型では R_2 が大きくなり、 E_6 群に基づく模型では逆に R_2 が小さくなるということである。これはまさに SM における 1 世代目の $\bar{\mathbf{5}}$ の主要要素が $\bar{\mathbf{5}}'$ になることが原因である。なぜならこれにより X' による次元 6 演算子は $\bar{\mathbf{5}}'$ を含まないため 1 世代目への影響が小さくなり R_2 は大きくなる。逆に X'' による次元 6 演算子は $\bar{\mathbf{5}}'$ のみを含むため 1 世代目への影響が大きくなり小さくなる。

以上より、今回見た模型も加えると核子崩壊への GUT scale での世代構造への影響が大きいため崩壊幅の比を見るだけでは模型を完全に特定するのは困難である。もちろんここで見た SM における 1 世代目の $\bar{\mathbf{5}}$ の主要要素が $\bar{\mathbf{5}}'$ になる模型において測定される quark、lepton の質量と混

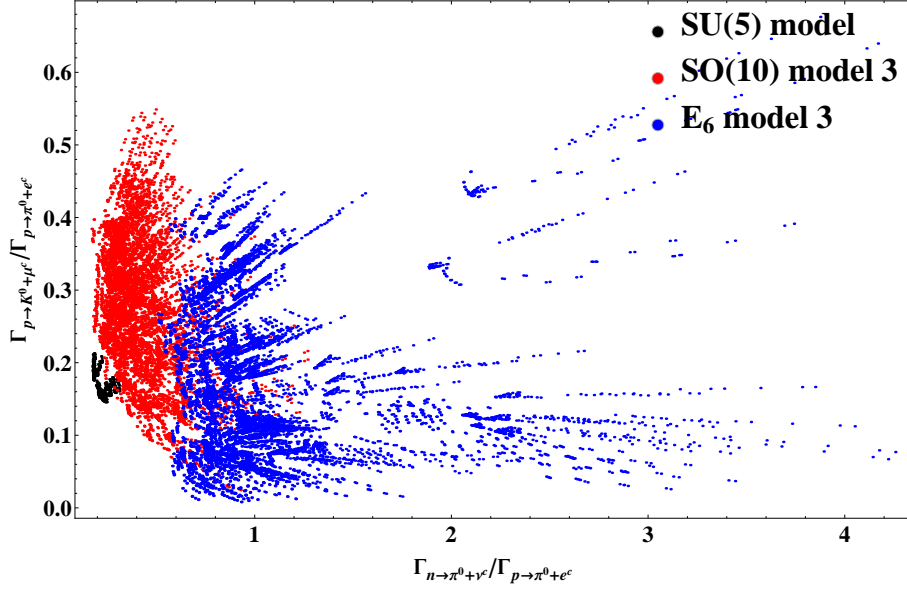


図 11: R_1 、 R_2 による模型特定 その 3

独立な対角化行列に対してそれぞれ 10 個の実 unitary matrix を生成する。よって、独立な対角化行列を 3 つ持つ $SU(5)$ model は 10^3 個の model point を、独立な対角化行列を 4 つ持つ $SO(10)$, E_6 model は 10^4 個の model point を持つ。VEV は $x = 1 \times 10^{16}$ GeV, $v_c = 5 \times 10^{14}$ GeV, $v_\phi = 5 \times 10^{15}$ GeV とした。

合を実現するのには多少の困難がある。ただし、どちらの模型においてもいえることは崩壊幅の比を観測し R_1 が 1 よりも大きくなったときには統一群は E_6 である可能性が極めて高いということである。

E.2 $SU(5)$ model, $SO(10)$ model 1 における 10^6 model point

E_6 model 1 と同様に $SU(5)$ model, $SO(10)$ model 1 でも model point を 10^6 個に増やして計算を行った。結果は図 12、13 の通りである。両模型においても E_6 model 1 と同様に R_1 、 R_2 のばらつきが大きくなっている。しかし、その大きくなり方は E_6 model 1 ほどではない。これは E_6 model 1 では X'' を媒介することによって生じる次元 6 有効相互作用において mixing から来る寄与が効くためである。

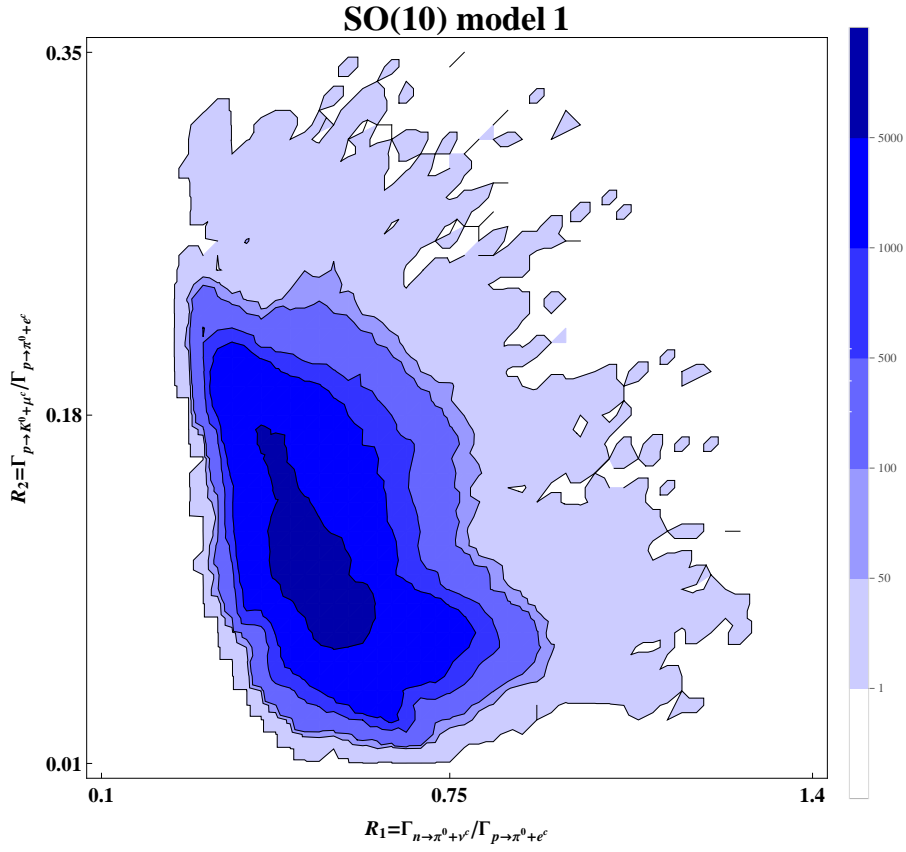


図 12: $SO(10)$ model 1 における R_1 、 R_2 等高線グラフ
 10^6 個の model point において計算した。VEV は $x = 1 \times 10^{16}$ GeV、 $v_c = 5 \times 10^{14}$ GeV とした。model point を数えるための領域は R_1 軸、 R_2 軸の目盛りにおける最小値、最大値の間を 50 等分することにより得られる領域である。

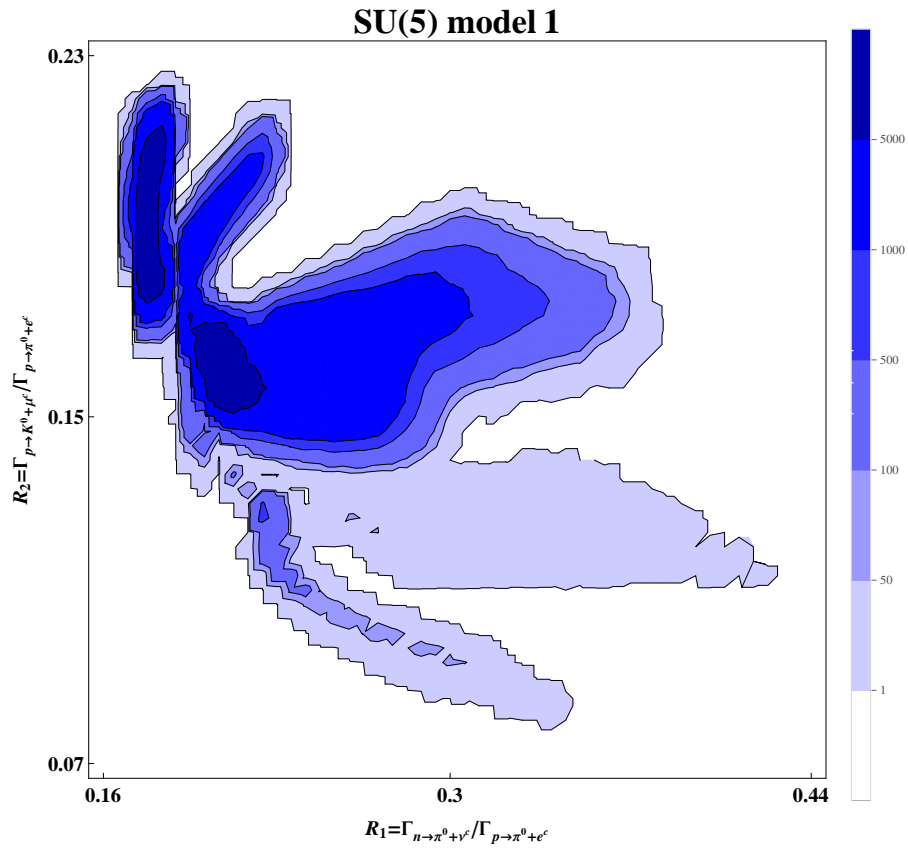


図 13: $SU(5)$ model 1 における R_1 、 R_2 等高線グラフ
 10^6 個の model point において計算した。VEV は $x = 5 \times 10^{15}$ GeV とした。
model point を数えるための領域は R_1 軸、 R_2 軸の目盛りにおける最小値、最大値の間を 50 等分することにより得られる領域である。

model point を 10^6 個に増やしたことにより R_1 、 R_2 のばらつきは広くなったがそれでも多くの場合これらのモデルは R_1 、 R_2 を測定することによって先行研究のように判別が期待できる。

参考文献

- [1] S. L. Glashow, Nucl. Phys. **22**, 579 (1961).
S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967).
- [2] J. Beringer *et al.* [Particle Data Group Collaboration], Phys. Rev. D **86**, 010001 (2012).
- [3] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], Phys. Lett. B **716**, 1 (2012) [arXiv:1207.7214 [hep-ex]].
- [4] A. Martin and G. C. Stavenga, Phys. Rev. D **85**, 095010 (2012) [arXiv:1110.2188 [hep-ph]].
- [5] T. Appelquist and J. Carazzone, Phys. Rev. D **11**, 2856 (1975).
- [6] H. Georgi and S. L. Glashow, Phys. Rev. Lett. **32**, 438 (1974).
- [7] H. Georgi, H. R. Quinn and S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **33**, 451 (1974).
- [8] H. Nishino *et al.* [Super-Kamiokande Collaboration], Phys. Rev. D **85**, 112001 (2012) [arXiv:1203.4030 [hep-ex]].
- [9] K. Kobayashi *et al.* [Super-Kamiokande Collaboration], Phys. Rev. D **72**, 052007 (2005) [hep-ex/0502026].
- [10] J. L. Raaf [Super-Kamiokande Collaboration], Nucl. Phys. Proc. Suppl. **229-232**, 559 (2012).
- [11] G. D. Coughlan, G. G. Ross, R. Holman, P. Ramond, M. Ruiz-Altaba and J. W. F. Valle, Phys. Lett. B **158**, 401 (1985).
- [12] K. S. Babu and S. M. Barr, Phys. Rev. D **48**, 5354 (1993) [hep-ph/9306242].
- [13] H. Murayama and A. Pierce, Phys. Rev. D **65**, 055009 (2002) [hep-ph/0108104].
- [14] J. Hisano, D. Kobayashi, T. Kuwahara and N. Nagata, JHEP **1307**, 038 (2013) [arXiv:1304.3651 [hep-ph]].

- [15] N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett. **10**, 531 (1963).
M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **49**, 652 (1973).
- [16] Z. Maki, M. Nakagawa and S. Sakata, Prog. Theor. Phys. **28**, 870 (1962).
- [17] A. J. Buras, J. R. Ellis, M. K. Gaillard and D. V. Nanopoulos, Nucl. Phys. B **135**, 66 (1978).
- [18] H. Georgi and C. Jarlskog, Phys. Lett. B **86**, 297 (1979).
- [19] H. Murayama, Y. Okada and T. Yanagida, Prog. Theor. Phys. **88**, 791 (1992).
- [20] J. R. Ellis and M. K. Gaillard, Phys. Lett. B **88**, 315 (1979).
- [21] N. Maekawa and Y. Muramatsu, Phys. Rev. D **88**, 095008 (2013) [arXiv:1307.7529].
N. Maekawa and Y. Muramatsu, arXiv:1401.2633 [hep-ph].
- [22] J. Wess and B. Zumino, Nucl. Phys. B **70**, 39 (1974).
- [23] review として
S. P. Martin, “A Supersymmetry primer,” In *Kane, G.L. (ed.): Perspectives on supersymmetry II* 1-153 [hep-ph/9709356].
- [24] S. R. Coleman and J. Mandula, Phys. Rev. **159**, 1251 (1967).
- [25] R. Haag, J. T. Lopuszanski and M. Sohnius, Nucl. Phys. B **88**, 257 (1975).
- [26] E. Gildener, Phys. Rev. D **14**, 1667 (1976).
- [27] J. R. Ellis, S. Kelley and D. V. Nanopoulos, Phys. Lett. B **249**, 441 (1990).
J. R. Ellis, S. Kelley and D. V. Nanopoulos, Phys. Lett. B **260**, 131 (1991).
- [28] J. R. Ellis, J. S. Hagelin, D. V. Nanopoulos, K. A. Olive and M. Srednicki, Nucl. Phys. B **238**, 453 (1984).

- [29] N. Craig, arXiv:1309.0528 [hep-ph].
- [30] Y. Okada, M. Yamaguchi and T. Yanagida, Prog. Theor. Phys. **85**, 1 (1991).
J. R. Ellis, G. Ridolfi and F. Zwirner, Phys. Lett. B **257**, 83 (1991).
- [31] T. Moroi and Y. Okada, Mod. Phys. Lett. A **7**, 187 (1992).
T. Moroi and Y. Okada, Phys. Lett. B **295**, 73 (1992).
- [32] J. D. Wells, Phys. Rev. D **71**, 015013 (2005) [hep-ph/0411041].
N. Arkani-Hamed and S. Dimopoulos, JHEP **0506**, 073 (2005) [hep-th/0405159].
G. F. Giudice and A. Romanino, Nucl. Phys. B **699**, 65 (2004) [Erratum-ibid. B **706**, 65 (2005)] [hep-ph/0406088].
- [33] G. Altarelli, PoS Corfu **2012**, 002 (2013) [arXiv:1303.6065 [hep-ph]].
- [34] J. Hisano, T. Kuwahara and N. Nagata, Phys. Lett. B **723**, 324 (2013) [arXiv:1304.0343 [hep-ph]].
- [35] S. L. Glashow, J. Iliopoulos and L. Maiani, Phys. Rev. D **2**, 1285 (1970).
- [36] F. Gabbiani, E. Gabrielli, A. Masiero and L. Silvestrini, Nucl. Phys. B **477**, 321 (1996) [hep-ph/9604387].
- [37] C. D. Froggatt and H. B. Nielsen, Nucl. Phys. B **147**, 277 (1979).
- [38] D. J. Gross and R. Jackiw, Phys. Rev. D **6**, 477 (1972).
H. Georgi and S. L. Glashow, Phys. Rev. D **6**, 429 (1972).
C. Bouchiat, J. Iliopoulos and P. Meyer, Phys. Lett. B **38**, 519 (1972).
- [39] M. Dine, N. Seiberg and E. Witten, Nucl. Phys. B **289**, 589 (1987).
M. Dine, I. Ichinose and N. Seiberg, Nucl. Phys. B **293**, 253 (1987).
- [40] M. B. Green and J. H. Schwarz, Phys. Lett. B **149**, 117 (1984).

- [41] N. Maekawa, Prog. Theor. Phys. **106**, 401 (2001) [arXiv:hep-ph/0104200].
- [42] S. -G. Kim, N. Maekawa, H. Nishino and K. Sakurai, Phys. Rev. D **79**, 055009 (2009) [arXiv:0810.4439 [hep-ph]].
- [43] E. Witten, Nucl. Phys. B **188**, 513 (1981).
Y. Nir and N. Seiberg, Phys. Lett. B **309**, 337 (1993) [hep-ph/9304307].
- [44] S. Dimopoulos and F. Wilczek, NSF-ITP-82-07
M. Srednicki, Nucl. Phys. B **202**, 327 (1982).
- [45] N. Maekawa, Prog. Theor. Phys. **107**, 597 (2002) [hep-ph/0111205].
- [46] N. Maekawa and T. Yamashita, Prog. Theor. Phys. **107**, 1201 (2002) [hep-ph/0202050].
N. Maekawa and T. Yamashita, Prog. Theor. Phys. **108**, 719 (2002) [hep-ph/0205185].
- [47] S. M. Barr, Phys. Lett. B **112**, 219 (1982).
- [48] D. R. T. Jones, Phys. Rev. D **25**, 581 (1982).
- [49] N. Maekawa and T. Yamashita, Phys. Rev. Lett. **90**, 121801 (2003) [hep-ph/0209217].
- [50] M. Bando and N. Maekawa, Prog. Theor. Phys. **106**, 1255 (2001) [hep-ph/0109018].
N. Maekawa, Prog. Theor. Phys. **112**, 639 (2004) [hep-ph/0402224].
- [51] T. Yanagida, Conf. Proc. C **7902131**, 95 (1979).
M. Gell-Mann, P. Ramond and R. Slansky, Conf. Proc. C **790927**, 315 (1979) [arXiv:1306.4669 [hep-th]].
- [52] N. Maekawa, Phys. Lett. B **561**, 273 (2003) [hep-ph/0212141].
M. Ishiduki, S. -G. Kim, N. Maekawa and K. Sakurai, Prog. Theor. Phys. **122**, 659 (2009) [arXiv:0901.3400 [hep-ph]].

- M. Ishiduki, S. -G. Kim, N. Maekawa and K. Sakurai, Phys. Rev. D **80**, 115011 (2009) [Erratum-ibid. D **81**, 039901 (2010)] [arXiv:0910.1336 [hep-ph]].
- [53] N. Maekawa and K. Takayama, Phys. Rev. D **85**, 095015 (2012) [arXiv:1202.5816 [hep-ph]].
- [54] H. Kawase and N. Maekawa, Prog. Theor. Phys. **123**, 941 (2010) [arXiv:1005.1049 [hep-ph]].
- [55] K. Sakurai and K. Takayama, JHEP **1112**, 063 (2011) [arXiv:1106.3794 [hep-ph]].
- [56] S. Abel, D. Bailin, S. Khalil and O. Lebedev, Phys. Lett. B **504**, 241 (2001) [hep-ph/0012145].
- [57] M. Drees, Phys. Lett. B **181**, 279 (1986).
A. E. Faraggi, J. S. Hagelin, S. Kelley and D. V. Nanopoulos, Phys. Rev. D **45**, 3272 (1992).
- [58] J. S. Hagelin and S. Kelley, Nucl. Phys. B **342**, 95 (1990).
Y. Kawamura and M. Tanaka, Prog. Theor. Phys. **91**, 949 (1994).
Y. Kawamura, H. Murayama and M. Yamaguchi, Phys. Lett. B **324**, 52 (1994) [hep-ph/9402254].
Y. Kawamura, H. Murayama and M. Yamaguchi, Phys. Rev. D **51**, 1337 (1995) [hep-ph/9406245].
- [59] N. Maekawa and T. Yamashita, Prog. Theor. Phys. **110**, 93 (2003) [hep-ph/0303207].
- [60] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **43**, 1566 (1979).
L. F. Abbott and M. B. Wise, Phys. Rev. D **22**, 2208 (1980).
- [61] Y. Aoki, C. Dawson, J. Noaki and A. Soni, Phys. Rev. D **75**, 014507 (2007) [arXiv:hep-lat/0607002].
Y. Aoki, E. Shintani and A. Soni, arXiv:1304.7424 [hep-lat].

- [62] M. Bando and T. Kugo, Prog. Theor. Phys. **101**, 1313 (1999) [arXiv:hep-ph/9902204].
M. Bando, T. Kugo and K. Yoshioka, Prog. Theor. Phys. **104**, 211 (2000) [hep-ph/0003220].
- [63] T. W. Kephart and M. T. Vaughn, Annals Phys. **145**, 162 (1983).
- [64] S. P. Martin and M. T. Vaughn, Phys. Rev. D **50**, 2282 (1994) [Erratum-ibid. D **78**, 039903 (2008)] [hep-ph/9311340].
- [65] M. E. Machacek and M. T. Vaughn, Nucl. Phys. B **236**, 221 (1984).
- [66] L. E. Ibanez and C. Munoz, Nucl. Phys. B **245**, 425 (1984).
- [67] C. Munoz, Phys. Lett. B **177**, 55 (1986).
- [68] J. Hisano, D. Kobayashi, Y. Muramatsu and N. Nagata, Phys. Lett. B **724**, 283 (2013) [arXiv:1302.2194 [hep-ph]].
- [69] H. Georgi, Phys. Lett. B **108**, 283 (1982).
A. Masiero, D. V. Nanopoulos, K. Tamvakis and T. Yanagida, Phys. Lett. B **115**, 380 (1982).
B. Grinstein, Nucl. Phys. B **206**, 387 (1982).
- [70] F. P. An *et al.* [DAYA-BAY Collaboration], Phys. Rev. Lett. **108**, 171803 (2012) [arXiv:1203.1669 [hep-ex]].
Y. Abe *et al.* [DOUBLE-CHOOZ Collaboration], Phys. Rev. Lett. **108**, 131801 (2012) [arXiv:1112.6353 [hep-ex]].
J. K. Ahn *et al.* [RENO Collaboration], Phys. Rev. Lett. **108**, 191802 (2012) [arXiv:1204.0626 [hep-ex]].
- [71] J. Hisano, H. Murayama and T. Yanagida, Nucl. Phys. B **402**, 46 (1993) [hep-ph/9207279].
- [72] P. Fileviez Perez, Phys. Lett. B **595**, 476 (2004) [hep-ph/0403286].
I. Dorsner and P. Fileviez Perez, Phys. Lett. B **605**, 391 (2005) [hep-ph/0409095].

- [73] F. Wilczek and A. Zee, Phys. Rev. Lett. **43**, 1571 (1979).
P. Langacker, Phys. Rept. **72**, 185 (1981).
- [74] K. S. Babu, I. Gogoladze, P. Nath and R. M. Syed, Phys. Rev. D **85**, 075002 (2012) [arXiv:1112.5387 [hep-ph]].
- [75] S. Antusch and V. Maurer, JHEP **1311**, 115 (2013) [arXiv:1306.6879 [hep-ph]].
- [76] S. F. King, JHEP **0209**, 011 (2002) [hep-ph/0204360].