報告番号	※　　第　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目　Properly discontinuous isometric group actions on pseudo-Riemannian manifolds
(擬リーマン多様体への固有不連続かつ等長的な群作用について)

氏　　名　椋野　純一

論　文　内　容　の　要　旨

学位論文では、あるクラスの擬 Riemann 多様体へ等長的かつ固有不連続に作用する群の有限性を研究した。

研究の背景を述べる。1962 年に Calabi–Markus は測地的完備正定曲率 Lorentz 多様体である de Sitter 空間 $O(n,1)/O(n-1,1)$ に関する次の定理を示した。

定理 1 (Calabi–Markus, Ann. Math. (1962)). de Sitter 空間 $O(n,1)/O(n-1,1)$ に等長変換群 $O(n,1)$ の部分群 Γ が固有不連続に作用するならば、Γ は有限群である。

G の部分群 Γ が等質空間 G/H に左作用で固有不連続に作用するとき、商空間 $\Gamma\backslash G/H$ は **Clifford–Klein 形**という。定理 1 は、コンパクト Clifford–Klein 形の存在問題を背景に興味を持たれた。Riemann 対称空間にはコンパクト Clifford–Klein 形が存在する。しかし、Lorentz 対称空間の構造を持つ de Sitter 空間は非コンパクトであるが、定理 1 によりコンパクト Clifford–Klein 形を持たないが分かる。定理 1 は Riemann 幾何と Lorentz 幾何での固有不連続な群作用の違いを示す重要な結果の一つである。これまで、J. Wolf [Ann. Math. (1962)]、R. Kulkarni [Adv. in Math. (1981)] や小林俊行 [Math. Ann. (1989)] らにより、定理 1 は擬 Riemann 空間形や等質空間のクラスの枠組みで研究されてきた。一方で、de Sitter 空間は正定曲率性や測地的完備性などの微分幾何学的性質を有している。そこで、小林俊行は、[1] や [2] の中で、定理 1 を微分幾何学的枠組みにおいて一般化できないかという問題を提出した。学位論文では、微分幾何の観点から、定理 1 の一般化について研究する。

以下、結果を紹介する。擬 Riemann 多様体 M の等長変換群の部分群であって、とくに M に固有不連続に作用するものは、有限群に限るとき、擬 Riemann 多様体 M に **Calabi–Markus 現象が起きる**と呼ぶ。まず、de Sitter 空間が捩じれ積 $(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^n,\, -dt^2+\cosh^2(t)g_{\mathbb{S}^n})$ として実現できる事に注意する。ただし、$(\mathbb{S}^n,\, g_{\mathbb{S}^n})$ は n 次元球面である。我々は、de Sitter 空間の捩じれ積の構造に着目することで、定理 1 の一般化について考察し、次の結果を得た。

定理 2. $(F,\, g_F)$ を閉 Riemann 多様体とし、$(B,\, g_B)$ を完備 Riemann 多様体とする。さらに、F の次元が B の次元以上であるとする。B 上に最小点 b_0 を持つ強凸関数 ω が存在したとする。点 b_0 上の指数写像 $\exp_{b_0}: T_{b_0}B \to B$ は微分同相であるとする。このとき、$(B\times F,\, -g_B+\omega^2 g_F)$ は測地的完備であり、$(B\times F,\, -g_B+\omega^2 g_F)$ に Calabi–Markus 現象が起きる。

定理 3 (J. Mukuno [3]). F を閉多様体とし、$\{g_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を F 上の Riemann 計量の滑らかな族とする。次の条件を満たす正の数 t_0 と c が存在すると仮定する: F 上の任意のベクトル場 X と $|t|\geq t_0$ を満たす任意の t に対して、$\mathrm{sgn}(t)\partial g_t(X,\, X)/\partial t \geq c g_t(X,\, X)$ が成り立つ。ただし、 $\mathrm{sgn}(t)$ は、 t が正のとき 1 を値にもち、 t が負のとき -1 を値にもつ関数とする。このとき、$(\mathbb{R}\times F,\, -dt^2+g_t)$ に Calabi–Markus 現象が起きる。

定理 2 は擬 Riemann 多様体捻れ積という具体的な対象に関する結果である。一方、定理 3 は Lorentz 多様体に限っているが、捩じれ積を含む広いクラスに関する結果である。定理 3 により、Calabi–Markus 現象を起こす新しい例を発見した。つまり、等長変換群は非コンパクトであるが、非等質的であり、Calabi–Markus 現象を起こす Lorentz 多様体の例を構成した。

我々は、定理 1 に関して、基本群の作用という特殊な作用に限定して、Lorentz 多様体の広いクラスに一般化できないかを考察した。Lorentz 多様体が**光的測地的完備**であるとは、任意の光的測地線の定義域を実数全体にまで拡張できるときのことをいう。ある Lorentz 多様体の部分集合 S が任意の非拡張的時間的曲線とただ一点で交わるとき、S は **Cauchy 超曲面**と呼ばれる。Cauchy 超曲面が存在する Lorentz 多様体を**大域型双曲的**であるという。大域型双曲的である Lorentz 多様体に対して次の結果を得た。

定理 4. (M, g) を 3 次元以上の光的測地的完備大域型双曲的 Lorentz 多様体とする。ある点 $p \in M$ と時間的接ベクトル $T \in T_pM$ が存在して、$g(v, T) = -1$ を満たす任意の光的接ベクトル $v \in T_pM$ に対して Ricci テンソル $\mathrm{Ric}(d\exp(sv)/ds, d\exp(sv)/ds)$ が下から正の定数で有界であると仮定する。このとき、Cauchy 超曲面がコンパクトであり、基本群が有限群である。

定理 4 で注意すべき事は、$(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n, -dt^2 + g_{\mathbb{S}^n})$ は定理 4 の仮定を満たすが、de Sitter 空間は定理 4 の仮定を満たさないことである。つまり、定理 1 の一般化まで到達していない。

以上より、我々は、3 種類の擬 Riemann 多様体のクラスに対して、群作用の有限性を証明することができた。今後の研究に向けて 2 つの問題を出したい。まず 1 つは、非コンパクトな等長変換群を持つ非等質的擬 Rimann 多様体の例を見つけることである。われわれは、Lorentz 多様体の場合に例を構成できたが、一般の擬 Riemann 多様体に対してはまだなされていない。2 つ目の問題は、定理 4 を de Sitter 空間を含むように一般化できるかである。定理 4 の曲率条件を de Sitter 空間は満足しないため、定理 4 は定理 1 の一般化ではない。つまり、定理 4 の曲率条件などの条件を緩めることができるかが問題である。

参考文献

[1] T. Kobayashi, *Discontinuous groups and Clifford-Klein forms of pseudo-Riemannian homogeneous manifolds*, Algebraic and analytic methods in representation theory (Sønderborg, 1994), Perspect. Math., vol. 17, Academic Press, San Diego, CA, 1997, pp. 99–165.

[2] ———, *Discontinuous groups for non-Riemannian homogeneous spaces*, Mathematics unlimited—2001 and beyond, Springer, Berlin, 2001, pp. 723–747.

[3] J. Mukuno, *Properly discontinuous isometric group actions on inhomogeneous lorentzian manifolds*, Geom. Dedicata (2013), 1–10, Published online.