

## 論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※	第	号
------	---	---	---

氏 名 椋 野 純 一

論 文 題 目

Properly discontinuous isometric group actions on  
pseudo-Riemannian manifolds  
(擬リーマン多様体への固有不連続かつ等長的な群作用に  
ついて)

論文審査担当者

主 査 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 博士 (数理科学)  
太 田 啓 史

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 理学博士  
納 谷 信

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士 (理学)  
伊 師 英 之

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士 (理学)  
糸 健 太 郎

協力委員 東京大学大学院数理科学研究科 教授 工学博士  
金 井 雅 彦

## 論文審査の結果の要旨

本論文の主題は、擬リーマン多様体における Calabi-Markus 現象の微分幾何学的手法による研究である。

Borel-Harish-Chandra, Mostow-玉河の結果によれば、任意のリーマン対称空間に対して、それに等長的かつ固有不連続に作用する群で商空間 (Clifford-Klein 形と呼ばれる) がコンパクトなものが存在する。しかし、計量が非退化でしかない擬リーマン多様体の場合には、この事実の類似は成立しない。実際、1962 年に Calabi と Marcus は、ローレンツ空間形であるド・ジッター空間  $O(n, 1)/O(n-1, 1)$  に等長的かつ固有不連続に作用する群は有限群に限るという事実を発見した。これはコンパクトな Clifford-Klein 形が存在しないことを導く。この結果を端緒として、非コンパクト擬リーマン多様体に等長的かつ固有不連続に作用する群が有限群に限るという現象は Calabi-Markus 現象とよばれ、広く研究されるようになった。とくに、Kulkarni, Wolf は、擬リーマン空間形  $O(n+1-q, q)/O(n-q, q)$  において Calabi-Markus 現象が起こるための必要十分条件は  $2q \leq n$  であることを示した。また、小林俊行氏は、 $(G, H)$  がリー群の簡約対の場合に、擬リーマン等質空間  $G/H$  において Calabi-Markus 現象が起こるための必要十分条件は、 $G, H$  の実階数が一致することであることを証明した。小林氏は、さらに、非等質的な場合への一般化に向けて、擬リーマン多様体において Calabi-Markus 現象が起こるための条件を、微分幾何学的な枠組において定式化するという問題を提示した。

申請者は、この小林氏の問題に取り組み、二つの主結果を得た。まず、閉多様体  $F$  上のリーマン計量の滑らかな族  $\{g_t\}_{t \in \mathbf{R}}$  に対して、 $-dt^2 + g_t$  として与えられる直積多様体  $\mathbf{R} \times F$  上のローレンツ計量の場合に、Calabi-Markus 現象が起こるための一つの十分条件を微分幾何学的な条件として定式化することに成功した。更に、非等質的だが等長変換群が無限群であるローレンツ多様体で、この条件をみたく（したがって、Calabi-Markus 現象が起こる）例を実際に構成することにより、申請者の結果が Calabi-Markus によるド・ジッター空間の場合の真に非自明な一般化になることを示した。

申請者は、次に、指数がより一般の擬リーマン多様体の場合の考察に進み、 $F$  を閉多様体、 $\omega$  を多様体  $F$  上の正值関数するとき、直積多様体  $B \times F$  上の振れ積擬リーマン計量  $-g_B + \omega^2 g_F$  に対して Calabi-Markus 現象が起こるための十分条件を、 $\omega$  の凸性に関する条件（および付加的な条件）として定式化した。この結果は、擬リーマン空間形に対する Wolf の結果を一般化している。

申請者は、また、一般相対論の観点から重要と考えられるローレンツ多様体の場合に、リッチ曲率に関するある正值性の仮定のもとで、基本群が有限になるという、Calabi-Markus 現象と関連した考察も行っている。

非等質な擬リーマン多様体における Calabi-Markus 現象を微分幾何学的手法によって研究し、実質的な成果を得たのは、申請者が初めてであり、以上の成果によって、小林氏の提出した問題に大きく貢献したと認められる。証明および結果の正否の観点からも問題点は見当たらなかった。なお、主結果の一部は既に雑誌 *Geometriae Dedicata* から出版されている。

本論文に関する公開審査会を 2014 年 1 月 31 日に行い、申請者が博士の学位を取得するに足る高い学識を有することを確認した。本学位審査委員会は、申請者には博士（数理学）の学位が授与される資格があると判断する。