報告番号	※　　　第　　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目　Description of the Dixmier-Douady class in simplicial de Rham complexes
（単体的ド・ラーム複体上におけるディクシミエ・ドゥアディ類の記述）

氏　　名　鈴　木　　直　矢

論　文　内　容　の　要　旨

１９６３年、Dixmier と Douady はヒルベルト空間上のコンパクト作用素環をファイバーとするようなファイバー束の特性類として Dixmier-Douady 類を定義した [5]。

Carey, Crowley, Murray は [4] においてその定義を一般化し、リー群 G が $U(1)$ による中心拡大 $U(1) \to \widehat{G} \to G$ をもつとき M 上の主 G 束に対し $H^2(M, \underline{U(1)}) \cong H^3(M, \mathbb{Z})$ に値をとる特性類が定義されることを示した。これも Dixmier-Douady 類と呼ばれ、本論文ではこの定義に基づく Dixmier-Douady 類を扱う。

主 G 束の特性類は分類空間 BG のコホモロジー $H^*(BG)$ の元と 1 対 1 に対応することから、G が $U(1)$ による中心拡大を持つとき Dixmier-Douady 類は $H^3(BG)$ の元となる。そこで Dixmier-Douady 類を表すコサイクルを求めたいが、一般に BG は巨大な空間となるので通常のド・ラーム理論を展開することができない。そこでこの論文では Bott[3] や Dupont[6] らによって築かれた単体的ド・ラーム複体の理論を用いることにする。
この理論は簡単に言うと次のようなものである。まず任意のリー群 G に対して単体的多様体 NG が定義される。これは多様体の列 $\{NG(p) = G^p\}_{p=0,1,\cdots}$ とその間の面写像と呼ばれる写像の族の列 $\{\varepsilon_i : NG(p) \to NG(p-1)\}_{i=0,\cdots,p}$ （及び退化写像と呼ばれる写像の族の列）の組であり、ここから二重複体 $\Omega^{*,*}(NG)$ が定義される。G が適当な性質を満たすときこの二重複体の全複体のコホモロジーは G の分類空間 BG のコホモロジーと同型になり、$\Omega^*(NG)$ 上に主 G 束の各特性類を表すコサイクルが存在する事になるのである。

本論文の主結果は、Dixmier-Douady 類を代表する単体的ド・ラーム複体上のコサイクルを次の様に具体的に求めたことである。

定理 0.1. G が $U(1)$ による中心拡大を持つとき、Dixmier-Douady 類は $\Omega^*(NG)$ において以下の $c_1(\theta)$ と $-\left(\frac{-1}{2\pi i}\right)\hat{s}^*(\delta\theta)$ の和により表される。

$$
\begin{array}{ccccc}
0 & & & & \\
\uparrow{\scriptstyle -d} & & & & \\
c_1(\theta) \in \Omega^2(G) & \xrightarrow{\varepsilon_0^*-\varepsilon_1^*+\varepsilon_2^*} & \Omega^2(G\times G) & & \\
& & \uparrow{\scriptstyle d} & & \\
& & -\left(\frac{-1}{2\pi i}\right)\hat{s}^*(\delta\theta) \in \Omega^1(G\times G) & \xrightarrow{\varepsilon_0^*-\varepsilon_1^*+\varepsilon_2^*-\varepsilon_3^*} & 0
\end{array}
$$

$\square$

ここで θ は $\widehat{G} \to G$ を主 $U(1)$ 束とみなしたときの接続形式であり、$c_1(\theta)$ はその第一 Chern 類を表すコサイクル、$\hat{s}$ は NG の面写像と $\widehat{G} \to G$ を用いて構成される $G \times G$ 上の自明な $U(1)$ 束 $\delta\widehat{G}$ のしかるべき切断である。

同様の問題が K.Behrend, P.Xu らにより [1][2] 等において扱われているが、彼らの結果との大きな違いはこの $\hat{s}$ を用いてコサイクルをより精密に記述している点である。
その結果まずこの切断を他のものに取り換えた場合のコサイクルの挙動を観察することができる。この切断が自然な切断となるように $\widehat{G}$ の積構造を入れ替えたとき、それがもとの中心拡大と同型になるのは切断の変化が $U(1)$ 値コホモロジー $H^2(G, U(1))$ の自明な元で記述されるときであり、またそのときに限ることもわかる。
もうひとつの大きな長所は、二重複体上において Dixmier-Douady 類の “Chern-Simons 形式” を明確に記述できる点である。これは次の様に定義される。リー群 G に対して単体的多様体 $PG(*)$ で、そこから構成される二重複体 $\Omega^*(PG(*))$ の全複体のコホモロジーが普遍束 $EG \to BG$ の全空間のコホモロジーと同型、すなわち全て自明となるものが存在する。従って Dixmier-Douady 類を代表するコサイクルをその二重複体 $\Omega^*(PG(*))$ 上に持ち上げれば完全形式となり、二重複体の微分作用素によりそのコサイクルに移るコチェインをここでは Dixmier-Douady 類の Chern-Simons 形式と呼ぶことにするのである。Chern-Simons 形式を明記することにより、Dixmier-Douady 類の一種の転入作用による像が $\widehat{G} \to G$ の第一 Chern 類となることがわかる。

論文の後半では中心拡大をもつ G としてループ群を取り上げ、Dixmier-Douady 類と主 $SU(2)$ 束の第二チャーン類の関係等について解説し、最後により発展的な内容として Murray, Stevenson [7] らによる bundle gerbe の理論を簡単に解説する。

参考文献

[1] K. Behrend, P. Xu, S^1-bundles and gerbes over differentiable stacks, C.R.Acad. Sci. Paris Sér. I 336(2003) 163-168.

[2] K. Behrend, P. Xu, Differentiable stacks and gerbes. J.Symplectic Geom. 9 (2011), no.3, 285-341.

[3] R. Bott, On the Chern-Weil homomorphism and the continuous cohomology of the Lie group, Adv. in Math. 11 (1973), 289-303.

[4] A.L. Carey, D. Crowley and M.K. Murray , Principal Bundles and the Dixmier Douady Class, Commun. Math. Phys. 193(1998), 171-196,

[5] J. Diximier and A. Douady, Champs continus d'espaces hilbertiens et de C^*-algébres, Bull. Soc. Math. Fr. 91(1963), 227-284

[6] J.L. Dupont, Simplicial de Rham cohomology and characteristic classes of flat bundles, Top. Vol 15(1976),233-245, Perg Press.

[7] M.K. Murray and D. Stevenson, Bundle gerbes: stable isomorphism and local theory. J.London Math.Soc.(2) 62 (2000), no.3, 925-937.