論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　　　　　第　　　　号

氏　　　　名　　鈴 木　　直 矢

論 文 題 目

Description of the Dixmier-Douady class in simplicial de Rham complexes
（単体的ド・ラーム複体上におけるディクシミエ・ドゥアディ類の記述）

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
小　林　亮　一

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　Ph.D.
森　吉　仁　志

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（数理科学）
太　田　啓　史

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（数理科学）
川　村　友　美

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

Dixmier-Douady (1963) は，無限次元可分ヒルベルト空間上のコンパクト作用素から成る C^*-algebra $\mathcal{K}$ の同型群 $\mathrm{Aut}(\mathcal{K})$ を構造群とする位相空間 M 上の局所自明 $\mathcal{K}$ 束の同型類は $H^3(M,\mathbb{Z})$ と 1 対 1 対応することを示した．30 年後に Carey-Crowley-Murray(1997) は特性類としての Diximier-Douady 類を導入した．G をリィ群とする．G は有限次元または良い無限次元リィ群とする．たとえば，コンパクトリィ群のループ群と制限ユニタリ群 $U_{\mathrm{res}}(H)$ は良い無限次元リィ群である．G の中心 $U(1)$ 拡大と M 上の主 G 束が与えられると Dixmier-Douady 類は $H^2(M,\underline{U(1)}) \cong H^3(M,\mathbb{Z})$ の元として定義される．主 G 束の特性類は分類空間 BG のコホモロジー $H^*(BG)$ の元と 1 対 1 対応することから，G が中心 $U(1)$ 拡大を持つとき普遍 Dixmier-Douady 類は $H^3(BG)$ の元である．本論文の主結果は Dixmier-Douady 類を表すコサイクルを記述したことである．この問題に対し最初に simplicial de Rham 複体の言葉で答えを与えたのは Behrend-Xu (2003,2011) である．本論文も simplicial de Rham 複体の言葉で Dixmier-Douady 類の記述を与えるが，それは Behrend-Xu にはない長所をいくつか含む．本論文で与えられた Douady-Dixmier 類は simplicial de Rham 複体のコサイクルで $\Omega^3(NG)$ の元として次の図式で与えられる：G の中心 $U(1)$ 拡大 π が与えられると $G \times G$ 上の $U(1)$-自明束 $\delta\hat{G}$（自明であるが，標準的ではない）が定まり，Dixmier-Douady 類はこの自明束のある条件を満たす切断 $\hat{s}$ の選択に依存して定まる．中心 $U(1)$ 拡大 π の接続 θ をとり，θ から $\delta\hat{G}$ 上に誘導される接続を $\delta\theta$ と表す．

$$
\begin{tikzcd}
0 & & \\
c_1(\theta) \in \Omega^2(G) \arrow[u, "-d"] \arrow[r, "\varepsilon_0^*-\varepsilon_1^*+\varepsilon_2^*"] & \Omega^2(G \times G) & \\
& -(\frac{-1}{2\pi i})\hat{s}^*(\delta\theta) \in \Omega^1(G \times G) \arrow[u, "d"'] \arrow[r, "\varepsilon_0^*-\varepsilon_1^*+\varepsilon_2^*-\varepsilon_2^*"] & 0
\end{tikzcd}
$$

この図式に現れる $c_1(\theta) - (\frac{-1}{2\pi i})\hat{s}^*(\delta\theta)$ のコホモロジー類は θ の取り方によらず，

$$[c_1(\theta) - (\frac{-1}{2\pi i})\hat{s}^*(\delta\theta)] \in H^3(\Omega(NG))$$

は Dixmier-Douady 類を表す simplicial de Rham 複体のコサイクルによる表現である．Behrend-Xu の記述で「ある $\chi \in \Omega^1(G \times G)$ が存在して $\cdots$」となっているところが，実は自然な切断 $\hat{s}_0$ をとれば $\chi = \hat{s}_0^*\delta\theta$ となることを明らかにした．本論文は Dixmier-Douady 類は G の中心 $U(1)$ 拡大 $\pi : \hat{G} \to G$ と $\delta\hat{G}$ の切断 $\hat{s}$ に依存して決まる特性類と理解できることを示している．この記述は Carey-Cowley-Murray による Dixmier-Douady 類の定義 (1997) を $\delta\hat{G}$ のしかるべき切断 $\hat{s}$ の選択の自由度を加えて拡大したものになっている．この記述法の長所として次がある：

- ある条件を満たす $\delta\hat{G}$ の切断 $\hat{s}$ の選び方を変えたときに Dixmier-Douady 類がどう変わるかが分かる．変わらないための判定条件を G の smooth cohomology の言葉で表すことができる．
- ある条件を満たす任意の $\hat{s}$ に対し $\hat{G}$ の積構造で $\hat{s}$ が自然な切断になるものが存在する．新たな積構造が元の積構造と同じであるための判定条件を G の smooth cohomology の言葉で表すことができる．

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

• simplicial de Rham 複体を使って分類空間上の普遍束のモデル $\rho: PG \to NG$ を構成できるので，Dixmier-Douady コサイクルの "Chern-Simons form" を表す simplicial de Rham 複体のコチェインが存在する．このコチェインの明示公式を求めよという問題は，切断 $\hat{s}$ を用いる Dixmier-Douady コサイクルの記述を用いて解決される．Dixmier-Douady 類の Chern-Simons form は以下の図式のコチェイン

$$c_s := -c_1(\theta) - (\frac{-1}{2\pi i})\overline{s}_\rho^*(\overline{\delta}_\rho\theta) \in \Omega^2(PG)$$

で与えられる，すなわち 2 重複体である simplicial de Rham 複体の全複体の微分写像を用いて

$$(d' + d'')c_s = \rho^*(c_1(\theta) - (\frac{-1}{2\pi i})\hat{s}_0^*(\delta\theta))$$

が成り立つ：

$$\begin{tikzcd}
0 & & \\
-c_1(\theta) \in \Omega^2(G) \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\overline{\varepsilon}_0^* - \overline{\varepsilon}_1^*"] & \Omega^2(PG(1)) & \\
& -(\frac{-1}{2\pi i})\overline{s}_\rho^*(\overline{\delta}_\rho\theta) \in \Omega^1(PG(1)) \arrow[u, "-d"'] \arrow[r, "\overline{\varepsilon}_0^* - \overline{\varepsilon}_1^* + \overline{\varepsilon}_2^*"] & \Omega^1(PG(2))
\end{tikzcd}$$

ただし $\overline{s}_\rho$ は，中心 $U(1)$ 拡大と $\rho: PG \to NG$ から標準的に定まる $G \times G$ 上の自明 $U(1)$ 束 $\overline{\delta}_\rho\hat{G}$ の自然な切断であり，$\overline{\delta}_\rho\theta$ は誘導された接続である．

• Chern-Simons form を明示的に表現することにより，普遍 G 束の Dixmier-Douady 類の転入作用による像は $-c_1(\theta)$ であることが導かれる（これは Carey-Crowley-Murray(2003) と Stevenson(2000) の結果の別証明を与える）．ここで（微分幾何的）転入作用は以下の図式で表される作用である：

$$\begin{tikzcd}
x \in \Omega^*(NG) \arrow[r, "\rho^*"] & \rho^* x \in \Omega^*(PG) & \\
& \exists y_x \in \Omega^{*-1}(PG) \arrow[u, "d"'] \arrow[r] & t_x \in \Omega^{*-1}(G)
\end{tikzcd}$$

本論文の主結果は，先行研究にない長所を持つ Dixmier-Douady 類の simplicial de Rham 複体におけるコサイクル表現である．とくに普遍 Dixmier-Douady の Chern-Simons form の明示表現には学位論文として十分な独創性があると認められる．1 月 31 日の公開学位審査セミナーでは Dixmier-Douady 類の由来，Carey-Crowley-Murray の定義が $\hat{s}$ の選択による拡大を持つこと，この観察に基づいて普遍 Dixmier-Douady 類とその Chern-Simons form が simplicial de Rham コサイクル・コチェインにより表現できることが順序よく述べられ，理論の流れが的確に説明された．また，質問に対し的確に答えることができた．以上を鑑みて，本論文は学位論文に値すると判断する．