別紙４

報告番号	※　　　　　　　　　第　　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目　Uniqueness criteria for stationary solutions to the Navier-Stokes equations in exterior domains
(外部領域におけるナヴィエ・ストークス方程式の定常解の一意性判定法)

氏　　名　中塚　智之

論　文　内　容　の　要　旨

本論文では非圧縮粘性流体の定常運動を記述する定常ナヴィエ・ストークス方程式の弱解の一意性について考察している．ナヴィエ・ストークス方程式は流体の速度ベクトル u と圧力 p を未知関数, 外力 f などを既知関数とする非線形偏微分方程式であり, 本論文では特に障害物の外側における流体の運動を記述した３次元及び２次元外部領域における定常ナヴィエ・ストークス方程式を考える．一般に, 一意性が成り立つためには解が適当な意味で小さいことが要求され, ２つの解が与えられた時それらが共に小さい場合の一意性を示すことはあまり難しい問題ではないが, 一方の解が小さいとは限らない場合の一意性は容易な問題ではない．本論文では特にこのような一方の解が小さいとは限らない場合の一意性を主題とし, 幾つかの一意性判定法を証明する．

ナヴィエ・ストークス方程式の解析においてその線形化方程式であるストークス方程式の理論は重要である．３次元外部領域でのストークス方程式について, 適当なクラスの外力に対し $\nabla u \in L^q$ なるクラスでの一意可解性が得られるのは $3/2 < q < 3$ の場合に限ることが知られている．一方, 非線形構造から $\nabla u \in L^{3/2}$ なるクラスが非線形方程式の解を構成する空間として選び取られる．従って, ストークス方程式の L^q 理論は非線形方程式の解の構成において有用でない．これは３次元外部問題特有の困難である．これに対し, L^q 空間よりも大きな弱 L^q 空間 $L^{q,\infty}$ まで関数空間を拡張すれば非線形方程式の解を構成するクラスにおいても必要な線形理論が得られ, $u \in L^{3,\infty}$ かつ $\nabla u \in L^{3/2,\infty}$ というクラスで解を構成できることが Kozono-Yamazaki(1998) により示された．このクラスは３次元外部問題の可解性を得るために必要に迫られて導入されたものであり, 更に一般に期待できる解の最良減衰をとらえている重要なクラスであると言える．本論文ではこの Kozono-Yamazaki(1998) のクラスの解の一意性を考える．

３次元外部問題の解の一意性, 特に一つの解だけが小さい場合の一意性について, エネルギー不等式を仮定するようなクラスでの先行研究は Galdi(1994) 等幾つか知られているが, エネルギー不等式を仮定しないクラスでは非定常方程式の時間周期解の一意性についての Taniuchi(2009)(及び Farwig-Taniuchi(2011)) 等しか無く, 先行研究は非常に少ない．

本論文ではエネルギー不等式を仮定しない Kozono-Yamazaki(1998) のクラスの解の一意性について次の２つの定理 (i),(ii) を示す．以下, u と v を $u, v \in L^{3,\infty}$ かつ $\nabla u, \nabla v \in L^{3/2,\infty}$ なる解とする．(i)u が $L^{3,\infty}$ で小さく, $u, v \in L^r$ $(r > 3)$ ならば $u = v$．更に３次元外部問題の解の一意性についての主結果として (ii)u が $L^{3,\infty}$ で小さく, $v \in L^3 + L^\infty$ ならば $u = v$．(ii) は (i) の改良に見えるが, (ii) で u の smallness を規定している定数は (i) の定数以下になっているため, (i) と (ii) の結果の包含関係は明確ではない．また, 上記の結果は Taniuchi(2009) ではカバーされていない．

証明には解の差 $w := u - v$ が満たす方程式の一意性とその双対方程式の解の存在との双対関係を利用した Duality argument を用いる．この方法においてはそれぞれの方程式の解を他方の方程式の解を定義する弱形式において試験関数として取り合うことが重要なステップであるが, 試験関数のクラス C_0^∞ が Kozono-Yamazaki(1998) のクラスで稠密でない為に w を試験関数として直接取ることができない．この困難を克服する為にストークス方程式の解の正則性に関する補題を示し, 解に追加的に課した正則性を用いて w の良い正則性を引き出すことを (i) の証明で行う．主結果 (ii) を示す際には解 u に追加的な正則性を課さないので, この ($L^{3,\infty}$ で小さい)u を含むような摂動ストークス方程式の解の正則性の理論が w の良い正則性を引き出す上で決定的な役割を果たす。

２次元外部領域における定常ナヴィエ・ストークス方程式の解の一意性もまた本論文の主題である．２次元外部問題には３次元外部問題に見られない特有の困難が存在する．それらの中でも方程式の解析を特に困難にしているのは Stokes paradox であろう．Stokes paradox はストークス方程式が解を持つのはある compatibility condition が満たされた場合に限ることを主張しており, たとえ外力が滑らかで有界な台を持つ場合であってもストークス方程式は必ずしも解を持たない．従って, 線形近似は非線形問題の解析において一般には有用な手段となり得ない．また, $\nabla u \in L^2$ という情報だけでは無限遠方での挙動を制御できないという困難も存在する．こうした困難の為に２次元外部問題について一般的な理論はまだ確立されておらず, 解の存在については対称性の仮定のもとでのみ結果が得られている．Galdi(2004), Pileckas-Russo(2012) は領域と外力に幾らかの対称性を課し, 対応した対称性を持つ $\nabla u \in L^2$ なる解 u を構成した．対称性の性質のために解 u は無限遠方で弱い意味で減衰している．Yamazaki(2011) は領域 Ω と外力 f の更に強い対称性及び外力の smallness を仮定し, 対応した対称性を持つ $\sup_{x\in\Omega}(|x|+1)|u(x)| < \infty$ なる解を構成した．

２次元外部問題の解の一意性についての先行研究は非常に少なく, 対称性を持つ２つの解が共に ($\sup_{x\in\Omega}(|x|+1)|u(x)|$ が小さいという意味で) 小さい場合のみ一意性が得られている (Yamazaki(2011))．本論文では上記の先行研究において構成された解よりも弱い (しかし無限遠方での減衰を保証する) 対称性を持つエネルギークラス ($\nabla u \in L^2$) の解の一意性について, 与えられた２つの解 u, v のうち u がエネルギー不等式 $\|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq (f, u)$ を満たし, $\sup_{x\in\Omega}(|x|+1)|v(x)|$ が小さいならば $u = v$ が成り立つことを示す．更にこの一意性定理と Yamazaki(2011) の結果を組み合わせ, 対称性を持ちエネルギー不等式を満たすような解の無限遠方での漸近挙動についての情報も与える．

証明においては試験関数のクラス $C_{0,\sigma}^\infty$ に属する関数による解 v の近似についての補題が重要な役割を果たす．２つの解 u, v を方程式の弱形式において試験関数としてそれぞれ取り合うことが証明の重要なステップであるが, 非線形項 $u\cdot\nabla u$ のクラスについて有用な情報が無いという困難の為に v を (解 u を定義する) 弱形式においてどのように試験関数として取るのか明らかでない．対称性を持つ関数に対するハーディの不等式により $u\cdot\nabla u$ を $|x|+1$ で割ったものが L^1 に属することが分かるので, この観察に基づき $(|x|+1)v_n \to (|x|+1)v$ weakly $*$ in L^∞ 及び $\nabla v_n \to \nabla v$ in L^2 という性質を持つ近似列 $\{v_n\}_{n=1}^\infty \subset C_{0,\sigma}^\infty$ を構成する．この近似の補題を用いることにより解を方程式の弱形式において試験関数として取ることができる．