論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　　　　　第　　　　号

氏　　　　　名　　中　塚　　智　之

論　文　題　目

Uniqueness criteria for stationary solutions to the Navier-Stokes equations in exterior domains
(外部領域におけるナヴィエ・ストークス方程式の定常解の一意性判定法)

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（理学）
吉　田　伸　生

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（理学）
菱　田　俊　明

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（理学）
杉　本　　充

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（理学）
加　藤　　淳

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

本論文は，外部領域における定常ナヴィエ・ストークス方程式の弱解の一意性に関するものである．$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n=2,3)$ を外部領域，すなわち $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ はコンパクトとし，速度場 $u:\overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, 圧力場 $p:\Omega \to \mathbb{R}$ に対する次の方程式を考える：

$$
(\mathbf{NS})_\mathbf{n} \quad \begin{cases} -\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p &= f \ \text{ in } \Omega; \ \text{(運動方程式)}, \\ \mathrm{div}\, u &= 0 \ \text{ in } \Omega; \ \text{(非圧縮条件)}, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \\ u(x) &\overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases}
$$

ただし外力項 f は適当な $F:\Omega \to \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ により $f = \mathrm{div}\, F = (\partial_i F^i_j)^n_{j=1}$ と表される既知ベクトル場とする．

まず $n=3$ の場合を考える．小薗-山崎 (1998) は $\|F\|_{3/2,\infty}$ が十分小さいという仮定のもとで, $(\mathrm{NS})_3$ の弱解:

$$(u,p) \in \dot{H}^1_{3/2,\infty} \times L_{3/2,\infty} \tag{0.1}$$

であり，次の評価に従うものを構成した：

$$\|u\|_{3,\infty} + \|\nabla u\|_{3/2,\infty} + \|p\|_{3/2,\infty} \le C\|F\|_{3/2,\infty}. \tag{0.2}$$

小薗-山崎が考えた関数空間 (0.1) は次元および，解の遠方での減衰率に由来し，$(\mathrm{NS})_3$ において基本的と考えられている．また，$\|F\|_{3/2,\infty}$ が十分小さいという仮定と (0.2) から解 (u,p) は（特に $\|u\|_{3,\infty}$ は）小さいものに限られることに注意する．

申請者は $(\mathrm{NS})_3$ に対し次の一意性定理を得た：

定理 1 $(\mathrm{NS})_3$ の弱解：$(u,p),(\widetilde{u},\widetilde{p}) \in \dot{H}^1_{3/2,\infty} \times L_{3/2,\infty}$ が次の仮定 (i) または (ii) を満たせば $(u,p)=(\widetilde{u},\widetilde{p})$ である：

(i) $\|u\|_{3,\infty} \le \delta_1$ (δ_1 は十分小さな定数) かつ $u,\widetilde{u} \in \bigcup_{r>3} L_r$；

(ii) $\|u\|_{3,\infty} \le \delta_2$ (δ_2 は十分小さな定数 $\le \delta_1$) かつ $\widetilde{u} \in L_3 + L_\infty$.

定理 1 において特徴的な点は，$\widetilde{u}$ の小ささに対する仮定を置かない点である．定理 1 と (0.2) から，$(\mathrm{NS})_3$ の弱解：$(\widetilde{u},\widetilde{p}) \in \dot{H}^1_{3/2,\infty} \times L_{3/2,\infty}$ が，定理 1 の (i) または (ii) に対応する条件を満たせば,（「小さい」と仮定しなくても）必然的に小薗-山崎の弱解に一致することが従う．定理 1 の証明は双対性の手法により行われるが, 摂動 Stokes 方程式の解析によって小さくない方の解のみに対する L_3 程度の弱い正則性条件のもとで 2 つの解を同定する申請者のアイデアは独創性が高い．

次に二次元 $(n=2)$ の場合を考える．この場合は次元に特有の困難に遭遇する．例えば，非常に良いクラスの外力項に対してすら，一般にはストークス方程式が可解でない．また $\nabla u \in L_2$ を満たす弱解が遠方で減衰するとは限らない．こうした困難に対する一処方とし，領域 Ω と解 u は以下に述べる意味で対称と仮定する．まず Ω に次の条件を課す：$(x_1,x_2) \in \Omega \Longrightarrow \pm(x_1,-x_2) \in \Omega$. また，対称性をもつ解の空間 $\dot{H}^{1,S}_{0,\sigma}$ を次のように定める．$\dot{H}^1_{0,\sigma}$ を線形空間 ：$\{\varphi \in C^\infty_0(\Omega \to \mathbb{R}^n)\,;\, \mathrm{div}\,\varphi = 0\}$ の，ノルム $\|\nabla\varphi\|_2$ による完備化とし，$u \in \dot{H}^1_{0,\sigma}$ で座標成分 $u_j(x_1,x_2)$ $(j=1,2)$ が x_1 または x_2 について奇関数であるもの全体を $\dot{H}^{1,S}_{0,\sigma}$ と記す．更に,「弱解」を定式化する際, 試験関数 $\varphi \in C^\infty_0(\Omega \to \mathbb{R}^n)$ は $\mathrm{div}\,\varphi = 0$ を満たすもの (∇p と直交) に制限することにより，p が現れないようにしておく．従って，以下「弱解」と言う場合，速度場 u のみを指す．

Galdi(2004), Pileckas-Russo (2012) は $(\mathrm{NS})_2$ の弱解 $u \in \dot{H}^{1,S}_{0,\sigma}$ でエネルギー不等式 ((0.4) 後半の積分不等式) に従うものを構成した：また，山崎 (2011) は $(\mathrm{NS})_2$ の弱解 $u \in \dot{H}^{1,S}_{0,\sigma}$ で, $\nabla u \in L_q$ $(\forall q>1)$, かつ次の意味で遠方で減衰するものを構成した：

$$\sup_{x\in\Omega}(1+|x|)|u(x)| < \infty. \tag{0.3}$$

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

申請者は $(\mathrm{NS})_2$ に対し次の一意性定理を得た：

定理 2 $(\mathrm{NS})_2$ の弱解：$u, \widetilde{u} \in \dot{H}^{1,S}_{0,\sigma}$ が次の仮定を満たせば $u = \widetilde{u}$ である：

$$u - \widetilde{u} \in \dot{H}^{1,S}_{0,\sigma}, \quad \int_\Omega |\nabla \widetilde{u}|^2 \leq \int_\Omega f \cdot \widetilde{u}; \tag{0.4}$$

$$\sup_{x\in\Omega}(1+|x|)|u(x)| \leq \delta_3 \text{ (十分小さな定数)}. \tag{0.5}$$

定理 2 においても，$\widetilde{u}$ の小ささに対する仮定を置かない点が特徴的である．例えば，山崎による弱解を (0.5) を満たすようにとれば，Galdi(2004), Pileckas-Russo (2012) の弱解 $\widetilde{u}$ が (0.4) を満たすことと定理 2 から，$u = \widetilde{u}$ が従う．証明中，申請者は Galdi (2004) によるハーディの不等式を用いると共に，u に対し性質のよい近似列を構成し技術的困難を克服している．

本論文は $(\mathrm{NS})_\mathrm{n}$ $(n = 2, 3)$ の弱解に関する一連の研究に対し新知見を提供すると認められる．定理 1 を含む副論文は既に公表済み，定理 2 を含む副論文は現在投稿中である．また，2014 年 1 月 29 日に行った公開審査会における申請者の発表と質疑応答から，申請者が博士の学位取得に足る高い学識を有することを確認した．以上により，審査委員会は，申請者は博士（数理学）の学位が授与される資格を有すると判断する．