論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※　　第　　号

氏　　名　　若狭　尊裕

論　文　題　目

The explicit estimation for the argument of the Riemann zeta function on the critical line
（リーマンゼータ関数の臨界線上の偏角に関する明示的な評価）

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
山　上　　滋

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
松　本　耕　二

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　理学博士
鈴　木　浩　志

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（理学）
稲　浜　　譲

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

若狭氏の研究対象は、Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の、臨界線 $\Re s = 1/2$ 上での偏角の挙動である。Riemann ゼータ関数について、もっとも重要なのはその零点の研究であるが、零点の個数をカウントする公式は古くからよく知られている。$N(T)$ を実部が 0 と 1 の間、虚部が 0 と T の間にある $\zeta(s)$ の零点の (重複度も込めた) 個数とすれば、その公式は

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + S(T) + O\left(\frac{1}{T}\right) \tag{1}$$

と書かれるが、ここで $S(T)$ は $s = 1/2 + iT$ における $\zeta(s)$ の偏角を π で割った値として定義される量である。従って上の公式は、偏角 $S(T)$ の挙動が分かれば零点の分布も理解できる、ということを示している。すなわち $S(T)$ の研究は Riemann ゼータ関数の研究における最重要課題のひとつということになる。

しかしながら $S(T)$ 自体の研究は実に困難で、進歩は遅々たるものである。そこでその大きさの変化を調べるために、その積分 $S_1(T)$ や、m 次累次積分 $S_m(T)$ までが研究対象となってきている。$S_m(T)$ の non-trivial な評価は既に 1920 年代に Littlewood によって論じられており、続いて 1940 年代に Selberg が一段と深い結果に到達した。近年になっても、Tsang, Ghosh, Fujii, Karatsuba, Korolev, Trudgian といった各国の研究者たちによって、$S(T)$ や $S_m(T)$ の研究は依然として活発に進められている。

こうした中で、若狭氏の第一の結果（学位論文の Theorem 2.3）は、$S_m(T)$ の絶対値の上からの評価に関して、係数部分を明示的に与えたことである。$S(T)$ の場合、その上からの評価 $|S(T)| \le C_0 \log T$ (あるいは Riemann 予想の仮定の下で $|S(T)| \le C_0 \log T/\log\log T$) は古典的に知られたことであるが、その係数部分 C_0 まで精密に評価することは理論上も、また零点の数値計算上の目的からも重要なので、詳しい研究が続けられている。同様の研究は $S_1(T)$ についても行なわれており、藤井昭雄氏の 2006 年の結果が現在最良である。

若狭氏はこの藤井氏の方法を一般の $S_m(T)$ の場合に拡張することを試みた。従って若狭氏の議論は基本的には先行する藤井氏の方法を踏襲するものであるが、m が偶数の場合と奇数の場合とで議論に違いが生じる。若狭氏は藤井氏の議論をそのまま素直に拡張できるのは m が奇数の場合だけであること、しかし m が偶数の場合にも、藤井氏の別の論文の手法を援用したりすることで議論がうまく進行することを見抜き、かなり複雑繊細な計算をやりきって、一般の m に対する $S_m(T)$ の explicit 評価に到達している。

若狭氏の第二の結果は短い区間での $S_1(T)$ の下からの評価である。Selberg は 1940 年代に、$S(T) \ge c(\log T)^{1/3}(\log\log T)^{-7/3}$ となるような、いくらでも大きい T の値が存在することを証明した。同様に $S(T) \le -c(\log T)^{1/3}(\log\log T)^{-7/3}$ となる、いくらでも大きい T も存在する。Tsang は 1980 年代に、Selberg のこれらの不等式の右辺における $(\log\log T)^{-7/3}$ を、$(\log\log T)^{-1/3}$ に改良できることを示した。こうした結果は $|S(T)|$ の下からの評価の限界を探るものであり、オメガ評価の理論と呼ばれている。Selberg と Tsang は、$S_1(T)$ についても類似のオメガ結果を得ている。

オメガ評価型の理論においては、上述のような不等式が成立する T の値の位置を探ることがひとつの重要な課題となる。そのため、こうした不等式が成り立つような T の値を含む、できるだけ短い区間を探す、という問題が設定される。Karatsuba と Korolev は 2005 年の論文で、勝手な $\varepsilon > 0$ に対して、$H = T^{27/82+\varepsilon}$ ととれば、不等式

$$\sup_{T-H \le t \le T+2H} S(t) \ge \frac{\varepsilon^{5/4}}{1000}\left(\frac{\log T}{\log\log T}\right)^{1/3} \tag{2}$$

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

が十分大きい任意の T に対して成立することを証明した。(最小値についても同様の不等式が成り立つ。)

若狭氏は、この Karatsuba-Korolev の不等式の類似を、$S_1(T)$ に対して証明した (学位論文の Theorem 3.1)。その証明法は Karatsuba-Korolev の議論の類似であるが、実は m が２より大きいときの $S_m(T)$ にたいしてはもはやその方法は通用しない。$S_1(T)$ に対してだけは Karatsuba-Korolev の方法が適用可能なことを見抜き、それを実行した点が若狭氏の新たな貢献である。

上述の結果は、それぞれ公開を前提とした論文にまとめられ、前者は既に出版公表されている。また、後者についても雑誌掲載が決定しており、この方面の新進の研究者のひとりとして、今後の活躍が期待される。

本学位申請に伴う公開学位審査セミナーは、２０１４年２月４日に行われ、学位申請内容の明快な説明と質問に対する的確な応対を通じて、申請者が博士の学位を取得するに足る高い学識を有することが確認された。

以上により、学位審査委員会は、申請者には博士（数理学）の学位が授与される資格があるものと判断する。