別紙4

報告番号	※　　　　第　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目　Well-posedness and scattering for nonlinear Schrödinger equations with derivative nonlinearity and higher order KdV type equations
(微分を含む非線型項を持つ非線型シュレディンガー方程式と高次 KdV 型方程式の適切性と解の散乱について)

氏　　名　平山　浩之

論　文　内　容　の　要　旨

本論文では微分を含む非線型項を持つ非線型分散型方程式, 特に微分を含む2次の非線型項をもつ非線型シュレディンガー方程式の連立系, 微分を含む非線型項をもつ単独シュレディンガー方程式および 高次 KdV 型方程式の初期値問題の適切性と解の散乱について調べる. 特に初期値の空間として, 出来る限り正則性の低いソボレフ空間 H^s における適切性を導くことを目的とする. 適切性が成立するためのソボレフ指数の目安としては, スケーリングの議論から定まるスケール臨界指数が挙げられる. スケール臨界なソボレフ空間における非線型分散型方程式の初期値問題では非線型項の評価に用いる不等式の制約等により, 一般には適切性を導くことが難しい. さらに本論文で扱う方程式のように非線型項が微分を含んでいる場合には “可微分性の損失” が生じるため, やはり一般には適切性を導くことが難しい. 本論文はこれらの難しさを克服し, スケール臨界なソボレフ空間における結果を多数含んでいる点が特徴的である.

非線型分散型方程式の適切性の研究は, 1993 年に Bourgain が “フーリエ制限ノルム法” と呼ばれる手法を導入したことによって急速に発展を遂げた. この手法によって用いられたノルム (Bourgain ノルム) は方程式の線型部分の構造を反映しているため, 方程式の特徴を捉えた評価を行うことが可能となる. Bourgain ノルムを用いることによって, 多くの非線型分散型方程式に対して適切性が成立するためのソボレフ指数の値は大幅に改良された. さらに近年, 適切性を得るための関数空間として有界変動関数の空間 V^p およびそのある意味での双対空間 U^p が Hadac–Herr–Koch ら ('09) によって応用された. 彼らはこれらの関数空間を用いることにより, KP-II 方程式のスケール臨界なソボレフ空間における適切性を導いた. 最近では関数空間 U^p, V^p を用いることで, スケール臨界なソボレフ空間における非線型分散型方程式の適切性に関する結果が次々と得られている. 本論文の第一章では問題の背景および, 逐次近似の議論の観点から Bourgain ノルム, 関数空間 U^p, V^p の利点について説明し, これらを用いて得られた結果を述べる. 第二章では Hadac–Herr–Koch らによって示された関数空間 U^p, V^p の性質について述べる. 以下, 第三章以降の内容を説明する.

第三章, 第四章では微分を含む2次の非線型項を持つシュレディンガー方程式の連立系:

$$
\begin{cases}
(i\partial_t + \alpha\Delta)u = -(\nabla\cdot w)v, & (t,x) \in (0,\infty)\times X,\\
(i\partial_t + \beta\Delta)v = -(\nabla\cdot \overline{w})u, & (t,x) \in (0,\infty)\times X,\\
(i\partial_t + \gamma\Delta)w = \nabla(u\cdot \overline{v}), & (t,x) \in (0,\infty)\times X
\end{cases}
\tag{1}
$$

の初期値問題の適切性および解の散乱について調べる．ここで $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $X=\mathbb{R}^d$ または $\mathbb{T}^d$ $(=\mathbb{R}^d/(2\pi\mathbb{Z})^d)$ である．方程式系 (1) は Colin–Colin ら ('04) によってレーザーとプラズマの相互作用に関するモデルとして導入されたものであり，スケール臨界なソボレフ指数は $s_c = d/2-1$ である．微分を含む非線型項をもつ単独シュレディンガー方程式および，非線型項に微分を含まないシュレディンガー方程式の連立系の適切性についての結果は多く得られているが，(1) のような微分を含む非線型項を持つシュレディンガー方程式の連立系の適切性についての結果はほとんど得られていない．単独シュレディンガー方程式の初期値問題については非線型項が 3 次以上の項のみしか含まない場合には，十分大きな $s>0$ に対して H^s において適切となることが Kenig-Ponce-Vega ら ('08) によって示されている．一方非線型項が 2 次の項 $u\partial_x u$ を含む場合には，任意の $s\in\mathbb{R}$ に対して H^s において非適切となることが Christ ('03) によって示されている．したがってシュレディンガー方程式の非線型項が 2 次で微分を含む場合には，一般にソボレフ空間における適切性を得ることは困難である．本論文では，(1) に対して α,β,γ の値によっては Christ による非適切性の証明が適用されないことを利用し，ソボレフ空間における (1) の適切性を導く．さらに解を構成する空間として U^2, V^2 型の関数空間を用いることで，スケール臨界指数 s_c についての次の結果を得る．

主定理 1. $\theta := \alpha\beta\gamma(1/\alpha - 1/\beta - 1/\gamma)$, $\kappa := (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta+\gamma)$.
(i) $X=\mathbb{R}^d$, $d\geq 2$ とし，$\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ は $d\geq 4$ のとき $\kappa\neq 0$, $d=2,3$ のとき $\theta>0$ を満たすとする．このとき，方程式系 (1) は $H^{s_c}(\mathbb{R}^d)$ において小さな初期値に対して時間大域的適切であり，解は H^{s_c} において散乱する．
(ii) $X=\mathbb{T}^d$, $d\geq 5$ とし，$\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ は $\alpha\beta\gamma(1/\alpha-1/\beta-1/\gamma)>0$ および α/β, $\beta/\gamma\in\mathbb{Q}$ を満たすとする．このとき，方程式系 (1) は $H^{s_c}(\mathbb{T}^d)$ において小さな初期値に対して時間局所適切である．

さらにスケール優臨界指数について次の結果を得る．

主定理 2. $\theta := \alpha\beta\gamma(1/\alpha - 1/\beta - 1/\gamma)$, $\kappa := (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta+\gamma)$.
(i) $X=\mathbb{R}^d$, $d\geq 4$ とし，$\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ は $(\alpha-\gamma)(\beta+\gamma)\neq 0$ を満たすとする．このとき，方程式系 (1) は $H^s(\mathbb{R}^d)$ $(s>s_c)$ において時間局所適切である．
(ii) $X=\mathbb{R}^d$, $d=2$, 3, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ とし，$\theta>0$ のとき $s>s_c$, $\theta\leq 0$ かつ $\kappa\neq 0$ のとき $s\geq 1$, $\alpha=\beta$ のとき $s>1$ とする．このとき，方程式系 (1) は $H^s(\mathbb{R}^d)$ において時間局所適切である．
(iii) $X=\mathbb{R}^d$, $d=1$, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ とし，$\theta>0$ のとき $s\geq 0$, $\theta=0$ のとき $s\geq 1$, $\theta<0$ かつ $(\alpha-\gamma)(\beta+\gamma)\neq 0$ のとき $s\geq 1/2$ とする．このとき，方程式系 (1) は $H^s(\mathbb{R}^d)$ において時間局所適切である．
(iv) $X=\mathbb{T}^d$, $d\geq 1$ とし，$\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ は $\theta>0$ および α/β, $\beta/\gamma\in\mathbb{Q}$ を満たすとする．このとき，方程式系 (1) は $H^s(\mathbb{T}^d)$ $(s>\max\{s_c,0\})$ において時間局所適切である．

なお，L^2 での解と H^1 での解については保存則から得られるアプリオリ評価を用いて時間大域的に延長が可能である．一方，次のような弱い意味での非適切性の結果を得る．

主定理 3. $X=\mathbb{R}^d$, $d\geq 1$ とし，$(\alpha-\gamma)(\beta+\gamma)=0$ のとき $s\in\mathbb{R}$, $\theta=0$ のとき $s<1$, $\theta<0$ のとき $s<1/2$ とする．このとき，主定理 2 で得られる解を与える写像は H^s の位相で C^2 級ではない．

証明のポイントは，非線型相互作用による周波数変調が α,β,γ の値によってどのように変化するかを調べることである．特に $\alpha\beta\gamma(1/\alpha-1/\beta-1/\gamma)>0$ の場合には非線型相互作用による共鳴が生じないことを示す (Lemma 3.16)．非共鳴性と関数空間 U^2, V^2 の性質を組み合わせることで非線型項から生じる可微分性の損失を回復し，スケール臨界なソボレフ空間における (1) の適切性を得る．$X=\mathbb{R}^d$ の場合の適切性の証明のいくつかの部分ではシュレディンガー方程式に対するストリッカー

ツ評価の許容指数対が $X=\mathbb{R}^d$ の場合に比べて極端に少ないため, 同様の議論が成立しない. この部分の難しさを克服するために, Wang ('12) による非線型シュレディンガー方程式の非線型項の評価をより一般的な形に拡張し (Proposition 4.10), これをストリッカーツ評価の代わりに用いる. ただし, 本論文で示す非線型項の評価式 (Proposition 4.16) には Wang による証明をそのまま適用することはできず, ノルムの直交性を上手く利用し, 空間変数についての周波数領域における分解をより精密に行うという工夫も要する. 一般に分散型方程式に対しては放物型方程式のような平滑化効果は期待できないため, 時間変数についての積分を行うことによって得られる (弱い意味での) 平滑化効果を利用する. しかし周期境界条件下ではこの (弱い意味での) 平滑化効果すら得ることができず, $X=\mathbb{R}^d$ の場合よりも適切性を導くことが難しい. したがって周期境界条件下の問題に対しては, 微分を含む非線型項をもつ非線型分散型方程式のスケール臨界指数での適切性に関する結果は本論文以外にないと思われる.

第五章では微分を含む非線型項をもつ単独シュレディンガー方程式:

$$(i\partial_t+\Delta)u=\partial_k(\overline{u}^m),\quad (t,x)\in(0,\infty)\times X \tag{2}$$

の初期値問題の適切性および解の散乱について調べる. ここで $1\leq k\leq d$, $\partial_k=\partial/\partial x_k$, $X=\mathbb{R}^d$ または $\mathbb{T}^d$ である. (2) は Grünrock によって研究された方程式であり, スケール臨界なソボレフ指数は $s_c=d/2-1/(m-1)$ である. Grünrock ('00) は Bourgain ノルムを用いることにより, $d=1$ かつ $m=2$ の場合に (2) の $L^2(\mathbb{R}^d)$ および $L^2(\mathbb{T}^d)$ における時間大域的適切性および $d\geq 1$ かつ $m+d\geq 4$ の場合に (2) の $H^s(\mathbb{R}^d)$ $(s>s_c)$ および $H^s(\mathbb{T}^d)$ $(s>s_c)$ における時間局所適切性を得ている. 本論文では解を構成する空間として U^2, V^2 型の関数空間を用いることで, スケール臨界指数についての次の結果を得る.

主定理 4.
(i) $X=\mathbb{R}^d$, $d\geq 1$, $m+d\geq 4$ とする. このとき, (2) は $H^{s_c}(\mathbb{R}^d)$ において小さな初期値に対して時間大域的適切であり, 解は H^{s_c} において散乱する.
(ii) $X=\mathbb{T}^d$, $d\geq 5$, $m=2$ とする. このとき, (2) は $H^{s_c}(\mathbb{R}^d)$ において小さな初期値に対して時間局所適切である.

証明のポイントは, 非線型相互作用による非共鳴性 (Lemma 5.10) と U^2, V^2 の性質を組み合わせることで非線型項から生じる可微分性の損失を回復するための評価を得ることである. また, $m+1$ 個の関数の積に対する不等式である "多重線型評価式" (Proposition 5.11, 5.12) も適切性を示すための鍵となる. "多重線型評価式" の証明では上記の可微分性の損失を回復するための評価を利用できるように, $m+1$ 個の関数をヘルダーの不等式を用いて上手く分解するという工夫を要する. なお, 主定理 4 (i) の $d\geq 2$, $m=2$ の場合は第三章で, (ii) は第四章で示される.

第六章では周期境界条件下における高次 KdV 型方程式:

$$\partial_t u+(-1)^{k+1}\partial_x^{2k+1}u+\frac{1}{2}\partial_x(u^2)=0,\quad (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{T} \tag{3}$$

の初期値問題の時間局所適切性について調べる. 方程式 (3) は $k=1$ のときは "KdV 方程式", $k=2$ のときは "Kawahara 方程式" と呼ばれ, いずれも水の波のモデルとして記述される. 方程式 (3) の時間局所適切性について知られている最良の結果は, Kenig–Ponce–Vega ら ('96) による $k=1$ の場合の $H^s(\mathbb{T})$ $(s\geq -1/2)$ における時間局所適切性および Gorsky–Himonas ら ('09) による $k\in\mathbb{N}$ の場合の $H^s(\mathbb{T})$ $(s\geq -1/2)$ における時間局所適切性である. いずれの結果も Bourgain によるフーリエ制限ノルム法によるものである. 本論文においてもフーリエ制限ノルム法を用い, Gorsky–Himonas らの非線型項の評価式を改良することによって次の結果を得る.

主定理 5. $k\in\mathbb{N}$ とする. (3) は $H^s(\mathbb{T})$ $(s\geq -k/2)$ において時間局所適切である.

さらに本論文では $s < -k/2$ で Bourgain ノルムによる非線型項の評価式が成立しない例を与え，通常の Bourgain ノルムを用いる限りでは $s = -k/2$ が適切性成立のための最良の指数であることも得る．証明のポイントは，非線型相互作用による周波数変調の評価の改良 (Lemma 6.8) である．Gorsky–Himonas らが行った周波数変調の評価は

$$|\xi^{2k+1} - \xi_1^{2k+1} - \xi_2^{2k+1}| \gtrsim |\xi\xi_1\xi_2| \cdot |\xi|^{2k-2}$$

であるが本論文ではこの評価を改良し，次を得る．

$$|\xi^{2k+1} - \xi_1^{2k+1} - \xi_2^{2k+1}| \sim |\xi\xi_1\xi_2| \max\{|\xi|, |\xi_1|, |\xi_2|\}^{2k-2}. \tag{4}$$

(4) を示すには $2k$ 次多項式の因数分解を行う必要があり，精密な計算を要する．なお，主定理 5 は Kato('11) が $k = 2$ の場合に修正を加えた Bourgain ノルムを用いることによって，適切性が成立する指数を $s \geq -3/2$ まで改善している．