

## 論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※	第	号
------	---	---	---

氏 名 平 山 浩 之

論 文 題 目

Well-posedness and scattering for nonlinear Schrödinger equations with derivative nonlinearity and higher order KdV type equations

(微分を含む非線型項を持つ非線型シュレディンガー方程式と高次 KdV 型方程式の適切性と解の散乱について)

論文審査担当者

主 査 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 博士 (理学)  
杉 本 充

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士 (数理科学)  
津 川 光 太 郎

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 博士 (理学)  
菱 田 俊 明

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 理学博士  
内 藤 久 資

## 論文審査の結果の要旨

シュレディンガー方程式や KdV 方程式などを典型例とする分散型方程式に対する非線形初期値問題に関する研究は、いくつもの新しい手法の開発とともにこの 30 年の間に飛躍的な進展をとげており、偏微分方程式論におけるひとつの中心的課題として、今もなお様々な角度からの精力的な研究が世界的に行われている。特に初期値の空間としてソボレフ空間  $H^s$  を取るときに、できるだけ小さい正則性の指数  $s$  に関してその適切性（すなわち解の存在・一意性・初期値への連続依存性）を導く問題は、1993 年に Bourgain が「フーリエ制限ノルム法」と呼ばれる方法を開発したことにより、この  $s$  に対する制約は様々な状況において大幅に改良されることとなった。ここで導入された関数空間は方程式の形に付随して定義されるものであり、今日では Bourgain 空間とよばれこの種の問題における標準的な道具のひとつとして認知されている。

一方、非線形方程式においては相似変換によっても解であるという性質が保たれる事が多く、しばしば、この相似変換に関してノルムが不変であるソボレフ空間においても適切性が成立するはずであるという考えのもとに研究が進められている。このときのソボレフ指数  $s = s_c$  はスケール臨界指数と呼ばれており、分散型方程式の場合においても実際にこの指数での適切性を示すことが当面の目標とされてはいるが、様々な状況において Bourgain の方法だけでそれを示すことは困難であり、 $s_c$  よりも大きい指数  $s$  (劣臨界) における適切性さえも与えられていない場合も多い。その典型的な状況として、KdV 方程式などのように非線形項が未知関数の偏導関数を含む場合が挙げられる。この場合の難しさは、未知関数の微分によって生じた正則性の損失をなんらかの手段にて回復させねばならず、そのことにより Bourgain の方法との不整合を生じてしまう点にある。

平山氏の学位論文はこのような状況を背景としたものであり、Hadac-Herr-Koch ('09) らにより考案された、Bourgain 空間とその双対空間との包含関係をさらに精密化した空間を用いる議論を援用することにより、非線形項に未知関数の導関数を含む様々な非線形分散型方程式に対するスケール臨界指数、あるいはそれに近い劣臨界指数での適切性を論じている。その主たる成果は、以下のとおりである：

第 1 の成果として、未知関数とその 1 階偏導関数の積からなる非線形項を持つユークリッド空間上のシュレディンガー方程式の連立系に関して、小さい初期値に対するスケール臨界指数での時間大域的適切性および散乱性（線形化方程式の解に時間無限大で漸近する性質）、およびトーラス上での時間局所適切性を論じた。非線形項に未知関数の導関数を含まない場合にはこれまでに多くの結果が知られているが、導関数を含む場合の既存の結果はほとんど知られていない。また、単独の方程式で非線形項に未知関数とその 1 階偏導関数の積からなる項を含む場合には、任意の  $s$  について非適切となることが Christ ('03) により示されているが、ここでの成果は、連立系の場合には単独の場合とは異なり、ある種の非共鳴条件を満たす限りスケール臨界指数で適切となりうることを示した画期的なものとなっている。さらに劣臨界の場合には、やや緩やかな非共鳴条件のもとでも適切であることも示している。

第 2 の成果として、非線形項が未知関数の複素共役のべき乗の 1 階偏導関数で与えられるユークリッド空間上の単独のシュレディンガー方程式に関して、小さい初期値に対するスケール臨界指数での時間大域的適切性と散乱性を論じた。劣臨界の場合には、Grünrock ('00) により適切性の結果が知られていたが、ここでの成果は、非線形相互作用が非共鳴性をもつことを巧みに用いることにより、それが改善されることを示している。

## 論文審査の結果の要旨

第3の成果として、トーラス上における高次 KdV 方程式に関して、ある劣臨界指数における時間局所適切性を論じた。この方程式は、通常の KdV 方程式や Kawahara 方程式などをその特別の場合として含んでいる。通常の KdV 方程式の場合に時間局所適切性が知られている指数  $s$  の最良値は、Kenig-Ponce-Vega ('96) による  $-1/2$  であり、一般の高次 KdV 方程式に対しても、これと同じ指数の場合に Gorsky-Himonas ('09) が時間局所適切性を示している。ここでの成果は、方程式の次数に応じて時間局所適切性が成立する指数  $s$  が異なっており、結果として Gorsky-Himonas の結果を大幅に改良している。またその指数が、Bourgain 空間を用いる限りにおいては最良のものであることも示している。

このように、平山氏の学位論文は偏微分方程式論における重要課題に対する精密な解析および新しい知見を与えたものであり、学位論文として十分な内容を持つものである。また、以上の成果は、副論文において既に出版、出版予定、あるいは公表済みとなっている。学位審査セミナーも、平山氏の問題意識とその解決への基本的アイデア、および主結果の意義などが、非専門家にもよく伝わるように工夫されたものであった。

以上により、本学位審査委員会は、申請者には博士（数理学）の学位が授与される資格があるものと判断する。