別紙4

| 報告番号 | ※ 第 号 |
|---|---|

# 主 論 文 の 要 旨

論文題目 ATOM SPECTRA OF GROTHENDIECK CATEGORIES AND COLORED QUIVER CONSTRUCTION

(Grothendieck圏のアトム・スペクトラムと色付きクイバーによる構成)

氏 名 神田 遼

## 論 文 内 容 の 要 旨

Grothendieck 圏は 1957 年に Grothendieck によって導入された概念であり、完全な順極限と生成対象を持つ Abel 圏として定義される。Abel 群の圏を始め、群の線型表現の圏、環上の加群の圏、位相空間上の加群の層の圏、スキーム上の準連接層の圏などの重要な圏が Grothendieck 圏となることが知られており、Grothendieck 圏の概念を用いることでこれらの圏のホモロジー代数的性質を統一的に分析することができる。その1つの結果として Grothendieck は、任意の Grothendieck 圏が十分多くの移入対象を持つことを示し、前述のすべての例において右導来関手が移入分解を用いて構成されることを明らかにした。

環上の加群の圏は環の表現論における中心的な研究対象であるが、Grothendieck 圏の枠組みと密接な関係がある。Mitchell は、Grothendieck 圏が小さい射影生成対象を持つとき、かつそのときに限り、ある環の加群圏と同値になることを示し、環の加群圏のなすクラスを圏論的性質によって特徴付けた。一方で Gabriel-Popescu の定理によって、任意の Grothendieck 圏はある環の加群圏の商圏として表される。したがって、どの Grothendieck 圏もある環の一部分の構造を反映したものであると言える。

私は本論文において、Abel 圏に付随する位相空間である**アトム・スペクトラム**を定義し、それを用いて Abel 圏・Grothendieck 圏の内部構造を調べるための基盤となる理論を構築した。さらに私は**色付きクイバー**を用いた Grothendieck 圏の構成によって、Grothendieck 圏の構造が極めて多様であることをアトム・スペクトラムの観点から明らかにした。

Abel 圏 $\mathcal{A}$ のアトム・スペクトラム $\operatorname{ASpec}\mathcal{A}$ は、$\mathcal{A}$ におけるモノフォーム対象全体の、ある同値関係による商として定義される。$\mathcal{A}$ のアトム・スペクトラムの元を $\mathcal{A}$ の**アトム**と呼ぶ。環上のモノフォーム加群は環論における古典的な概念であり、可換環 $R$ の素イデアル $\mathfrak{p}$ によって定まる加群 $R/\mathfrak{p}$ が典型例である。アトムの概念は 1972 年、Storrer によって環上の加群の圏に対して導入され、Goldman による非可換環上の加群の準素分解の理論を簡明化するために用いられた。可換環 $R$ に対して、その加群圏 $\operatorname{Mod} R$ のアトム・スペクトラム $\operatorname{ASpec}(\operatorname{Mod} R)$ と、素イデアルの集合 $\operatorname{Spec} R$ の間には自然な全単射が存在することが Storrer の結果から従う。このことは Abel 圏のアトムが可換環の素イデアルの一般化であることを示している。私は Abel 圏のアトム・スペクトラムに対して、位相空間の構造と半順序集合の構造を自然な形で導入した。可換環 $R$ の加群圏 $\operatorname{Mod} R$ の場合、

アトム・スペクトラム $\mathrm{ASpec}(\mathrm{Mod}\, R)$ の開集合は素イデアルの集合 $\mathrm{Spec}\, R$ の部分集合で特殊化について閉じたものに対応し、$\mathrm{ASpec}(\mathrm{Mod}\, R)$ 上の半順序は素イデアルの間の包含関係に対応する。

非可換環には多くの異なった素イデアルの定義が存在するが、最もよく調べられてきた概念の1つに両側素イデアルがある。両側素イデアルは可換 Noether 環上、加群として有限生成な環に対して特に有効であり、可換環論の様々な理論が両側素イデアルを用いて一般化されてきた。しかし、一般の Noether 環は十分多くの両側素イデアルを持つとは限らないため、両側素イデアルは多くの表現論的な構造を説明するものではなかった。一方で、本論文において扱うアトム・スペクトラムは、下記に述べるように表現論の重要な概念と密接な関係がある。

まずは直既約移入対象との関係について述べる。Grothendieck 圏における直既約移入対象は、環やスキームのホモロジー的構造を調べるための基本的な概念である。Matlis は可換 Noether 環 $R$ に対して、$R$ の素イデアルと直既約移入 $R$ 加群の同型類が自然に1対1に対応することを示した。私は Matlis の対応の一般化として、任意の局所 Noether 的（locally noetherian）Grothendieck 圏 $\mathcal{A}$ に対して、$\mathcal{A}$ のアトムと $\mathcal{A}$ における直既約移入対象の同型類が自然に1対1に対応することを示した。この結果は、任意の局所 Noether 的 Grothendieck 圏が十分多くのアトムを持つことを意味している。

次にアトム・スペクトラムを用いた局所化部分圏の分類について述べる。環の表現論において種々の部分圏の分類は、およそ半世紀前から続く主要な問題の1つである。Gabriel は可換 Noether 環 $R$ に対して、加群圏 $\mathrm{Mod}\, R$ の局所化部分圏、有限生成 $R$ 加群の圏 $\mathrm{mod}\, R$ の Serre 部分圏、並びに $\mathrm{Spec}\, R$ の特殊化で閉じた部分集合が自然に1対1に対応することを示した。私はこの結果を一般化し、任意の局所 Noether 的 Grothendieck 圏 $\mathcal{A}$ に対して、$\mathcal{A}$ の局所化部分圏、$\mathrm{noeth}\, \mathcal{A}$ の Serre 部分圏、並びにアトム・スペクトラム $\mathrm{ASpec}\, \mathcal{A}$ の開集合が自然に1対1に対応することを示した。ここで $\mathrm{noeth}\, \mathcal{A}$ は $\mathcal{A}$ における Noether 対象全体のなす部分圏を表している。この結果の証明の一部として、私は $\mathcal{A}$ のアトム・スペクトラムと $\mathrm{noeth}\, \mathcal{A}$ のアトム・スペクトラムが位相同型になることを示した。$\mathcal{A}$ と $\mathrm{noeth}\, \mathcal{A}$ は異なった種類の Abel 圏であるが、アトム・スペクトラムを考えることで両者の共通した構造が明らかになるのである。

可換環 $R$ に対して、その素イデアルの集合 $\mathrm{Spec}\, R$ は包含関係によって半順序集合となるが、このような形で現れる半順序集合は、有限半順序集合の逆極限で表される半順序集合として Hochster と Speed によって特徴付けられている。この条件は極大元・極小元の存在を導くなど、半順序集合に強い制限を課すものである。私はこのような半順序集合の特徴付けを Grothendieck 圏に対して行うために、色付きクイバーの概念を導入し、それを用いて Grothendieck 圏を構成するための体系的な方法を確立した。色付きクイバーとは矢に色の付いた有向グラフであり、与えられた色付きクイバー $\Gamma$ に対して、対応する Grothendieck 圏 $\mathcal{A}_\Gamma$ が自然な方法で構成される。与えられた環 $R$ が体を含むとき、その加群圏 $\mathrm{Mod}\, R$ がある色付きクイバー $\Gamma$ から定まる Grothendieck 圏 $\mathcal{A}_\Gamma$ と同値になるなど、非常に多くの Grothendieck 圏が色付きクイバーから創出される。

私はこの手法を用いて、任意の半順序集合が Grothendieck 圏のアトム・スペクトラムとして現れることを示した。この結果は Grothendieck 圏の内部構造が、可換環と比べて極めて多様であることを示している。また、ここに Gabriel-Popescu の定理を適用することで、このような複雑な構造を一部分に持つような環の存在が示される。色付きクイバーを用いた Grothendieck 圏の構成は汎用性が高く、私は注目すべき性質を持ついくつかの Grothendieck 圏を構成した。その1つとして私は、アトムを持たない Grothendieck 圏を構成することに成功した。この結果は Abel 圏論における Popescu の予想に否定的な解答を与えるものである。

可換環論において、Bass 数は加群に対して定義される数値的不変量で、可換 Noether 環のホモ

ロジー的側面を調べるための重要な概念である。Bass 数の概念はアトム・スペクトラムを用いることで、局所 Noether 的 Grothendieck 圏の対象に対して一般化される。私は、Grothendieck 圏のアトム $\alpha$ と対象 $M$ に対して Ext 群 $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(\alpha, M)$、並びに剰余体 $k(\alpha)$ の概念を導入した。そして $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(\alpha, M)$ が斜体 $k(\alpha)$ 上のベクトル空間の構造を持つことを示し、Bass 数がその次元として表されることを示した。

Bass 数に関する私の結果によって E 不変な部分圏に関する結果が得られる。Takahashi は可換 Noether 環 $R$ に対して、加群圏 $\mathrm{Mod}\, R$ の、直和と直和因子で閉じた E 不変な部分圏が $\mathrm{Spec}\, R$ の部分集合と 1 対 1 に対応すること、並びに $\mathrm{Mod}\, R$ のそのような E 不変な部分圏が短完全列について閉じていることを示した。私はまず前者の結果を一般化して、任意の局所 Noether 的 Grothendieck 圏 $\mathcal{A}$ に対して、$\mathcal{A}$ の直和と直和因子で閉じた E 不変な部分圏が、アトム・スペクトラム $\mathrm{ASpec}\, \mathcal{A}$ の部分集合と 1 対 1 に対応することを示した。そして私は、この対応と上に述べた Bass 数に関する結果を組み合わせることで、局所 Noether 的 Grothendieck 圏の直和と直和因子で閉じた E 不変な部分圏が、短完全列についても閉じていることを示した。