論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　　　　　第　　　　号

氏　　　　　名　　神　田　　遼

論　文　題　目

ATOM SPECTRA OF GROTHENDIECK CATEGORIES AND COLORED QUIVER CONSTRUCTION
（Grothendieck 圏のアトム・スペクトラムと色付きクイバーによる構成）

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　Ph.D.
Lars Hesselholt

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（理学）
伊　山　　修

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
金　銅　誠　之

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（理学）
高　橋　　亮

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

Grothendieck 圏とは, 完全な順極限と生成対象を持つアーベル圏であり, 環上の加群圏やスキーム上の準連接層の圏をはじめとする, 種々の重要なアーベル圏におけるホモロジー代数学を, 統一的に展開することを可能とする枠組みである. これらの Grothendieck 圏は, もとの環やスキームに関する様々な情報を含んでおり, 中でも Gabriel（1962 年）による, 可換ネター環 R 上の加群圏の局所化部分圏と, R の素イデアルの集合 Spec$R$ の特殊化閉集合の間の一対一対応は, 古典的で有名な事実である. 近年, Grothendieck 圏の部分圏の分類問題は, Hopkins, Neeman による Gabriel の定理の導来圏類似をはじめとして, 多くの研究者によって調べられている.

申請者は 1 章において, 一般の Grothendieck 圏 $\mathcal{A}$ に対して, $\mathcal{A}$ のアトム・スペクトラムと呼ばれる位相空間 ASpec$\mathcal{A}$ を導入した. これは $\mathcal{A}$ の特別な対象（モノフォーム対象）の同値類（アトム）の成す集合である. $\mathcal{A}$ が可換環 R 上の加群圏の場合には, ASpec$\mathcal{A}$ と Spec$R$ の間に標準的な全単射が存在し, ASpec$\mathcal{A}$ の開集合は, Spec$R$ の特殊化閉集合に対応する. 申請者は 1 章で, 次の定理を示した.

定理 1 局所ネター的な Grothendieck 圏 $\mathcal{A}$ に対し, $\mathcal{A}$ の局所化部分圏と, ASpec$\mathcal{A}$ の開集合の間に標準的な一対一対応が存在する.

これは, 上で述べた Gabriel の定理をはるかに拡張するものであり, $\mathcal{A}$ が（非可換）ネター環上の加群圏の場合でさえ, 全く新しい結果である. アトムの概念自体は, $\mathcal{A}$ が環上の加群圏の場合に Storrer（1972 年）によって導入されたものだが, その全体に位相空間の構造を導入し, さらに局所化部分圏の分類に応用したのは, 完全に申請者のオリジナルである. 1 章の内容は既に Advances in Mathematics 誌から出版されている.

上で述べたように, Grothendieck 圏のアトムは, 可換環の素イデアルの類似物であるが, 申請者はこの点に着目し, 2 章において可換環論における素イデアルの Bass 数や剰余体の概念を, 一般の Grothendieck 圏 $\mathcal{A}$ のアトムに対して拡張した. さらにその応用として, 可換環論における高橋亮の結果（2009 年）を拡張して, $\mathcal{A}$ の特別な部分圏（E 不変部分圏）と ASpec$\mathcal{A}$ の部分集合の間の標準的な一対一対応を構成した.

以上の結果は, $\mathcal{A}$ のアトム・スペクトラムが $\mathcal{A}$ に関する様々な情報を含んでいることを保証するものであるため, Grothendieck 圏のアトム・スペクトラムとして実現される位相空間がどのようなものか調べることが重要となる. 一般にアトム・スペクトラムは T_0 空間であるため, 閉包の包含関係を用いて自然に半順序集合の構造が入る. この半順序構造は位相構造に関する多くの情報を与えるため, Grothendieck 圏から生じる半順序集合を特徴づけることが重要となる. これに関して, 申請者は 3 章において次の定理を証明した.

定理 2 任意の半順序集合は, ある Grothendieck 圏のアトム・スペクトラムと半順序集合として同型である.

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

Hochster（1969 年）, Speed（1972 年）によって, 可換環上の加群圏から生じる半順序集合の特徴付けが与えられているが, その場合には極めて限られた半順序集合しか現れない. 申請者は, 定理 2 の驚くほど単純な主張を証明するために, 色付きクイバー Γ とそれに付随する Grothendieck 圏を導入した. この構成自体は単純なものだが, Γ の与え方によって様々な Grothendieck 圏が得られる. 与えられた半順序集合から, 高度に技巧的な手法によって色付きクイバー Γ を構成することが, 定理の証明の重要な 1 ステップである. また, 申請者は 3 章において Grothendieck 圏 $\mathcal{A}$ の局所化部分圏 $\mathcal{X}$ と商圏 $\mathcal{A}/\mathcal{X}$ に対して, ASpec$\mathcal{X}$ と ASpec$(\mathcal{A}/\mathcal{X})$ がそれぞれ, ASpec$\mathcal{A}$ の開集合および閉集合となることを示しており, これも証明において重要な役割を果たしている.

さらに申請者は 3 章において, 色付きクイバーの手法を駆使することにより, アトムを一切持たない Grothendieck 圏を構成している. これはアーベル圏論における Popescu の予想（1973 年）に反例を与えるものであり, 申請者の導入した色付きクイバーの手法が, 極めて汎用性が高いことを意味している.

この論文において得られている, 以上の結果は斬新なものであり, 当該分野において意義のある重要な貢献である.

また, 本論文に関する公開学位セミナーを 2014 年 1 月 23 日に行い, 申請者が博士の学位を取得するに足る高い学識を有することを確認した.

以上により, 学位審査委員会は, 申請者には博士（数理学）の学位が授与される資格があるものと判断する.