

# 数理的アプローチによる機械設計に関する研究

Study of mechanical design by mathematical approach

新谷 浩平



# 目次

第 1 章	序論	1
1.1	産業における CAE	1
1.2	数値計算のプロセス	3
1.3	構造最適化	5
1.4	本論文の目的	7
1.5	本論文の構成	9
1.6	本論文で用いる記号の定義	9
第 2 章	形状最適化理論	13
2.1	はじめに	13
2.2	設計変数と関数空間	16
2.3	主問題	19
2.4	形状最適化問題の定義	20
2.5	評価関数の形状微分	21
2.6	$H^1$ 勾配法	22
2.7	形状最適化問題の解法	26
第 3 章	ブレーキ鳴き現象への形状最適化の応用	31
3.1	はじめに	31
3.2	ブレーキモデル	32
3.3	主問題	34
3.4	形状最適化問題	36
3.5	評価関数の形状微分	37
3.6	形状最適化問題の解法	38
3.7	数値計算例	39
3.8	まとめ	43
第 4 章	ビード形状設計問題への形状最適化の応用	45

4.1	はじめに	45
4.2	設計変数と許容集合	48
4.3	平均コンプライアンス最小化問題	49
4.3.1	主問題	50
4.3.2	ビード形状最適化問題	53
4.3.3	評価関数の形状微分	54
4.3.4	ビード形状最適化問題の解法	55
4.3.5	数値計算例	55
	片持ちはりの曲げ問題	56
	片持ちはりのねじり問題	56
4.4	周波数応答変位最小化問題	60
4.4.1	主問題	60
4.4.2	ビード形状最適化問題	61
4.4.3	評価関数の形状微分	62
4.4.4	ビード形状最適化問題の解法	63
4.4.5	数値計算例	63
4.5	固有振動数最大化問題	66
4.5.1	主問題	66
4.5.2	ビード形状最適化問題	67
4.5.3	評価関数の形状微分	67
4.5.4	ビード形状最適化問題の解法	69
4.5.5	数値計算例	69
4.6	まとめ	72
<b>第 5 章</b>	<b>非線形弾性問題への形状最適化の応用</b>	<b>73</b>
5.1	はじめに	73
5.2	超弾性体の構成則	74
5.3	非線形大変形問題	75
5.4	荷重-変位曲線規定問題	77
5.4.1	形状最適化問題	77
5.4.2	評価関数の形状微分	78
5.4.3	数値計算例	81
5.5	最大反力最大化問題	84
5.5.1	形状最適化問題	84
5.5.2	評価関数の形状微分	84

---

5.5.3	数値計算例 . . . . .	87
5.6	まとめ . . . . .	88
第 6 章	結論	91
6.1	まとめ . . . . .	91
6.2	今後の展望 . . . . .	92

# 第 1 章

## 序論

本論文の目的は、機械構造部材の形状設計問題に対して、数理的アプローチによる形状設計の可能性を明らかにすることである。

機械構造部材の設計では、力学などの指導原理に基づいて形状設計が行われる。また、設計対象とする現象や形状が複雑な場合には、実験や CAE などによる評価結果が設計指針として利用される。このような場合には、設計者は実験や CAE によって得られた評価結果を解釈して、形状へと反映することが求められる。しかしながら、これらの評価結果の解釈は設計者の経験と勘に依存するため、最適な形状を限られた検討期間で設計することは容易ではない。一方、設計指標を評価関数とする構造最適化問題を構成し、数理的アプローチによる適切な解法を用いれば、コンピュータ上で設計目標値を満足する最適な構造を得ることが期待できる。具体的には、設計対象である現象を偏微分方程式の境界値問題として数理モデル化し、その偏微分方程式が定義された領域を最適化することで、設計要件を満足させることを考える。構造最適化法には、形状を表す関数の写像を設計変数にした領域変動型の形状最適化を用いる。本論文では、このようなアプローチが機械構造部材の形状設計問題に対して有用であること明らかにする。また、本論文では、機械構造部材の具体的な例として、自動車部品を取り挙げ、自動車部品の形状設計の観点から構造最適化における課題を選定した。この章では、これら課題が設定された背景と、具体的な課題の内容について述べる。

### 1.1 産業における CAE

本論文のタイトルにある数理的アプローチとは具体的には、実現象から抽出された数理モデル（偏微分方程式の境界値問題）に基づくコンピュータシミュレーションの活用を意図している。そこで、本節でははじめにこのようなコンピュータシミュレーションの産業における使われ方について述べた上で、本研究の立ち位置を示す。

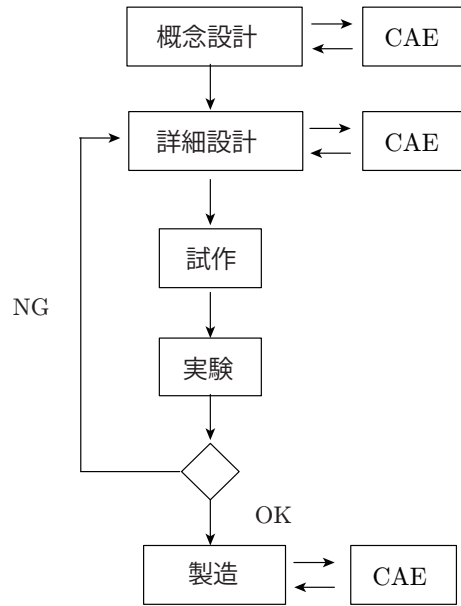


図 1.1.1: CAE を活用した製品開発の流れ

製品設計におけるコンピュータシミュレーションを用いた概念は 1980 年代に J.Lemon により CAE (Computer Aided Engineering) として提唱された [1]. CAE は飛躍的なコンピュータ性能の向上を受けて、現在では CAE による評価は不可欠な工程となっていると考えられる。そこで、製品設計の各工程において CAE がどのように活用されているかをみてみる。

CAE を用いた製品設計の流れを図 1.1.1 に示す。概念設計工程、詳細設計工程、および製造工程のそれぞれの工程において CAE が利用されている。概念設計における CAE の具体例としては First order analysis(FOA) [2,3] に代表されるいわゆる 1DCAE や、実験と CAE を協業させる Model Based Development (MBD) が挙げられる。これらは開発の初期段階から素性のよい設計案を創出することに貢献している。また、詳細設計の工程における CAE では、強度、信頼性、振動、流体、衝突など幅広い現象の評価で利用される。一方、製造工程における CAE では、加工、樹脂流動、鍛造、プレス成型などの現象の評価で利用される。これらの工程では詳細な計算が実施され、試作コスト低減、開発期間の短縮、および品質の向上に貢献している。これらの工程で用いられる CAE は今後もさらなる適用領域の拡張や、高度化・複雑化が進むと考えられる。

このように、CAE と一口にいても、利用される工程によって用途は様々である。さらに、同じ工程で利用される CAE であっても、扱う現象によって記述される偏微分方程式の分類も異なれば、モデルの規模も大きく異なる。このような状況を踏まえると、機械構造部材の形状設計問題に対する構造最適化の適用を考えるにあたっては、対象とする現象や用途を明確にした上で適切な手法を選択することが重要であると考えられ

る。そこで、本研究の立場を以下のように設定する。

本論文では、詳細設計工程で検討される形状設計問題に対する最適化手法について考える。また、扱う現象としては、機械構造設計において最も基礎的であり、汎用性の高い楕円型の偏微方程式で記述できる現象を対象にすることにする。即ち、静的もしくは準静的な現象に焦点を絞る。

## 1.2 数値計算のプロセス

本論文では、前節までに述べたように、楕円型偏微分方程式の境界値問題に対する解関数と、領域を記述する関数を用いた関数の最適化問題を考える。偏微分方程式の境界値問題に対する解関数を求める手段としては数値計算が用いられる。また、後に述べるように、構造最適化手法においては数値的に評価された形状微分 (領域変動に対する評価関数の Fréchet 微分) を用いたアプローチが用いられる。そこで、本節では CAE による数値計算のプロセスとその数値解法について述べる。

CAE のプロセスは 2006 年に ASME から ASME V&V として示されている [4]。図 1.2.1 は ASME V&V に示されている数値計算モデル作成までの工程である。このフローでは、はじめに実現象の本質を抽象化した概念モデル (Conceptual Model) を構築する。次にそこから数理モデル (Mathematical Model) を抽出する工程が必要となる。ここで、現象の本質が十分に数理モデル化されていないと、CAE により得られる結果の信頼性は低いものになってしまう。そのため、実現象をよく観察し、十分な仮説検証を行うことが重要になる。このようにして得られる数理モデルは一般的に偏微分方程式で記述される。しかしながら、このようにして得られる偏微分方程式は解析的に一般解を導出することは困難である場合が多い。そこで、次にコンピュータを用いて数理モデル化した偏微分方程式の近似解を得ることが考えられる (Numerical Algorithm, Code)。ここでは、数理モデルを離散化されたモデルに変換する工程が必要となる (Computational Model)。

次に、このような偏微分方程式の境界値問題に対する近似解の求め方について述べる。偏微分方程式の境界値問題に対する近似解法は様々な方法が知られているが、本論文では Galerkin 法を考える。Galerkin 法は予め与えられた基底関数の線形結合で解関数と随伴関数 (任意に選ぶ変分関数) の近似関数を構成し、それらの近似関数を弱形式に代入することで線形結合の未定定数を決定する問題におきかえる方法である。Galerkin 法の特徴は、その明快さだけでなく、弱形式に基づいているために近似解の一意存在が Lax-Milgram の定理によって保証されるところにある。さらに、Galerkin 法による近似解は随伴関数を他の関数で近似する選点法や最小二乗法などの他の手法と比べて、誤



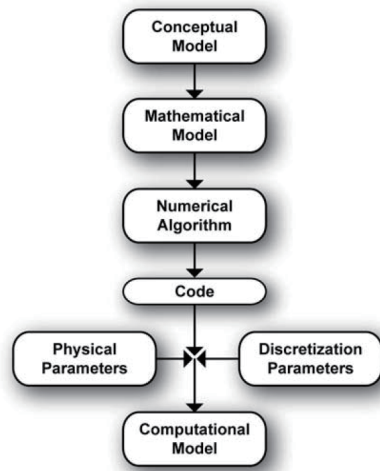


図 1.2.1: 数値計算モデル作成までの工程

差を厳密解の属する Hilbert 空間のノルムで測った場合に最良の近似になっていることが知られている (例えば, [5]).

しかしながら, Galerkin 法では, 領域全体で定義された関数の中から基底関数を選んでいるため, 境界値問題が定義された領域形状は矩形や楕円などに制限されることになる. それに対して, 領域を単純な形の部分領域に分割して, 部分領域ごとに基底関数を定義して, それらをつなぎ合わせることによって領域全体の上で基底関数を構成するように変更すれば, その制限をなくすことができる. このような方針で臨んだ Galerkin 法は有限要素法と呼ばれる.

この方法は Courant によって発表されたといわれている [6]. その後, 有限要素法の工学分野における先駆的な研究が Turner らによって示されている [7]. 有限要素法は, 微分積分学に現れる無限小要素と対比して, 有限の大きさを持つ要素という意味で, Clough によって最初に有限要素という用語が用いられたといわれている [8]. また, Zienkiewicz と Cheung によって場の問題に応用された [9]. これらの詳しい歴史については例えば [10] などに示されている.

以上述べてきたモデル化と数値解法によって, 実現象をコンピュータ上でシミュレーションすることが可能となる. しかしながら, 実現象を CAE に落とし込む過程では, 数理モデル化誤差や離散モデル化誤差などの近似誤差が混入する可能性がある. そのため, CAE によって得られる解の品質をどのように保証するかは, CAE の利用者にとっては重要な関心事である. このような CAE の品質保障については, ASME V&V で次のように既定されている. 以下でその概要を述べる. はじめに, 場の状態を表す数理モデルに従って解析プログラムが正しく記述されているかを調べるためのコード検証 (Code Verification) が必要となる. 次にプログラムを使って行われる計算 (解析モ

デルの作成, データ入力, 結果の表示など) が正しく行われているかなどについて調べる計算の検証 (Calculation Verification) が必要である. さらに, このようにして得られた計算結果が実際の物理現象を忠実に模擬しているかについて実験による妥当性確認 (Validation) が必要である.

本研究で用いる構造最適化手法では偏微分方程式の数値解と, その数値解を利用して評価した形状微分を用いた関数の最適化を考える. その為, その基礎となる数値解が誤差を多く含む場合には, 得られる最適解の信頼性も低いものになってしまう. その為, 上記に挙げた数値解の品質の保証は非常に重要であると思われる. 実業務ではコード検証済みの商用プログラムを用いることが多いと思われるため, 計算の検証や, 実験による妥当性確認を確実に実施することが重要であると思われる.

### 1.3 構造最適化

前節までに, 本研究が対象とする現象と, その数値解法についての概要をみてきた. 数値計算によってコンピュータ上で評価が可能になると, 次に得られた結果をどのように解釈して設計対象の構造や形状設計にフィードバックするかが課題となる. 機械構造部材の形状設計にあたっては CAE による評価と形状の修正の繰り返し検討が必要となり, その負担は小さくない. 一方, 構造最適化技術を用いれば, 設計指標を評価関数とする最適化問題を構成し, 適切な解法を利用することによって, コンピュータ上で設計目標値を満足する構造を得ることが期待できる. そのため, CAE による評価と形状の修正の繰り返し検討の自動化が図れるため, 設計開発業務の効率化が期待できる.

このような背景より, 1970 年代より構造最適化技術への期待が高まってきている. 構造最適化技術の工学への応用に対する先駆的な研究としては, 1973 年の Zienkiewicz と Campbell の研究がある [9]. この研究では初めて連続体の境界に対する形状最適化問題の研究が行われた. 1980 年代初期になると, Haug や Cea によって形状最適設計の数学理論が研究され, その後, 米国の自動車メーカー (GM, Ford) を中心とする自動車産業などでも構造最適化の適用が行われるようになってきた (例えば, [11]). 現在では多くの自動車メーカーで最適化技術が利用されるようになってきていると考えられる. 図 1.3.1 は SAE (Society of Automotive Engineers) における最適化に関する投稿論文の件数の推移を表す. 1980 年代より右肩上がりが増加してきていることから, 最適化技術への注目度の高さが窺える. しかしながら, これらの論文で利用されている最適化技術は方法も用途も様々である. そこで, 以下では構造最適化技術の分類と方法の特徴を述べた上で, 本研究で用いる構造最適化法について述べる.

はじめに構造最適化技術の分類について述べる. 構造最適化技術は寸法最適化 (Size

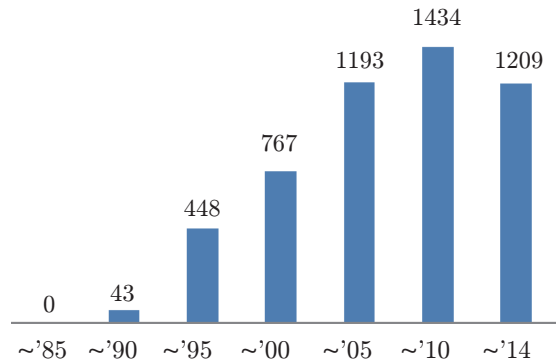


図 1.3.1: 最適化技術に関する SAE への投稿件数の推移 [単位：件]

Optimization), 形状最適化 (Shape Optimization), 位相最適化 (Topology Optimization) の 3 種類に分類できる。また, トポメトリー最適化, トポグラフィ最適化という用語も用いられているが, これらについても上記 3 種類に分類できると考えられる。トポメトリー最適化は板部品の板厚を設計変数とする最適化であり, 寸法最適化に分類される。またトポグラフィ最適化は板部品のビード形状を最適化する問題であり形状最適化に分類される。

次に, 機械設計への応用の観点から, 上記それぞれの最適化手法の特徴とその特徴に応じた用途について考える。寸法最適化は板部品の厚さや機械製品の特定の寸法などを設計変数とする最適化である。この寸法最適化は最も研究の歴史が古く, 多数の研究が報告されている (例えば [12])。また, 数理計画法と組み合わせた方法は既に多くの商用プログラムに実装されている。この方法の特徴としては, 品質工学を用いた手法を用いることによりロバスト性の高い最適解を得ることができる点が挙げられる (例えば [13])。また, メタヒューメリスティックと呼ばれる発見的近似手法 (例えば [14]) や応答曲面法などの枠組み (例えば [15]) を用いることで, 多峰性のある最適化問題や, 非線形性の強い問題などへの適用が可能であることが挙げられる。さらに, JIS 規格などにより設計変数が離散的になっている問題に対しても利用することができる。このように, 現象が複雑に対しても比較的容易に適用できる点は利点である。しかしながら, 多くの設計変数を扱うことが困難であるため, モデルの幾何形状を最適化する問題に対しては扱いが困難であるという欠点がある。この方法の用途としては例えば自動車の衝突計算における各板部品の板厚の最適化が考えられる (例えば [16])。

形状最適化は, ある制約条件の下で最適な境界形状や幾何形状を決定する問題であり, 領域形状を表現する滑らかな関数に対して最適化を行う方法である。この方法の利点としては, 自由曲面で構成される外形形状の設計に適している点が挙げられる。また, Lagrange 座標系における形状表現をとるときには, CAE 評価で利用したメッシュ

を再利用することが容易である。一方、位相を変化することは困難である。しかしながら、製品の開発における詳細設計フェーズにおいては、位相などのレイアウトは定まっている場合が多いと思われる。さらに、CAE 評価のための詳細な有限要素モデルも整備されている場合が多いと考えられる。このような条件を考慮すると、形状最適化の産業への応用では、詳細設計フェーズへの適用が向いていると考えられる。

一方、位相最適化はレイアウト最適化、またはトポロジー最適化とも呼ばれ、設計領域における最適な孔の数や配置、部材の連結状態が決定される。この方法では外形形状に加え、位相も最適化ができるため、より自由度の高い最適計算が可能である点が利点である。しかしながら、Euler 座標系による形状表現とすることが通常であるため、CAE 評価で用いたメッシュの再利用は困難であると考えられる。このような特徴より、産業への応用では概念設計フェーズへの適用が向いていると考えられる。構造最適化法の包括的な議論に関しては、いくつかのサーベイ論文にまとめられている [17-25]。

本論文では、1.1 節で述べたように詳細設計フェーズにおける構造形状最適化を考えるため、最適化手法としては形状最適化を用いることにする。

## 1.4 本論文の目的

本研究では楕円型偏微分方程式で記述される現象に対する形状最適化を考え、機械構造部材の形状設計問題への有用性を明らかにすることを目的としている。また、機械部品としては具体的に自動車部品を考える。前節までに、最適化技術のシーズ面から本研究の立ち位置を明確化した。次に、本節では自動車部品の形状設計におけるニーズの観点から形状最適化技術に対する課題を明確化する。

自動車技術会の構造強度委員会が 2011 年に制定した将来ビジョンをみると、技術開発計画の中に多目的最適化が挙げられている。この計画の中では、多目的最適化に使えるアルゴリズムは既に関連されているとしながらも、あまり利用されていない現状が指摘されている。利用されていない理由については、明言されていないが、技術開発計画に挙げられている以下の要素技術が深く関係していると推察される。

- (1) 車両モデルでの形状最適化技術
- (2) 非線形現象に対する最適化アルゴリズム開発

本研究ではこれらの技術開発計画を踏まえて以下の 3 点を課題として考えた。

1 つめは、複数の部品のアセンブリ状態で生じる設計評価指数を評価関数とする形状最適化技術の開発である。自動車のように多くの部品から構成される複雑な製品の開発では分解、再統合のプロセスが行われる（このような考え方はデカルトが著書『方法



序説』の中で示している). 具体的には, 複数の部品のアセンブリ状態における性能目標を達成するために, まずはコンポーネントの性能目標にカスケードリングを行う(分解). 次に, コンポーネントの形状設計が行われた後に, 各コンポーネントを結合してアセンブリ状態で効果を確認する(再統合). これまでの形状最適化は主にこのコンポーネント設計のフェーズで適用されることが多いと思われる. その理由は, このフェーズではコンポーネントに要求される目標性能は固有振動数や剛性など, 比較的形状最適化問題で扱いやすい指標が用いられていることが挙げられる. しかしながら, コンポーネント目標値へのカスケードリング精度が低い場合には, 形状最適化後の各コンポーネントをアセンブリ状態に組み上げて評価した場合に, 狙いとした性能が得られていない場合がある. このようなことが生じる要因としては部品間の摩擦や接触剛性が挙げられる. このような場合には設計の手戻りが生じる恐れがある. このような問題を回避するためには, 本来の評価指標である複数の部品のアセンブリ状態における特性値を直接評価関数とおいした形状最適化技術が必要である.

2 つめは, 最適なビード形状を得るための実用的な形状最適化手法の開発が挙げられる. ここで, ビードとは性能向上を目的に造られる板部品の凹凸のことである. 板部品は板厚を増加させることなく, 面外方向への形状変化で曲げ剛性を大きく変化させることができるため, 軽量化の観点からも, 構造要素として広く自動車部品で利用されている. 実際に, 自動車を構成する材料の約 5 割は鋼板であることから板部品に対する形状最適化技術の重要性が窺える. また, 成型性の観点からも板部品の形状設計にあたっては, ビード形状の設計が非常に重要であると考えられる. このようなビード形状を対象とした形状最適化問題は先に述べたトポグラフィ最適化問題と呼ばれ, ベーシスベクトル法を用いた解法が商用プログラムに実装されている(例えば, [27]). しかしながら, ベーシスベクトルの選び方によっては最適化によって得られる結果形状が, 数値不安定性を有する(形状がジグザグ)ことが知られている. その為, 形状最適化後にスムージング処理などの別工程が必要となる.

3 つめは, 非線形弾性問題を主問題とする形状最適化手法の開発である. 剛性や固有値といった線形領域の特性値を対象とした形状設計問題は設計者が机上検討で形状を設計することが可能である. しかしながら, 幾何学的非線形性や材料非線形性などの非線形現象が含まれる形状設計問題では, 机上検討が困難である場合がある. このような場合には, 実験や CAE による評価と形状修正の繰り返し検討が必要となる. そのため, 非線形性が無視できない形状設計問題では形状最適化技術の適用効果が高いと考えられる.

以上, 自動車部品の形状設計におけるニーズの観点から形状最適化技術に対する課題を選定した. そこで, 本研究では以下の (1) ~ (3) について, 楕円型偏微分方程式で記

述される現象を対象に，形状最適化問題を定義し，その解法を示す．

- (1) 複数部品のアセンブリ状態で生じる現象の指標を評価関数とする形状最適化技術の開発
- (2) 数値不安定性のないビード形状最適化手法の開発
- (3) 非線形問題を主問題とする形状最適化手法の開発

## 1.5 本論文の構成

本論文の構成は以下の通りである．第 2 章では本論文で用いる形状最適化理論を述べる．第 3 章では目的 (1) に対する具体例として，車両のブレーキ鳴き現象を取り挙げ，複数部品のアセンブリ状態における評価指標である複素固有値の実部を評価関数とする形状最適化問題を構築し，その解法を示す．第 4 章では目的 (2) に対する研究として，滑らかなビード形状を得るための設計変数を用いた新しいビード形状設計手法を提案する．また，平均コンプライアンス最小化問題，周波数応答変位最小化問題，固有振動数最大化問題を定義し，それぞれ解法を示す．次に第 5 章では目的 (3) に対する研究として，材料非線形性と幾何学的非線形性を考慮した弾性変形問題を主問題とする形状最適化問題を定義しその解法を示す．具体的な事例として，超弾性体の大変形問題における荷重-変位曲線の二乗誤差和最小化問題と，弾塑性体の最大荷重最大化問題を定義し，それぞれ解法を述べる．最後に第 6 章で本論文のまとめを行う．

## 1.6 本論文で用いる記号の定義

ここでは本論文を通して用いる主な記号表記法について箇条書きで簡単に解説する．以下， $m, n, d$  を自然数， $V$  をノルム空間， $X, Y, Z$  を Banach 空間とする．

$a, \alpha, \dots$  小文字をスカラー，ベクトル，関数に用いる．

$\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}, \dots$  太文字を偏微分方程式の空間変数のみを有限の点値で近似した (空間離散化した) 関数，すなわち有限次元のベクトルとそれを値域にもつ関数に用いる．

$A, \Lambda, \dots$  大文字を集合，行列の要素に用いる．

$\mathbf{A}, \boldsymbol{\Lambda}, \dots$  太大文字を偏微分方程式の空間変数のみを有限の点値で近似したときに現れる係数行列，すなわち有限次元の行列とそれを値域にもつ関数に用いる．

$\mathcal{L}$  Lagrange 関数に用いる．

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  それぞれ自然数 (正整数), 整数, 有理数, 実数, 複素数全体の集合を表す.
- $A = \{a_1, \dots, a_m\}$  集合  $A$  が  $a_1, \dots, a_m$  の要素あるいは点からなることを表す.
- $|A|$  有限集合  $A$  の要素の数を表す.
- $a \in A$   $a$  は集合  $A$  の要素であることを表す.
- $\{0\}$   $0$  だけからなる集合を表す.
- $A \subset B$  集合  $A$  が集合  $B$  の部分集合であることを表す.
- $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$  集合  $A$  と集合  $B$  の和集合, 積集合, 差集合を表す.
- $(0, 1), [0, 1], (0, 1]$   $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}, \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}, \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$  を表す.
- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$   $\mathbb{R}^d$  の領域 (単連結開集合) を表す.
- $\bar{\Omega}$   $\Omega$  の閉包 (closure) を表す.
- $\partial\Omega$   $\Omega$  の境界  $\bar{\Omega} \setminus \Omega$  を表す.
- $|\Omega|$   $\int_{\Omega} 1 dx$  を表す.
- $dx, d\gamma, da$  領域積分, 境界積分, 部分境界の境界上の積分微小測度に用いる.
- $x = (x_1, \dots, x_d)^T \in \mathbb{R}^d$   $d$ 次元の縦実ベクトルを表す.  $x_i$  は  $x$  の  $i$  番目の要素を表す.
- $x^T$  は  $x$  の転置を表す.
- $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$   $\mathbb{R}^d$  の零元を表す. 自明な場合には  $\mathbf{0}$  とかく.
- $\|x\|_p$   $p \in [1, \infty]$  を次数として,  $x \in \mathbb{R}^d$  の  $p$ 乗ノルム  $\sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_d|^p}$  を表す.  $p = \infty$  のとき, 最大値ノルム  $\max\{|x_1|^p, \dots, |x_d|^p\}$  を表す.
- $\|x\|$   $x \in \mathbb{R}^d$  の Euclid ノルム  $\|x\|_2$  を表す.
- $a \cdot b$  内積  $\sum_{i=1}^d a_i b_i$  を表す.
- $\mathbf{A} : \mathbf{B}$  内積  $\sum_{i,j=1}^d \mathbf{A}_{ij} \mathbf{B}_{ij}$  を表す.
- $\|x\|_V$   $x \in V$  のノルムを表す. 混乱がなければ  $\|x\|$  とかく.
- $X'$   $X$  の双対空間を表す.
- $\langle y, x \rangle$   $x \in X$  と  $y \in X'$  の双対積を表す.
- $f : X \rightarrow Y$   $X$  から  $Y$  への写像 (関数) を表す.
- $\nabla f(x)$   $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  のとき, ある  $x \in \mathbb{R}^d$  における,  $f$  の微分  $\partial f(x)/\partial x \in \mathbb{R}^d$  を表す.
- $\Delta f(x)$   $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  のとき, ある  $x \in \mathbb{R}^d$  における,  $\nabla \cdot \nabla f(x)$  を表す.
- $f'(x)[y]$   $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  のとき, ある  $x \in X$  における, 任意の  $y \in X$  に対する  $f$  の Fréchet 微分  $\langle f'(x), y \rangle$  を表す.
- $f_x(x, y)[z], \partial_X f(x, y)[z]$   $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  のとき, ある  $(x, y) \in X \times Y$  における, 任

意の  $z \in X$  に対する  $f$  の Fréchet 偏微分  $\langle \partial f(x, y) / \partial x, z \rangle$  を表す.  $f(x, y) / \partial x \in X'$  を  $f_x(x, y)$  とかく.

$\partial f / \partial x^T, f_{x^T}$   $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$  のとき, Jacobi 行列  $(\partial f_i / \partial x_j) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d$  を表す.

$f'(x, y(x))[z]$   $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}, y : X \rightarrow Y$  のとき, ある  $x \in X$  における, 任意の  $z \in X$  に対する  $f$  の Fréchet 微分を表す.  $X = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}^n$  のとき,  $z \in X$  に対して,  $(\partial_x f + (\partial_{x^T} y)^T (\partial_u f)) \cdot z$  を表す.

$C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$   $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$  上で定義された連続関数  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$  全体の集合を表す.

$C^m(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$   $m$  階までの導関数が  $C^m(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$  に属する関数全体の集合を表す.

$C^{m, \alpha}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$  Hölder 指数  $\alpha, 0 < \alpha \leq 1$  に対して,  $m$  階までの導関数が Hölder 連続な関数全体の集合を表す.  $\alpha = 1$  のとき, その関数を Lipschitz 連続という.

$L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$   $1 \leq p < \infty$  に対して,  $p$  乗 Lebesgue 可積分な関数全体の集合を表す.  $p = \infty$  に対して本質的有界な関数全体の集合を表す.

$W^{m, p}(\Omega; \mathbb{R}^n)$   $m$  階までの導関数が  $L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$  に属する関数全体の集合を表す.

$H^m(\Omega; \mathbb{R}^n)$   $W^{m, 2}(\Omega; \mathbb{R}^n)$  を表す.





## 第 2 章

# 形状最適化理論

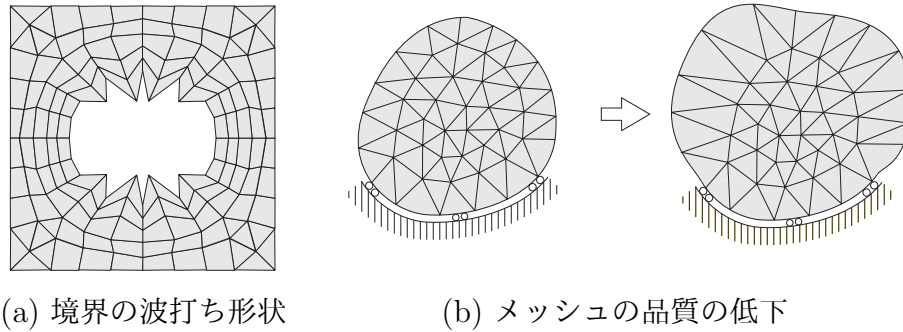
### 2.1 はじめに

本章では，次章以降で用いられる形状最適化理論について述べる．なお，本章の内容は名古屋大学情報科学研究科の講義内容 [29] および文献 [30] に基づく．

本論文の冒頭でも述べたように，形状最適化手法には様々な方法が知られている．最適化手法を考えるにあたっては，何を設計変数にするかという点と，どのように設計変数を更新するかという点が重要となってくる．設計変数が寸法最適化のように有限個のパラメータによって選ばれる手法はパラメトリック形状最適化と呼ばれる．また，境界値問題が定義されている領域 (関数) を設計変数にする分布系の最適化はノンパラメトリック形状最適化手法または，領域最適化問題と呼ばれる (例えば, [31])．ノンパラメトリック形状最適化はパラメトリック形状最適化に比べ，設計自由度が大きいいため，最適解の探索範囲が広いという利点がある．本論文ではこの利点より，最適化手法としてはノンパラメトリック形状最適化を用いる．

第 1 章で述べたように，現象を数理モデル化した偏微分方程式の境界値問題は解析的に解を求めることが困難である場合が多く，有限要素法などの近似解法が用いられる．そのため，形状最適化における領域の更新においても有限要素モデル (以降 FE モデル) が用いられる．Zienkiewicz と Campbell は FE モデルの形状寸法を設計変数とした形状最適化問題を定義し，勾配法を用いた解法を示している [9]．この研究では勾配を計算するために差分法が用いられていた．この方法はパラメトリック最適化手法のひとつとして位置づけられるが，この方法を拡張し，境界に位置する全有限要素節点の座標値を設計変数に取ればノンパラメトリック形状最適化が可能であるように思われる．しかしながら，この方法には以下の 2 つの課題がある．

1 つ目の課題は Braibant ら [32] によって指摘された数値不安定現象である．これは上記のように設計変数を選んで，勾配の方向に領域を変動させた場合に 図 2.1.1 (a) に示



(a) 境界の波打ち形状

(b) メッシュの品質の低下

図 2.1.1: 形状更新に伴う課題

す境界が波打つ現象である。2 つ目の課題は図 2.1.1 (b) に示すような境界の節点の移動に対し境界に位置する要素の品質が悪化することである。要素品質を維持したまま形状を大きく動かす場合にはリメッシュが必要となる。

これらの課題に対する対策として Imam [33] は以下に示す 3 つの方法を提案している。

- (1) デザインエレメント法
- (2) スーパーカーブ法
- (3) ベーシスベクトル法

これらの方法はどれも設計変数の自由度を有限個に制限して、寸法最適化の枠組みを適用するものであり、パラメータ形状最適化のひとつとみなせる。その為、発見的方法などの寸法最適化の枠組みを用いることにより、幅広い評価関数を容易に扱うことができるなどの利点があるが、上記で述べたように厳密なノンパラメトリック形状最適化ではない為、最適解の探索範囲は限定されるという欠点がある。

以下、それぞれの方法の概要について述べる。(1) デザインエレメント法は設計変数として、一部の節点座標のみを用いてそれと他の節点との関係を定義することにより領域の変動を表現する方法である。この方法は有限要素解析で用いた FE モデルを再利用できるなどの利便性があるが、適切な設計変数の設定は容易ではない。

一方、(2) スーパーカーブ法は、FE モデルの外形形状を多項式で表し、その係数を設計変数に選ぶ方法である。多項式の組み合わせにより、高次の曲面が可能である。全体の節点座標は決定された多項式近似の定義点からの補間で決定される。具体的には Braibant と Fleuly によって B-スプライン曲線や Bezier 曲線を用いてそのコントロールポイントの座標を設計変数に選ぶ方法が提案されている [32]。この方法は評価関数の評価のために、CAD モデルから FE モデルを作成する手続きが別途必要である。その為、FE モデルを作成するための自動メッシュ機能と組み合わせる方法 [34] が提案されている。このように、FE モデルを作成するための工程が必要となることは他

の手法と比べて欠点であると考えられるが、今後 CAD と CAE の親和性が高まれば CAD モデルを利用することは利点にも成り得ると考えられる。実際に近年では、例えば Dassault Systèmes 社の製品群において、このような CAD と CAE を連携させた機能が提供されている。この機能では、CAD (CATIA) の形状作成時に作成された形状作成履歴パラメータを設計変数に選択し、自動メッシュで生成された FE モデルを用いた有限要素解析による結果を評価関数に設定することができる。この有限要素解析では同社の製品群である ABAQUS が利用される。さらに、最適化問題の解法には同社の製品群である Isight に実装されている寸法最適化の枠組みを適用することができる。

一方、CAD の形状表現で用いられている NURBS 関数を有限要素法の基底関数とする アイソジオメトリック解析手法 [35] の発展により、FE モデルを作成しなくても、CAD モデルを用いて CAE 解析が実用的なものとなってきている。商用プログラムへの実装例は現状では多くはないが、インハウスコードレベルでは既にいくつかの実用的なプログラムが公開されてきている (例えば, AbqNURBS [36] 等)。

最後に、(3) ベーシスベクトル法は複数個の異なる基本形状 (ベーシスベクトル) を定義し、それらの重み付き和で形状を近似的に表現する方法である。ベーシスベクトルは速度場と呼ばれることもある [37]。この方法では設計変数はベーシスベクトルの重み係数が選ばれる。その為、ベーシスベクトルの選び方が重要となる。この方法はデザインカーブ法と同様に CAE 評価で用いた FE モデルを利用できる利便性があるが、適切なベーシスベクトルの設定は容易ではない。この欠点を補うため、Optistruct (Altair) などいくつかの商用プログラムでは適切なベーシスベクトルを自動で生成する機能が提供されている。この機能については第 4 章で概要を述べる。

以上 3 種類の形状最適化法の概要を述べたが、これらの方法は共通して離散化された系に対して最適化理論を適用する方法であった。その為、厳密なノンパラメトリック形状最適化とはいえない。一方で、変分法や最適制御の考えに基づき、設計変数を分布系のまま扱う厳密なノンパラメトリック形状最適化の研究も多く報告されている。このような方法の起源としては、1968 年の Hadamard の論文 [38] が挙げられる。この研究では、薄膜の基本振動数の最大化問題に対して、境界を外向き法線の方向に移動したときの形状微分に相当する考えが示されている。その後、法線方向への移動量を用いた形状感度理論に関する研究は、Pironneau [39], Murat と Simon [40], Banichuk [41, 42], Cea [43, 44], Rousselet [45], Dems と Mroz [46, 47] によって行われてきた [48]。このような方法は数学分野では Lions [49] によって理論研究が行われており、その基礎理論は Lions の研究グループである Cea [43] や Pironneau [39] によってまとめられている。

一方、これらの形状感度理論を用いた形状変動量の求め方については Cea によって Hilbert 空間の勾配法を用いる方法が提案されている [44]。しかしながら、数学的な

理論の提案に留まり、設計を意識した工学的応用へは発展しなかった。一方、畔上は Cea の方法を基に、擬似弾性問題の解として速度場を求める方法を提案し、力法と呼んだ [48, 50]。この方法は、工学上重要である領域変動に制約が課されている場合の速度場の一般的な解析方法であった。この方法の特徴は以下の通りである。

力法では、連続体の領域変動に対する形状勾配に相当する力を領域の設計する境界に加え、その時の変位場を領域変動の速度場として領域の形状を修正する。領域変動量の計算では線形弾性問題の境界値問題に置き換えて解くため、形状修正を行う際のメッシュの歪みやくずれは、境界の節点を移動する方法より少なく、滑らかな境界形状を得ることができる。さらに、数値解析手法に関する特別な制約がないことから、有限要素法や境界要素法などの現存の汎用数値解析コードおよび FE モデルを利用することができる。この方法を用いて、これまでに平均コンプライアンス最小化問題を扱った線形弾性問題 [50]、流れ場 [51]、振動問題 [52] に関する基礎的研究とその適用分野が広まってきた。力法は Hilbert 空間の勾配法として位置づけることもできるため、近年では  $H^1$  勾配法とよばれる。本論文でもこの呼び名を用いることとする。

また、設計変数にレベルセット関数を用いる方法についても研究されている [53–55]。この方法はある有界な固定領域上で定義された連続関数 (レベルセット関数) を設計変数に選ぶ方法である。この方法はレベルセット関数の更新により領域が更新されるが、FE モデルは固定されることになる。その為、偏微分方程式の境界値問題が定義された領域の穴が連結して位相が変化することが可能であり、解の探索範囲が広いという特徴がある。また、メッシュの歪みの問題が生じない点も利点として挙げられる。しかしながら、オイラー座標系による形状表現をすることが通常であるため、主問題で用いた FE モデルがラグランジュ座標系による形状表現である場合には、設計領域を定めるための領域の定義と、その FE モデルを作成する工程が別途必要となる。

本研究では、機械設計への応用という立場から、既に主問題の計算で利用されている FE モデルを再利用できることの利便性を踏まえ、 $H^1$  勾配法を用いたノンパラメトリック形状最適化について考えることとする。

## 2.2 設計変数と関数空間

本節では境界変動型の形状最適化問題における設計変数とその許容集合について述べる。前節で述べたように、形状最適化問題では設計変数に何を選ぶかは非常に重要な関心事である。本論文では、 $d \in \{2, 3\}$  次元の初期領域  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$  を与えて、 $\Omega_0$  を定義域とする写像  $i + \phi : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^d$  を設計変数に選ぶ方法を採用することにする [48, 56, 57]。ただし、本書では、 $i$  は恒等写像を表すことにする。すなわち、すべての  $x \in \mathbb{R}^d$  に対

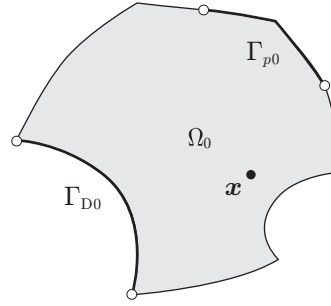


図 2.2.1: 領域の定義

して,  $i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  となる. このとき, 変動後の領域は  $\Omega(\phi) = \{(i + \phi)(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \Omega_0\}$  によってつくられると仮定する.

設計変数と許容集合を定義するために, まずは, 偏微分方程式の境界値問題が定義される領域について述べる.  $\Omega_0$  を図 2.2.1 のような  $d \in \{2, 3\}$  次元の Lipschitz 領域とし,  $\Gamma_{D0} \subset \partial\Omega_0$  を Dirichlet 境界とする. また,  $\Gamma_{N0} = \partial\Omega_0 \setminus \bar{\Gamma}_{D0}$  を Neumann 境界とし, Neumann 境界の中でも  $\Gamma_{p0} \subset \Gamma_{N0}$  を非同次 Neumann 境界とする. 初期領域  $\Omega_0$  は固定されているとみなす.  $\Omega_0$  が変動した後の領域は, 1 対 1 で連続な写像  $\phi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  によって,  $\Omega(\phi) = \{(i + \phi)(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \Omega_0\}$  のようにつくることにする.  $\phi(\Omega_0)$  は  $\phi$  によってつくられた領域であることから, 以降では  $\Omega(\phi)$  とかく. 同様に, 領域や境界に対して,  $(\cdot)(\phi)$  は  $\{\phi(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in (\cdot)_0\}$  を意味するものとして用いる.

境界変動型の形状最適化問題では, この関数  $\phi$  を設計変数に選ぶ,  $\phi$  の集合は,  $\mathbb{R}^d$  を定義域とする関数の集合として定義した. このように定義域を考える理由は形状最適化の過程で既知関数や解関数の定義域が動くことを考慮しているためである.  $\phi$  の定義域を  $\Omega_0$  から  $\mathbb{R}^d$  に拡張できることの根拠には以下の命題がある.

**命題 2.2.1 (Calderón の拡張定理)**  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$  を Lipschitz 領域とする. このとき, 任意の  $s \in \{1, 2, \dots\}$  と  $p \in (1, \infty)$  に対して有界線形作用素

$$e_{\Omega_0}: W^{s,p}(\Omega_0; \mathbb{R}) \rightarrow W^{s,p}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$$

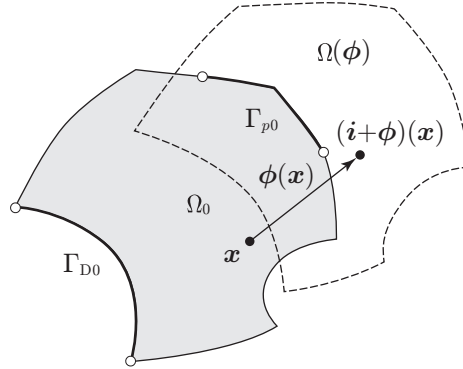
が存在し, 任意の  $u \in W^{s,p}(\Omega_0; \mathbb{R})$  に対して

$$e_{\Omega_0}(u) = u \quad \text{in } \Omega_0, \quad \|e_{\Omega_0}(u)\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})} \leq c \|u\|_{W^{s,p}(\Omega_0; \mathbb{R})}$$

が成り立つ. ただし,  $c$  は  $s$  と  $p$  に依存した定数である. □

設計変数が定義されたので, 次に設計変数の許容集合について述べる. 本論文で扱う境界変動型の形状最適化問題では, 評価関数の Fréchet 微分を用いて設計変数の更新を考える. そのため, 評価関数の Fréchet 微分が定義できることが必要となる. また, 変



図 2.2.2: 領域写像  $\phi$ 

動後の境界が不連続とならない領域写像を定義する必要がある。そこで、これらを考慮して以下に示す 4 つの仮定を考える。

- (1)  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$  を Lipschitz 領域とする。
- (2) 非同次 Neumann 境界  $\Gamma_{p0}$  と評価関数  $f_i, i \in \{0, 1, \dots, m\}$ , の境界積分における被積分関数  $\eta_{Ni}$  が非零の境界  $\Gamma_{\eta Ni0} \subset \Gamma_N$  を区分的  $C^2$  級とする。
- (3)  $\phi$  の変動が入る設計空間 (実 Hilbert 空間)  $X$  を次式のように定義する。

$$X = H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d) \quad (2.2.1)$$

- (4)  $\phi$  の許容集合  $\mathcal{D}$  を次のように定義する。

$$\mathcal{D} = \left\{ \phi \in Y \mid \|\phi\|_Y < \sigma, \phi = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \bar{\Omega}_{C0}, \right. \\ \left. (\Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta 0}(\phi) \cup \Gamma_{\eta 1}(\phi) \cup \dots \cup \Gamma_{\eta m}(\phi)) \setminus \bar{\Omega}_{C0} \text{ is piecewise } C^2 \text{ class} \right\} \quad (2.2.2)$$

ただし,  $Y$  は

$$Y = C^{0,1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d) \quad (2.2.3)$$

とおき,  $\sigma$  を  $\phi$  が 1 対 1 写像となるようなある正の値とする。

(1) と (2) は初期領域における  $\Omega_0$  の境界  $\partial\Omega_0$  に対する滑らかさの仮定である。これらの仮定は、後に領域変動に対する評価関数の Fréchet 微分を求める際に必要となる条件である。(3) は Fréchet 微分を定義するために使われる関数空間であり, (4) は変動後の領域が定義できるために課せられた仮定である。(3) は後に述べるように  $H^1$  勾配法を定義する Hilbert 空間としても用いられる。ここで,  $C^{0,1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$  は  $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$  とも表現できる。 $\bar{\Omega}_{C0} \subset \bar{\Omega}_0$  は設計上の要請で固定する領域あるいは境界を表すものとする。

## 2.3 主問題

次に、境界変動型の形状最適化問題を考えるために、偏微分方程式の境界値問題を主問題として定義する。本論文では簡単のために Poisson 問題を取り挙げる。

Poisson 問題の既知関数については次のように仮定する。 $\Omega_0$  のときの Poisson 問題の既知関数は与えられていて、それらを  $b_0, p_N, u_{D0} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  とかくことにする。それに対して、領域写像  $\phi$  によって変換された  $\Omega(\phi) \subset \mathbb{R}^d$  上の既知関数を  $b(\phi), p(\phi), u_D(\phi) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  とかくことにする。次に Poisson 問題の解関数が入る Hilbert 空間 (状態空間) を

$$U(\phi) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}) \mid u = 0 \text{ on } \Gamma_D(\phi)\} \quad (2.3.1)$$

とおく。この  $U(\phi)$  は、主問題に対する Lagrange 関数の  $u(\phi)$  の変動に対する Fréchet 偏微分を定義する際に用いられる。

さらに、主問題の解  $\tilde{u}(\phi) = u(\phi) - u_D(\phi)$  の許容集合については、適切な勾配法によって得られる  $\phi$  の変動が式 (2.2.3) の  $Y$  に入るように、 $H^1$  級よりも滑らかな条件を仮定する。そこで、 $q$  を  $q > d$  を満たす整数であるとして、 $\tilde{u}(\phi)$  の許容集合を

$$\mathcal{S}(\phi) = U(\phi) \cap W^{2,2q}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}) \quad (2.3.2)$$

とおく。既知関数の正則性に関しては、 $\tilde{u}(\phi)$  が  $\mathcal{S}(\phi)$  に入るために、

$$b(\phi) \in L^{2q}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}), \quad p_N(\phi) \in W^{2,2q}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}), \quad u_D(\phi) \in W^{2,2q}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}) \quad (2.3.3)$$

を仮定する。これ以降、 $b(\phi)$  や  $u(\phi)$  および  $U(\phi)$  や  $\mathcal{S}(\phi)$  などを  $b$  や  $u$  および  $U$  や  $\mathcal{S}$  などのようにかくことにする。

以上の定義を用いて、Poisson 問題を次のように定義する。

**問題 2.3.1 (Poisson 問題)**  $b, p_N, u_D$  および  $\phi \in \mathcal{D}$  が与えられたとき、

$$\begin{aligned} -\Delta u &= b \quad \text{in } \Omega(\phi), \\ \partial_\nu u &= p_N \quad \text{on } \Gamma_N(\phi), \\ u &= u_D \quad \text{on } \Gamma_D(\phi) \end{aligned}$$

を満たす  $u$  を求めよ。 □

問題 2.3.1 は、後で示す形状最適化問題においては等式制約として利用される。そこで、問題 2.3.1 に対する Lagrange 関数を

$$\mathcal{L}_M(\phi, u, v) = \int_{\Omega(\phi)} (-\nabla u \cdot \nabla v + bv) \, dx$$



$$+ \int_{\Gamma_N(\phi)} p_N v \, d\gamma - \int_{\Gamma_D(\phi)} \{(u - u_D) \partial_\nu v + v \partial_\nu u\} \, d\gamma \quad (2.3.4)$$

と定義しておく. ただし,  $v \in U$  は Lagrange 乗数として導入された.  $u$  が問題 2.3.1 の弱解のとき, 任意の  $v$  に対して,

$$\mathcal{L}_M(\phi, u, v) = 0$$

が成り立つ. この式は問題 2.3.1 の弱形式と同値である.

## 2.4 形状最適化問題の定義

設計変数の Hilbert 空間と許容集合が定義されたので, それらを使って最適化問題を定義する. まず, 一般的な評価関数を,  $i \in \{0, 1, \dots, m\}$  に対して

$$\begin{aligned} f_i(\phi, u) &= \int_{\Omega(\phi)} \zeta_i(\phi, u, \nabla u) \, dx + \int_{\Gamma_{\eta_i}(\phi)} \eta_{Ni}(\phi, u) \, d\gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma_D(\phi)} v_{Di}(\phi) \partial_\nu u \, d\gamma + c_i \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

とおく. ただし,  $\zeta_i, \eta_{Ni}$  および  $\eta_{Di}$  は, 主問題の解  $u$  が  $\mathcal{S}$  に入るときに対応して, それぞれ次のように与えられていると仮定する.

- $\zeta_i \in C^1(\mathcal{D} \times \mathcal{S} \times \mathcal{G}; L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$
- $\zeta_{iu} \in C^0(\mathcal{D} \times \mathcal{S} \times \mathcal{G}; L^{2q}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$
- $\zeta_{i\nabla u} \in C^0(\mathcal{D} \times \mathcal{S} \times \mathcal{G}; W^{1,2q}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d))$
- $\eta_{Ni} \in C^1(\mathcal{D} \times \mathcal{S}; W^{2,2q}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$
- $v_{Di}(\phi) \in W^{2,2q}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$

ただし,

$$\mathcal{G} = \{\nabla u \in L^{2q}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}) \mid \tilde{u} \in \mathcal{S}\}$$

とする. また,  $f_0$  を目的関数,  $f_1, \dots, f_m$  を制約関数とする.  $c_i$  は, すべての  $i \in \{0, 1, \dots, m\}$  に対して  $f_i \leq 0$  が成り立つような  $(\phi, u) \in \mathcal{D} \times U$  が存在するような正定数とする.

式 (2.4.1) の評価関数を用いて, 形状最適化問題を次のように定義する.

**問題 2.4.1 (形状最適化問題)**  $\mathcal{D}$  と  $\mathcal{S}$  をそれぞれ (2.2.2) と (2.3.2) のように定義する.  $f_0, \dots, f_m$  を (2.4.1) で定義する. このとき,

$$\min_{\phi \in \mathcal{D}} \{f_0(\phi, u) \mid f_i(\phi, u) \leq 0, i \in \{1, \dots, m\}, \tilde{u} \in \mathcal{S}, \text{問題 2.3.1}\}$$

を満たす  $\Omega(\phi)$  を求めよ. □

## 2.5 評価関数の形状微分

次に、評価関数  $f_i$  の形状微分を導出する。ここで、 $f_i$  は主問題の解関数であることから、主問題を等式制約とした Lagrange 関数を次のように定義し、Lagrange 関数の Fréchet 微分を随伴変数法を用いて導出する。 $f_i$  の Lagrange 関数を

$$\mathcal{L}_i(\phi, u, v_i) = f_i(\phi, u) + \mathcal{L}_M(\phi, u, v_i) \quad (2.5.1)$$

とおく。ただし、 $\mathcal{L}_M(\cdot, \cdot, \cdot)$  は式 (2.3.4) で定義されている主問題に対する Lagrange 関数である。境界変動型の形状最適化問題では、 $\mathcal{L}_i(\phi, u, v_i)$  の形状微分を求める方法としていくつかの方法が考えられるが、本論文では、 $\mathcal{L}_i$  の形状微分を関数の形状偏微分に基づく公式を使って求める方法を考える [30]。そのために、以下では  $b, p_N, u_D$  および  $\phi \in \mathcal{D}$  は空間固定と仮定する。

$\phi$  の変動を  $\varphi \in X$  とかくことにする。 $u$  と  $v_i$  の形状偏微分を  $u'$  および  $v'_i$  とかくことにする。このとき、 $\mathcal{L}_i(\phi, u(\phi), v_i(\phi))$  の形状微分は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_i(\phi, u, v_i)[\varphi] &= \mathcal{L}_{i\phi}(\phi, u, v_i)[\varphi] \\ &+ \mathcal{L}_{iu}(\phi, u, v_i)[u'] + \mathcal{L}_{iv_i}(\phi, u, v_i)[v'_i] \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

のようにかくことができる。ここで、式 (2.5.2) の右辺第 3 項を計算すれば

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{iv_i}(\phi, u, v_i)[v'_i] &= \mathcal{L}_{Mv_i}(\phi, u, v_i)[v'_i] \\ &= \int_{\Omega(\phi)} \{-\nabla u \cdot \nabla v'_i + b v'_i\} dx \\ &+ \int_{\Gamma_N(\phi)} p_N v'_i d\gamma - \int_{\Gamma_D(\phi)} \{(u - u_D) \partial_\nu v'_i + v'_i \partial_\nu u\} d\gamma \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

となる。この項は、 $u$  が問題 2.3.1 の解ならば 0 になる。また、(2.5.2) の右辺第 2 項は、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{iu}(\phi, u, v_i)[u'] &= \int_{\Omega(\phi)} (\zeta_{iu}(u, \nabla u)[u'] + \zeta_{i\nabla u}(u, \nabla u)[\nabla u']) dx \\ &+ \int_{\Gamma_{\eta_i}(\phi)} \eta_{Niu}(u)[u'] d\gamma + \int_{\Gamma_D(\phi)} v_{Di} \partial_\nu u' d\gamma \\ &+ \mathcal{L}_{Mu}(\phi, u, v_i)[u'] \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

となる。ただし、

$$\mathcal{L}_{Mu}(\phi, u, v_i)[u'] = - \int_{\Omega(\phi)} \nabla u' \cdot \nabla v_i dx - \int_{\Gamma_D(\phi)} \{u' \partial_\nu v_i + (v_i - v_{Di}) \partial_\nu u'\} d\gamma$$

となる。この項は、 $v_i$  が次の随伴問題の解のとき 0 となる。

問題 2.5.1 ( $f_i$  に対する随伴問題)  $\phi \in \mathcal{D}$  に対して問題 2.3.1 の解  $u$  が与えられたとき,

$$\begin{aligned} -\Delta v_i &= \zeta_{iu}(\phi, u, \nabla u) + \nabla \cdot \zeta_{i\nabla u}(\phi, u, \nabla u) \quad \text{in } \Omega(\phi), \\ \partial_\nu v_i &= \eta_{Niu}(\phi, u) + \zeta_{i\nabla u}(\phi, u, \nabla u) \cdot \boldsymbol{\nu} \quad \text{on } \Gamma_{\eta_i}(\phi), \\ \partial_\nu v_i &= 0 \quad \text{on } \Gamma_N(\phi) \setminus \bar{\Gamma}_{\eta_i}(\phi), \\ v_i &= v_{Di} \quad \text{on } \Gamma_D(\phi) \end{aligned}$$

を満たす  $v_i(\phi) : \Omega(\phi) \rightarrow \mathbb{R}$  を求めよ.  $\square$

さらに, 式 (2.5.2) の右辺第1項は,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{i\phi}(\phi, u, v_i)[\varphi] &= f_{i\phi}(\phi, u)[\varphi] + \mathcal{L}_{M\phi}(\phi, u, v_i)[\varphi] \\ &= \langle \bar{\mathbf{g}}_{\partial\Omega_i}, \varphi \rangle + \langle \bar{\mathbf{g}}_{N_i}, \varphi \rangle + \langle \bar{\mathbf{g}}_{\partial N_i}, \varphi \rangle = \langle \bar{\mathbf{g}}_i, \varphi \rangle \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

の形式にまとめることができる. ここで,

$$\langle \bar{\mathbf{g}}_{\partial\Omega_i}, \varphi \rangle = \int_{\partial\Omega(\phi)} (\zeta_i(u, \nabla u) - \nabla u \cdot \nabla v_i + b v_i) \boldsymbol{\nu} \cdot \varphi \, d\gamma \quad (2.5.6)$$

$$\langle \bar{\mathbf{g}}_{N_i}, \varphi \rangle = \int_{\Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta_i}(\phi)} (\partial_\nu + \kappa)(p_N v_i + \eta_{iN}(u)) \boldsymbol{\nu} \cdot \varphi \, d\gamma \quad (2.5.7)$$

$$\langle \bar{\mathbf{g}}_{\partial N_i}, \varphi \rangle = \int_{\partial(\Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta_i}(\phi))} (p_N v_i + \eta_{iN}(u)) \boldsymbol{\tau} \cdot \varphi \, d\gamma \quad (2.5.8)$$

となる. ここで,  $u$  と  $v_i$  が問題 2.3.1 と問題 2.5.1 の解であることを用いた.

式 (2.5.5) は,  $u$  と  $v_i$  がそれぞれ問題 2.3.1 と問題 2.5.1 の解である条件を満たした下での Lagrange 関数の形状微分になっていることから, 式 (2.5.5) の  $\bar{\mathbf{g}}_i$  は

$$\tilde{f}'_i(\phi)[\varphi] = \langle \bar{\mathbf{g}}_i, \varphi \rangle \quad (2.5.9)$$

の意味をもつことになる. ただし,  $\tilde{f}_i(\phi) = \{f_i(\phi, u) \mid (\phi, u) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}, \text{ 問題 2.3.1}\}$  とおいた. また, 式 (2.5.5) の  $\bar{\mathbf{g}}_i$  が入る関数空間は  $\bar{\mathbf{g}}_i \in X'$  となる. この事実より,  $\bar{\mathbf{g}}_i$  は設計変数の許容集合が入る線形空間  $Y = C^{0,1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$  に入るとは限らない. この結果は,  $-\bar{\mathbf{g}}_i$  を  $\varphi$  に代入する勾配法で得られる  $\phi + \varphi$  は  $Y$  の元となることが保証されないことを意味する. このことは, 第1章で説明した波打ち現象などの数値不安定現象が発生する一因になっていると考えられる.

## 2.6 $H^1$ 勾配法

評価関数の形状微分が定義できたので, 次に設計変数  $\phi$  の更新ベクトル  $\varphi$  の決定法について述べる. 本論文では評価関数の形状微分を正則化する機能をもつ.  $H^1$  勾配法

を用いる. ある  $i \in \{0, \dots, m\}$  に対して, 評価関数  $f_i(\phi, u)$  を選び, ある  $\phi \in \mathcal{D}$  における形状微分  $\mathbf{g}_i \in X'$  が与えられたと仮定する.  $f_i$  が減少する方向ベクトルを次の問題の解  $\varphi_{gi} \in X$  によって求める方法を, 形状最適化問題に対する  $H^1$  勾配法とよぶ.

**問題 2.6.1** (形状最適化問題に対する  $H^1$  勾配法)  $X = H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$  とする.  $a_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  を, 任意の  $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$  に対して, ある  $\alpha > 0, \beta > 0$  が存在し,

$$a_X(\mathbf{z}, \mathbf{z}) \geq \alpha \|\mathbf{z}\|_X^2 \quad |a_X(\mathbf{y}, \mathbf{z})| \leq \beta \|\mathbf{y}\|_X \|\mathbf{z}\|_X$$

が成り立つような  $X$  上の有界かつ強圧的双 1 次形式とする. ある  $\phi \in \mathcal{D}$  において  $\mathbf{g}_i \in X'$  が与えられたとき, 任意の  $\mathbf{z} \in X$  に対して

$$a_X(\varphi_{gi}, \mathbf{z}) = -\langle \mathbf{g}_i, \mathbf{z} \rangle \quad (2.6.1)$$

を満たす  $\varphi_{gi} \in X$  を求めよ. □

この問題の解  $\varphi_{gi} \in X$  は Lax-Milgram の定理より一意に存在する. また,  $\varphi_{gi} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$  を得る [30]. ここで, 問題 2.6.1 は,

$$q(\varphi_{gi}) = \min_{\varphi \in X} \left\{ q(\varphi) = \frac{1}{2} a_X(\varphi, \varphi) + \langle \mathbf{g}_i, \varphi \rangle + f_i(\phi) \right\} \quad (2.6.2)$$

を満たす  $\varphi_{gi} \in X$  を求めることと同値である. そこで,  $f_i(\phi)$  の  $\varphi \in X$  に対する 2 階の Fréchet 微分を  $a_X(\varphi, \varphi)$  で代用したときの修正 Newton 法とみなすことができる. 問題 2.6.1 で使われる  $X$  上の強圧的双 1 次形式  $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  の選び方には任意性がある. 本論文では, 以下のように定義する.

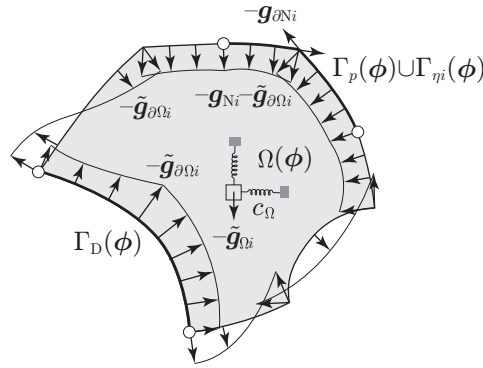
実 Hilbert 空間 (Hilbert space)  $X$  上の内積は強圧性をもつ. ここでは, その応用を考える.  $\varphi \in X = H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$  に対して,  $\nabla \varphi^T$  の対称成分を

$$\mathbf{E}(\varphi) = (e_{ij}(\varphi))_{ij} = \frac{1}{2} \left( \nabla \varphi^T + (\nabla \varphi^T)^T \right)$$

とおく. また,  $c_\Omega$  を  $L^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d \times d \times d \times d})$  に入る正值関数とする. このとき,

$$a_X(\varphi, \psi) = \int_{\Omega(\phi)} (\mathbf{E}(\varphi) \cdot \mathbf{E}(\psi) + c_\Omega \varphi \cdot \psi) dx \quad (2.6.3)$$

は  $X$  上の強圧的な双 1 次形式となる. ここで,  $c_\Omega$  は被積分関数の第 1 項と第 2 項の重みを調整する働きをする.  $c_\Omega$  を小さくとり, 第 1 項を支配的にすれば平滑化の機能が優先される. ただし,  $c_\Omega = 0$  とすることは, 強圧性を失うことになり,  $H^1$  勾配法で要求される条件を満たさないことになる. さらに,  $\mathbf{C} = (c_{ijkl})_{ijkl} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d \times d \times d \times d})$  を線形弾性問題で使われる剛性テンソルとする. すなわち, 任意の対称テンソル  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d}$

図 2.6.1:  $H^1$  内積を用いた  $H^1$  勾配法

と  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{d \times d}$  に対して  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} : \mathbf{A}) \geq \alpha \|\mathbf{A}\|^2$  および  $|\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} : \mathbf{B})| \leq \beta \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|$  が成り立つような正定数  $\alpha$  と  $\beta$  が存在し、かつ対称性  $c_{ijkl} = c_{klij}$  をもつと仮定する. これを用いて, 応力テンソルを

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{C} : \mathbf{E}(\boldsymbol{\varphi}) = \left( \sum_{(k,l) \in \{1, \dots, d\}^2} c_{ijkl} e_{kl}(\boldsymbol{\varphi}) \right)_{ij} \quad (2.6.4)$$

とおく. このとき,

$$a_X(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}) = \int_{\Omega(\boldsymbol{\varphi})} (\mathbf{S}(\boldsymbol{\varphi}) \cdot \mathbf{E}(\boldsymbol{\psi}) + c_{\Omega} \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\psi}) \, dx \quad (2.6.5)$$

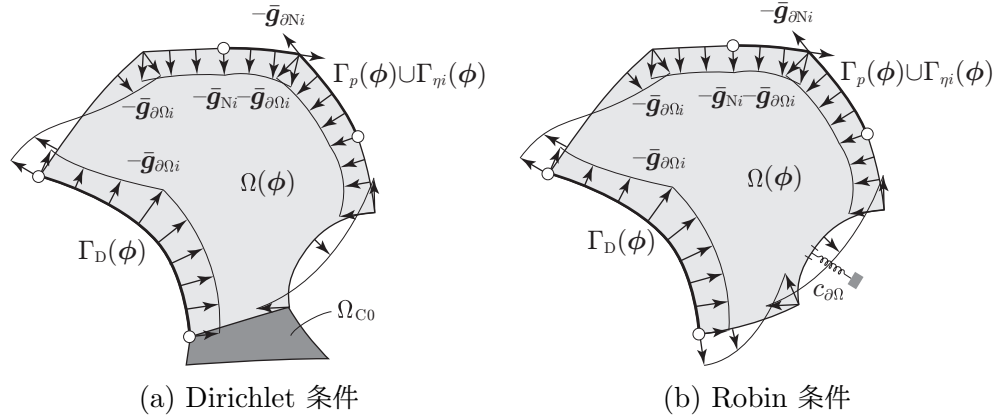
は  $X$  上の強圧的な双 1 次形式となる. 式 (2.6.5) の  $a$  は,  $\boldsymbol{\varphi}$  と  $\boldsymbol{\psi}$  を変位とその変分とみなしたときの線形弾性問題におけるひずみエネルギーの変分を与える双 1 次形式となる. このとき,  $c_{\Omega}$  は  $\mathbb{R}^d$  上に配置された分布ばねの意味をもつ. さらに, 式 (2.6.1) の強形式は次のようになる. この問題のイメージを図 2.6.1 に示す.

**問題 2.6.2** ( $H^1$  内積を用いた  $H^1$  勾配法)  $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}$  において,  $\bar{\mathbf{g}}_{\partial\Omega i}$ ,  $\bar{\mathbf{g}}_{Ni}$  および  $\bar{\mathbf{g}}_{\partial Ni}$  とが与えられたとき,

$$\begin{aligned} -\nabla^T \mathbf{S}(\boldsymbol{\varphi}_{gi}) + c_{\Omega} \boldsymbol{\varphi}_{gi}^T &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{in } \Omega(\boldsymbol{\phi}), \\ \mathbf{S}(\boldsymbol{\varphi}_{gi}) \boldsymbol{\nu} &= -\bar{\mathbf{g}}_{Ni} - \bar{\mathbf{g}}_{\partial\Omega i} \quad \text{on } \Gamma_p(\boldsymbol{\phi}) \cup \Gamma_{ni}(\boldsymbol{\phi}), \\ \mathbf{S}(\boldsymbol{\varphi}_{gi}) \boldsymbol{\tau} &= -\bar{\mathbf{g}}_{\partial Ni} \quad \text{on } \partial(\Gamma_p(\boldsymbol{\phi}) \cup \Gamma_{ni}(\boldsymbol{\phi})), \\ \mathbf{S}(\boldsymbol{\varphi}_{gi}) \boldsymbol{\nu} &= -\bar{\mathbf{g}}_{\partial\Omega i} \quad \text{on } \partial\Omega(\boldsymbol{\phi}) \setminus (\Gamma_p(\boldsymbol{\phi}) \cup \Gamma_{ni}(\boldsymbol{\phi})) \end{aligned}$$

を満たす  $\boldsymbol{\varphi}_{gi}$  を求めよ. □

また, 境界条件を追加することで双 1 次形式  $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  に強圧性をもたせることができる. 式 (2.2.2) の中で,  $\bar{\Omega}_{C_0} \subset \bar{\Omega}_0$  を設計上の要請で固定する領域を表すこと

図 2.6.2: 境界条件を用いた  $H^1$  勾配法

にした. このとき,  $\bar{\Omega}_{C0} \neq \emptyset$  および式 (2.2.1) の  $X$  を仮定したとき,

$$a_X(\varphi, \psi) = \int_{\Omega(\phi) \setminus \bar{\Omega}_{C0}} \mathbf{S}(\varphi) \cdot \mathbf{E}(\psi) dx \quad (2.6.6)$$

は  $X$  上の強圧的な双 1 次形式となる. このときの強形式は次のようになる.

**問題 2.6.3 (Dirichlet 条件を用いた  $H^1$  勾配法, 関数の形状微分)** ある  $\phi \in \mathcal{D}$  において,  $\bar{\mathbf{g}}_{\partial\Omega_i}$ ,  $\bar{\mathbf{g}}_{N_i}$ ,  $\bar{\mathbf{g}}_{\partial N_i}$  および  $\bar{\mathbf{g}}_{D_i}$  とが与えられたとき,

$$\begin{aligned} -\nabla^T \mathbf{S}(\varphi_{gi}) &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}^T \quad \text{in } \Omega(\phi) \setminus \bar{\Omega}_{C0}, \\ \mathbf{S}(\varphi_{gi}) \boldsymbol{\nu} &= -\bar{\mathbf{g}}_{\partial\Omega_i} - \bar{\mathbf{g}}_{N_i} \quad \text{on } \Gamma_N(\phi) \setminus \bar{\Omega}_{C0}, \\ \mathbf{S}(\varphi_{gi}) \boldsymbol{\nu} &= -\bar{\mathbf{g}}_{\partial\Omega_i} - \bar{\mathbf{g}}_{D_i} \quad \text{on } \Gamma_D(\phi) \setminus \bar{\Omega}_{C0}, \\ \mathbf{S}(\varphi_{gi}) \boldsymbol{\tau} &= -\bar{\mathbf{g}}_{\partial N_i} \quad \text{on } \partial\Gamma_N(\phi) \setminus \bar{\Omega}_{C0}, \\ \varphi_{gi} &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{on } \bar{\Omega}_{C0} \end{aligned}$$

を満たす  $\varphi_{gi}$  を求めよ. □

問題 2.6.3 のイメージを図 2.6.2 (a) に示す. この問題は,  $\Omega(\phi)$  を線形弾性体と仮定して,  $\bar{\Omega}_{C0}$  を固定して残りの境界に境界力  $\bar{\mathbf{g}}_{\partial\Omega_i}$ ,  $\bar{\mathbf{g}}_{N_i}$ ,  $\bar{\mathbf{g}}_{\partial N_i}$  および  $\bar{\mathbf{g}}_{D_i}$  を作用させたときの変位  $\varphi_{gi}$  を求める問題になっている. このような解釈から, 問題 2.6.3 は力法とよばれてきた [48].

さらに, Robin 条件によっても  $a$  の強圧性を得ることができる. ある正值関数  $c_{\partial\Omega} \in L^\infty(\partial\Omega(\phi); \mathbb{R})$  を選び,

$$a_X(\varphi, \psi) = \int_{\Omega(\phi)} \mathbf{S}(\varphi) \cdot \mathbf{E}(\psi) dx + \int_{\partial\Omega(\phi)} c_{\partial\Omega}(\varphi \cdot \boldsymbol{\nu})(\psi \cdot \boldsymbol{\nu}) d\gamma$$

とおく. このときの強形式は次のようになる.

**問題 2.6.4 (Robin 型力法の強形式)** ある  $\phi \in \mathcal{D}$  において,  $\bar{\mathbf{g}}_{\partial\Omega_i}$ ,  $\bar{\mathbf{g}}_{\Gamma_{N_i}}$ ,  $\bar{\mathbf{g}}_{\partial\Omega_i}$  および  $\bar{\mathbf{g}}_{D_i}$  とが与えられたとき,

$$\begin{aligned} -\nabla^T \mathbf{S}(\varphi_{g_i}) &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}^T \quad \text{in } \Omega(\phi), \\ \mathbf{S}(\varphi_{g_i}) \boldsymbol{\nu} + c_{\partial\Omega}(\varphi \cdot \boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\nu} &= -\bar{\mathbf{g}}_{\partial\Omega_i} - \bar{\mathbf{g}}_{\Gamma_{N_i}} \quad \text{on } \Gamma_N(\phi) \\ \mathbf{S}(\varphi_{g_i}) \boldsymbol{\tau} &= -\bar{\mathbf{g}}_{\partial\Omega_i} \quad \text{on } \partial\Gamma_N(\phi), \\ \mathbf{S}(\varphi_{g_i}) \boldsymbol{\nu} + c_{\partial\Omega}(\varphi \cdot \boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\nu} &= -\bar{\mathbf{g}}_{\partial\Omega_i} - \bar{\mathbf{g}}_{D_i} \quad \text{on } \Gamma_D(\phi) \end{aligned}$$

を満たす  $\varphi_{g_i}$  を求めよ. □

問題 2.6.4 のイメージを図 2.6.2 (b) に示す. この問題は,  $\Omega(\phi)$  を線形弾性体と仮定して,  $\partial\Omega(\phi)$  にばね定数  $c_{\partial\Omega}$  の分布ばねを配置した下で, 境界に  $\bar{\mathbf{g}}_{\partial\Omega_i}$ ,  $\bar{\mathbf{g}}_{\Gamma_{N_i}}$ ,  $\bar{\mathbf{g}}_{\partial\Omega_i}$  および  $\bar{\mathbf{g}}_{D_i}$  を作用させたときの変位  $\varphi_{g_i}$  を求める問題になっている. このような解釈から, 問題 2.6.4 はばね付き力法, あるいは Robin 型力法とよばれてきた [56].

## 2.7 形状最適化問題の解法

最後に, 境界変動型の形状最適化問題 (問題 2.4.1) の解を求める方法について考える. 2.6 節では, ある  $i \in \{1, \dots, m\}$  を選んだとき, 評価関数  $f_i(\phi)$  の形状微分  $\mathbf{g}_i$  (本節では  $\bar{\mathbf{g}}_i$  を  $\mathbf{g}_i$  とかく) が与えられたならば,  $f_i(\phi)$  が減少する領域変動は  $H^1$  勾配法の解  $\varphi_{g_i}$  として求められることを示した. ここでは, それらの解を使って不等式制約問題の解を求めることを考える.

2.6 節では,  $H^1$  勾配法は, 任意の領域変動  $\varphi \in X$  に対する 2 階の Fréchet 微分を  $a_X(\varphi, \varphi)$  で代用したときの修正 Newton 法になっていることを指摘した. そこでは,  $f_i$  に対する 2 次の近似関数を式 (2.6.2) の  $q$  で与えた. ここでは, 次の近似問題を繰り返し解く方法を考える. その方法は, 設計変数が入る  $X$  上の逐次 2 次近似法に対応する.

**問題 2.7.1 (逐次 2 次近似問題)** ある  $\phi \in \mathcal{D}$  に対して,  $f_0, \dots, f_m$  とそれらの形状微分  $\mathbf{g}_0, \dots, \mathbf{g}_m$  が与えられたと仮定する.  $c_a$  をステップサイズを調整する正定数とする. このとき,

$$\begin{aligned} q(\varphi_g) = \min_{\varphi \in X} \left\{ q(\varphi) = \frac{c_a}{2} a_X(\varphi, \varphi) + \langle \mathbf{g}_0, \varphi \rangle \mid f_1(\phi) + \langle \mathbf{g}_1, \varphi \rangle \leq 0, \right. \\ \left. \dots, f_m(\phi) + \langle \mathbf{g}_m, \varphi \rangle \leq 0 \right\} \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

を満たす  $\varphi_g \in X$  を求めよ. □

問題 2.7.1 の Lagrange 関数を

$$\mathcal{L}_{\text{SQ}}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\lambda}) = q(\boldsymbol{\varphi}) + \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \lambda_i (f_i(\boldsymbol{\phi}) + \langle \mathbf{g}_i, \boldsymbol{\varphi} \rangle) \quad (2.7.2)$$

とおく. ここで,  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T \in \mathbb{R}^m$  は不等式制約条件に対する Lagrange 乗数である. ここで,  $\boldsymbol{\varphi}_g$  が問題 2.7.1 の解ならば, 任意の  $\mathbf{y} \in X$  に対して, KKT (Karush–Kuhn–Tucker) 条件

$$c_a a_X(\boldsymbol{\varphi}_g, \mathbf{y}) + \left\langle \mathbf{g}_0 + \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \lambda_i \mathbf{g}_i, \mathbf{y} \right\rangle = 0, \quad (2.7.3)$$

$$f_i(\boldsymbol{\phi}) + \langle \mathbf{g}_i, \boldsymbol{\varphi}_g \rangle \leq 0 \quad \text{for } i \in \{1, \dots, m\}, \quad (2.7.4)$$

$$\lambda_i (f_i(\boldsymbol{\phi}) + \langle \mathbf{g}_i, \boldsymbol{\varphi}_g \rangle) = 0 \quad \text{for } i \in \{1, \dots, m\}, \quad (2.7.5)$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad \text{for } i \in \{1, \dots, m\}, \quad (2.7.6)$$

が成り立つ (例えば [58]). これらを満たす  $\boldsymbol{\varphi}_g$  は次のようにして求められる.

$\boldsymbol{\varphi}_{g0}, \dots, \boldsymbol{\varphi}_{gm}$  を  $H^1$  勾配法 (問題 2.6.1) の解とする. ただし, 式 (2.6.1) を

$$c_a a_X(\boldsymbol{\varphi}_{gi}, \mathbf{z}) = -\langle \mathbf{g}_i, \mathbf{z} \rangle \quad (2.7.7)$$

に変更する. このとき,

$$\boldsymbol{\varphi}_g = \boldsymbol{\varphi}_{g0} + \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \lambda_i \boldsymbol{\varphi}_{gi} \quad (2.7.8)$$

は, 式 (2.7.3) を満たす. また, 式 (2.7.4) が等号で成り立つならば,  $i \in \{1, \dots, m\}$  に対して,

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{g}_1, \boldsymbol{\varphi}_{g1} \rangle & \cdots & \langle \mathbf{g}_1, \boldsymbol{\varphi}_{gm} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{g}_m, \boldsymbol{\varphi}_{g1} \rangle & \cdots & \langle \mathbf{g}_m, \boldsymbol{\varphi}_{gm} \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{\phi}) + \langle \mathbf{g}_1, \boldsymbol{\varphi}_{g0} \rangle \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{\phi}) + \langle \mathbf{g}_m, \boldsymbol{\varphi}_{g0} \rangle \end{pmatrix}$$

が成り立つ. この式を

$$\left( \langle \mathbf{g}_i, \boldsymbol{\varphi}_{gj} \rangle \right)_{ij} (\delta \lambda_j)_j = - \left( f_i(\boldsymbol{\phi}) + \langle \mathbf{g}_i, \boldsymbol{\varphi}_{g0} \rangle \right)_i \quad (2.7.9)$$

とかく.

これらの関係に基づいて, 問題 2.4.1 に対する数値解法を考える. ここでは, 式 (2.7.8) の  $\boldsymbol{\varphi}_g$  の大きさ  $\|\boldsymbol{\varphi}_g\|_X$  をステップサイズとよび, それを決め打ちで与える簡易法についてアルゴリズムを示す. その後で, より合理的にステップサイズを決定する方法について考察する. なお, ステップサイズの制御は, 式 (2.7.7) の  $c_a$  によって行われることに注意する. また, 簡単のために, 初期領域  $\Omega_0$  においては,  $f_1 = \dots = f_m = 0$  であった (式 (2.4.1) の  $c_i$  をそのように与える) と仮定する.



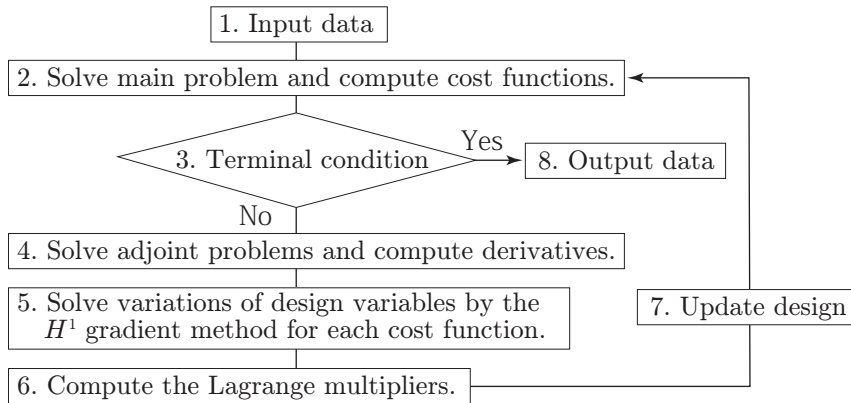


図 2.7.1:  $H^1$  勾配法を用いた逐次 2 次近似法のアルゴリズム

まず、簡易法について考える。実際には、 $c_a$  を決め打ちで与える。初期領域  $\Omega_0$  に対して、 $f_1, \dots, f_m$  を計算し、第 3.5 節の結果を用いて  $\mathbf{g}_0, \dots, \mathbf{g}_m$  を計算する。次に、それらを用いて式 (2.7.7) による  $H^1$  勾配法の解  $\varphi_{g_0}, \dots, \varphi_{g_m}$  を求める。これらの結果を用いて、式 (2.7.9) の  $(\langle \mathbf{g}_i, \varphi_{g_j} \rangle)_{ij}$  と  $-(\langle \mathbf{g}_i, \varphi_{g_0} \rangle)_i$  を計算する。ここで、同類の制約関数が使われていなければ、 $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m$  は 1 次独立 ( $(\langle \mathbf{g}_i, \varphi_{g_j} \rangle)_{ij}$  のランクは  $m$ ) になり、 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  は一意に決定される。その結果、有効な評価関数に対する添え字の集合

$$I_A = \{i \in \{1, \dots, m\} \mid \text{式 (2.7.4), 式 (2.7.5), 式 (2.7.6)}\} \quad (2.7.10)$$

を求め、 $i \notin I_A$  に対して  $\lambda_i = 0$  とおき、 $I_A$  に含まれる制約条件のみを残した式 (2.7.9) を解くことを繰り返す。このようにして得られた  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  と式 (2.7.8) によって得られた  $\varphi_g$  は KKT 条件 (2.7.3) から式 (2.7.6) を満たすことになる。この  $\varphi_g$  を用いて領域を変動させれば、新領域  $\Omega(\varphi_g)$  が得られる。以上の手順をまとめると次のようになる (図 2.7.1)。

- アルゴリズム 2.7.1 (逐次 2 次近似法) (1)  $\Omega_0$  を選ぶ。  $f_1 = \dots = f_m = 0$  を満たすように  $c_1, \dots, c_m$  を定める。  $c_a$  を選ぶ。  $k = 0$  および  $\phi_0 = \mathbf{i}$  (恒等写像) とおく。
- (2)  $\Omega(\phi_k)$  において主問題 (問題 2.3.1) を解き、  $f_0, \dots, f_m$  を計算する。
  - (3) 停止条件を判定する。満たされたときは 8 に進む。満たされないときは次に進む。
  - (4) 随伴問題 (問題 2.5.1) を解き、  $\mathbf{g}_0, \dots, \mathbf{g}_m$  を計算する。
  - (5) 式 (2.7.7) による  $H^1$  勾配法 (問題 2.6.1) で  $\varphi_{g_0}, \dots, \varphi_{g_m}$  を計算する。
  - (6) 式 (2.7.9) で  $\lambda$  を計算する。ただし、  $i \notin I_A$  に対して  $\lambda_i = 0$  とおき、  $I_A$  に含まれる制約条件のみを残した式 (2.7.9) を解くことを繰り返す。

- (7) 式 (2.7.8) で  $\varphi_g$  を求め、 $\phi_{k+1} = \phi_k + \varphi_g$  とおき、変数  $k$  に  $k+1$  の値を代入して、2 に戻る。
- (8) 計算を終了する。

□

次に、ステップサイズをより合理的に決定する方法について考える。ここでは、次の項目に分けてみていくことにする。

- (1) 正定数  $\epsilon$  を与えて、初期の領域変動において  $\|\varphi_g\|_X = \epsilon$  となるように  $c_a$  を決定する方法
- (2) 変動後の領域において、式 (2.7.4) から式 (2.7.6) が満たされるように  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  を補正する方法
- (3) 評価関数の非線形性に起因する予測誤差に応じてステップサイズを制御する方法

1 は、次のようにして実現される。 $c_a$  の初期値を 1 とおく。初回に式 (2.7.7) による  $H^1$  勾配法 (問題 2.6.1) を適用し、 $\varphi_{g0}, \dots, \varphi_{gm}$  を求める。次に、式 (2.7.9) により、 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  を求める。この際、 $f_1(\phi) = \dots = f_m(\phi) = 0$  を仮定しているの、 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  を決定するのに  $\varphi_{g0}, \dots, \varphi_{gm}$  の大きさには依存しないことに注意する。 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  が得られれば、式 (2.7.8) により  $\varphi_g$  を求めることができる。この  $\varphi_g$  を用いて、 $c_a = \epsilon/\varphi_g$  とおく。2 回目以降、この  $c_a$  を用いれば、 $H^1$  勾配法によって得られた  $\varphi_{g0}, \dots, \varphi_{gm}$  による式 (2.7.8) の  $\varphi_g$  の大きさはおよそ  $\epsilon$  となる。なお、初回については、 $c_a = 1$  とおいて得られた  $\varphi_g$  に  $c_a$  を乗ずればよい。また、 $\|\varphi_g\|_X$  を  $|\varphi_g|_{W^{1,\infty}(\Omega_0; \mathbb{R}^d)}$  で代用し、 $\epsilon$  を最大主ひずみの領域全体にわたる最大値の目安とみなして、数 % の数値を与える方法などが考えられる。ここで示した工夫は、アルゴリズム 2.7.1 のステップ 7 において、 $k=0$  のときに、 $\varphi_g$  を求めた後で、 $c_a = \epsilon/\varphi_g$  の計算を挿入することで実現される。

また、2 については次のような方法が考えられる。簡易法で使われた  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  の計算法では、逐次 2 次近似問題 (問題 2.7.1) の KKT 条件は満たしていても、変動後の領域では、不等式制約は満たされていない可能性がある。変動後の領域で確実に不等式制約が満たされるためには、 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  を補正する必要がある。ここでは、(2.7.8) の  $\varphi_g$  を  $\varphi_g(\boldsymbol{\lambda})$  と表すことにして、すべての  $i \in \{1, \dots, m\}$  に対して式 (2.7.4) から式 (2.7.6) が満たされるまで、

$$\begin{aligned} (\langle g_i(\phi + \varphi_g(\boldsymbol{\lambda})), \varphi_{gj} \rangle)_{(i,j) \in I_A^2} (\delta \lambda_j)_{j \in I_A} &= - (f_i(\phi + \varphi_g(\boldsymbol{\lambda})))_{i \in I_A}, \\ \delta \lambda_i &= 0 \quad \text{for } i \notin I_A \end{aligned} \quad (2.7.11)$$

によって  $\delta \boldsymbol{\lambda} = (\delta \lambda_1, \dots, \delta \lambda_m)^T$  を求め、 $\boldsymbol{\lambda} + \delta \boldsymbol{\lambda}$  を  $\boldsymbol{\lambda}$  に更新する方法が考えられる。この工夫は、アルゴリズム 2.7.1 のステップ 6 において、式 (2.7.11) の計算を挿入す

ることで実現される。その際、実際に領域を  $\Omega(\phi + \varphi_g(\lambda))$  に更新したときの  $i \in I_A$  に対する  $g_i$  と  $f_i$  を求める必要がある。

さらに、3 については、Armijo の規準 [59] と Wolfe の規準 [60] を満たすようにステップサイズを制御する方法が考えられる。原問題 (問題 2.4.1) の Lagrange 関数を

$$\mathcal{L}(\phi, \lambda) = f_0(\phi) + \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \lambda_i f_i(\phi)$$

とおく。ここで、 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T \in \mathbb{R}^m$  は原問題に対する KKT 条件を満たす不等式制約条件に対する Lagrange 乗数である。このとき、Armijo の規準:

$$\mathcal{L}(\phi + \varphi_g, \lambda) - \mathcal{L}(\phi, \lambda) \leq \xi \left\langle \mathbf{g}_0 + \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \lambda_i \mathbf{g}_i, \varphi_g \right\rangle \quad (2.7.12)$$

はステップサイズの上限を与える。ここで、 $\xi \in (0, 1)$  は許容範囲を制御する定数である。また、Wolfe の規準:

$$\mu \left\langle \mathbf{g}_0 + \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \lambda_i \mathbf{g}_i, \varphi_g \right\rangle \leq \left\langle \mathbf{g}_{0 \text{ new}} + \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \lambda_{i \text{ new}} \mathbf{g}_{i \text{ new}}, \varphi_g \right\rangle \quad (2.7.13)$$

はステップサイズの下限を与える。ここで、 $\mu$  は許容範囲を制御する  $0 < \xi < \mu < 1$  を満たす定数である。また、 $(\cdot)_{\text{new}}$  は  $\phi + \varphi_g$  のときの値を表す。Armijo の規準と Wolfe の規準を満たすようにステップサイズを制御していけば、大域的収束性 (初期点が最小点から十分離れていても、最小点に収束する性質) が成り立つことが示される [61, 62]。これらの規準は、アルゴリズム 2.7.1 のステップ 7 において、これらの規準が満たされるように  $c_a$  の値を修正する操作を挿入することで実現される。その際、ここでも、実際に領域を  $\Omega(\phi + \varphi_g)$  に更新したときの  $i \in I_A$  に対する  $g_i$  と  $f_i$  を求める必要がある。

## 第 3 章

# ブレーキ鳴き現象への形状最適化の応用

### 3.1 はじめに

ブレーキ鳴きは 1kHz から 15kHz で生じる振動騒音現象である。ブレーキ鳴きが生じると、車両の使用者に不快感を与えてしまうため、車両の品質に直結する重要な設計指標のひとつと考えられている。そのため、ブレーキ鳴きに対する CAE 評価技術に対する研究は古くから取り組まれてきた。

ブレーキ鳴き現象に対する先駆的な研究は Mills [63] により行われたと云われている。Mills はその研究の中でブレーキ鳴き現象が摩擦力により生じるスティックスリップ現象であると指摘した。その後、North [64] は接触面に Coulomb 摩擦が作用する簡易的なローターとパッドのモデルを用いて、ブレーキ鳴き現象が自励振動であると指摘した。Millner [65] は Coulomb 摩擦に起因して剛性行列が非対称になることにより、ブレーキ鳴き現象が複素固有値問題に帰着することを明らかにした。また、Millner は複素固有値の実部が正であれば、その自由振動モードの振幅が時間に対して増大するため、動的不安定性が生じると指摘した。この Millner の考えに基づいて、現在では、有限要素法を用いたブレーキ鳴きの解析手法が多くの商用プログラムに実装され、多くの適用例が報告されている (例えば, [66])。

一方、2000 年代以降、ブレーキ鳴き低減のための形状設計問題に最適化技術を活用する研究が報告されてきている。Lee ら [68] や Guan ら [69] はブレーキモデルの各コンポーネントの固有値を設計変数とし、複素固有値の実部を目的関数とするパラメータ最適化問題を構築しその解法を示した。この方法を用いれば、複素固有値の実部を減少させる理想的な各コンポーネントの各固有値を得ることができる。後藤ら [70] は Lee らの手法により得られた理想的な各コンポーネントの固有値配列を有する形状を得る為に、実固有振動数を目的関数としたノンパラメトリック形状最適化手法を用いた。また、Nelagadde と Smith [71] は複素固有値の実部が正となることが、関連する振動

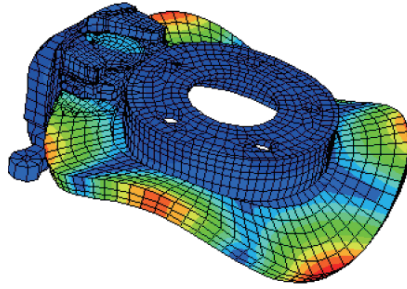


図 3.1.1: 複素固有値解析によるブレーキ鳴きの振動モードの例 [67]

モード間の連成により生じるとの考察に基づいて、関連する振動モードに対応する固有周波数を離間させることを目的とし、ローターのフィンの厚みなどを設計変数とおいたパラメータ最適化問題構成した。Soh と Yoo [72] はキャリパーシリンダーの形状を制御するパラメータを設計変数とし、複素固有値に対する実部を目的関数とするパラメータ最適化手法を提案した。

このように、ブレーキ鳴き現象における過去の最適化の研究では、パラメータ最適化に基づいた方法が提案されてきた。しかしながら、アセンブリ状態の評価指標である複素固有値の実部を目的関数としたノンパラメトリック形状最適化手法はこれまで提案されていない。そこで、本研究ではこのような複素固有値を目的関数としたノンパラメトリック形状最適化問題を構築し、その解法を示す。本研究では Millner の考えに基づきブレーキ鳴き現象に対する自由振動問題が複素固有値問題で記述できると考え、これを主問題に設定する。その上で、複素固有値の実部を目的関数としたノンパラメトリック形状最適化問題を構築しその解法を示す。形状最適化問題の解法においては、第 2 章で述べた  $H^1$  勾配法と逐次 2 次計画法を用いる。

本章の構成は以下の通りである。3.2 節ではブレーキモデルの初期領域と設計変数について述べる。定義した初期領域と設計変数を用いて、3.3 章ではブレーキ鳴きの自由振動問題に対する複素固有値問題を導出し主問題を定義する。3.4 節では主問題の解を用いて複素固有値の実部を評価関数に選んだ形状最適化問題を定義する。次に、評価関数に対する形状微分を 3.5 節で導出する。3.6 節では定義した形状最適化問題の解法を述べる。最後に 3.7 節では簡易ブレーキモデルを用いた数値例を示す。

## 3.2 ブレーキモデル

はじめにブレーキモデルの領域と摩擦境界の定義を図 3.2.1 に示す。 $\Omega_{R0}$  はローターの領域を表し、 $\Omega_{P0}$  はパッドの領域を表す。また、それぞれの領域の境界は

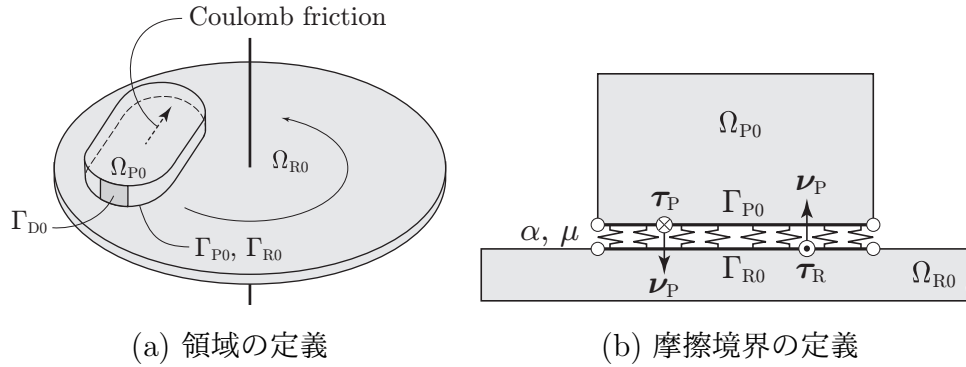


図 3.2.1: ブレーキモデル

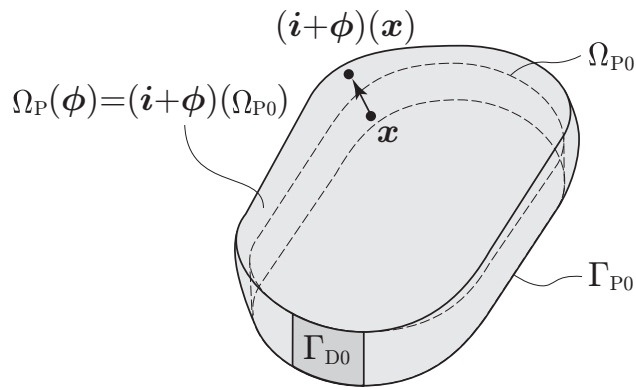


図 3.2.2: パッドの領域変動

Lipschitz 級を仮定する.  $\Gamma_{R0}$  と  $\Gamma_{P0}$  はそれぞれローターとパッドの接触境界を表し,  $\Gamma_{D0} \subset \partial\Omega_{R0} \cup \partial\Omega_{P0}$  は非斉次 Dirichlet 境界を表す.  $\nu_R, \tau_R$  と  $\nu_P, \tau_P$  はそれぞれローターとパッドに定義した法線と接線である. また,  $\alpha$  はローターとパッド間の接触剛性を表し,  $\mu$  は Coulomb 摩擦係数を表す.  $\rho_R$  と  $\rho_P$  はそれぞれ領域  $\Omega_{R0}$  と  $\Omega_{P0}$  の密度を表す. これら  $\alpha, \mu, \rho_R$ , および  $\rho_P$  は正の定数とする.

次に, 形状最適化問題における設計変数について図 3.2.2 に示す. 本研究ではパッド領域の変動  $\phi$  を設計変数として定義する. 変動後の領域は 1 対 1 写像  $i + \phi : \Omega_{P0} \rightarrow \mathbb{R}^d$  を用いると,

$$\Omega_P(\phi) = \{(i + \phi)(x) \mid x \in \Omega_{P0}\},$$

とかける. ここで記号  $i$  は恒等写像である. 形状最適化の過程で 1 対 1 写像の連続性を保つために,  $\phi$  の許容集合を式 (2.2.2) と定義する. ただし,  $\bar{\Omega}_{C0} = \Gamma_{P0} \cup \Gamma_{D0}$  とする.

### 3.3 主問題

上記の定義に基づいて、ブレーキ鳴きの自由振動を以下で考える。  $\mathbf{u}_R$  と  $\mathbf{u}_P$  はそれぞれ領域  $\Omega_{R0}(\phi)$  と  $\Omega_P(\phi)$  の変位を表すとする。また、ひずみテンソルと応力テンソルを

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{u}) &= (e_{ij}(\mathbf{u}))_{ij} = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{u}^T + (\nabla \mathbf{u}^T)^T \right), \\ \mathbf{S}(\mathbf{u}) &= \mathbf{C} : \mathbf{E}(\mathbf{u}) = \left( \sum_{(k,l) \in \{1, \dots, d\}^2} c_{ijkl} e_{kl}(\mathbf{u}) \right)_{ij} \end{aligned}$$

とおく。ここで、

$$\mathbf{C} = (c_{ijkl})_{ijkl} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d \times d \times d \times d})$$

は剛性を表し、楕円的かつ有界性を仮定する。これらの定義を用いると、ブレーキ鳴きの自由振動問題は次のようにかくことができる。

**問題 3.3.1 (ブレーキ鳴きの自由振動問題)**  $\phi \in \mathcal{D}$ , 初期変位  $\bar{\mathbf{u}}_0 \in W^{2,2q}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ , および初期速度  $\bar{\mathbf{v}}_0 \in W^{2,2q}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$  が与えられたとき、

$$\begin{aligned} \rho_R \ddot{\mathbf{u}}_R - (\nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{u}_R))^T &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{in } \Omega_R(\phi) \times \mathbb{R}, \\ \rho_P \ddot{\mathbf{u}}_P - (\nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{u}_P))^T &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{in } \Omega_P(\phi) \times \mathbb{R}, \\ \mathbf{S}(\mathbf{u}_R) \boldsymbol{\nu}_R &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{on } (\partial\Omega_{R0} \setminus \bar{\Gamma}_R(\phi)) \times \mathbb{R}, \\ \mathbf{S}(\mathbf{u}_P) \boldsymbol{\nu}_P &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{on } (\partial\Omega_P(\phi) \setminus \bar{\Gamma}_{P0}) \times \mathbb{R}, \\ \mathbf{S}(\mathbf{u}_R) \boldsymbol{\nu}_R &= \alpha \{(\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_P) \cdot \boldsymbol{\nu}_R\} \boldsymbol{\nu}_R \quad \text{on } \Gamma_{R0} \times \mathbb{R}, \\ \mathbf{S}(\mathbf{u}_R) \boldsymbol{\tau}_R &= \mu \alpha \{(\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_P) \cdot \boldsymbol{\nu}_R\} \boldsymbol{\tau}_R \quad \text{on } \Gamma_{R(\phi)} \times \mathbb{R}, \\ \mathbf{S}(\mathbf{u}_P) \boldsymbol{\nu}_P &= \alpha \{(\mathbf{u}_P - \mathbf{u}_R) \cdot \boldsymbol{\nu}_P\} \boldsymbol{\nu}_P \quad \text{on } \Gamma_{P(\phi)} \times \mathbb{R}, \\ \mathbf{S}(\mathbf{u}_P) \boldsymbol{\tau}_P &= -\mu \alpha \{(\mathbf{u}_P - \mathbf{u}_R) \cdot \boldsymbol{\nu}_P\} \boldsymbol{\tau}_P \quad \text{on } \Gamma_{P(\phi)} \times \mathbb{R} \quad (3.3.1) \\ \mathbf{u}_R &= \mathbf{u}_P \quad \text{on } (\Gamma_{R(\phi)} \cup \Gamma_{P0}) \times \mathbb{R}, \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}}_0 \quad \text{in } \Omega_{R(\phi)} \cup \Omega_P(\phi) \times \{0\}, \\ \dot{\mathbf{u}} &= \bar{\mathbf{v}}_0 \quad \text{in } \Omega_{R(\phi)} \cup \Omega_P(\phi) \times \{0\}, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{on } \Gamma_{D0} \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

を満たす  $\mathbf{u}$  を求めよ。 □

ここで、式 (3.3.1) の右辺のマイナス符号は問題 3.3.1 の剛性行列を非対称にする要因となる。次に、ブレーキ鳴きの自由振動問題から複素固有振動問題を導く。ブレーキ



モデルは  $\mathbf{u}$  に対して線形システムであるので、任意の  $s \in \mathbb{C}$  に対して以下の変数分離型を仮定することができる。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = e^{st} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + e^{s^c t} \hat{\mathbf{u}}^c(\mathbf{x}) \quad (3.3.2)$$

ここで、 $(\cdot)^c$  は複素共役を表す。 $\hat{\mathbf{u}}$  の線形空間を

$$U = \{ \hat{\mathbf{u}} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d) \mid \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \Gamma_{P0} \cup \Gamma_{D0} \}, \quad (3.3.3)$$

とおく。また、 $\hat{\mathbf{u}}$  の許容集合を

$$\mathcal{S} = U \cap W^{2,2q}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d) \quad (3.3.4)$$

のように定義する。式 (3.3.2) を問題 3.3.1 に代入すると、ブレーキ鳴きの自由振動問題に対する複素固有値問題は  $k \in \{1, 2, \dots\}$  を次数とすると、以下のようになる。

**問題 3.3.2 (ブレーキ鳴きの複素固有振動問題)**  $\phi \in \mathcal{D}$  が与えられたとき、

$$\begin{aligned} \rho_R s_k \hat{\mathbf{u}}_{Rk} - (\nabla \cdot \mathbf{S}(\hat{\mathbf{u}}_{Rk}))^T &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{in } \Omega_{R(\phi)}, \\ \rho_P s_k \hat{\mathbf{u}}_{Pk} - (\nabla \cdot \mathbf{S}(\hat{\mathbf{u}}_{Pk}))^T &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{in } \Omega_P(\phi), \\ \mathbf{S}(\hat{\mathbf{u}}_{Rk}) \boldsymbol{\nu}_R &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{on } (\partial\Omega_{R(\phi)} \setminus \bar{\Gamma}_{R(\phi)}), \\ \mathbf{S}(\hat{\mathbf{u}}_{Pk}) \boldsymbol{\nu}_P &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{on } (\partial\Omega_P(\phi) \setminus \bar{\Gamma}_{P(\phi)}), \\ \mathbf{S}(\hat{\mathbf{u}}_{Rk}) \boldsymbol{\nu}_R &= \alpha \{ (\hat{\mathbf{u}}_{Rk} - \hat{\mathbf{u}}_{Pk}) \cdot \boldsymbol{\nu}_R \} \boldsymbol{\nu}_R \quad \text{on } \Gamma_{R(\phi)}, \\ \mathbf{S}(\hat{\mathbf{u}}_{Rk}) \boldsymbol{\tau}_R &= \mu \alpha \{ (\hat{\mathbf{u}}_{Rk} - \hat{\mathbf{u}}_{Pk}) \cdot \boldsymbol{\nu}_R \} \boldsymbol{\tau}_R \quad \text{on } \Gamma_{R(\phi)}, \\ \mathbf{S}(\hat{\mathbf{u}}_{Pk}) \boldsymbol{\nu}_P &= \alpha \{ (\hat{\mathbf{u}}_{Pk} - \hat{\mathbf{u}}_{Rk}) \cdot \boldsymbol{\nu}_P \} \boldsymbol{\nu}_P \quad \text{on } \Gamma_{P(\phi)}, \\ \mathbf{S}(\hat{\mathbf{u}}_{Pk}) \boldsymbol{\tau}_P &= -\mu \alpha \{ (\hat{\mathbf{u}}_{Pk} - \hat{\mathbf{u}}_{Rk}) \cdot \boldsymbol{\nu}_P \} \boldsymbol{\tau}_P \quad \text{on } \Gamma_{P(\phi)}, \\ \hat{\mathbf{u}}_{Rk} &= \hat{\mathbf{u}}_{Pk} \quad \text{on } (\Gamma_{R(\phi)} \cup \Gamma_{P(\phi)}), \\ \hat{\mathbf{u}} &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{on } \Gamma_{D0}. \end{aligned}$$

を満たす固有振動対  $(s_k, \hat{\mathbf{u}}_k)$  を求めよ。 □

次に、第 2 章で示した手順に従い、弱形式を導く。 $\Gamma_D(\phi)$  上で  $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$  となる任意の  $\hat{\mathbf{v}}^c \in U$  を問題 3.3.2 にかけて、 $\Omega(\phi)$  で積分し、発散定理を用いれば

$$h(s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}^c) + h(s_k^c, \hat{\mathbf{u}}_k^c, \hat{\mathbf{v}}) = 0 \quad (3.3.5)$$

となる。ここで、 $h(s, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}^c)$  は次のようになる。

$$\begin{aligned} h(s, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}^c) &= a_R(\hat{\mathbf{u}}_R, \hat{\mathbf{v}}_R^c) + s^2 b_R(\hat{\mathbf{u}}_R, \hat{\mathbf{v}}_R^c) \\ &\quad - c_R(\hat{\mathbf{u}}_R - \hat{\mathbf{u}}_P, \hat{\mathbf{v}}_R^c) - d_R(\hat{\mathbf{u}}_R - \hat{\mathbf{u}}_P, \hat{\mathbf{v}}_R^c) \\ &\quad + a_P(\hat{\mathbf{u}}_P, \hat{\mathbf{v}}_P^c) + s^2 b_P(\hat{\mathbf{u}}_P, \hat{\mathbf{v}}_P^c) \\ &\quad - c_P(\hat{\mathbf{u}}_P - \hat{\mathbf{u}}_R, \hat{\mathbf{v}}_P^c) + d_P(\hat{\mathbf{u}}_P - \hat{\mathbf{u}}_R, \hat{\mathbf{v}}_P^c), \end{aligned} \quad (3.3.6)$$



ここで、以下の定義を用いた。ただし、 $(\cdot) \in \{P, R\}$  とする。

$$\begin{aligned} a_{(\cdot)}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) &= \int_{\Omega_{(\cdot)}(\phi)} \mathbf{S}(\hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{E}(\hat{\mathbf{v}}) \, dx, \\ b_{(\cdot)}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) &= \int_{\Omega_{(\cdot)}(\phi)} \rho_{(\cdot)} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, dx, \\ c_{(\cdot)}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) &= \int_{\Gamma_{(\cdot)0}} \alpha(\hat{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{(\cdot)}) (\hat{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{(\cdot)}) \, d\gamma, \\ d_{(\cdot)}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) &= \int_{\Gamma_{(\cdot)0}} \mu \alpha(\hat{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{(\cdot)}) (\hat{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\tau}_{(\cdot)}) \, d\gamma. \end{aligned}$$

また、次節の形状最適化問題で主問題を等式制約として利用することになる。その為、ブレーキ鳴きの複素固有値問題の弱形式に対する Lagrange 関数を次のように定義しておく。

$$\mathcal{L}_M(\phi, s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}) = h(s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}^c) + h(s_k^c, \hat{\mathbf{u}}_k^c, \hat{\mathbf{v}}) \quad (3.3.7)$$

### 3.4 形状最適化問題

本節では、主問題の解  $s_k$  を用いて、ブレーキ鳴き現象に対する形状最適化問題を定義する。本研究では Millner の考えより、ブレーキ鳴き現象が複素固有値の実部で評価することができる考える。そこで、本研究では実部が正となるある次数を  $k$  として目的関数を

$$f_0(\phi, s_k) = 2\text{Re}[s_k] = s_k + s_k^c \quad (3.4.1)$$

のように定義する。さらに、制約関数として、パッドの体積を選び、

$$f_1(\phi) = - \int_{\Omega_P(\phi)} dx + c_1 \quad (3.4.2)$$

のように定義する。ここで、 $c_1$  は  $\Omega_P(\phi)$  上で定義され  $f_1(\phi) \leq 0$  となるように定めた正の定数である。これらの評価関数を用いれば、形状最適化問題は以下のように定義することができる。

**問題 3.4.1 (形状最適化問題)**  $\mathcal{D}$  と  $\mathcal{S}$  はそれぞれ式 (2.2.2) と式 (3.3.4) で定義し、 $(s_k, \hat{\mathbf{u}}_k) \in \mathbb{C} \times \mathcal{S}$  は  $\phi \in \mathcal{D}$  が与えられたときの問題 3.3.2 の  $k$  次の解であるとする。また、 $f_0$  と  $f_1$  はそれぞれ式 (3.4.1) と式 (3.4.2) で定義されているとする。このとき、

$$\min_{\phi \in \mathcal{D}} \{f_0(\phi, s_k) \mid f_1(\phi) \leq 0, (s_k, \hat{\mathbf{u}}_k) \in \mathbb{C} \times \mathcal{S}, \text{ Problem 3.3.2}\}$$

を満たす  $\Omega_P(\phi)$  を求めよ。

□

### 3.5 評価関数の形状微分

前節で定義した形状最適化問題を勾配法を用いて解くために、本節では目的関数  $f_0$  と制約関数  $f_1$  の形状変動に対する Fréchet 微分を導出する。

目的関数  $f_0$  は主問題の解である  $s_k$  を含むので、主問題を等式制約として考慮し、 $f_0$  に対する Lagrange 関数を

$$\mathcal{L}_0(\phi, s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_0) = f_0(\phi, s_k) - \mathcal{L}_M(\phi, s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_0) \quad (3.5.1)$$

のように定義する。ここで、 $\hat{\mathbf{v}}_0$  は主問題に対する Lagrange 乗数である。 $\mathcal{L}_0$  の任意の形状変動  $\varphi \in X$  に対する形状微分は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_0(\phi, s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_0)[\varphi] &= \mathcal{L}'_{0\phi}(\phi, s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_0)[\varphi] + \mathcal{L}'_{0s_k}(\phi, s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_0)[s'_k] \\ &\quad + \mathcal{L}'_{0\hat{\mathbf{u}}_k}(\phi, s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_0)[\hat{\mathbf{u}}'_k] + \mathcal{L}'_{0\hat{\mathbf{v}}_0}(\phi, s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_0)[\hat{\mathbf{v}}'_0], \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

のようになる。ここで、 $(s'_k, \hat{\mathbf{u}}'_k, \hat{\mathbf{v}}'_0) \in \mathbb{C} \times U \times U$  は領域変動  $\varphi \in X$  に対する  $(s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_0)$  の形状偏微分を表す。式 (3.5.2) の右辺第 4 項は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{0\hat{\mathbf{v}}_0}(\phi, s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_0)[\hat{\mathbf{v}}'_0] &= -h_{\hat{\mathbf{v}}_0}(s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_0^c)[\hat{\mathbf{v}}'_0] - h_{\hat{\mathbf{v}}_0}(s_k^c, \hat{\mathbf{u}}_k^c, \hat{\mathbf{v}}_0)[\hat{\mathbf{v}}'_0] \\ &= -h(s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_0^c) - h(s_k^c, \hat{\mathbf{u}}_k^c, \hat{\mathbf{v}}_0), \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

のようにかくことができ、 $(s_k, \hat{\mathbf{u}}_k)$  が主問題 3.3.2 の解であるとき 0 となる。また、式 (3.5.2) の右辺第 2 項は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{0s_k}(\phi, s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_0)[s'_k] &= f_{0s_k}(\phi, s_k)[s'_k] \\ &\quad - h_{s_k}(s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_0^c)[s'_k] - h_{s_k}(s_k^c, \hat{\mathbf{u}}_k^c, \hat{\mathbf{v}}_0)[s'_k] \\ &= s'_k + s_k^c - 2s_k s_k^c b_R(\hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_0^c) - 2s_k^c s_k^c b_P(\hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_0^c) \\ &= s'_k(1 - 2s_k b_R(\hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_0^c)) + s_k^c(1 - 2s_k^c b_P(\hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_0^c)). \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

のようにかくことができる。さらに、式 (3.5.2) の右辺第 3 項は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{0\hat{\mathbf{u}}_k}(\phi, s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_0)[\hat{\mathbf{u}}'_k] &= -h_{\hat{\mathbf{u}}_k}(s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_0^c)[\hat{\mathbf{u}}'_k] - h_{\hat{\mathbf{u}}_k}(s_k^c, \hat{\mathbf{u}}_k^c, \hat{\mathbf{v}}_0)[\hat{\mathbf{u}}'_k] \\ &= -h(s_k, \hat{\mathbf{u}}'_k, \hat{\mathbf{v}}_0^c) - h(s_k^c, \hat{\mathbf{u}}_k^c, \hat{\mathbf{v}}_0). \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

のようにかくことができる。ここで、 $\hat{\mathbf{v}}_0$  が以下に示す随伴問題の解であるとき、式 (3.5.4) と式 (3.5.5) は 0 となる。

問題 3.5.1 ( $f_0$  の随伴問題)  $\phi \in \mathcal{D}$  が与えられたとき,  $(s_k, \hat{\mathbf{u}}_k)$  が問題 3.3.2 の  $k$  次の解であるとする, 任意の  $\hat{\mathbf{u}}'_k \in U$  に対して

$$h(s_k, \hat{\mathbf{u}}'_k, \hat{\mathbf{v}}_0^c) + h(s_k^c, \hat{\mathbf{u}}_k^c, \hat{\mathbf{v}}_0) = 0, \quad (3.5.6)$$

$$2s_k b(\hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_0^c) = 2s_k^c b(\hat{\mathbf{u}}_k^c, \hat{\mathbf{v}}_0) = 1 \quad (3.5.7)$$

を満たす固有振動対  $(s_k^c, \hat{\mathbf{v}}_0) \in \mathbb{C} \times \mathcal{S}$  を求めよ.  $\square$

問題 3.5.1 は左固有値問題となっている. また, その解  $\hat{\mathbf{v}}_0$  は左固有振動モードを表す. 左固有振動モードは主問題で用いた剛性行列を転地した行列を用いた複素固有値解析によって求めることができる. また, 式 (3.5.7) は左固有振動モードの正規化条件を表す.

以上の結果を用いて,  $(s_k, \hat{\mathbf{u}}_k)$  と  $(s_k^c, \hat{\mathbf{v}}_0)$  がそれぞれ問題 3.3.2 と問題 3.5.1 の解であるとする, 式 (3.5.2) の右辺第 1 項は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{0\phi}(\phi, s_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_0)[\varphi] &= \int_{\partial\Omega_P(\phi) \setminus (\bar{\Gamma}_{P0} \cup \bar{\Gamma}_{D0})} \bar{\mathbf{g}}_{\partial\Omega0} \cdot \varphi \, d\gamma \\ &= \langle \bar{\mathbf{g}}_0, \varphi \rangle, \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

となる. ここで,  $\bar{\mathbf{g}}_{\partial\Omega0}$  は

$$\bar{\mathbf{g}}_{\partial\Omega0} = 2\text{Re} [\mathbf{S}(\hat{\mathbf{u}}_k) \cdot \mathbf{E}(\hat{\mathbf{v}}_0^c) + s_k^2 \rho_P \hat{\mathbf{u}}_k \cdot \hat{\mathbf{v}}_0^c] \boldsymbol{\nu}_P. \quad (3.5.9)$$

である. また,  $\Gamma_{P0} \cup \Gamma_{D0}$  で  $\varphi = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$  であるとする.

一方,  $f_1(\phi)$  に対する形状微分は

$$\begin{aligned} f'_1(\phi)[\varphi] &= \int_{\partial\Omega_P(\phi) \setminus (\bar{\Gamma}_{P1} \cup \bar{\Gamma}_{D0})} \bar{\mathbf{g}}_{\partial\Omega0} \cdot \varphi \, d\gamma \\ &= \langle \bar{\mathbf{g}}_1, \varphi \rangle, \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

となる. ここで  $\bar{\mathbf{g}}_{\partial\Omega1}$  は

$$\bar{\mathbf{g}}_{\partial\Omega1} = \boldsymbol{\nu}_P. \quad (3.5.11)$$

となる.  $\bar{\mathbf{g}}_0$  と  $\bar{\mathbf{g}}_1$  はそれぞれ  $f_0$  と  $f_1$  に対する形状微分である.

## 3.6 形状最適化問題の解法

形状微分を用いれば, 形状変動は第 2 章で述べた  $H^1$  勾配法を用いることで求めることができる. 問題 3.4.1 に対する  $H^1$  勾配法は以下のようなになる.

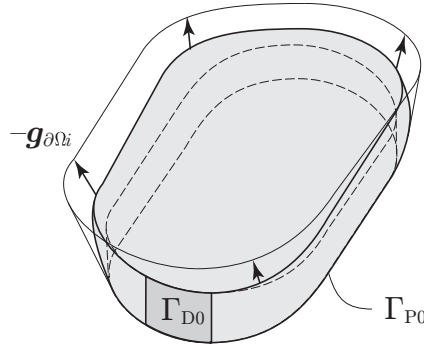


図 3.5.1: 問題 3.6.1 の境界条件 ( $H^1$  勾配法)

問題 3.6.1 (問題 3.4.1 に対する  $H^1$  勾配法) 形状微分  $\bar{g}_i$  が与えられたとき,

$$\begin{aligned} -c_a \nabla^T \mathbf{S}(\varphi_{g_i}) &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}^T \quad \text{in } \Omega_P(\phi), \\ c_a \mathbf{S}(\varphi_{g_i}) \boldsymbol{\nu} &= -\bar{\mathbf{g}}_{\partial\Omega_i} \quad \text{on } \partial\Omega_P(\phi) \setminus (\bar{\Gamma}_{P0} \cup \bar{\Gamma}_{D0}), \\ \varphi_{g_i} &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{on } \Gamma_{P0} \cup \Gamma_{D0}. \end{aligned}$$

を満たす  $\varphi_{g_i}$  を求めよ. □

問題 3.6.1 の境界条件を図 3.5.1 に示す. 問題 3.6.1 の解  $\varphi_{g_i}$  が得られれば, 第 2 章で示した逐次 2 次計画法を用いて形状最適化問題 3.4.1 を解くことができる.

## 3.7 数値計算例

提案手法の妥当性を検証する為に図 3.7.1 に示す簡易ブレーキモデルを用いた数値計算例を示す. 図中の拘束は問題 3.3.2 と問題 3.5.1 における Dirichlet 条件を示し, ピン拘束条件を与える.

問題 3.3.2 の計算では, 汎用有限要素法ソルバー RADIOSS(Altair engineering) を, 問題 3.4.1 の計算は OPTISAHPE-TS(Quint) を用いた. ローターの領域  $\Omega_{R0}$  の長辺の長さは 0.15 [m] とし, 領域  $\Omega_{R0}$  の Young 率, Poisson 比, 密度はそれぞれ 210 [GPa], 0.3, および  $7.8 \times 10^3$  [kg/m<sup>3</sup>] とした. またパッド領域  $\Omega_{P0}$  の Young 率, Poisson 比, 密度はそれぞれ 16 [GPa], 0.3, および  $2.1 \times 10^3$  [kg/m<sup>3</sup>] とした. 接触面の接触剛性と摩擦係数はそれぞれ  $5.0 \times 10^6$  [N/m], 0.1 と 0.005 とした.

初期形状における複素固有値問題の数値解 (問題 3.3.2 の解) を表 3.7.1 に示す. この結果をみると, 3 次の固有値の実部が正であることが確認できる. そこで, 問題 3.4.1 における次数を  $k=3$  と選ぶ. 3 次の固有振動モードを図 3.7.2 に示す. 3 次の固有モードはパッドとローターが同位相で 1 次曲げをするモードであることが確認できる.

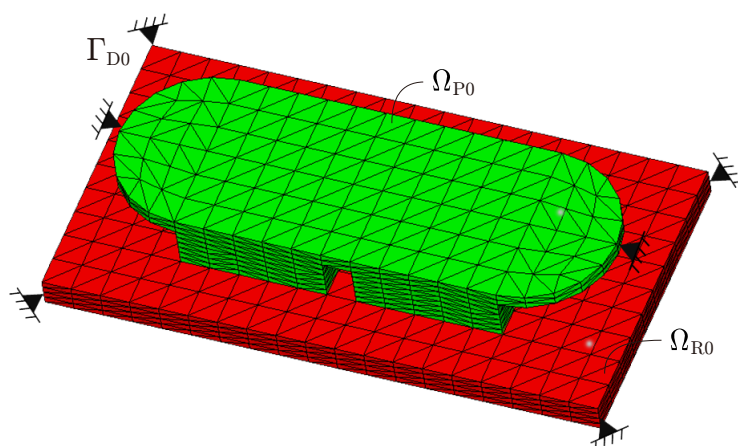


図 3.7.1: 簡易ブレーキモデル

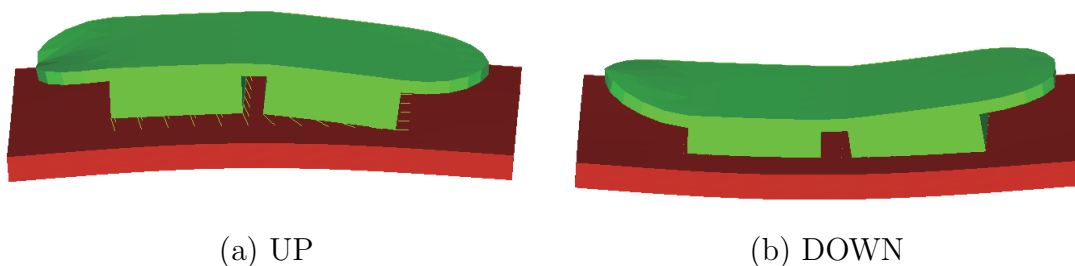


図 3.7.2: 初期形状における 3 次の固有振動モード

次に形状最適化による  $f_0$  と  $f_1$  の形状更新に対する収束履歴を図 3.7.3 に示す。この図において、 $f_{0\text{init}}$  と  $c_1$  はそれぞれ初期形状における  $f_0$  と  $\Omega_{P0}$  の値である。この図から、目的関数  $f_0$  が制約関数  $f_1$  を満たしながら単調に減少していることがわかる。表 3.7.2 は形状更新を 60 回 実施した後の形状における複素固有値問題の解 (問題 3.3.2 の解) である。3 次の複素固有値の実部が 負に転じたことが確認できる。図 3.7.4 は初期形状と最適化後の形状の比較である。また、図 3.7.5 は最適化後形状における 3 次の固有モードを表す。これらの結果をみると、パッド中央部と両端部において形状が大きく変化していることが確認できる。これらの部位は振動の腹位部と拘束部にあたる。これらの形状変化により 3 次の固有モードの変形に対する剛性が向上したことにより複素固有値の実部が低減したと考察することができる。

表 3.7.1: 初期形状における複素固有値

$k$	Re	Im
1	-1.692E+01	8.022947E+03
2	-1.444E+01	9.438261E+03
3	8.613E+00	1.249724E+04
4	-2.944E+01	1.437360E+04
5	-5.783E+01	1.629984E+04
6	-5.356E+01	2.168113E+04
7	-5.195E+01	2.394771E+04
8	-6.593E+01	2.573753E+04
9	-6.325E+01	2.711726E+04
10	-6.896E+01	2.893466E+04

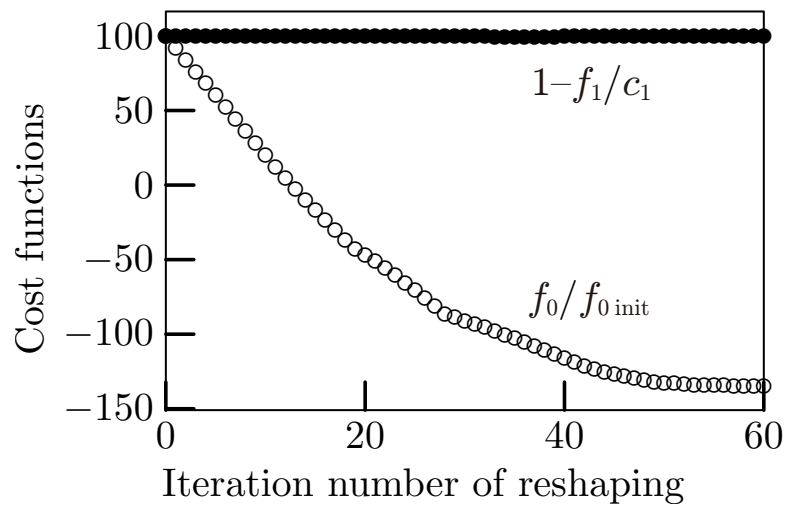
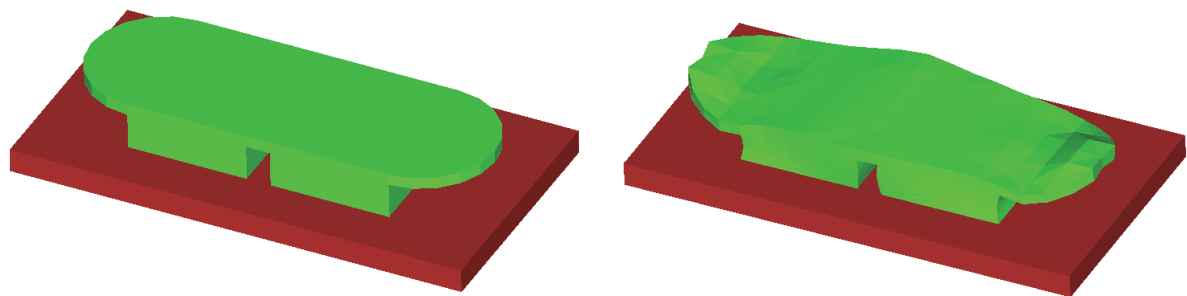


図 3.7.3: 形状更新に対する評価関数の更新履歴



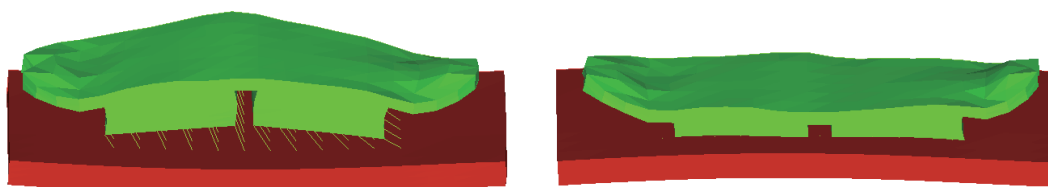
(a) 初期形状

(b) 最適化後形状

図 3.7.4: 最適化前後の形状の比較

表 3.7.2: 最適化後形状における複素固有値

$k$	Re	Im
1	-1.647E+01	7.745197E+03
2	-1.765E+01	1.027973E+04
3	-1.163E+01	1.110440E+04
4	-3.048E+01	1.503565E+04
5	-4.185E+01	2.092213E+04
6	-5.070E+01	2.186379E+04
7	-6.588E+01	2.671747E+04
8	-7.522E+01	2.756015E+04
9	-7.540E+01	3.137934E+04
10	-7.658E+01	3.320161E+04



(a) UP

(b) DOWN

図 3.7.5: 最適化後における 3 次の固有振動モード



## 3.8 まとめ

この章ではブレーキ鳴き現象における形状最適化問題の解法を示した。ブレーキ鳴き現象に対する主問題では Millner の提案した数理モデルに基づき、ローターとパッドとの間の摩擦に起因する剛性行列の非対称性を考え、複素固有値問題を導いた。さらにブレーキ鳴きの評価指標である複素固有値の実部を目的関数とし、パッドの体積を制約関数とする形状最適化問題を構成した。これら目的関数に対する形状微分は主問題を等式制約とする Lagrange 関数を定義し、その Fréchet 微分を計算することで理論的に導出した。形状写像の計算には  $H^1$  勾配法を用い、形状最適化問題の解法には逐次 2 次計画法を用いた。最後に提案手法の妥当性を示す為に、ローターとパッドで構成される簡易モデルを用いた数値例を示した。数値例では制約関数をみたしつつ、目的関数とした次数の複素固有値の実部が正から負となる形状が得られることを確認することができた。

本研究で提案した形状最適化手法の実用上の留意点を以下に示す。

- (1) 本研究ではブレーキ鳴き現象を数理モデル化するための最小構成単位としてパッドとローターに着目し、パッドの形状写像を設計変数とした形状最適化問題を構成した。しかしながら、実際のブレーキ部品はキャリパーシリンダー、マウント、ナックル等複数の部品で構成されており、必ずしもパッドの形状写像を設計変数に選ぶことが適切であるとは限らない。実用にあたっては、対象とするブレーキ鳴き現象に応じて設計変数を適切に設定することが必要である。
- (2) 本研究ではローターとパッド間の接触剛性と Coulomb 摩擦係数は定数であることを仮定した。しかしながら、これらの値は車両の使用環境によって変化することが考えられる。実用にあたっては、接触剛性や Coulomb 摩擦係数の変化を考慮する必要がある。
- (3) 本研究は Millner が提案するブレーキ鳴き現象の数理モデルに基づき、複素固有値問題として主問題を記述した。しかしながら、近年では Millner が提案する数理モデル以外にも、多くのブレーキ鳴き現象に対する数理モデルが提案されている (例えば [73])。これらの数理モデルを考える場合には本研究で述べた形状最適化理論の拡張が必要となる。



## 第 4 章

# ビード形状設計問題への形状最適化の 応用

### 4.1 はじめに

鋼板などシェル構造体は広く構造材料として用いられる。シェル構造の特徴としてはビード形状によって、板厚を増加させることなく面外方向の曲げに対する剛性を大きく向上させることができる点が挙げられる。ここで、ビードとは板面外方向への微小な凹凸形状のことである。本章ではこのようなビード形状を創生するための数値解法について述べる。

はじめに、過去の研究について以下で述べる。Soto と Diaz [74] はビードの代わりに剛性材料の板厚を設計変数としたビード配置の探索方法を提案している。この研究では均質化法によるトポロジー最適化によって得られる材料の分布を用いて、最適なビード配置を探索する方法が提案されている。また、Yang ら [75] はビードの代わりにビーム要素を用いたビード配置の探索方法を提案している。この研究ではビーム要素をシェル構造の表面に均一に配置し、グランドストラクチャー法を用いて最適化なビームの配置を計算することで、効果的なビードの創生部位を求めている。これらのトポロジー最適化を用いた方法はそれぞれ効果的であると考えられる。しかしながら、これらの方法は最後までビード形状を板厚やビーム要素などの代替のもので近似する方法であった。そのため、得られた結果をビード形状へと反映させるための後処理が必要になる。

一方で、形状最適化を用いたビード形状の創生法はトポグラフィ最適化と呼ばれており、Genesis, Nastran, Optistruct など多くの商用ソフトウェアに実装されている。また、これらのソフトウェアを用いた多くの実用例が報告されている (例えば, [76–78])。これらのソフトウェアではベシスベクトル法が採用されている。ベシスベクトル法は第 2 章で述べたように、形状変動を複数のベシスベクトルの重み付き線形和で表

現する方法であり、ベシスベクトルの重みを設計変数とするパラメータ最適化のひとつである。この方法の欠点としては、以下の2点が挙げられる。

- (1) ベシスベクトルの設定をするための前処理が必要である。
- (2) 形状を表現する自由度が低い場合には最適解の探索範囲が限定される。

これらの欠点に対して、上記商用ソフトウェアにおける対策の例を以下で述べる。欠点(1)に対しては、ビードパターンを決定するためのベシスベクトルを自動生成する機能が提供されている。この機能を利用することで、ユーザーはベシスベクトルの定義をする為に必要な工程が削減できる。次に欠点(2)に対する対策では、十分多くのベシスベクトルを採用することで最適解の探索範囲が限定されないように考慮されている。例として、Optistruct に実装されているビード最適化機能における具体例を示す。ユーザーはビード緒元(ビード高さ、ビード幅、ビード角度)を設定すると、図 4.1.1 (a) に示すベシスベクトルが自動で生成される。個々の凹凸ひとつひとつがベシスベクトルである。このように局所的に定義された独立なベシスベクトルが領域にわたって多数用いられていることがわかる。次に作成されたベシスベクトルを用いて最適化を実行すると、図 4.1.1 (b) にしめす最適形状が得られる。しかしながら、局所的に定義されたベシスベクトルが用いられていることから、得られる最適形状はジグザグな形状となっている。そこで、さらに得られた形状をスムージングするための機能が提供されている。図 4.1.1 (c) は図 4.1.1 (b) の形状に対してこのスムージング機能を適用した結果形状である。この機能によって滑らかな形状を得ることができる。しかしながら、得られる形状は最適化によって得られた形状とは異なるため、評価関数の値はスムージング処理によって変化してしまうことになる。

一方で、ジグザグ現象を回避するビード形状最適化手法として、ノンパラメトリック形状最適化を用いた研究が報告されている。ノンパラメトリック形状最適化手法を用いた方法はベシスベクトル法に比べて、得られる形状の滑らかさや、解の探索範囲の広さの点で有利であると考えられる。Daoud ら [80] は Sigmund ら [81] が提案するフィルタリング法を用いた形状感度を用いることでジグザグ現象が生じない滑らかなビード形状を得る方法を提案している。この方法は滑らかなビード形状を最適化計算で直接得ることができる。しかしながら、フィルター処理によって形状感度分布が変化してしまうので、最適化結果に影響を与えてしまう可能性が懸念される。また、下田ら [82, 83] は  $H^1$  勾配法を用いたシェル構造体の形状最適化法を提案している。この方法では、 $H^1$  勾配法を用いることで形状感度に対するフィルター処理を行わずにジグザグ現象を回避することができる。しかしながら、これらの方法をビード形状最適化問題に適用する場合には、別途法線方向の形状変動量に対する制約条件の設定が必要にな

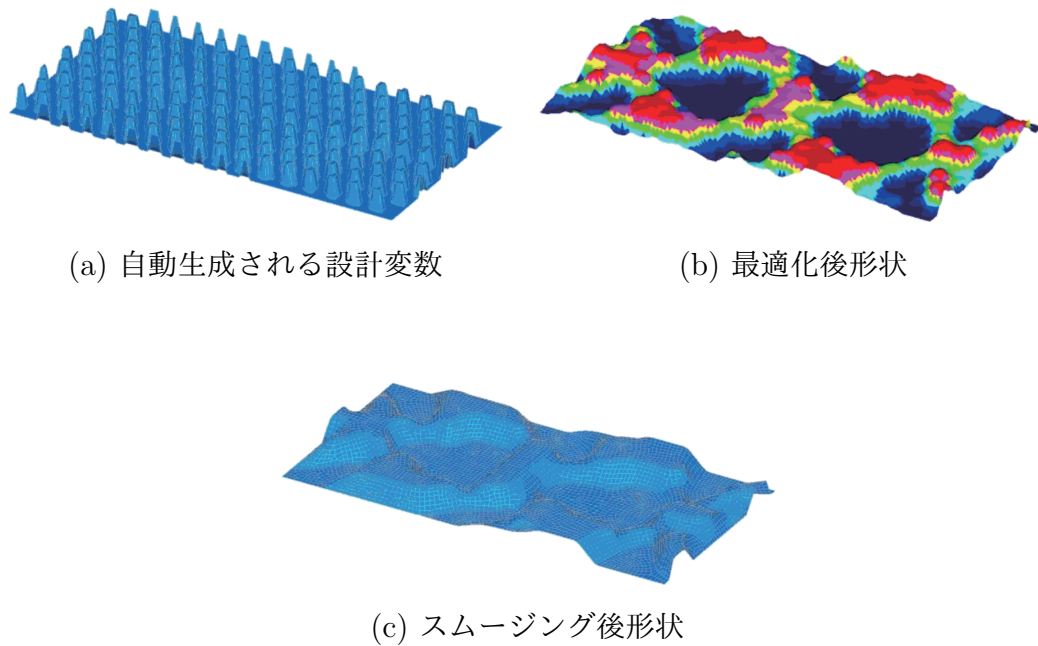


図 4.1.1: 汎用ソフトウェアにおけるビード形状最適化機能 (Optistruct [79])

る．具体的には，所望のビード高さを得る為の領域変動に対する制約条件，プレス成型性を確保する為の型抜き制約条件等が挙げられる．これらの制約条件の設定は容易でない上に，これらの条件を追加することによって最適化結果に影響を与えてしまう可能性がある．

以上の研究を踏まえて，本研究ではノンパラメトリック形状最適化手法に基づく新しいビード最適化手法を提案する．提案手法では，トポロジー最適化 [84] で用いられているシグモイド関数を利用して設計変数を定義する．このような設計変数の選び方によるノンパラメトリック形状最適化手法により，下田らの方法で課題であったビード高さに対する領域変動制約を考慮することができる．

本章の構成は以下の通りである．第 4.2 節 ではビード形状最適化問題の設計変数とその許容集合について述べる．定義した初期領域と設計変数を用いて，第 4.3 節 ではビード形状による平均コンプライアンス最小化問題を定義し，その解法を述べる．次に，第 4.4 では周波数応答変位最小化問題を定義し，その解法を述べる．また，簡易板モデルを用いた数値例を示すことによって提案手法の妥当性を示す．最後に第 4.5 節 では固有振動数最大化問題の解法を述べ，車両のダストカバー設計における応用例を示す．

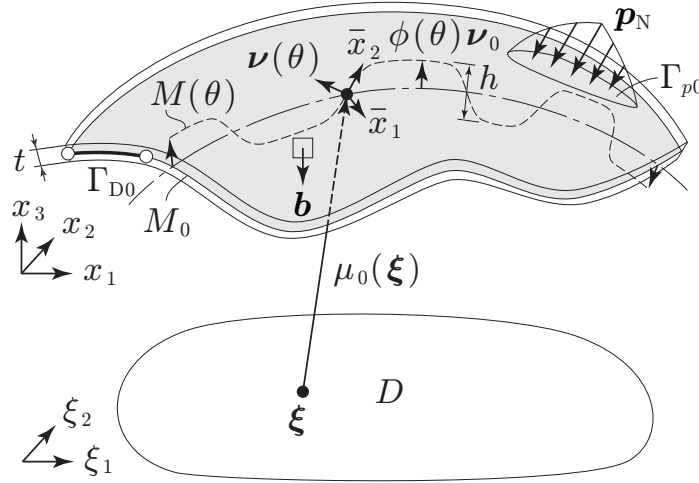


図 4.2.1: シェル構造体の領域

## 4.2 設計変数と許容集合

この節では、シェル構造体のビード形状最適化問題における設計変数と許容集合について述べる．シェル構造体の領域の定義を図 4.2.1 に示す． $\mathbf{b} \in L^{2q}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ ， $\mathbf{p}_N \in W^{2,2q}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$  はそれぞれ物体力と外力とする．また， $q > 3$  とする． $\Gamma_{D0}$  は非斉次 Dirichlet 境界を表す．また， $M_0$  と  $\boldsymbol{\nu}_0 : M_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$  は初期形状の中立面と，中立面上で定義した法線を表す．本論文ではシェル構造の板厚  $t$  およびビード高さ  $h$  はあらかじめ与えられているとする．

はじめに，図 4.2.1 に示す参照領域  $D \in \mathbb{R}^2$  を定義する． $D \in \mathbb{R}^2$  は区分的に  $C^2$  級境界を有する 2次元領域を表す．次に，写像  $\boldsymbol{\mu}_0 \in C^2(D; \mathbb{R}^3)$  を用いて，初期形状における中立面を

$$M_0 = \{ \boldsymbol{\mu}_0(\boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{\xi} \in D \} \quad (4.2.1)$$

のように定義する．ここで，写像  $\boldsymbol{\mu}_0$  は，

$$\mathcal{M} = \left\{ \boldsymbol{\mu}_0 \in C^2(D; \mathbb{R}^3) \mid 1/|\boldsymbol{\mu}_0|_{C^2(D; \mathbb{R}^3)} \geq r_0 \right\} \quad (4.2.2)$$

に属するとする．ここで， $r_0$  は  $r_0 > (t+h)/2$  を満たす正の定数である．この条件は最適化により創造されるビード同士が干渉しない為に必要となる．また， $\boldsymbol{\mu}_0$  が  $C^2(D; \mathbb{R}^3)$  に属する理由は後に曲率を定義するためである．セミノルム  $|\boldsymbol{\mu}_0|_{C^2(D; \mathbb{R}^3)}$  は中立面上で定義され，曲率の最大値を意味する．

次に，法線  $\boldsymbol{\nu}_0$  と板厚  $t$  を用いて，初期形状におけるシェルの領域を

$$\Omega_0 = \{ \xi_3 \boldsymbol{\nu}_0(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} \in M_0, \xi_3 \in (-t/2, t/2) \} \quad (4.2.3)$$

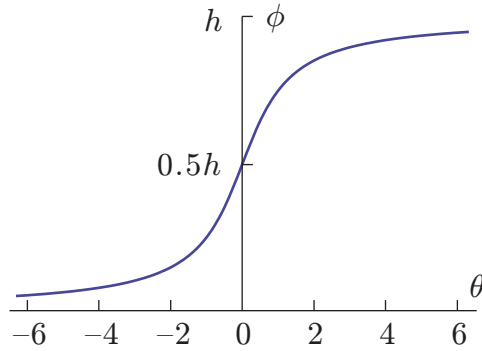


図 4.2.2: シグモイド関数

のように表現する．次にビード形状最適化問題における設計変数と許容集合について述べる．設計変数として次の関数空間に属する関数  $\theta : D \rightarrow \mathbb{R}$  を導入する．

$$X = \{\theta \in H^1(D; \mathbb{R}) \mid \theta = 0 \text{ on } \bar{D}_{C_0}\} \quad (4.2.4)$$

ここで， $\bar{D}_{C_0}$  は設計要件より規定される形状拘束部位を表す．

本研究では，この設計変数  $\theta$  を設計変数に選ぶ．ビード形状を作成するための形状変動については，中立面に定義された法線方向の変位として表現し，設計変数  $\theta$  を用いてシグモイド関数

$$\phi(\theta) = \frac{h}{\pi} \tan^{-1} \theta \quad (4.2.5)$$

によって形状変動量  $\phi(\theta)$  が与えられるとする．式 (4.2.5) で定義するシグモイド関数を図 4.2.2 に示す．

変動  $\phi(\theta)$  が得られれば，領域変動後の中立面および，変動後の領域はそれぞれ，

$$M(\theta) = \{(\boldsymbol{\mu}_0 + \phi(\theta) \boldsymbol{\nu}_0 \circ \boldsymbol{\mu}_0)(\boldsymbol{\xi}) \mid \boldsymbol{\xi} \in D\}, \quad (4.2.6)$$

$$\Omega(\theta) = \{\xi_3 \boldsymbol{\nu}(\theta)(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} \in M(\theta), \xi_3 \in (-t/2, t/2)\} \quad (4.2.7)$$

のように表現することができる．ここで， $\circ$  は合成写像を表し， $\boldsymbol{\nu}$  は  $M(\theta)$  上で定義した法線を表す．さらに， $\phi(\theta)$  の  $D$  における連続性を維持する為に， $\theta$  の許容集合を

$$\mathcal{D} = \{W^{1,\infty}(D; \mathbb{R}) \cap X\} \quad (4.2.8)$$

のように定義する．

### 4.3 平均コンプライアンス最小化問題

本節では，前節で定義したビード設計のための設計変数とその許容集合に基づいて，平均コンプライアンス最小化問題を定義し，その解法を示す．



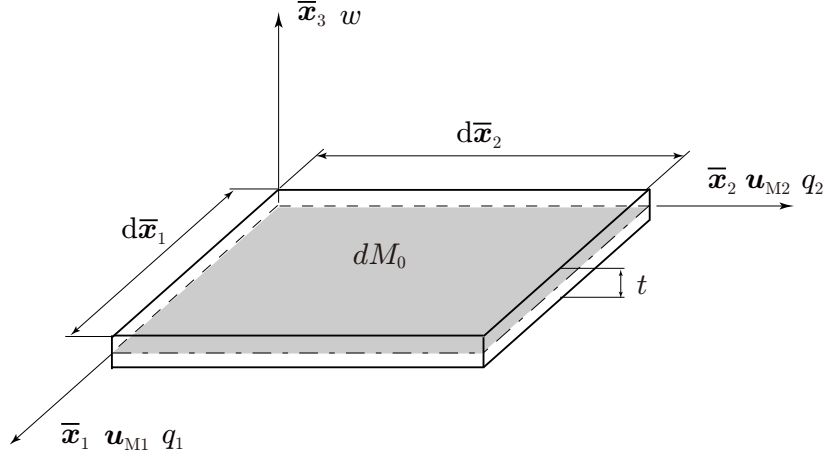


図 4.3.1: 局所座標系

### 4.3.1 主問題

本節ではシェル構造体における線形弾性問題を主問題として定義する．中立面  $M(\theta)$  は図 4.3.1 に示す局所座標  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  を用いて，面内方向を  $\mathbf{x}_M = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)^T$ ，面外方向を  $\bar{x}_3 \boldsymbol{\nu} = (0, 0, \bar{x}_3)^T$  と表すことができるとする．

この局所座標系において， $\mathbf{u}_M : M(\theta) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ， $w : M(\theta) \rightarrow \mathbb{R}$  および  $\mathbf{q} : M(\theta) \rightarrow \mathbb{R}^2$  はそれぞれ中立面内の変位，面外方向の変位，中立面の  $\bar{x}_1$  軸  $\bar{x}_2$  軸における回転角とする．Mindlin-Reissner 理論を仮定すると，変位  $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)^T$  は次のように表現することができる．

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1(\mathbf{x}) \\ u_2(\mathbf{x}) \\ u_3(\mathbf{x}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\bar{x}_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\bar{x}_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{M1}(\mathbf{x}_M) \\ u_{M2}(\mathbf{x}_M) \\ w(\mathbf{x}_M) \\ q_1(\mathbf{x}_M) \\ q_2(\mathbf{x}_M) \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{R}(\bar{x}_3) \begin{pmatrix} \mathbf{u}_M(\mathbf{x}_M) \\ w(\mathbf{x}_M) \\ \mathbf{q}(\mathbf{x}_M) \end{pmatrix} = \mathbf{R}(\bar{x}_3) \mathbf{u}_L(\mathbf{x}_M), \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

これ以降では  $\mathbf{u}_L$  を  $\mathbf{u}$  とかく．本論文では， $\mathbf{u}(\mathbf{x}_M) : M(\theta) \rightarrow \mathbb{R}^5$  を状態変数として扱う．上記の定義に基づくと，線形ひずみテンソル  $\mathbf{E}(\mathbf{u}) = (\epsilon_{ij}(\mathbf{u}))_{ij} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  は

$$\begin{aligned} &(\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{u}))_{(\alpha,\beta) \in \{1,2\}^2} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \nabla_M \mathbf{u}_M^T + (\nabla_M \mathbf{u}_M^T)^T \right\} - \frac{\bar{x}_3}{2} \left\{ \nabla_M \mathbf{q}^T + (\nabla_M \mathbf{q}^T)^T \right\} \\ &= \mathbf{E}_M(\mathbf{u}) - \bar{x}_3 \mathbf{K}(\mathbf{u}), \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

$$(\epsilon_{\alpha 3}(\mathbf{u}))_{\alpha \in \{1,2\}} = \frac{1}{2} (\nabla_M w - \mathbf{q}) = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}), \quad (4.3.3)$$

$$\epsilon_{33}(\mathbf{u}) = 0, \quad (4.3.4)$$

のように表現することができる。ここで、 $\mathbf{E}_M$ ,  $\mathbf{K}$  および  $\gamma$  はそれぞれ面内ひずみ, 曲率, せん断ひずみである。ここで、 $\nabla_M$  は  $\partial/\partial \mathbf{x}_M$  を表す。一方, 応力テンソル  $\mathbf{T}(\mathbf{u}) = (\sigma_{ij}(\mathbf{u}))_{ij} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  は

$$\begin{aligned} (\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}, \bar{x}_3))_{(\alpha,\beta) \in \{1,2\}^2} &= \mathbf{T}_M(\mathbf{u}, \bar{x}_3) \\ &= \mathbf{C}_M(\mathbf{E}_M(\mathbf{u}) - \bar{x}_3 \mathbf{K}(\mathbf{u})), \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

$$(\sigma_{\alpha 3}(\mathbf{u}))_{\alpha \in \{1,2\}} = c_S \mathbf{C}_S \gamma(\mathbf{u}), \quad (4.3.6)$$

$$\sigma_{33}(\mathbf{u}) = \mathbf{C}_N \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}), \quad (4.3.7)$$

のように表現できる。ここで、 $\mathbf{C}_M \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^{2 \times 2 \times 2 \times 2})$ ,  $\mathbf{C}_S \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^{2 \times 2})$  および  $\mathbf{C}_N \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^{3 \times 3 \times 3 \times 3})$  はそれぞれ面内剛性, せん断剛性, 面外剛性である。これらは対称性と強圧性を仮定する。また,  $c_S$  はせん断補正係数を表し, 等方性の板材料では  $5/6$  が用いられる。また面外応力  $\sigma_{33}(\mathbf{u}) = 0$  を仮定する。

$\Omega(\theta)$  の境界  $\partial\Omega(\theta)$  は次の3種 (シェル表面, シェル裏面, シェル境界面) に分割することができる。

$$\partial\Omega(\theta) = M_T(\theta) \cup M_B(\theta) \cup \partial\bar{M}(\theta), \quad (4.3.8)$$

ここで,

$$M_T(\theta) = \left\{ (\bar{x}_1, \bar{x}_2, t/2)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)^T \in M(\theta) \right\}, \quad (4.3.9)$$

$$M_B(\theta) = \left\{ (\bar{x}_1, \bar{x}_2, -t/2)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)^T \in M(\theta) \right\}, \quad (4.3.10)$$

$$\partial\bar{M}(\theta) = \partial M(\theta) \times \left( -\frac{t}{2}, \frac{t}{2} \right). \quad (4.3.11)$$

である。境界  $\partial\Omega(\theta)$  において,  $\Gamma_D(\theta) \subset \partial\Omega(\theta)$  と  $\Gamma_N(\theta) = \partial\Omega(\theta) \setminus \bar{\Gamma}_D(\theta)$  ( $\bar{\Gamma}_D(\theta) = \Gamma_D(\theta) \cup \partial\Gamma_D(\theta)$ ) はそれぞれ Dirichlet 境界と, Neumann 境界を表す。また,  $\Gamma_p(\theta) \subset \Gamma_N(\theta)$  は非斉次 Neumann 境界とする。本論文では  $\Gamma_D(\theta)$  は中立面  $\partial\bar{M}(\theta)$  で定義されているとし  $\mathbf{u} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^5}$  を仮定する。

次にこれらを, 板厚方向に積分すると中立面  $M(\theta)$  において,

$$\bar{\mathbf{b}} = \left( \int_{-t/2}^{t/2} b_\alpha \, d\bar{x}_3 + p_{N\alpha}|_{\bar{x}_3=-t/2} + p_{N\alpha}|_{\bar{x}_3=t/2} \right)_{\alpha \in \{1,2\}}, \quad (4.3.12)$$

$$\bar{p}_{N3} = \int_{-t/2}^{t/2} b_3 \, d\bar{x}_3 + p_{N3}|_{\bar{x}_3=t/2} + p_{N3}|_{\bar{x}_3=-t/2}, \quad (4.3.13)$$

$$\bar{\mathbf{m}} = \left( \int_{-t/2}^{t/2} \bar{x}_3 b_\alpha \, d\bar{x}_3 + \frac{t}{2} p_{N3}|_{\bar{x}_3=t/2} - \frac{t}{2} p_{N3}|_{\bar{x}_3=-t/2} \right)_{\alpha \in \{1,2\}} \quad (4.3.14)$$

が成り立つ。また、境界  $\partial M(\theta)$  において、

$$\bar{\mathbf{p}}_N = \int_{-t/2}^{t/2} (p_{N\alpha})_{\alpha \in \{1,2\}} d\bar{x}_3, \quad (4.3.15)$$

$$\bar{p}_{N3} = \int_{-t/2}^{t/2} p_{N3} d\bar{x}_3, \quad (4.3.16)$$

$$\bar{\mathbf{m}} = \int_{-t/2}^{t/2} \bar{x}_3 (p_{N\alpha})_{\alpha \in \{1,2\}} d\bar{x}_3 \quad (4.3.17)$$

が成り立つ。また、応力テンソル  $\mathbf{T}(\mathbf{u}) = (\sigma_{ij}(\mathbf{u}))_{ij} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  は

$$\mathbf{T}_M(\mathbf{u}) = \left( \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}, \bar{x}_3) d\bar{x}_3 \right)_{(\alpha,\beta) \in \{1,2\}^2} \quad (4.3.18)$$

$$\mathbf{m}(\mathbf{u}) = \left( c_S \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\alpha 3}(\mathbf{u}) d\bar{x}_3 \right)_{\alpha \in \{1,2\}} \quad (4.3.19)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{u}) = \left( \int_{-t/2}^{t/2} \bar{x}_3 \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) d\bar{x}_3 \right)_{(\alpha,\beta) \in \{1,2\}^2}. \quad (4.3.20)$$

のようになる。上記の定義を用いて、シェル構造体を用いた線形弾性問題は以下のようにかくことができる。

**問題 4.3.1** (シェル構造体の線形弾性問題)  $\theta \in \mathcal{D}$  が与えられたとき、

$$\left. \begin{aligned} -\nabla_M^T \mathbf{T}_M(\mathbf{u}) &= \bar{\mathbf{b}}^T \\ -\nabla_M \cdot \mathbf{m}(\mathbf{u}) &= \bar{p}_{N3} \\ -\nabla_M^T \mathbf{M}(\mathbf{u}) + \mathbf{m}(\mathbf{u}) &= \bar{\mathbf{m}}^T \end{aligned} \right\} \text{ in } M(\theta)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T}_M(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} &= \bar{\mathbf{p}}_N \\ \mathbf{m}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\nu} &= \bar{p}_{N3} \\ \mathbf{M}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} &= \bar{\mathbf{m}}^T \end{aligned} \right\} \text{ on } \Gamma_p(\theta) \cap \partial M(\theta)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T}_M(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2} \\ \mathbf{m}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\nu} &= 0 \\ \mathbf{M}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2} \end{aligned} \right\} \text{ on } (\Gamma_N(\theta) \setminus \bar{\Gamma}_p(\theta)) \cap \partial M(\theta)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^5} \quad \text{on } \Gamma_D(\theta). \quad (4.3.21)$$

を満たす  $\mathbf{u} : M(\theta) \rightarrow \mathbb{R}^5$  を求めよ。  $\square$

この問題の解  $\mathbf{u}$  は次の関数空間に属する。

$$U = \{ \mathbf{u} \in H^1(M(\theta); \mathbb{R}^5) \mid \mathbf{u} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^5} \text{ on } \Gamma_D(\theta) \} \quad (4.3.22)$$

さらに、後に示す  $H^1$  勾配法によって連続な領域を確保するためには、問題 4.3.1 の解  $\mathbf{u}$  は次の関数空間に属していなければならない。

$$\mathcal{S} = U \cap W^{2,2q}(M(\theta); \mathbb{R}^5) \quad (4.3.23)$$

次に、第 2 章で示した手順に従い、シェル構造体を用いた線形弾性問題の弱形式を導く。  $\Gamma_D(\theta)$  上で  $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$  となる任意の  $\mathbf{v} \in \mathcal{S}$  を問題 4.3.1 の各式の両辺にかけて、  $M(\theta)$  で積分し、発散定理を用いれば

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad (4.3.24)$$

が成り立つ。ここで、  $a(\cdot, \cdot)$  と  $l(\cdot)$  は

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = & \int_{M(\theta)} \left( \mathbf{T}_M(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}_M(\mathbf{v}) + c_S \mathbf{m}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{v}) \right. \\ & \left. + \mathbf{M}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{K}(\mathbf{v}) \right) dx, \end{aligned} \quad (4.3.25)$$

$$\begin{aligned} l(\mathbf{v}) = & \int_{M(\theta)} (\bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{v}_M + \bar{p}_{N3} z - \bar{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{r}) dx \\ & + \int_{\Gamma_p(\theta) \cap \partial M(\theta)} (\bar{\mathbf{p}}_N \cdot \mathbf{v}_M + \bar{p}_{N3} z - \bar{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{r}) d\gamma, \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

である。次に、次節の形状最適化問題を定義する際に等式制約として利用する為に、線形弾性問題の弱形式に対する Lagrange 関数を次のように定義しておく。

$$\mathcal{L}_M(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = -a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + l(\mathbf{v}) \quad (4.3.27)$$

### 4.3.2 ビード形状最適化問題

$\theta \in \mathcal{D}$  に対する問題 4.3.1 の解  $\mathbf{u}$  を用いると、平均コンプライアンスは

$$f(\theta, \mathbf{u}) = l(\mathbf{u}) \quad (4.3.28)$$

のように定義することができる。次に、定義した  $f$  を用いて、平均コンプライアンス最小化問題を次のように定義する。

**問題 4.3.2 (平均コンプライアンス最小化問題)**  $f(\theta, \mathbf{u})$  が式 (4.3.28) で定義されるとする。このとき、

$$\min_{\theta \in \mathcal{D}} \{ f(\theta, \mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in \mathcal{S}, \text{ Problem 4.3.1} \}.$$

を満たす  $\theta$  を求めよ。

□

### 4.3.3 評価関数の形状微分

問題 4.3.2 を  $H^1$  勾配法を用いて解くために，設計変数の変動  $\theta$  に対する  $f$  の Fréchet 微分を導出する．本研究ではこの Fréchet 微分を  $\theta$  微分と呼ぶ． $f$  は問題 4.3.1 の解  $\mathbf{u}$  の関数となっているので， $\mathbf{v}$  を問題 4.3.1 に対する随伴変数として導入し， $f$  の Lagrange 関数を

$$\mathcal{L}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\theta, \mathbf{u}) + \mathcal{L}_M(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

と定義する．右辺第 2 項は式 (4.3.27) で定義した主問題に対する Lagrange 関数である．また， $\mathcal{L}$  の  $\theta$  微分は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v})[\vartheta] &= \mathcal{L}_\theta(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v})[\vartheta] \\ &+ \mathcal{L}_\mathbf{u}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v})[\mathbf{u}'] + \mathcal{L}_\mathbf{v}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v})[\mathbf{v}'] \end{aligned} \quad (4.3.29)$$

となる．ここで， $\mathbf{u}'$  と  $\mathbf{v}'$  はそれぞれ  $\mathbf{u}$  と  $\mathbf{v}$  の任意の変動  $\vartheta \in X$  に対する Fréchet 微分を表す．ここで，もし  $\mathbf{u}$  が問題 4.3.1 の解であれば，式 (4.3.29) の右辺第 3 項は 0 になる．また，式 (4.3.29) の第 2 項は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\mathbf{u}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v})[\mathbf{u}'] &= l(\mathbf{u}') + \mathcal{L}_M(\theta, \mathbf{u}', \mathbf{v}) \\ &= -a(\mathbf{v}, \mathbf{u}') + l(\mathbf{u}') = \mathcal{L}_M(\theta, \mathbf{v}, \mathbf{u}') \end{aligned} \quad (4.3.30)$$

となる．よって，もし  $\mathbf{v}$  が自己随伴関係  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$  により求められれば，式 (4.3.29) の右辺第 2 項は 0 になる．さらに，式の右辺第 1 項は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\theta(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v})[\vartheta] &= \int_{\hat{M}(\theta)} g_M \vartheta \, dx + \int_{\partial M(\theta) \setminus \Gamma_{p0}} g_{\partial M} \vartheta \, d\gamma \\ &= \langle g, \vartheta \rangle \end{aligned} \quad (4.3.31)$$

のようになる．ここで，簡便のため，初期形状の境界  $\partial\Omega_0$  上の非斉次  $\Gamma_{p0}$  境界は変動しないと仮定する．すなわち式 (4.2.8) において  $\Gamma_{p0} \subset \boldsymbol{\mu}_0(D_{C0})$  とする．ここで，

$$\begin{aligned} \hat{M}(\theta) &= \{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (\bar{x}_1, \bar{x}_2, t/2)^T \in M_T(\theta) \setminus \Gamma_{p0} \\ &\text{and } (\bar{x}_1, \bar{x}_2, -t/2)^T \in M_B(\theta) \setminus \Gamma_{p0}\} \end{aligned}$$

および，

$$\begin{aligned} g_M &= \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \left\{ -\mathbf{T}_M(\mathbf{u}, t/2) \cdot \left( \mathbf{E}_M(\mathbf{u}) + \frac{t}{2} \mathbf{K}(\mathbf{u}) \right) \right. \\ &\quad + \mathbf{T}_M(\mathbf{u}, -t/2) \cdot \left( \mathbf{E}_M(\mathbf{u}) - \frac{t}{2} \mathbf{K}(\mathbf{u}) \right) \\ &\quad \left. + 2(\mathbf{b} \cdot \mathbf{u})|_{\bar{x}_3=t/2} - 2(\mathbf{b} \cdot \mathbf{u})|_{\bar{x}_3=-t/2} \right\}, \end{aligned} \quad (4.3.32)$$

$$g_{\partial M} = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \left\{ -\mathbf{T}_M(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}_M(\mathbf{v}) - c_S \mathbf{m}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{v}) - \mathbf{M}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{K}(\mathbf{v}) + 2(\bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{u}_M + \bar{p}_{N3} w - \bar{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{q}) \right\}. \quad (4.3.33)$$

である。\$g\$ は \$f\$ の \$\theta\$ 微分となる。

#### 4.3.4 ビード形状最適化問題の解法

次に評価関数が減少する設計変数の形状変動を得るために \$\theta\$ 型 \$H^1\$ 勾配法を用いる。ビード形状最適化問題に対する \$\theta\$ 型 \$H^1\$ 勾配法は次のようになる。

**問題 4.3.3** (\$\theta\$ 型 \$H^1\$ 勾配法) \$X\$ が式 (4.2.4) で定義されているとする。\$X\$ 上の有界かつ強圧的双 1 次形式 \$a\_X : X \times X \to \mathbb{R}\$ と \$f\$ の \$\theta\$ 微分 \$g \in X'\$ (\$X'\$ は \$X\$ の随伴空間) が与えられたとき、任意の \$z \in X\$ に対して、

$$a_X(\vartheta_g, z) = -\langle g, z \rangle$$

を満たす \$\vartheta\_g \in X\$ を求めよ。 \$\square\$

本研究では \$a\_X\$ には、

$$a_X(\theta, \vartheta) = c_a \int_D (\nabla \theta \cdot \nabla \vartheta + c_\Omega \theta \vartheta) dx \quad (4.3.34)$$

を用いる。ここで \$c\_\Omega\$ は問題 4.3.3 の解 \$\vartheta\_g\$ の滑らかさをコントロールする正定数である。また、\$c\_a\$ は設計変数 \$\theta\$ の更新時における \$\vartheta\_g\$ の大きさを表す。問題 4.3.3 の強形式は次のようにかける。

**問題 4.3.4** (問題 4.3.3 の強形式) \$g \in X'\$ が与えられたとき、

$$\begin{aligned} c_a(-\Delta \vartheta_g + c_\Omega \vartheta_g) &= g \quad \text{in } D, \\ c_a \partial_\nu \vartheta_g &= 0 \quad \text{on } \partial D \setminus D_{C0}, \\ \vartheta_g &= 0 \quad \text{on } D_{C0}. \end{aligned}$$

を満たす \$\vartheta\_g \in X\$ を求めよ。ただし、\$\partial\_\nu\$ は \$\nabla \cdot \boldsymbol{\nu}\$ である。 \$\square\$

形状更新量 \$\vartheta\_g \in X\$ が求めれば、第 2 章で述べた逐次 2 次計画法による反復計算を用いて最適なビード形状を求めることができる。

#### 4.3.5 数値計算例

提案手法の妥当性を検証するために、簡易モデルを用いた数値計算を実施した。以下にその結果を示す。検証モデルとして簡易シェルモデル (\$D = M\_0 = (0, 100) \times (0, 200)\$

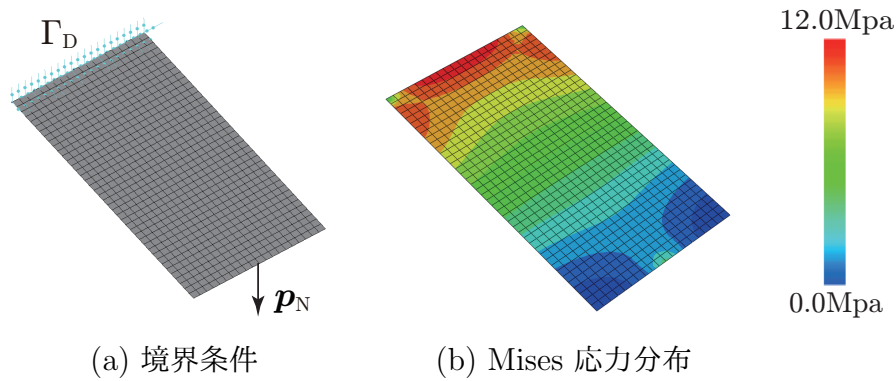


図 4.3.2: 初期形状 (片持ちはりの曲げ問題)

[ $\text{mm}^2$ ], 板厚  $t = 1$  [mm]) を用いた. Young 率と Poisson 比はそれぞれ 210 [GPa] と 0.3 とした. また, 創生するビード高さは  $h = 5$  [mm] とした. また, 以下の数値結果は, 評価関数の形状微分の計算においては開発したインハウスコードを用いている. また問題 4.3.1 の計算では Abaqus 6.9 (Dassault Systèmes) を利用し,  $H^1$  勾配法の計算では OPTISHAPE-TS 2011 (Quint) を利用した.

検証モデルを用いて (1) 片持ちはりの曲げ問題, (2) 片持ちはりのねじり問題 の 2 ケースの計算を実施した. 両問題においては非斉次 Neumann 境界  $\Gamma_{p0}$  では  $\theta$  は 0 とした. また, 式 (4.3.34) の  $c_\Omega$  には  $10^{-2}$  [ $1/\text{mm}^2$ ] を用いた.

### 片持ちはりの曲げ問題

片持ちはりの曲げ問題に対する, ビード形状最適化計算結果を以下に示す. 有限要素モデルと境界条件を図 4.3.2 (a) に示す. 問題 4.3.1 において  $|\mathbf{p}_N| = 1.0$  [N],  $\mathbf{b} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$  を仮定した. また初期形状の Mises 応力分布を図 4.3.2 (b) に示す.

次に,  $f$  の形状更新に対する 収束履歴を図 4.3.3 に示す. 形状更新に伴い  $f$  が単調に減少し, 最終的に 98.3% 減少する結果となった. 図 4.3.4 に最適化後の形状とその Mises 応力分布を示す. ビード形状最適化によって得られた形状をみると, 拘束境界と荷重境界を結ぶ滑らかなビード形状が得られていることが確認できる. 得られたビード形状によって, 面外方向の断面 2 次モーメントが向上すると考えられるため, 曲げ剛性が向上したと考察できる.

### 片持ちはりのねじり問題

次に, 片持ちはりのねじり問題に対して, ビード形状最適化計算を実施した結果を以下に示す. 有限要素モデルと境界条件を図 4.3.5 (a) に示す. 各荷重は  $|\mathbf{p}_N| = 1.0$  [N],



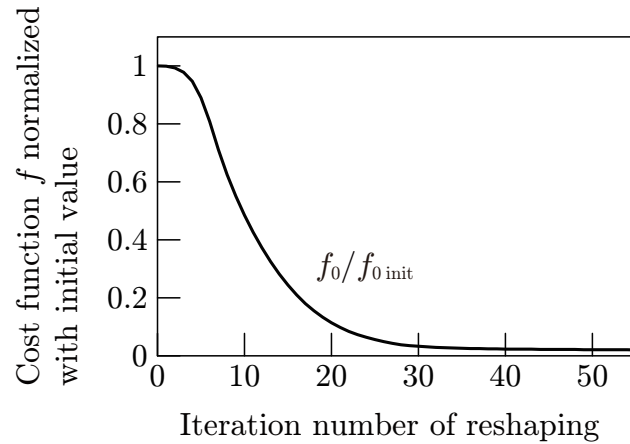
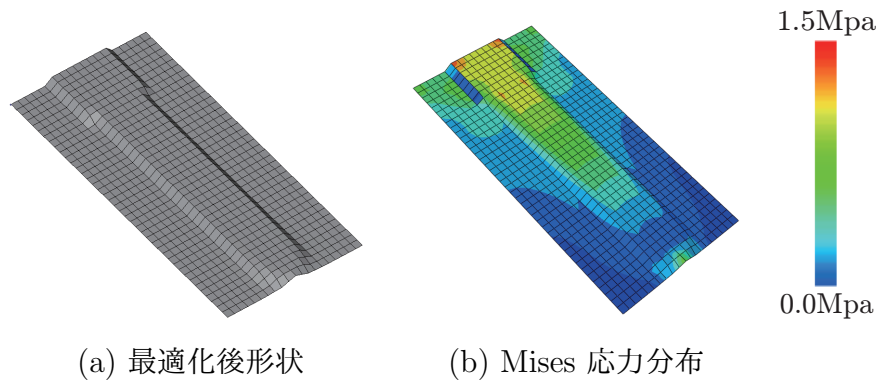
図 4.3.3: 形状更新に対する  $f$  の更新履歴

図 4.3.4: 最適化後形状 (片持ちはりの曲げ問題)

$\mathbf{b} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$  とした。また初期形状の Mises 応力分布を図 4.3.5 (b) に示す。

$f$  の形状更新に対する 収束履歴を図 4.3.6 に示す。形状更新に伴い  $f$  が単調に減少し、最終的に 91.0% 減少した。図 4.3.7 は最適化後の形状と問題 4.3.1 における Mises 応力を示す。ビード形状最適化によって得られた形状をみると、拘束境界と荷重境界を対角に結ぶ滑らかなビード形状が得られていることが確認できる。この対角状の補強によってねじり剛性が向上したと考察できる。

最後に、 $c_{\Omega}$  による最適化結果への影響について述べる。 $c_{\Omega}$  は  $H^1$  勾配法における滑らかさをコントロールするパラメータである。図 4.3.8 に  $c_{\Omega}$  の値が  $10^2$  [ $1/\text{mm}^2$ ] と  $0$  [ $1/\text{mm}^2$ ] の場合の片持ちはりのねじり問題における最適化結果の比較を示す。 $c_{\Omega}$  の値によって異なるビードレイアウトが得られた。このことから、この最適化問題が多峰性を有していることがわかる。 $c_{\Omega}$  の値によってえられるビード幅が異なることが確認できる。

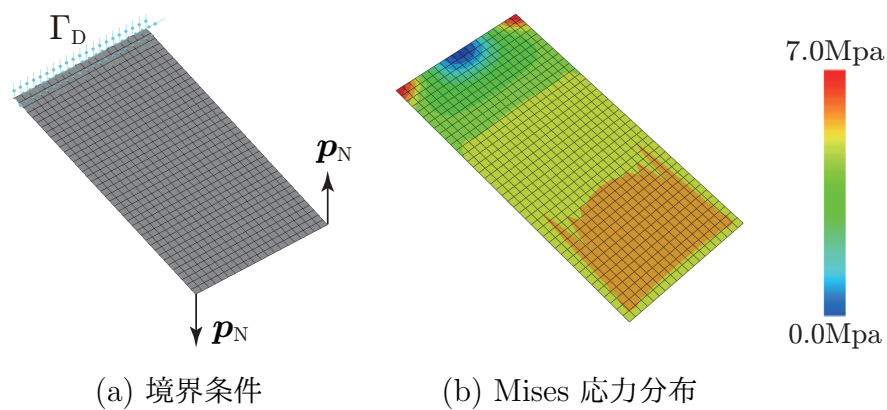


図 4.3.5: 初期形状 (片持ちはりのねじり問題)

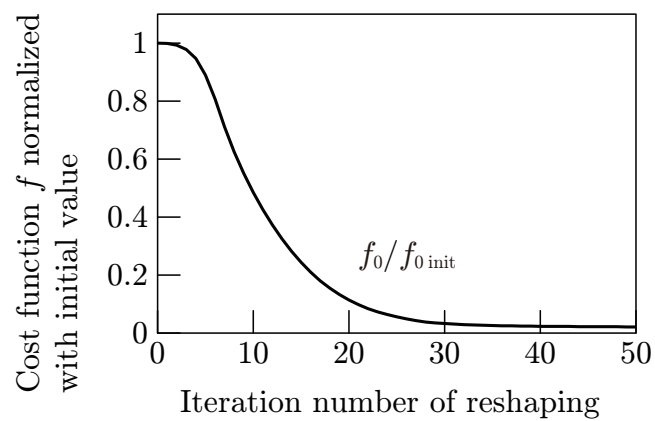


図 4.3.6: 形状更新に対する  $f$  の更新履歴

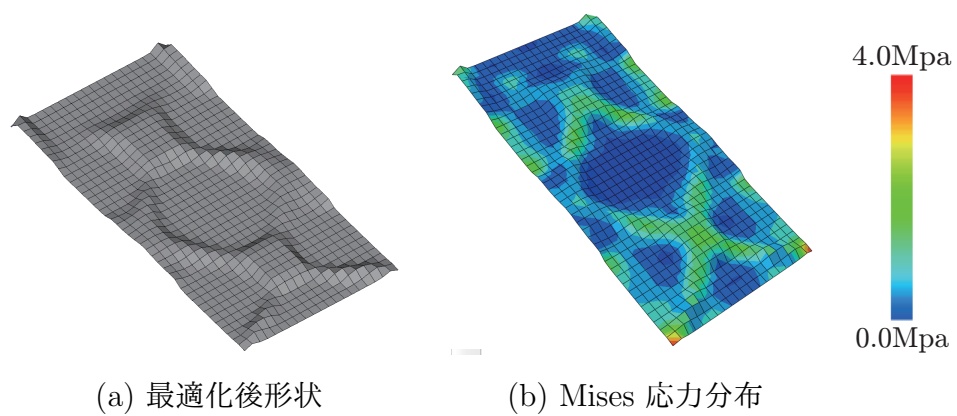
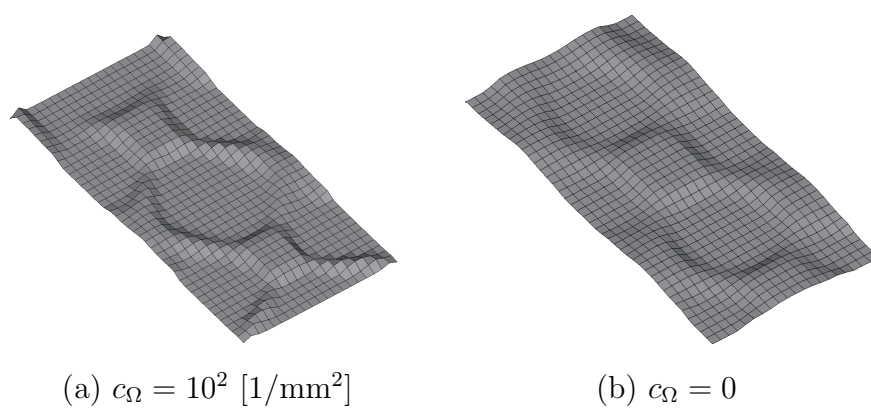


図 4.3.7: 最適化後形状 (片持ちはりのねじり問題)

図 4.3.8:  $c_\Omega$  の影響による最適化結果の比較 (片持ちはりのねじり問題)

## 4.4 周波数応答変位最小化問題

本節では周波数応答変位を最小化するビード形状最適化問題を定義し、その解法を述べる。

### 4.4.1 主問題

はじめに、主問題であるシェル構造体の周波数応答問題を定義する。領域の定義と構成則はそれぞれ前節に準ずるとし、時間領域を  $\tau \in \mathbb{R}$  とする。また、自由振動の変位は  $\mathbf{u} : \mathbb{R} \times M(\theta) \rightarrow \mathbb{R}^5$  と表す。以上の定義を用いると、シェル構造体における自由振動問題は次のようにかくことができる。

**問題 4.4.1 (シェル弾性体における自由振動問題)**  $\theta \in \mathcal{D}$  に対して、 $\bar{\mathbf{u}}_1 \in W^{2,2q}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^5)$  と  $\bar{\mathbf{v}}_1 \in W^{2,2q}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^5)$  が与えられたとき、

$$\left. \begin{aligned} \rho \partial_{\tau\tau} \mathbf{u}_M - \nabla_M^T \mathbf{T}_M(\mathbf{u}) &= \bar{\mathbf{b}}^T \\ \rho \partial_{\tau\tau} w - \nabla_M \cdot \mathbf{m}(\mathbf{u}) &= \bar{p}_{N3} \\ \rho \partial_{\tau\tau} \mathbf{q} - \nabla_M^T \mathbf{M}(\bar{\mathbf{u}}) + \mathbf{m}(\mathbf{u}) &= \bar{\mathbf{m}}^T \end{aligned} \right\} \text{ in } M(\theta),$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T}_M(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} &= \bar{p}_N \\ \mathbf{m}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\nu} &= \bar{p}_{N3} \\ \mathbf{M}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} &= \bar{\mathbf{m}} \end{aligned} \right\} \text{ on } \Gamma_p(\theta) \cap \partial M(\theta),$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T}_M(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2} \\ \mathbf{m}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\nu} &= 0 \\ \mathbf{M}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2} \end{aligned} \right\} \text{ on } (\Gamma_N(\theta) \setminus \bar{\Gamma}_p(\theta)) \cap \partial M(\theta),$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^5} \quad \text{on } \Gamma_D(\theta)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}_1 \quad \text{in } M(\theta) \times \{0\},$$

$$\partial_\tau \mathbf{u} = \bar{\mathbf{v}}_1 \quad \text{in } M(\theta) \times \{0\}$$

を満たす  $\bar{\mathbf{u}} : M(\theta) \rightarrow \mathbb{R}^5$  を求めよ。 □

ただし、 $\rho$  は密度を表す。

本論文では、問題 4.4.1 の振動系に構造減衰を追加し、さらに、設計要件により与えられた周波数領域  $(\omega_1, \omega_2)$  における周波数応答問題を形状最適化問題の主問題とする。その問題は次のように表される。 $g$  を構造減衰係数を表す実定数とする。 $\mathbf{u}$  の Fourier 変換を

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \omega) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

とおく。ただし、 $i$  を虚数単位、 $\omega \in \mathbb{R}$  を角周波数とする。同様に、 $\mathbf{b}$  の Fourier 変換を  $\hat{\mathbf{b}}$  のように表すことにする。周波数応答問題に対する Lagrange 関数を

$$\mathcal{L}_M(\theta, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \operatorname{Re}[(1 + ig) a(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}^c) - \omega^2 b(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}^c) - \langle \mathbf{e}, \hat{\mathbf{v}}^c \rangle] d\omega \quad (4.4.1)$$

とおく。ただし、

$$\begin{aligned} a(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) &= \int_{M(\theta)} (\mathbf{T}_M(\hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{E}_M(\hat{\mathbf{v}}) \\ &\quad + c_S \mathbf{m}(\hat{\mathbf{u}}) \cdot \boldsymbol{\gamma}(\hat{\mathbf{v}}) + \mathbf{M}(\hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{K}(\hat{\mathbf{v}})) dx, \\ b(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) &= \int_{M(\theta)} \rho \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}} dx, \\ \langle \mathbf{e}, \hat{\mathbf{v}} \rangle &= \int_{M(\theta)} (\hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{v}}_M + \hat{p}_{N3} \hat{z} - \hat{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) dx \\ &\quad + \int_{\Gamma_p(\theta) \cap \partial M(\theta)} (\hat{\mathbf{p}}_N \cdot \hat{\mathbf{v}}_M + \hat{p}_{N3} \hat{z} - \hat{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) d\gamma \end{aligned}$$

である。なお、 $\cdot$  はスカラー積を表す。また、

$$\hat{U} = \{ \hat{\mathbf{u}} \in H^1(M(\theta) \times \mathbb{R}; \mathbb{C}^5) \mid \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^5} \text{ on } \Gamma_D(\theta) \} \quad (4.4.2)$$

とおき、その要素を

$$\hat{\mathbf{v}} = (\hat{v}_{M1}, \hat{v}_{M2}, \hat{z}, \hat{r}_1, \hat{r}_2)^T = (\hat{\mathbf{v}}_M^T, \hat{z}, \hat{\mathbf{r}}^T)^T$$

とかく。このとき、周波数応答問題は次のようにかかる。

**問題 4.4.2** (シェル弾性体の周波数応答問題)  $\theta \in \mathcal{D}$  が与えられたとき、任意の  $\hat{\mathbf{v}} \in \hat{U}$  に対して、

$$\mathcal{L}_M(\theta, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) = 0$$

を満たすように  $\hat{\mathbf{u}} \in \hat{U}$  を求めよ。 □

#### 4.4.2 ビード形状最適化問題

問題 4.4.2 の解  $\hat{\mathbf{u}}$  を用いて、

$$f(\theta, \hat{\mathbf{u}}) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \operatorname{Re}[\langle \mathbf{e}, \hat{\mathbf{u}} \rangle] d\omega \quad (4.4.3)$$

を評価関数とおく。このとき、周波数応答変位最小化問題を次のように定義する。

**問題 4.4.3** (周波数応答変位最小化問題)  $f(\theta, \hat{\mathbf{u}})$  を式 (4.4.3) とする。このとき、

$$\min_{\theta \in \mathcal{D}} \left\{ f(\theta, \hat{\mathbf{u}}) \mid \hat{\mathbf{u}} \in \hat{U}, \text{ Problem 4.4.2} \right\}$$

を満たす  $\theta$  を求めよ。 □

## 4.4.3 評価関数の形状微分

評価関数  $f$  の設計変数  $\theta$  の変動  $\vartheta \in X$  に対する  $\theta$  微分は次のようにして得られる.  $f$  は問題 4.4.2 の解  $\hat{\mathbf{u}}$  の関数となっている. そこで,  $\hat{\mathbf{v}} \in \hat{U}$  を問題 4.4.2 に対する Lagrange 乗数として用いて,  $f$  の Lagrange 関数を

$$\mathcal{L}(\theta, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) = f(\theta, \hat{\mathbf{u}}) + \mathcal{L}_M(\theta, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}})$$

とおく.  $\mathcal{L}$  の  $\theta$  微分は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(\theta, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}})[\vartheta] &= \mathcal{L}_\theta(\theta, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}^c)[\vartheta] \\ &+ \mathcal{L}_{\hat{\mathbf{v}}}(\theta, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}})[\hat{\mathbf{v}}'] + \mathcal{L}_{\hat{\mathbf{u}}}(\theta, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}})[\hat{\mathbf{u}}'] \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

とかける. ここで,  $\hat{\mathbf{u}}'$  と  $\hat{\mathbf{v}}'$  はそれぞれ  $\hat{\mathbf{u}}$  と  $\hat{\mathbf{v}}$  の任意変動に対する Fréchet 微分を表す. ここで,  $\hat{\mathbf{u}}$  が問題 4.4.2 の解であれば, 式 (4.4.4) の右辺第2項は0になる. また, 式 (4.4.4) の右辺第3項は

$$\mathcal{L}_{\hat{\mathbf{u}}}(\theta, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}^c)[\hat{\mathbf{u}}'] = f(\theta, \hat{\mathbf{u}}') + \mathcal{L}_M(\theta, \hat{\mathbf{u}}', \hat{\mathbf{v}})$$

となり,  $\hat{\mathbf{v}}$  が次のような随伴問題の解であるとき, 0となる.

**問題 4.4.4 ( $f$  の随伴問題)**  $\theta \in \mathcal{D}$  に対して,  $\hat{\mathbf{u}}$  を問題 4.4.2 の解とする. 任意の  $\hat{\mathbf{u}}' \in \hat{U}$  に対して

$$\mathcal{L}_M(\theta, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{u}}') = 0 \quad (4.4.5)$$

を満たす  $\hat{\mathbf{v}}$  を求めよ. □

問題 4.4.4 と問題 4.4.2 の比較より, 自己随伴関係  $\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{u}}$  を得る. さらに, 式 (4.4.4) の右辺第1項は,  $f$  は  $\hat{\mathbf{u}}$  が問題 4.4.2 の解であるときの  $\theta$  微分となり,

$$\mathcal{L}_\theta(\theta, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}})[\vartheta] = \int_{M(\theta) \setminus D_{C_0}} g_M \vartheta \, dx + \int_{\partial M(\theta) \setminus D_{C_0}} g_{\partial M} \vartheta \, d\gamma = \langle g, \vartheta \rangle \quad (4.4.6)$$

となる. ただし,

$$\begin{aligned} g_M &= \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \operatorname{Re}[\psi(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, t/2) - \psi(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, -t/2)] \, d\omega \\ \psi(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \bar{x}_3) &= -\mathbf{T}_M(\hat{\mathbf{u}}) \cdot (\mathbf{E}_M(\hat{\mathbf{v}}^c) + \bar{x}_3 \mathbf{K}(\hat{\mathbf{v}}^c)) \\ &+ \rho \omega^2 \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}}^c + 2\hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{u}}, \\ g_{\partial M} &= \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \operatorname{Re}[-\mathbf{T}_M(\hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{E}_M(\hat{\mathbf{v}}^c) \\ &- c_S \mathbf{m}(\hat{\mathbf{u}}) \cdot \boldsymbol{\gamma}(\hat{\mathbf{v}}^c) - \mathbf{M}(\hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{K}(\hat{\mathbf{v}}^c) \\ &+ \rho \omega^2 \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}}^c + 2\hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_M] \, d\omega \end{aligned}$$

である.

#### 4.4.4 ビード形状最適化問題の解法

問題 4.4.2 の解  $\hat{u}$  を用いれば,  $g$  は  $f$  の  $\theta$  微分となる.  $\theta$  微分が得られれば, 前節で述べた  $\theta$  型  $H^1$  勾配法を用いて形状変動量  $\vartheta_g \in X$  を求めることができる. また, 形状更新量が求まれば, 第 2 章で述べた逐次 2 次計画法による反復計算を用いて最適なビード形状を求めることができる.

#### 4.4.5 数値計算例

提案手法の妥当性を検証するために, 簡易モデルを用いた数値計算を実施した. 以下にその結果を示す. 検証モデル ( $D = M_0$ , 外径 = 200 × 100 [mm], 板厚  $t = 1$  [mm], フランジ高さ 5 [mm]) と境界条件を図 4.4.1 に示す. Young 率, Poisson 比, 密度はそれぞれ 210 [GPa], 0.3,  $7.9 \times 10^{-3}$  [kg/m<sup>3</sup>] とした. また, 創生するビード高さは  $h = 5$  [mm] とした. また, 主問題では 0 [Hz] から 500 [Hz] の周波数応答変位を計算し, 式 (4.4.3) では 250.0 [Hz] で加振した際に加振点応答変位で定義した. また, 以下の数値結果は, 評価関数の形状微分の計算においては開発したインハウスコードを用いている. また問題 4.4.2 の計算では Abaqus 6.9 (Dassault Systèmes) を利用し,  $H^1$  勾配法の計算では OPTISHAPE-TS 2011 (Quint) を利用した.

初期形状における自己周波数応答関数を図 4.4.2 の実線に示す. 64.1 [Hz] と 329.8 [Hz] において共振周波数が存在する. それぞれの共振周波数における振動モードを図 4.4.3 に示す. また, 250.0 [Hz] における振動モードを図 4.4.4 (a) に示す.

次に,  $f$  の形状更新に対する収束履歴を図 4.4.5 に示す. 形状更新に伴い  $f$  が単調に減少し, 最終的に  $f$  の値は初期値の 0.05% となった. 最適化後の形状を図 4.4.6 に示す. また, 最適化後の自己周波数応答関数を図 4.4.2 の点線に示す. この図より, 最適化後の形状では 250.0 [Hz] の応答が反共振となっていることが確認できる. また, 最適化後の 250.0 [Hz] における振動モードを図 4.4.4 (b) に示す. 拘束と加振を与えた部位の断面では曲げ剛性が高く, 中央部では曲げ剛性が低い形状が得られていることがわかる. これらの変化によって, 中央部が腹となり, 端部が節となるモードが励起されいと考察できる.



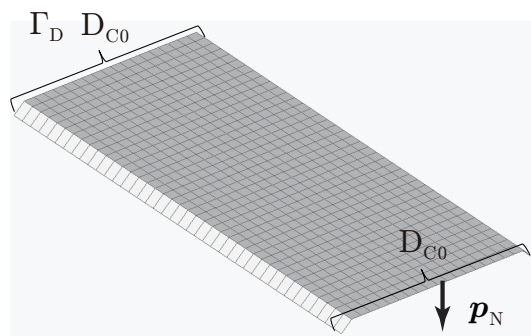


図 4.4.1: 検証モデル

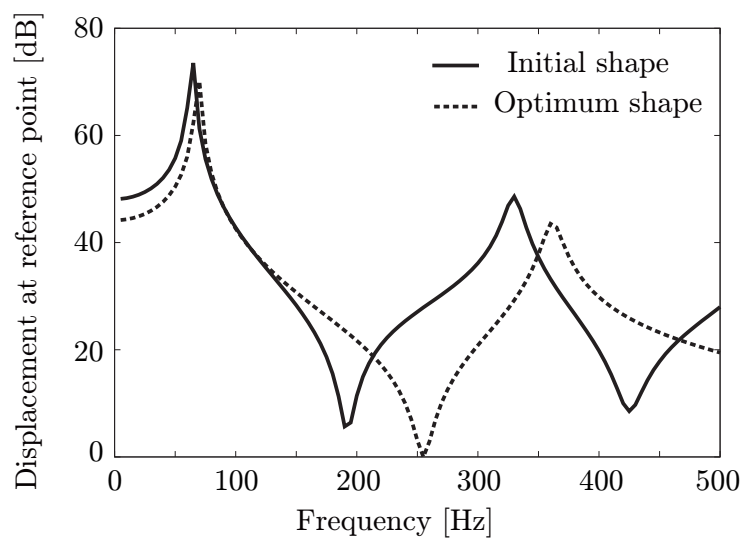
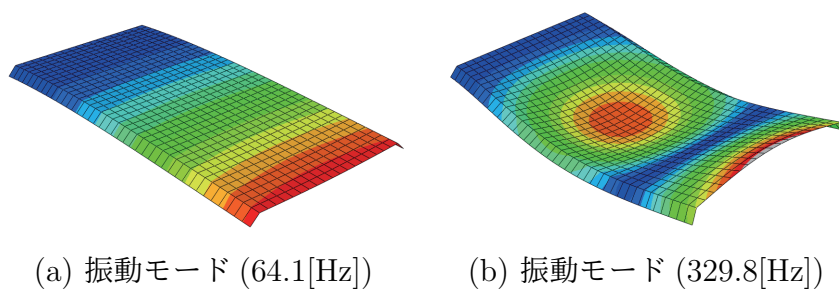


図 4.4.2: 最適化前後の自己周波数応答関数の比較



(a) 振動モード (64.1[Hz])

(b) 振動モード (329.8[Hz])

図 4.4.3: 初期形状の共振周波数における振動モード

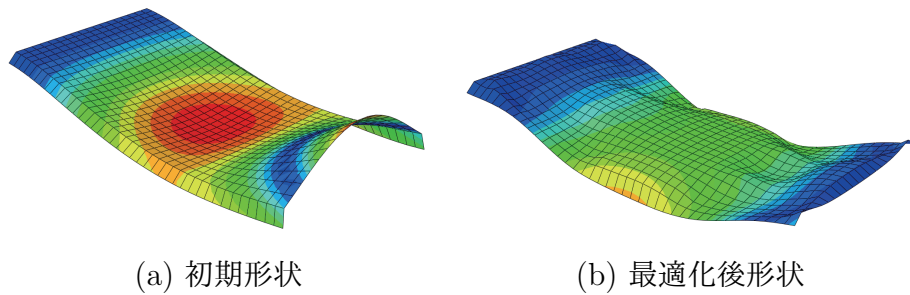


図 4.4.4: 最適化前後における振動モードの比較 (250.0[Hz])

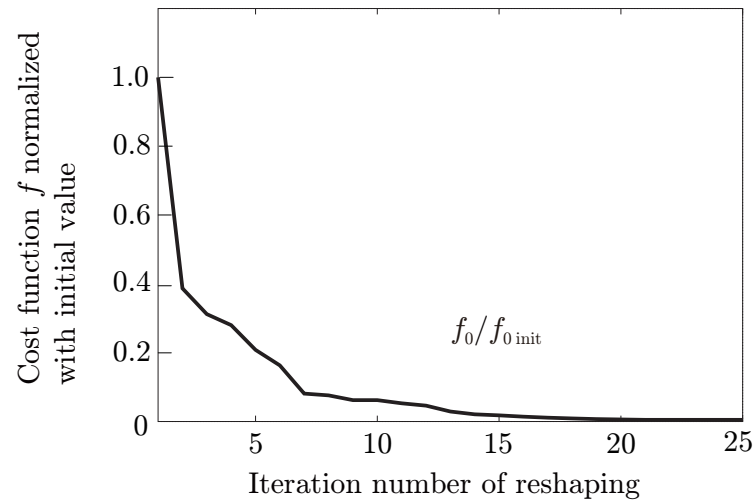
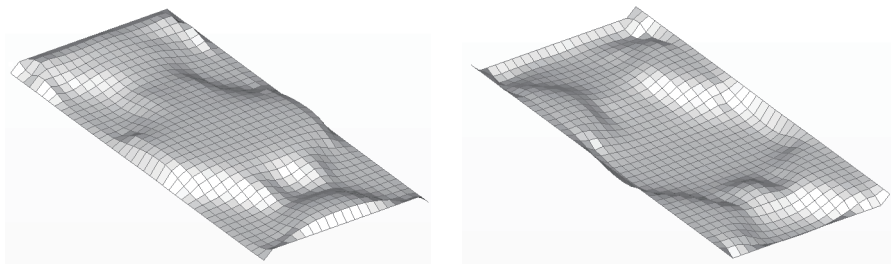
図 4.4.5: 形状更新に対する  $f$  の更新履歴

図 4.4.6: 最適化後形状

## 4.5 固有振動数最大化問題

前節では簡単な片持ち梁モデルを用いて、平均コンプライアンスと周波数応答変位を目的としたビード形状最適化問題を定義し、その解法を示した。本節では、提案手法の応用例としてダストカバーのビード形状設計への適用を考える。ダストカバーとは車両のブレーキ部品で用いられ、路面からの異物がローターとパッド間に混入することを防止する役割を担う。ダストカバーの形状設計では路面入力との共振現象が設計要件のひとつに考えられる。そのため、最低次の固有振動数が路面から入力される周波数以上となるようなビード形状の設計ニーズが考えられる。

### 4.5.1 主問題

前節までの定義を用いると、シェル構造体の固有振動問題は次のようにかける。

**問題 4.5.1 (シェル構造体の固有振動問題)**  $\theta$  が与えられたとき、 $k \in \{1, 2, \dots\}$  を次数として、

$$\left. \begin{aligned} \rho\omega_k^2 \hat{\mathbf{u}}_k^T - \nabla_M^T \mathbf{T}_M(\hat{\mathbf{u}}_k) &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \\ \rho\omega_k^2 w_k - \nabla_M \cdot \mathbf{m}(\hat{\mathbf{u}}_k) &= 0 \\ \rho\omega_k^2 \mathbf{q}_k^T - \nabla_M^T \mathbf{M}(\hat{\mathbf{u}}_k) + \mathbf{m}(\hat{\mathbf{u}}_k) &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2} \end{aligned} \right\} \text{ in } M(\theta) \quad (4.5.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T}_M(\hat{\mathbf{u}}_k) \boldsymbol{\nu}_M &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2} \\ \mathbf{m}(\hat{\mathbf{u}}_k) \cdot \boldsymbol{\nu}_M &= 0 \\ \mathbf{M}(\hat{\mathbf{u}}_k) \boldsymbol{\nu}_M &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2} \end{aligned} \right\} \text{ on } (\Gamma_N(\theta) \setminus \bar{\Gamma}_p(\theta)) \cap \partial M(\theta) \quad (4.5.2)$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^5} \quad \text{on } \Gamma_D(\theta)$$

を満たす固有振動対  $(\omega_k, \hat{\mathbf{u}}_k)$  を求めよ。  $\square$

次に、第2章で示した手順に従い、シェル構造体の固有振動問題に対する弱形式を導く。 $\Gamma_D(\theta)$  上で  $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$  となる任意の  $\hat{\mathbf{v}}_k \in \mathcal{S}$  を式 (4.5.1), 式 (4.5.2) にかけて、 $M(\theta)$  で積分し、発散定理を用いれば

$$a(\hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_k) = \rho\omega_k^2 b(\hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_k) \quad (4.5.3)$$

が成り立つ。ここで、 $a(\cdot, \cdot)$  と  $l(\cdot)$  は

$$a(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) = \int_{M(\theta)} \left( \mathbf{T}_M(\hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{E}_M(\hat{\mathbf{v}}) + c_S \mathbf{m}(\hat{\mathbf{u}}) \cdot \boldsymbol{\gamma}(\hat{\mathbf{v}}) + \mathbf{M}(\hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{K}(\hat{\mathbf{v}}) \right) dx, \quad (4.5.4)$$

$$b(\hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_k) = \int_{M(\theta)} \hat{\mathbf{u}}_k \cdot \hat{\mathbf{v}}_k dx, \quad (4.5.5)$$

である。次に、次節の形状最適化問題を定義する際に等式制約として利用する為に、固有振動問題の弱形式に対する Lagrange 関数を次のように定義しておく。

$$\mathcal{L}_M(\theta, \omega_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_k) = -a(\hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_k) + \omega_k^2 b(\hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_k) \quad (4.5.6)$$

### 4.5.2 ビード形状最適化問題

次に、目的関数を定義する。ダストカバーへの路面からの入力との共振を避けるため、低次の固有振動数を最大化することを考える。 $\theta \in \mathcal{D}$  に対する問題 4.5.1 の解  $\omega_k$  を用いて、目的関数を

$$f(\theta, \omega_k) = \sum_{k=1}^n -\alpha_k \omega_k^2 \quad (4.5.7)$$

のように定義する。ここで、最低次の固有振動数だけでなく低次から  $n$  個の固有振動数の和で定義している理由は、形状変化におけるモードの入れ替わりを考慮したためである。また、 $\alpha_k$  は重みである。次に、定義した  $f$  を用いて、ビード形状最適化問題を次のように定義する。

**問題 4.5.2 (固有振動数和の最大化問題)**  $f(\theta, \omega_k)$  が式 (4.5.7) で定義されているとする。このとき、

$$\min_{\theta \in \mathcal{D}} \{f(\theta, \omega_k) \mid \omega_k \in \mathbb{C}, \text{ Problem 4.5.1}\}.$$

を満たす  $\theta$  を求めよ。

□

### 4.5.3 評価関数の形状微分

問題 4.5.2 を  $\theta$  型  $H^1$  勾配法を用いて解くために、設計変数の変動  $\theta$  に対する  $f$  の Fréchet 微分を導出する。 $f$  は問題 4.5.1 の解  $\omega_k$  の関数となっているので、 $\hat{\mathbf{v}}_0$  を問題 4.5.1 に対する随伴変数として導入し、 $f$  の Lagrange 関数を

$$\mathcal{L}(\theta, \omega_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_0) = f(\theta, \omega_k) + \mathcal{L}_M(\theta, \omega_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_0).$$

と定義する。また、 $\mathcal{L}$  の  $\theta$  微分は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(\theta, \omega_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_0)[\vartheta] &= \mathcal{L}_\theta(\theta, \omega_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_0)[\vartheta] + \mathcal{L}_{\omega_k}(\theta, \omega_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_0)[\omega'_k] \\ &\quad + \mathcal{L}_{\hat{\mathbf{v}}_0}(\theta, \omega_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_0)[\hat{\mathbf{v}}'_0] + \mathcal{L}_{\hat{\mathbf{u}}_k}(\theta, \omega_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_0)[\hat{\mathbf{u}}'_k], \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

となる. ここで,  $\hat{\mathbf{u}}'_k$  と  $\hat{\mathbf{v}}'_0$  はそれぞれ  $\hat{\mathbf{u}}_k$  と  $\hat{\mathbf{v}}_0$  の任意変動に対する Fréchet 微分を表す. ここで, もし  $\hat{\mathbf{u}}_k$  が問題 4.5.1 の解であれば, 式 (4.5.8) の右辺第 3 項は 0 になる. また, 式 (4.5.8) の右辺第 2 項は

$$\mathcal{L}_{0\omega_k}(\theta, \omega_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_0)[\omega'_k] = \sum_{k=1}^n (-2\omega_k \omega'_k - 2\omega_k \omega'_k b(\hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_0)) \quad (4.5.9)$$

となる. また, 式 (4.5.8) の第 3 項は

$$\mathcal{L}_{\hat{\mathbf{u}}_k}(\theta, \omega_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_0)[\hat{\mathbf{u}}'_k] = \mathcal{L}_M(\theta, \omega_k, \hat{\mathbf{v}}_0, \hat{\mathbf{u}}'_k) \quad (4.5.10)$$

ここで,  $\hat{\mathbf{v}}_0$  が以下に示す随伴問題の解であるとき, 式 (4.5.9) と式 (4.5.10) は 0 となる.

**問題 4.5.3** ( $f_0$  の随伴問題)  $\theta \in \mathcal{D}$  が与えられた下で,  $(s_k, \hat{\mathbf{u}}_k)$  が問題 4.5.1 の  $k$  次の解であるとき, 任意の  $\hat{\mathbf{u}}'_k \in U$  に対して

$$\mathcal{L}_M(\theta, \omega_k, \hat{\mathbf{v}}_0, \hat{\mathbf{u}}'_k) = 0, \quad (4.5.11)$$

$$b(\hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_0) = 1 \quad (4.5.12)$$

を満たす固有振動対  $(\omega_k, \hat{\mathbf{v}}_0)$  を求めよ.  $\square$

式 (4.5.12) は  $\hat{\mathbf{v}}_0$  の正規化条件である. またこの正規化条件の下で  $\hat{\mathbf{u}}_k = \hat{\mathbf{v}}_0$  自己随伴関係が成り立つ. この解を用いれば, 式 (4.5.8) の右辺第 2 項は 0 になる. さらに, 式の右辺第 1 項は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\theta(\theta, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{v}}_0)[\vartheta] &= \int_{\hat{M}(\theta)} g_M \vartheta \, dx + \int_{\partial M(\theta) \setminus \Gamma_{p0}} g_{\partial M} \vartheta \, d\gamma \\ &= \langle g, \vartheta \rangle, \end{aligned} \quad (4.5.13)$$

となる. ここで, 簡便のため, 初期形状の境界  $\partial\Omega_0$  上の非斉次  $\Gamma_{p0}$  境界は変動しないと仮定する. すなわち式 (4.2.8) において  $\Gamma_{p0} \subset \boldsymbol{\mu}_0(\bar{D}_{C0})$  とする. ここで,

$$\begin{aligned} \hat{M}(\theta) &= \{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (\bar{x}_1, \bar{x}_2, t/2)^T \in M_T(\theta) \setminus \Gamma_{p0} \\ &\quad \text{and } (\bar{x}_1, \bar{x}_2, -t/2)^T \in M_B(\theta) \setminus \Gamma_{p0}\} \end{aligned}$$

および,

$$\begin{aligned} g_M &= \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \left\{ -\mathbf{T}_M(\hat{\mathbf{u}}_k, t/2) \cdot \left( \mathbf{E}_M(\hat{\mathbf{u}}_k) + \frac{t}{2} \mathbf{K}(\hat{\mathbf{u}}_k) \right) + \rho \omega_k^2 \hat{\mathbf{u}}_k \Big|_{\bar{x}_3=t/2} \cdot \hat{\mathbf{v}}_0 \Big|_{\bar{x}_3=t/2} \right. \\ &\quad + \mathbf{T}_M(\hat{\mathbf{u}}_k, -t/2) \cdot \left( \mathbf{E}_M(\hat{\mathbf{u}}_k) - \frac{t}{2} \mathbf{K}(\hat{\mathbf{u}}_k) \right) + \rho \omega_k^2 \hat{\mathbf{u}}_k \Big|_{\bar{x}_3=-t/2} \cdot \hat{\mathbf{v}}_0 \Big|_{\bar{x}_3=-t/2} \\ &\quad \left. + 2(\mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}}_k) \Big|_{\bar{x}_3=t/2} - 2(\mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}}_k) \Big|_{\bar{x}_3=-t/2} \right\}, \end{aligned} \quad (4.5.14)$$

$$g_{\partial M} = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \left\{ -\mathbf{T}_M(\hat{\mathbf{u}}_k) \cdot \mathbf{E}_M(\hat{\mathbf{v}}_0) - c_S \mathbf{m}(\hat{\mathbf{u}}_k) \cdot \boldsymbol{\gamma}(\hat{\mathbf{v}}_0) \right. \\ \left. - \mathbf{M}(\hat{\mathbf{u}}_k) \cdot \mathbf{K}(\hat{\mathbf{v}}_0) + \rho \omega_k^2 \hat{\mathbf{u}}_k \cdot \hat{\mathbf{v}}_0 + 2(\bar{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{kM} + \bar{p}_{N3} w - \bar{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{q}) \right\}. \quad (4.5.15)$$

である。

#### 4.5.4 ビード形状最適化問題の解法

問題 4.5.2 の解  $\hat{\mathbf{u}}_k$  を用いれば,  $g$  は  $f$  の  $\theta$  微分となる.  $\theta$  微分が得られれば, 前節で述べた  $\theta$  型  $H^1$  勾配法を用いて形状変動量  $\vartheta_g \in X$  を求めることができる. また, 形状更新量が求まれば, 第 2 章で述べた逐次 2 次計画法による反復計算を用いて最適なビード形状を求めることができる.

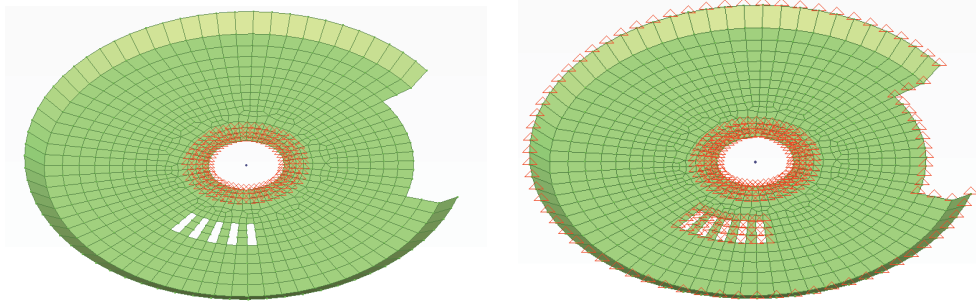
#### 4.5.5 数値計算例

数値計算例を以下に示す. 以下の数値結果は, 評価関数の形状微分の評価は開発したインハウスコードを用いた. また問題 4.5.1 の計算では Abaqus 6.9 (Dassault Systèmes) を利用した.  $H^1$  勾配法の計算では OPTISHAPE-TS 2011 (Quint) を利用した.

検証モデルとして簡易ダストカバーモデル ( $D = M_0$ , 外径の直径 = 300 [mm], 板厚  $t = 1$  [mm]) を用いた. ここで,  $D$  は最外径部のフランジを除く円盤領域とする. 図 4.5.1 (a) と図 4.5.1 (b) にそれぞれ問題 4.5.1 と問題 4.5.2 における境界条件をしめす. Young 率, Poisson 比, 密度はそれぞれ 210 [GPa], 0.3,  $7.9 \times 10^3$  [kg/m<sup>3</sup>] とした. また, 創生するビード高さは  $h = 10$  [mm] とした. また, 式 (4.5.7) では  $n = 3$ ,  $\alpha_1 = 3.0$ ,  $\alpha_1 = 2.0$ ,  $\alpha_1 = 1.0$  とし, 式 (4.3.34) の  $c_\Omega$  には  $10^{-2}$  [1/mm<sup>2</sup>] を用いた.

初期形状における 3 次までの固有振動数と固有振動モードを図 4.5.2 の (a) から (c) に示す.  $f$  の形状更新に対する収束履歴を図 4.5.3 に示す. 形状更新に伴い  $f$  が単調に増加し, 最終的に 4984.3% となった.

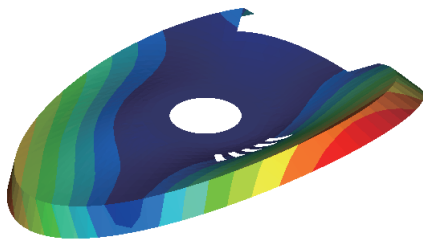
次にビード最適化計算後の結果を示す. 図 4.5.4 は最適化後の形状を示す. また, 図 4.5.2 の (d) から (f) に最適化の固有振動数と固有振動モードを示す. 初期形状では 36.4Hz であった 1 次の固有振動数が, 最適化後では 225.3 Hz となった. 路面からの入力周波数は概ね 200 Hz 以下であることを考慮すると, 路面入力と共振を避けることができる形状が得られたと判断できる. また, 最適化後の形状をみると初期において, それぞれ振動の節であった部位にビードが創生されていることが確認できる. これによって, それぞれの振動モードの変形に対する剛性が向上したため, 固有振動数が増加したと考察できる.



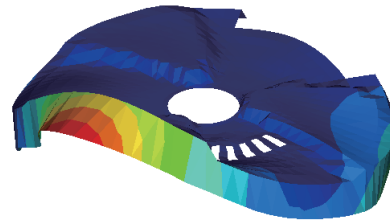
(a) 問題 4.5.1 の境界条件

(b) 問題 4.5.2 の境界条件

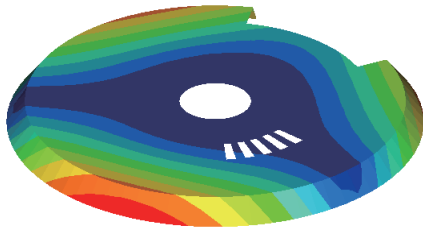
図 4.5.1: 計算モデル



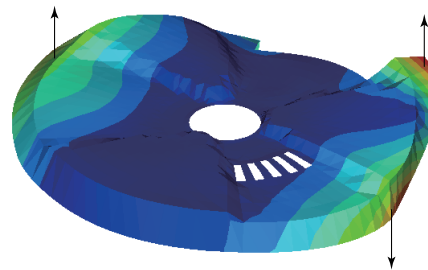
(a) 1 次固有振動モード (36.4Hz)



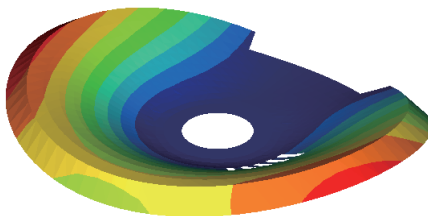
(d) 1 次固有振動モード (225.3Hz)



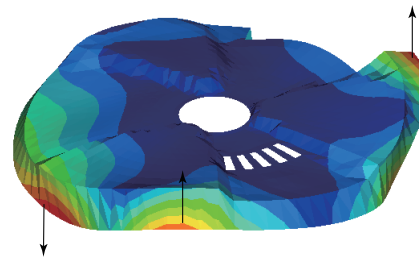
(b) 2 次固有振動モード (48.0Hz)



(e) 2 次固有振動モード (232.3Hz)



(c) 3 次固有振動モード (51.6Hz)



(f) 3 次固有振動モード (233.1Hz)

図 4.5.2: 最適化前後の固有振動モードの比較 (左:初期形状, 右:最適化後形状)



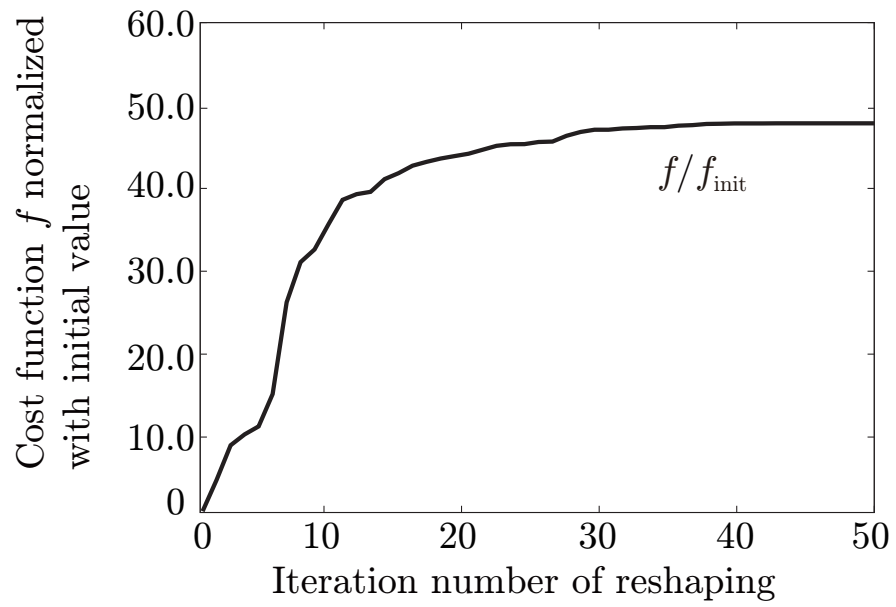
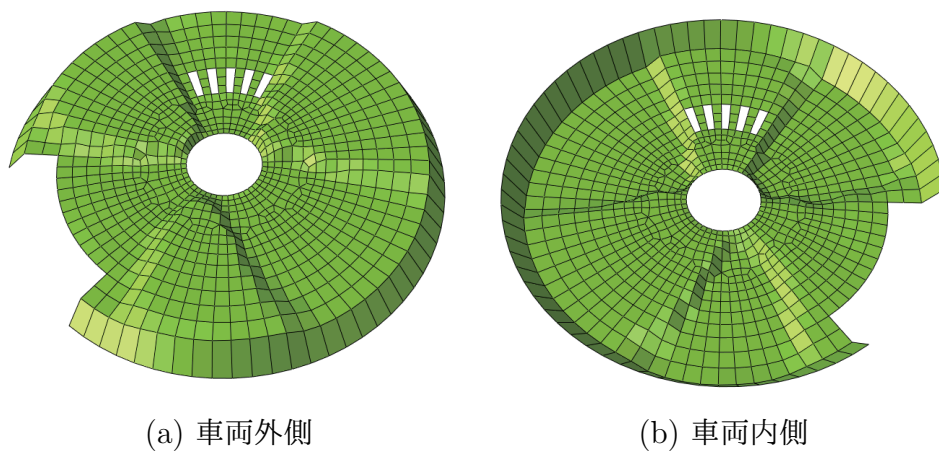
図 4.5.3: 形状更新に対する  $f$  の更新履歴

図 4.5.4: ビード形状最適化後の結果



## 4.6 まとめ

この章ではノンパラメトリック形状最適化手法に基づく新しいビード最適化手法を提案した。提案手法では、従来の課題であったビード高さに対する領域変動を考慮した設計変数を選んだ。具体的には、トポロジー最適化 [84] で用いられているシグモイド関数を利用して設計変数を定義することを考えた。このような設計変数の選び方によるノンパラメトリック形状最適化手法により、ビード高さに対する領域変動を考慮した下で滑らかなビード形状が創生することが可能であることを示した。

提案手法を用いた具体的な問題として平均コンプライアンス最小化問題と固有振動数最大化問題の解法を示した。平均コンプライアンス最小化問題における数値例では、片持ちはりの曲げとねじりの問題に適用し、提案手法の妥当性を確認した。また、固有振動数最大化問題における数値例では、応用例として、ダストカバーモデルに適用し、提案手法の有用性を示した。

## 第 5 章

# 非線形弾性問題への形状最適化の応用

### 5.1 はじめに

近年，計算機の性能向上に伴い，幾何学的非線形性や材料非線形性などの非線形性を考慮した CAE は設計開発の現場で欠かせない技術になっている．例えば，自動車の設計開発においては，タイヤやゴムブッシュなど超弾性材料の大変形や，プレス成型や衝突解析における弾塑性現象など様々な分野で利用されている．本章ではこのような非線形性を有する現象を主問題とする形状最適化問題を定義し，その解法を示す．

設計変数として形状のパラメータを選んだ時の非線形応答に対する感度解析はこれまでに多くの方法が研究されている [85–87]．このような計算は設計感度解析とよばれている．このような設計感度解析の結果を用いた形状最適化の研究としては例えば古矢らの研究がある [88]．また，プレス成型解析や衝突解析のように負荷経路依存性の強い非線形現象では，設計感度解析の計算コストが大きいとため，応答曲面法による最適化手法が利用されている [89, 90]．これらの方法は設計変数を離散後の形状パラメータに設定した寸法最適化として分類され，設計変数が大きい大規模な問題に対しては計算コストの面で適用が困難であると考えられる．

一方，ノンパラメトリック形状最適化を用いた方法としては井原ら [91] の研究がある．この研究では，幾何学的非線形性と材料非線形性を考慮した負荷経路依存問題に対する形状最適化手法が提案されている．また，形状感度解析において随伴変数法が用いられており，外力が単調増加であると仮定することによって準自己随伴関係 (随伴問題を直接解かなくても随伴変位を求めることが可能) が成立することを示している．井原らが提案したこの方法は，負荷経路依存問題を対象にしていることから，各時刻における釣り合い状態の状態量を考慮した形状感度の評価が必要となる．そのため，超弾性体の変形のような負荷経路非依存問題に対しては適用することは可能であるが，計算コストが懸念される．

本研究では、超弾性体の大変形のような負荷経路非依存問題に対する形状最適化問題を定義し、その解法を示す。その結果、主問題を全ひずみ理論に基づいて定義することで、随伴問題が大変形後の釣り合い状態における状態量のみを用いて評価できる。この結果は従来の方法に対して計算コストの面で優れていると判断できる。

本章の構成は以下の通りである。第 5.2 節では超弾性体の構成則を、第 5.3 節では超弾性体の大変形問題についてそれぞれ述べる。第 5.4 節ではゴムブッシュの形状設計への応用例を示す。具体的には、所望の負荷特性との 2 乗誤差和と、体積を評価関数とする形状最適化問題を構成し、その解法を示す。最後に、5.5 節ではサスペンションアームの座屈強度設計への応用例を示す。

## 5.2 超弾性体の構成則

この節では設計変数を領域の写像  $\phi$  に選んだとき、 $\Omega(\phi)$  上で定義された超弾性体が外力により大変形したときの変位を求める問題を主問題として定義する。本研究では非線形性として幾何学的非線形性と材料非線形性を扱う。

最大負荷時の時刻を  $t_T$  とし、時間領域  $(0, t_T) \subset \mathbb{R}$  を考える。  $\mathbf{b} : (0, t_T) \times D_0 \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\mathbf{p}_N : (0, t_T) \times D_0 \rightarrow \mathbb{R}^d$  および  $\mathbf{u}_D : (0, t_T) \times D_0 \rightarrow \mathbb{R}^d$  をそれぞれ物体力、外力、強制変位とする。また、これらは時間に対して単調増加な関数とする。

$\mathbf{u} : (0, t_T) \times D_0 \rightarrow \mathbb{R}^d$  を領域  $\Omega(\phi)$  で定義された大変形問題の解である変位とすると、大変形における弾性体の変形を表す写像は  $\mathbf{y} = \mathbf{i} + \mathbf{u} : (0, t_T) \times D_0 \rightarrow \mathbb{R}^d$  とかける。ただし、 $\mathbf{i}$  は単位写像を表す。このとき、物質点  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)^T \in D_0$  に対する変形勾配テンソルは

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = (\partial y_i / \partial x_j)_{ij} = (\nabla \mathbf{y}^T)^T = \mathbf{I} + (\nabla \mathbf{u}^T)^T \quad (5.2.1)$$

とかける。本論文では、 $(\cdot)^T$  は転置を表し、 $\mathbf{I}$  は  $d$  次の単位テンソルを表す。変形勾配テンソルを用いれば Green-Lagrange ひずみテンソルは

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = (e_{ij}(\mathbf{u}))_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T(\mathbf{u}) \mathbf{F}(\mathbf{u}) - \mathbf{I}) = \mathbf{E}_L(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} \mathbf{E}_B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad (5.2.2)$$

とかける。ただし、

$$\mathbf{E}_L(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^T + (\nabla \mathbf{u}^T)^T), \quad (5.2.3)$$

$$\mathbf{E}_B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^T (\nabla \mathbf{v}^T)^T + \nabla \mathbf{v}^T (\nabla \mathbf{u}^T)^T), \quad (5.2.4)$$

をそれぞれ  $\mathbf{E}(\mathbf{u})$  の線形項と双線形項として定義した。超弾性体の構成則は弾性ポテンシャル関数  $\pi : \mathbb{R}^{d \times d} \rightarrow \mathbb{R}$  を仮定し、第 2Piola–Kirchhoff 応力テンソルは

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}) = \frac{\partial \pi(\mathbf{E}(\mathbf{u}))}{\partial \mathbf{E}(\mathbf{u})} = \mathbf{D}(\mathbf{E}(\mathbf{u})) : \mathbf{E}(\mathbf{u})$$

$$= \left( \sum_{(k,l) \in \{1, \dots, d\}^2} c_{ijkl}(\mathbf{E}(\mathbf{u})) e_{kl}(\mathbf{u}) \right)_{ij}, \quad (5.2.5)$$

とかける. ここで,  $\mathbf{D}(\mathbf{E}(\mathbf{u})) = (c_{ijkl}(\mathbf{E}(\mathbf{u})))_{ijkl} : D_0 \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d \times d \times d}$  は剛性を表し, 楕円性と有界性を仮定する. また, 第 1 Piola–Kirchhoff 応力テンソルは

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{u}) = \mathbf{S}(\mathbf{u}) \mathbf{F}^T(\mathbf{u}) \quad (5.2.6)$$

とかくことができる.

### 5.3 非線形大変形問題

上記の定義と仮定を用いると, 超弾性体の大変形問題は以下のようにかける.

**問題 5.3.1 (非線形大変形問題)**  $\phi$  が与えられたとき,

$$\begin{aligned} -\nabla^T \mathbf{\Pi}(\mathbf{u}) &= \mathbf{b}^T \quad \text{in } (0, t_T) \times \Omega(\phi), \\ \mathbf{\Pi}^T(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{on } (0, t_T) \times \Gamma_N(\phi) \setminus \bar{\Gamma}_p(\phi), \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_D \quad \text{on } (0, t_T) \times \Gamma_D(\phi). \end{aligned}$$

を満たす  $\mathbf{u}$  を求めよ. □

ここで,  $\boldsymbol{\nu}$  は  $\partial\Omega(\phi)$  における法線を表す. 以降  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  を  $\mathbf{u}(t)$  あるいは  $\mathbf{u}$  とかくことにする. 次に, 第 2 章で示した手順に従い, 非線形大問題の弱形式を導く.  $U$ ,  $S$  はそれぞれ式 (2.3.1) と式 (2.3.2) とする.  $\Gamma_D(\phi)$  上で  $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$  となる任意の  $\mathbf{v} \in U$  を式 (5.3.1) にかけて,  $\Omega(\phi)$  で積分し, 発散定理を用いれば

$$\int_{\Omega(\phi)} \nabla^T \mathbf{\Pi}(\mathbf{u}) \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_{D_0}} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) \cdot (\mathbf{\Pi}^T(\mathbf{v}) \boldsymbol{\nu}) \, d\gamma = 0 \quad (5.3.1)$$

となる. 左辺 1 項目は次のように書き直すことができる, :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(\phi)} \nabla^T \mathbf{\Pi}(\mathbf{u}) \mathbf{v} \, dx \\ &= \int_{\Omega(\phi)} \{ \nabla \cdot (\mathbf{\Pi}(\mathbf{u}) \mathbf{v}) - \mathbf{\Pi}(\mathbf{u}) \cdot (\nabla \mathbf{v}^T) \} \, dx \\ &= \int_{\partial\Omega(\phi)} (\mathbf{\Pi}(\mathbf{u}) \mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\gamma - \int_{\Omega(\phi)} \mathbf{\Pi}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{F}'^T(\mathbf{u})[\mathbf{v}] \, dx, \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

ここで, 以下の定義を用いた.

$$\mathbf{F}'[\mathbf{v}] = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}^T} = (\nabla \mathbf{v}^T)^T.$$

さらに,  $\mathbf{S}(\mathbf{u}) = \mathbf{S}^T(\mathbf{u})$  を考慮すると,

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega(\phi)} \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{F}'^T(\mathbf{u})[\mathbf{v}] \, dx \\
& = - \int_{\Omega(\phi)} (\mathbf{S}(\mathbf{u}) \mathbf{F}^T(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{F}'^T(\mathbf{u})[\mathbf{v}] \, dx \\
& = - \int_{\Omega(\phi)} \mathbf{F}'(\mathbf{u})[\mathbf{v}] \cdot (\mathbf{F}(\mathbf{u}) \mathbf{S}(\mathbf{u})) \, dx \\
& = - \int_{\Omega(\phi)} \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}'(\mathbf{u})[\mathbf{v}] \, dx
\end{aligned} \tag{5.3.3}$$

が成り立つ. ただし, 以下の定義を用いた.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}'(\mathbf{u})[\mathbf{v}] &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}'^T[\mathbf{v}] \mathbf{F}(\mathbf{u}) + \mathbf{F}^T(\mathbf{u}) \mathbf{F}'[\mathbf{v}]) \\
&= \mathbf{E}_L(\mathbf{v}) + \mathbf{E}_B(\mathbf{u}, \mathbf{v})
\end{aligned}$$

さらに, 式 (5.3.2) と式 (5.3.3) を用いれば式 (5.3.1) は

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \tag{5.3.4}$$

とかくことができる. ここで,  $a(\cdot, \cdot)$  と  $l(\cdot)$  は

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = - \int_{\Omega(\phi)} \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}'(\mathbf{u})[\mathbf{v}] \, dx \tag{5.3.5}$$

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_{D_0}} \{(\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) \cdot (\boldsymbol{\Pi}^T(\mathbf{v}) \boldsymbol{\nu}) + \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\Pi}^T(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu})\} d\gamma \tag{5.3.6}$$

である. 次に次章以降の形状最適化問題では, 上記主問題を等式制約として利用するため, 大変形問題の弱形式に対する Lagrange 関数を次のように定義しておく.

$$\mathcal{L}_M(\phi, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = -a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + l(\mathbf{v}) \tag{5.3.7}$$

## 5.4 荷重-変位曲線規定問題

本節では，ゴムブッシュの荷重-変位曲線を規定の曲線と一致させる形状最適化問題を考える．ゴムブッシュは車両のサスペンション等で用いられ，エンジンや路面からの車内への振動を遮断する役目を担う．ゴム材料は材料非線形性を有し，一般的に構成式には超弾性材料が用いられる．超弾性の構成式には多くの種類が提案されており [92]，これらの構成式に基づき，有限要素法を用いたゴムブッシュの解析事例はこれまでに数多く提案されてきた [93, 94]．

また，一方で形状最適化手法を用いたゴムブッシュ形状の最適化の数値解法も多く提案されている [95, 96]．これらの研究では，静的な弾性変形に対する反力の荷重履歴を所望の特性となるように形状を最適化することが目的となっており，所望の特性との 2 乗誤差和が目的関数に選ばれている．これらの研究は形状を制御するパラメータを設計変数に選ぶパラメータ最適化が利用されている．しかしながら，形状設計においては，ゴムの形状の自由曲面の設計が求められる場合が多く，形状パラメータを設定することは容易ではない．

そこで，本研究ではゴムブッシュの荷重履歴に対する 2 乗誤差を目的関数とするノンパラメトリック形状最適化問題を構成し，その解法を示す．

### 5.4.1 形状最適化問題

前節で定義した問題 5.3.1 を主問題としたゴムブッシュの形状最適化問題を考える．ただし，式 (5.2.5) で定義したひずみポテンシャル関数  $\pi$  の具体的な形として以下に示す Yeoh モデル を用いる．

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{E}(\mathbf{u})) &= e_1 (i_1(\mathbf{u}) - 3) + e_2 (i_1(\mathbf{u}) - 3)^2 \\ &\quad + e_3 (i_1(\mathbf{u}) - 3)^3 + \frac{1}{d_1} (i_3(\mathbf{u}) - 1)^2 \\ &\quad + \frac{1}{d_2} (i_3(\mathbf{u}) - 1)^4 + \frac{1}{d_3} (i_3(\mathbf{u}) - 1)^6, \end{aligned}$$

$i_1(\mathbf{u})$  と  $i_3(\mathbf{u})$  はそれぞれ 1 次と 3 次の低減不変量を表し，

$$\begin{aligned} i_1(\mathbf{u}) &= i_3^{-2/3}(\mathbf{u}) (c_1^2(\mathbf{u}) + c_2^2(\mathbf{u}) + c_3^2(\mathbf{u})), \\ i_3(\mathbf{u}) &= \det \mathbf{F}(\mathbf{u}), \end{aligned}$$

のようにかける．ここで， $c_1(\mathbf{u})$ ， $c_2(\mathbf{u})$  および  $c_3(\mathbf{u})$  は右 Cauchy-Green テンソル  $\mathbf{C}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}^T(\mathbf{u})\mathbf{F}(\mathbf{u}) = 2\mathbf{E}(\mathbf{u}) + \mathbf{I}$  の主値である．また， $e_1, e_2, e_3, d_1, d_2$  および  $d_3$  は材料定数である．

以上の定義の下で、主問題の解  $\mathbf{u}$  を用いて形状最適化問題を定義する。  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  をそれぞれ時刻  $t_1, \dots, t_m \in (0, t_T]$  における  $\mathbf{u}_D \cdot (\mathbf{\Pi}(\mathbf{u})\boldsymbol{\nu})$  の所望の値とする。これらを用いて本研究では目的関数を

$$f_0(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}) = \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} f_{0i}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}(t_i)) \quad (5.4.1)$$

のように定義する。ここで、

$$f_{0i}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}(t_i)) = \int_{\Gamma_{D0}} |\mathbf{u}_D(t_i) \cdot (\mathbf{\Pi}(\mathbf{u}(t_i))\boldsymbol{\nu}) - \alpha_i|^2 dx.$$

である。また制約関数を

$$f_1(\boldsymbol{\phi}) = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} dx - c_1 \quad (5.4.2)$$

と定義する。ここで、  $c_1$  は  $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}$  が与えられたときに  $f_1(\boldsymbol{\phi}) \leq 0$  となる正の定数である。これらの評価関数を用いて、以下の形状最適化問題を定義する。

**問題 5.4.1 (2乗誤差最小化問題)**  $f_0(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u})$  と  $f_1(\boldsymbol{\phi})$  がそれぞれ式 (5.4.1) と式 (5.4.2) によって定義されたとき、

$$\begin{aligned} & \min_{\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}} \{f_0(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}) \mid f_1(\boldsymbol{\phi}) \leq 0, \\ & \quad \mathbf{u}(t) \in \mathcal{S}, t \in (0, t_T), \text{ Problem 5.3.1}\}. \end{aligned}$$

を満たす  $\boldsymbol{\phi}$  を求めよ。 □

## 5.4.2 評価関数の形状微分

前節で定義した形状最適化問題を勾配法を用いて解くために、本節では目的関数  $f_0$  と制約関数  $f_1$  の形状変動に対する Fréchet 微分を導出する。目的関数  $f_0$  は主問題の解である  $\mathbf{u}$  を含むので、主問題を等式制約として考慮し、  $f_0$  に対する Lagrange 関数を

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \mathcal{L}_{0i}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}(t_i), \mathbf{v}_{0i}) \\ &= \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} (f_{0i}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}(t_i)) + \mathcal{L}_M(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}(t_i), \mathbf{v}_{0i})) \end{aligned}$$

のように定義する。ここで、  $\mathbf{v}_{0i} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  は問題 5.3.1 の時刻  $t = t_i$  で定義した主問題に対する Lagrange 乗数である。  $\mathcal{L}_0$  の任意の形状変動  $\boldsymbol{\varphi} \in Y$  に対する形状微分は

$$\mathcal{L}'_{0i}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}(t_i), \mathbf{v}_{0i})[\boldsymbol{\varphi}]$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{L}_{0i\phi}(\phi, \mathbf{u}(t_i), \mathbf{v}_{0i})[\varphi] \\
&+ \mathcal{L}_{0iu(t_i)}(\phi, \mathbf{u}(t_i), \mathbf{v}_{0i})[\mathbf{u}'(t_i)] \\
&+ \mathcal{L}_{0iv_{0i}}(\phi, \mathbf{u}(t_i), \mathbf{v}_{0i})[\mathbf{v}'_{0i}], \tag{5.4.3}
\end{aligned}$$

のようになる。ここで、 $\mathbf{u}$  が問題 5.3.1 の解であれば、式 (5.4.3) の右辺第 3 項は 0 になる。また式 (5.4.3) の右辺第 2 項は

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{0iu(t_i)}(\phi, \mathbf{u}(t_i), \mathbf{v}_{0i})[\mathbf{u}'(t_i)] \\
&= - \int_{\Omega(\phi)} (\mathbf{S}'(\mathbf{u}(t_i))[\mathbf{u}'(t_i)] \cdot \mathbf{E}'(\mathbf{u}(t_i))[\mathbf{v}_{0i}] \\
&\quad + \mathbf{S}(\mathbf{u}(t_i)) \cdot \mathbf{E}''(\mathbf{u}(t_i))[\mathbf{v}_{0i}, \mathbf{u}'(t_i)]) dx \\
&\quad + \int_{\Gamma_{D0}} \left[ \mathbf{u}'(t_i) \cdot (\mathbf{\Pi}(\mathbf{v}_{0i}) \boldsymbol{\nu}) + \{ \mathbf{v}_{0i} \right. \\
&\quad \left. + 2(\mathbf{u}_D(t_i) \cdot (\mathbf{\Pi}(\mathbf{u}(t_i)) \boldsymbol{\nu}) - \alpha_i \mathbf{u}_D(t_i)) \right. \\
&\quad \left. \cdot (\mathbf{\Pi}'(\mathbf{u}(t_i))[\mathbf{u}'(t_i)] \boldsymbol{\nu}) \right] d\gamma \tag{5.4.4}
\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}'(\mathbf{u})[\mathbf{v}] &= \mathbf{D}(\mathbf{E}(\mathbf{u})) \mathbf{E}'(\mathbf{u})[\mathbf{v}], \\
\mathbf{E}''(\mathbf{u})[\mathbf{v}, \mathbf{w}] &= \mathbf{E}_{BL}(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \\
\mathbf{\Pi}'(\mathbf{u})[\mathbf{v}] &= \mathbf{S}'(\mathbf{u})[\mathbf{v}] \mathbf{F}^T(\mathbf{u}) + \mathbf{S}(\mathbf{u}) \mathbf{F}'^T(\mathbf{u})[\mathbf{v}].
\end{aligned}$$

である。ここで、式 (5.3.3) を用いれば式 (5.5.4) は

$$\begin{aligned}
&- \int_{\Omega(\phi)} (\mathbf{S}'(\mathbf{u}(t_i))[\mathbf{u}'(t_i)] \cdot \mathbf{E}'(\mathbf{u}(t_i))[\mathbf{v}_{0i}] \\
&\quad + \mathbf{S}(\mathbf{u}(t_i)) \cdot \mathbf{E}''(\mathbf{u}(t_i))[\mathbf{v}_{0i}, \mathbf{u}'(t_i)]) dx \\
&= - \int_{\Omega(\phi)} \mathbf{\Pi}'(\mathbf{u}(t_i))[\mathbf{v}_{0i}] \cdot \mathbf{F}'(\mathbf{u}(t_i))[\mathbf{u}'(t_i)] dx
\end{aligned}$$

のようにかかる。さらに、境界  $\Gamma_{D0}$  で関係  $\mathbf{u}'(t_i) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$  および、境界  $\Gamma_N(\phi)$  で  $\mathbf{\Pi}'(\mathbf{u}(t_i))[\mathbf{v}_{0i}] \boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$  を用いれば

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega(\phi)} (\mathbf{\Pi}'(\mathbf{u}(t_i))[\mathbf{v}_{0i}] \mathbf{u}'(t_i)) \cdot \boldsymbol{\nu} d\gamma \\
&\quad - \int_{\Omega(\phi)} \mathbf{\Pi}'(\mathbf{u}(t_i))[\mathbf{v}_{0i}] \cdot \mathbf{F}'(\mathbf{u}(t_i))[\mathbf{u}'(t_i)] dx \\
&= \int_{\Omega(\phi)} \nabla^T \mathbf{\Pi}'(\mathbf{u}(t_i))[\mathbf{v}_{0i}] \mathbf{u}'(t_i) dx
\end{aligned}$$

を得る。上記より式 (5.5.4) は境界  $\Gamma_{D0}$  上で  $\mathbf{u}'(t_i) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$  となるすべての  $\mathbf{u}'(t_i)$  に対して

$$\mathcal{L}_{0iu(t_i)}(\phi, \mathbf{u}(t_i), \mathbf{v}_{0i})[\mathbf{u}'(t_i)]$$



$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega(\phi)} \nabla^T \Pi'(\mathbf{u}(t_i)) [\mathbf{v}_{0i}] \mathbf{u}'(t_i) \, dx \\
&\quad + \int_{\Gamma_{D0}} \left[ \mathbf{u}'(t_i) \cdot (\Pi(\mathbf{v}_{0i}) \boldsymbol{\nu}) + \{\mathbf{v}_{0i} \right. \\
&\quad \left. + 2(\mathbf{u}_D(t_i) \cdot (\Pi(\mathbf{u}(t_i)) \boldsymbol{\nu}) - \alpha_i \mathbf{u}_D(t_i)) \right. \\
&\quad \left. \cdot (\Pi'(\mathbf{u}(t_i)) [\mathbf{u}'(t_i)] \boldsymbol{\nu}) \right] d\gamma
\end{aligned}$$

のようにかくことができる。さらに、 $\mathbf{v}_{0i}$  が以下の随伴問題の解であるとき式 (5.5.4) は 0 となる。

**問題 5.4.2** ( $f_0$  の随伴問題)  $\mathbf{u}(t_i)$  が問題 5.3.1 の解のとき

$$\begin{aligned}
&-\nabla^T \Pi'(\mathbf{u}(t_i)) [\mathbf{v}_{0i}] = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ in } \Omega(\phi), \\
&\Pi'(\mathbf{u}(t_i)) [\mathbf{v}_{0i}] \boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \Gamma_N(\phi), \\
&\mathbf{v}_{0i} = -2(\mathbf{u}_D(t_i) \cdot (\Pi(\mathbf{u}(t_i)) \boldsymbol{\nu}) - \alpha_i \mathbf{u}_D(t_i)) \text{ on } \Gamma_{D0}
\end{aligned}$$

を満たす  $\mathbf{v}_{0i} : \Omega(\phi) \rightarrow \mathbb{R}^d$  を求めよ。 □

$H^1$  勾配法で求めた領域変動が  $Y$  に属するためには、 $\tilde{\mathbf{v}}_{0i}$  は  $\mathcal{S}$  に属している必要がある [97]。ここで、 $\tilde{\mathbf{v}}_{0i}$  は  $\Gamma_{D0}$  上で  $\tilde{\mathbf{v}}_{0i} = \mathbf{v}_{0i} + 2(\mathbf{u}_D(t_i) \cdot (\Pi(\mathbf{u}(t_i)) \boldsymbol{\nu}) - \alpha_i \mathbf{u}_D(t_i)) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$  である。

$\mathbf{u}(t_i)$  と  $\mathbf{v}_{0i}$  がそれぞれ問題 5.3.1 と問題 5.5.2 の解であるとき、式 (5.5.3) は

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{0i\phi}(\phi, \mathbf{u}(t_i), \mathbf{v}_{0i})[\boldsymbol{\varphi}] &= f'_{0i}(\phi, \mathbf{u})[\boldsymbol{\varphi}] \\
&= \int_{\Gamma_N(\phi)} \bar{\mathbf{g}}_{0iN} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\gamma = \langle \bar{\mathbf{g}}_{0i}, \boldsymbol{\varphi} \rangle
\end{aligned} \tag{5.4.5}$$

のようになる。ここで、

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{g}}_{0iN} &= \left\{ \left| \mathbf{u}_D(t_i) \cdot (\Pi(\mathbf{u}(t_i)) \boldsymbol{\nu}) - \alpha_i \right|^2 \right. \\
&\quad \left. - \mathbf{S}(\mathbf{u}(t_i)) \cdot \mathbf{E}'(\mathbf{u}(t_i)) [\mathbf{v}_{0i}] \boldsymbol{\nu} \right\}.
\end{aligned}$$

である。よって  $f_0$  の Fréchet 微分は

$$f'_0(\phi, \mathbf{u})[\boldsymbol{\varphi}] = \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \langle \bar{\mathbf{g}}_{0i}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \langle \bar{\mathbf{g}}_0, \boldsymbol{\varphi} \rangle. \tag{5.4.6}$$

となる。さらに  $f_1$  の Fréchet 微分は

$$f'_1(\phi)[\boldsymbol{\varphi}] = \int_{\Gamma_N(\phi)} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\gamma = \langle \bar{\mathbf{g}}_1, \boldsymbol{\varphi} \rangle. \tag{5.4.7}$$

となる。

以上より、評価関数に対する形状微分を導出したので、問題 5.5.1 は逐次 2 次計画法と  $H^1$  勾配法を用いることで解くことができる。

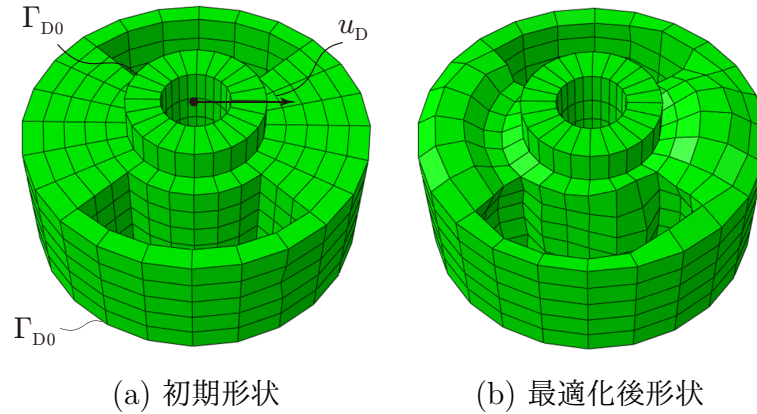


図 5.4.1: 最適化前後の形状の比較

### 5.4.3 数値計算例

数値計算例を以下に示す。以下の数値結果は、評価関数の形状微分の評価は開発したインハウスコードを用いた。また問題 5.3.1 と問題 5.5.2 の計算では Abaqus 6.9 (Dassault Systèmes) を利用した。また、 $H^1$  勾配法の計算では OPTISHAPE-TS 2011 (Quint) を利用した。

図 5.4.1 (a) に簡易ブッシュモデルを示す。内筒の内側表面上の節点は、その中心に位置する節点との間を剛体要素で結合し、図の方向に強制変位 5.0 [mm] を与えた。また、外筒の外側表面上の節点は拘束した。内筒と外筒は Young 率と Poisson 比はそれぞれ 71 [GPa] と 0.3 とした。

$f_0$  の評価にあたっては、規定する特性として  $m = 3$ ,  $\{\|\mathbf{u}_D(t_1)\|, \|\mathbf{u}_D(t_2)\|, \|\mathbf{u}_D(t_3)\|\} = \{2.5, 3.75, 5.0\}$  [mm] とした。また、 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  にはそれぞれ時刻  $t = t_1, t_2, t_3$  における  $\mathbf{u}_D \cdot (\mathbf{\Pi}(\mathbf{u})\boldsymbol{\nu})$  の値を初期値に対して、 $-10\%$ , 変化なし,  $+10\%$  とした。

図 5.4.1 (b) に最適化後の形状を示す。また、図 5.4.2 に強制変位負荷点の変位  $\|\mathbf{u}_D(t)\|$  と反力  $\|\int_{\Gamma_{D0}} \mathbf{\Pi}(\mathbf{u}(t))\boldsymbol{\nu} d\gamma\|$  のグラフを示す。また、図 5.4.3 に形状更新に対する評価関数の収束履歴を示す。ここで  $f_{0\text{init}}$  と  $c_1$  は初期形状における  $f_0$  の値と体積をである。

形状更新に伴い  $f_1$  を満たしつつ  $f$  が単調に減少した結果、目的関数で指定した所望の変位荷重特性が得られたことが確認できる。さらに、図 5.4.4 に時刻  $t = t_1, t_2, t_3$  における最適化前後の von Mises 応力分布を示す。時刻  $t = t_1$  の時点の比較をみると、最適化後形状では初期形状に比べて引っ張りによる応力が立ち上がっていることが分かる。このことによって、時刻  $t = t_1$  で狙いとした反力  $+10\%$  が達成できたと考察できる。また、時刻  $t = t_3$  の時点の比較をみると、最適化後形状では初期形状に比べて

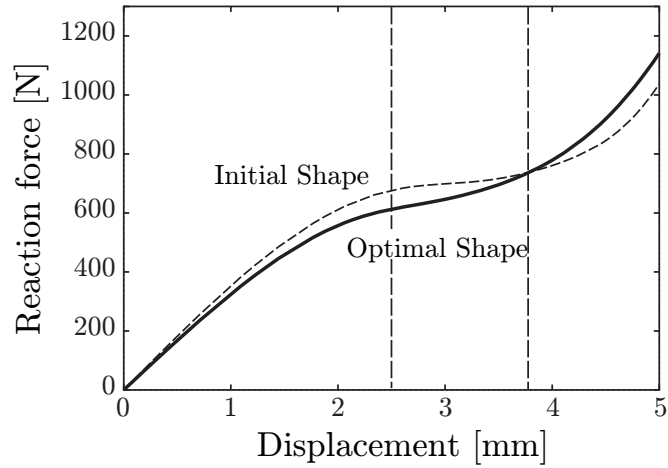


図 5.4.2: 最適化前後の荷重履歴の比較

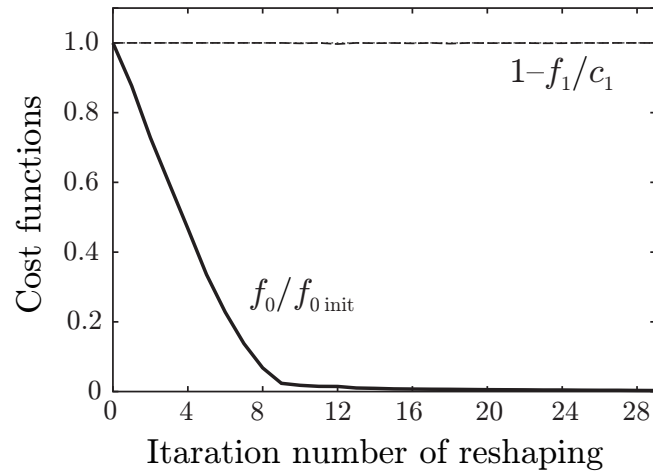


図 5.4.3: 形状更新に対する評価関数の更新履歴

圧縮側の形状が軸方向に盛り上がる形状になっていることが確認できる。この盛り上がりによって圧縮による応力の立ち上がりが緩和していた結果、時刻  $t = t_3$  で狙いとした反力  $-10\%$  が達成できたと考察できる。

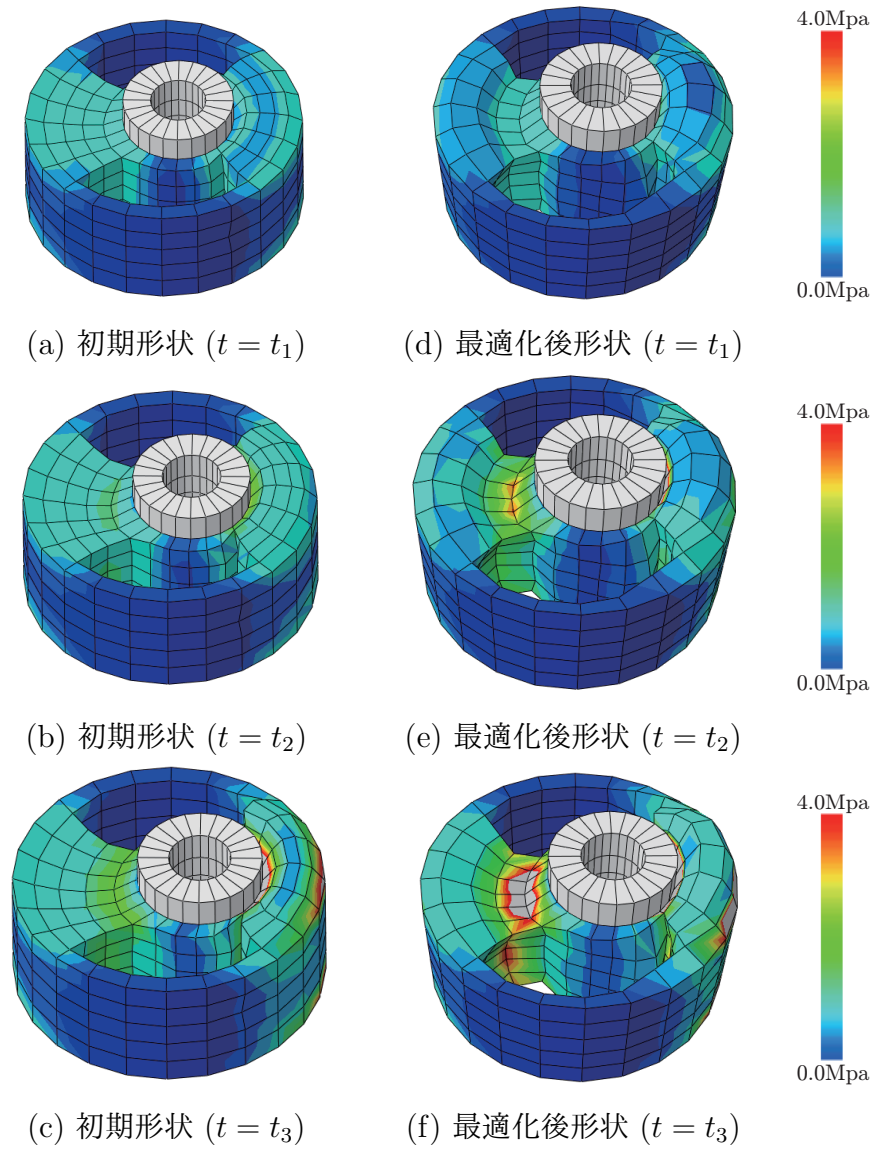


図 5.4.4: 最適化前後の Mises 応力の比較

## 5.5 最大反力最大化問題

自動車のサスペンションアームの設計では、縁石の乗り上げを想定し、塑性変形を許したもとの変形を一定限度内に抑えることが要求される。本節では、このようなサスペンションアームが大荷重を受けて塑性変形を含む大変形を生じたときの強度を最大化させるための形状最適化問題を定義し、その解法を示す。ここで想定している縁石の乗り上げのように、外力が単調増加である場合は、理論が簡潔になるという理由で、塑性を含む変形であっても弾性ポテンシャルが存在すると仮定する全ひずみ理論が用いられる。そこで、本研究では、前節で定義した問題 5.3.1 を主問題と考える。本研究の内容の一部は文献 [28] を引用している。

### 5.5.1 形状最適化問題

本研究では、主問題の解 5.3.1  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t_T)$  を用いて目的関数を

$$f_0(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}) = \int_{\Gamma_{D_0}} \mathbf{u}_1 \cdot (\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu}) dx. \quad (5.5.1)$$

のように定義する。ここで  $\mathbf{u}_1$  は  $\mathbf{u}_D$  方向の単位ベクトルであり、荷重点の反力ベクトル  $\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu}$  をスカラー化させるために導入する。また制約関数を

$$f_1(\boldsymbol{\phi}) = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} dx - c_1 \quad (5.5.2)$$

と定義する。ここで、 $c_1$  は  $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}$  が与えられたときに  $f_1(\boldsymbol{\phi}) \leq 0$  となる正の定数である。これらの評価関数を用いて、以下の形状最適化問題を定義する。

**問題 5.5.1 (2乗誤差最小化問題)**  $f_0(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u})$  と  $f_1(\boldsymbol{\phi})$  がそれぞれ式 (5.5.1) と式 (5.5.2) によって定義されたとき、

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}} \{ & f_0(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}) \mid f_1(\boldsymbol{\phi}) \leq 0, \\ & \mathbf{u}(t) \in \mathcal{S}, t \in (0, t_T), \text{ Problem 5.3.1} \}. \end{aligned}$$

を満たす  $\boldsymbol{\phi}$  を求めよ。 □

### 5.5.2 評価関数の形状微分

前節で定義した形状最適化問題を勾配法を用いて解くために、本節では目的関数  $f_0$  と制約関数  $f_1$  の形状変動に対する Fréchet 微分を導出する。目的関数  $f_0$  は主問題の解

である  $\mathbf{u}$  を含むので、主問題を等式制約として考慮し、 $f_0$  に対する Lagrange 関数を

$$\mathcal{L}_0(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = f_0(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}) + \mathcal{L}_M(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)$$

のように定義する。ここで、 $\mathbf{v}_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  は問題 5.3.1 の時刻  $t = t_T$  で定義した主問題に対する Lagrange 乗数である。また  $\hat{\mathbf{v}}_0$  は  $f_0$  に対する Lagrange 乗数である。 $\mathcal{L}_0$  の任意の形状変動  $\boldsymbol{\varphi} \in Y$  に対する形状微分は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_0(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\boldsymbol{\varphi}] &= \mathcal{L}'_{0\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\boldsymbol{\varphi}] \\ &+ \mathcal{L}'_{0\mathbf{u}}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{u}'] + \mathcal{L}'_{0\mathbf{v}_0}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{v}'_0], \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

のようになる。ここで、 $\mathbf{u}$  が問題 5.3.1 の解であれば、式 (5.5.3) の右辺第 3 項は 0 になる。また式 (5.5.3) の右辺第 2 項は

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}'_{0\mathbf{u}}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{u}'] \\ &= - \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} (\mathbf{S}'(\mathbf{u})[\mathbf{u}'] \cdot \mathbf{E}'(\mathbf{u})[\mathbf{v}_0] \\ &\quad + \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}''(\mathbf{u})[\mathbf{v}_0, \mathbf{u}']) dx \\ &\quad + \int_{\Gamma_{D0}} [\mathbf{u}' \cdot (\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{v}_0)\boldsymbol{\nu}) + (\mathbf{v}_0 + \mathbf{u}_1) \cdot (\boldsymbol{\Pi}'(\mathbf{u})[\mathbf{u}']\boldsymbol{\nu})] d\gamma \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{S}'(\mathbf{u})[\mathbf{v}] &= \mathbf{D}(\mathbf{E}(\mathbf{u}))\mathbf{E}'(\mathbf{u})[\mathbf{v}], \\ \mathbf{E}''(\mathbf{u})[\mathbf{v}, \mathbf{w}] &= \mathbf{E}_{BL}(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \\ \boldsymbol{\Pi}'(\mathbf{u})[\mathbf{v}] &= \mathbf{S}'(\mathbf{u})[\mathbf{v}]\mathbf{F}^T(\mathbf{u}) + \mathbf{S}(\mathbf{u})\mathbf{F}'^T(\mathbf{u})[\mathbf{v}]. \end{aligned}$$

である。ここで、式 (5.3.3) を用いれば式 (5.5.4) は

$$\begin{aligned} &- \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} (\mathbf{S}'(\mathbf{u})[\mathbf{u}'] \cdot \mathbf{E}'(\mathbf{u})[\mathbf{v}_0] \\ &\quad + \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}''(\mathbf{u})[\mathbf{v}_0, \mathbf{u}']) dx \\ &= - \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \boldsymbol{\Pi}'(\mathbf{u})[\mathbf{v}_0] \cdot \mathbf{F}'(\mathbf{u})[\mathbf{u}'] dx \end{aligned}$$

のようにかかる。さらに、境界  $\Gamma_N(\boldsymbol{\phi})$  で関係  $\mathbf{u}' = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$  on  $\Gamma_{D0}$  と  $\boldsymbol{\Pi}'(\mathbf{u})[\mathbf{v}_0]\boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$  を用いれば

$$\begin{aligned} &\int_{\partial\Omega(\boldsymbol{\phi})} (\boldsymbol{\Pi}'(\mathbf{u})[\mathbf{v}_0]\mathbf{u}') \cdot \boldsymbol{\nu} d\gamma \\ &\quad - \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \boldsymbol{\Pi}'(\mathbf{u})[\mathbf{v}_0] \cdot \mathbf{F}'(\mathbf{u})[\mathbf{u}'] dx \\ &= \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \boldsymbol{\nabla}^T \boldsymbol{\Pi}'(\mathbf{u})[\mathbf{v}_0] \mathbf{u}' dx \end{aligned}$$

を得る. 上記より式 (5.5.4) は境界  $\Gamma_{D0}$  上で  $\mathbf{u}' = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$  となるすべての  $\mathbf{u}'$  に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{0u}(\phi, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{u}'] &= \int_{\Omega(\phi)} \nabla^T \Pi'(\mathbf{u})[\mathbf{v}_0] \mathbf{u}' \, dx \\ &\quad + \int_{\Gamma_{D0}} \left[ \mathbf{u}' \cdot (\Pi(\mathbf{v}_0) \boldsymbol{\nu}) + (\mathbf{v}_0 + \mathbf{u}_1) \cdot (\Pi'(\mathbf{u})[\mathbf{u}'] \boldsymbol{\nu}) \right] d\gamma \end{aligned}$$

のようにかくことができる. さらに,  $\mathbf{v}_0$  が以下の随伴問題の解であるとき式 (5.5.4) は 0 となる.

**問題 5.5.2** ( $f_0$  の随伴問題)  $\mathbf{u}$  が問題 5.3.1 の解のとき

$$\begin{aligned} -\nabla^T \Pi'(\mathbf{u})[\mathbf{v}_0] &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}^T \text{ in } \Omega(\phi), \\ \Pi'(\mathbf{u})[\mathbf{v}_0] \boldsymbol{\nu} &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \Gamma_N(\phi), \\ \mathbf{v}_0 &= -\mathbf{u}_1 \text{ on } \Gamma_{D0} \end{aligned}$$

を満たす  $\mathbf{v}_0 : \Omega(\phi) \rightarrow \mathbb{R}^d$  を求めよ. □

また, 前節で述べたように,  $H^1$  勾配法で求めた領域変動が  $Y$  に属するためには,  $\tilde{\mathbf{v}}_{0i}$  は  $\mathcal{S}$  に属している必要がある [97]. ここで,  $\tilde{\mathbf{v}}_{0i}$  は  $\Gamma_{D0}$  上で  $\tilde{\mathbf{v}}_{0i} = \mathbf{v}_{0i} + 2(\mathbf{u}_D(t_i) \cdot (\Pi(\mathbf{u}(t_i)) \boldsymbol{\nu}) - \alpha_i) \mathbf{u}_D(t_i) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$  である.

$\mathbf{u}$  と  $\mathbf{v}_0$  がそれぞれ問題 5.3.1 と問題 5.5.2 の解であるとき, 式 (5.5.3) は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{0\phi}(\phi, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\varphi] &= f'_0(\phi, \mathbf{u})[\varphi] \\ &= \int_{\Gamma_N(\phi)} \bar{\mathbf{g}}_{0N} \cdot \varphi \, d\gamma = \langle \bar{\mathbf{g}}_0, \varphi \rangle \end{aligned} \quad (5.5.5)$$

のようになる. ここで,

$$\bar{\mathbf{g}}_{0N} = \{-\mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}'(\mathbf{u})[\mathbf{v}_0]\} \boldsymbol{\nu} \quad (5.5.6)$$

である. よって  $f_0$  の Fréchet 微分は

$$f'_0(\phi, \mathbf{u})[\varphi] = \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \langle \bar{\mathbf{g}}_0, \varphi \rangle = \langle \bar{\mathbf{g}}_0, \varphi \rangle \quad (5.5.7)$$

となる. さらに  $f_1$  の Fréchet 微分は

$$f'_1(\phi)[\varphi] = \int_{\Gamma_N(\phi)} \boldsymbol{\nu} \cdot \varphi \, d\gamma = \langle \bar{\mathbf{g}}_1, \varphi \rangle \quad (5.5.8)$$

となる.

以上, より評価関数に対する形状微分を導出したので, 問題 5.5.1 は逐次 2 次計画法と  $H^1$  勾配法を用いることで解くことができる.

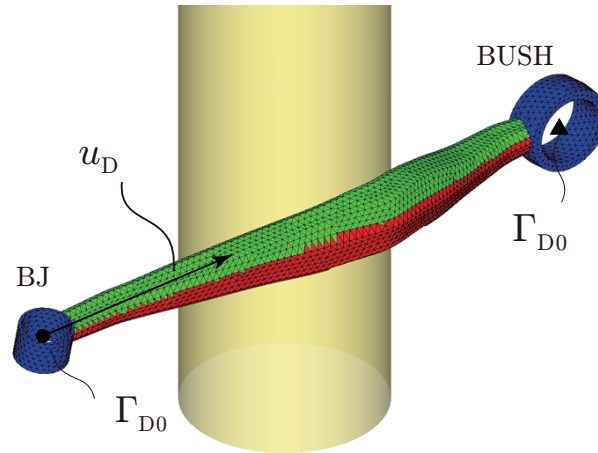


図 5.5.1: サスペンションアームモデル

### 5.5.3 数値計算例

数値計算例を以下に示す。以下の数値結果は、評価関数の形状微分の評価は開発したインハウスコードを用いた。また問題 5.3.1 と問題 5.5.2 の計算では Abaqus 6.9 (Dassault Systèmes) を利用した。また、 $H^1$  勾配法の計算では OPTISHAPE-TS 2011 (Quint) を利用した。

図 5.5.1 に解析モデルを示す。ボールジョイント (BJ) 部の中心に位置する節点は、内筒表面節点との間を剛体要素で結合し、図の方向に強制変位 8.0 [mm] を与えた。また、ブッシュ (BUSH) 部の中心に位置する節点との間を剛体要素で結合し、中央の節点を剛拘束した。内筒と外筒は Young 率と Poisson 比はそれぞれ 71 [GPa] と 0.3 とした。初期形状における主問題の計算の結果を図 5.5.2 に示す。最大反力は 58.0 [kN] であった。本計算では最大反を 80.0[kN] としつつ体積を最小化することを考える。

形状更新に対する評価関数の収束履歴を図 5.5.3 に示す。形状更新に伴い制約  $f_1$  を満たしつつ、 $f_0$  が単調に増加させることができた。また、図 5.5.2 に強制変位負荷点の変位  $\|\mathbf{u}_D(t)\|_{\mathbb{R}^d}$  と反力  $\|\int_{\Gamma_{D0}} \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{u}(t)) \boldsymbol{\nu} d\gamma\|_{\mathbb{R}^d}$  のグラフを示す。制約関数である最大反力を荷重を満たしつつ、目的関数とした体積を 10.0% 削減することができた。

図 5.5.4 に最適化前後の形状の比較を示す。また、図 5.5.5 に最適化前後の形状における中央部の断面の形状比較を示す。図中の矢印の方向の断面が増加していることから、この方向の断面 2 次モーメントが向上している。また、その結果、曲げ入力による剛性が向上したため、座屈荷重が増加したと考えられる。



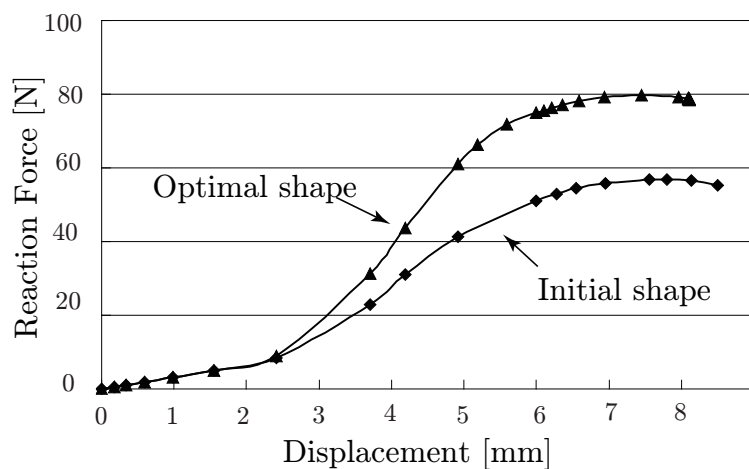


図 5.5.2: 強制変位負荷点の荷重変位グラフ

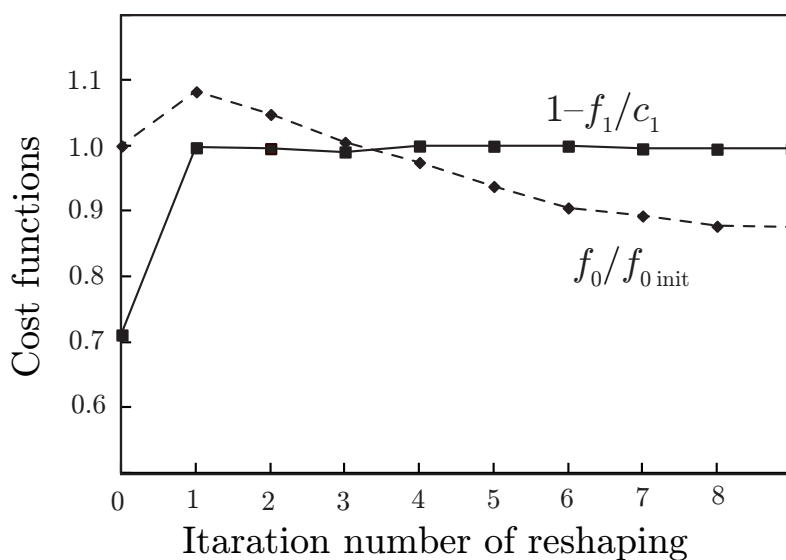


図 5.5.3: 形状更新に対する評価関数の更新履歴

## 5.6 まとめ

本研究では、超弾性体の大変形のような負荷経路非依存問題に対する形状最適化問題を定義し、その解法を示した。提案手法では、主問題を全ひずみ理論に基づいて定義することで、随伴問題が大変形後の釣り合い状態における状態量のみを用いて評価できるとの結果を得た。この結果は従来の方法に対して計算コストの面で優れていると判断できる。

提案手法を用いた具体的な問題としてゴムブッシュとサスペンションアームの形状設

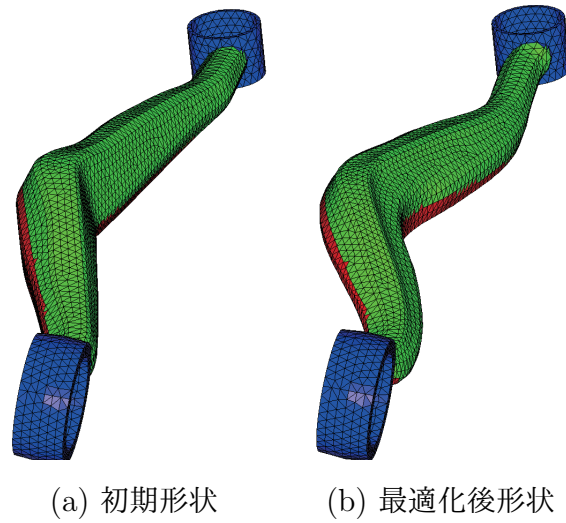


図 5.5.4: 最適化前後の形状の比較

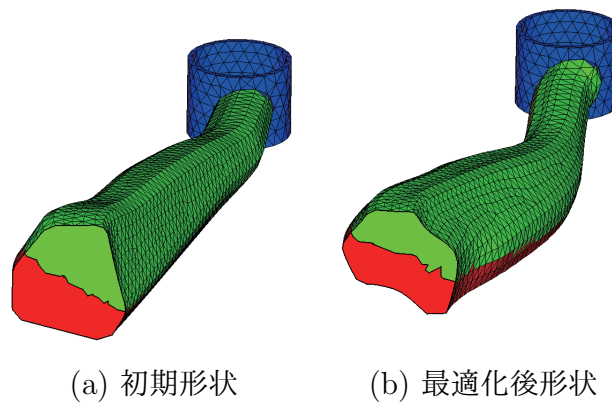


図 5.5.5: 最適化前後の形状の比較 (中央部断面)

計問題への応用例を示した。ゴムブッシュの形状設計問題では、変位と荷重における所望の特性曲線との間に定義した2乗誤差を評価関数とする形状最適化問題を構成し、解法を示した。数値例では、簡易ゴムブッシュモデルを用いた計算を実施し、提案手法の妥当性を示した。また、サスペンションアームの形状設計問題への応用においては、最大荷重を評価関数とする形状最適化問題を構成し、その解法を示した。数値例では、簡易サスペンションアームモデルを用いた計算を実施し、提案手法の妥当性を示した。



## 第 6 章

### 結論

#### 6.1 まとめ

本論文では、機械構造部材の形状設計問題、特に自動車部品の形状設計に対して、数理的アプローチによる形状設計手法の可能性を明らかにした。

本論文における、数理的アプローチとは第 1 章で述べたように、偏微分方程式の境界値問題として数理モデル化された力学現象を考え、形状を表す関数の写像を設計変数にした領域変動型の形状最適化という意味で用いた。第 1 章では、最適化技術の産業への応用上の課題を明確化した。その結果、構造最適化技術を産業で利用する上で障害となっていると推測される以下の課題 (1) ~ (3) を選定した。

- (1) 複数部品のアセンブリ状態で生じる現象の評価指標を評価関数とする形状最適化
- (2) 数値不安定性 (ジグザグ現象) のないビード形状最適化
- (3) 非線形問題を主問題とする形状最適化

第 2 章では、本研究で用いる領域型形状最適化問題について述べた。次に、第 3 章から第 5 章では上記課題に対して取り組んだ研究成果について述べた。以下具体的な課題と研究成果の概要を述べる。

課題 (1) では、アセンブリ状態における特性値を直接評価関数とおいた形状最適化技術の開発に取り組んだ。アセンブリ状態で現象を考える際には、部品間の摩擦や接触剛性などの結合部の影響を考慮することが重要となる。本研究ではこのような具体的な現象としてブレーキ鳴きを取り上げ、ローターとパット間の摩擦と接触剛性を考慮した主問題を定義した。また、評価関数にはブレーキ鳴き現象の評価指標である複素固有値の実部を用いて形状最適化問題を構成し、その解法を示した。

課題 (2) では、従来のビード形状最適化問題が有していた数値不安定性 (ジグザグ現象) の課題に対して、このような数値不安定性が生じない新たなビード形状最適化手法

を提案した。具体的にはシグモイド関数を用いてビード高さを表現し、その定義域を設計変数とする形状最適化問題を構築した。また、その解法には従来から密度型位相最適化問題の解法で用いられている  $\theta$  型  $H^1$  勾配法を用いた。具体的な事例として片持ち梁の剛性最大化問題、周波数応答変位最小化問題、及びダストカバーの固有振動数最大化問題に適用し、提案手法の有用性を示した。

課題 (3) では、何学的非線形性や材料非線形性などの非線形現象が含まれる形状設計問題を主問題とする形状最適化問題を構成し、その解法を示した。その結果、主問題を全ひずみ理論に基づいて定義することで、随伴問題が大変形後の釣り合い状態における状態量のみを用いて評価できるとの結果を得た。この結果は従来の方法に対して計算コストの面で優れていると判断できる。具体的な事例としては、ゴムブッシュの形状設計問題とサスペンションアームの形状設計問題に適用し、提案手法の有用性を示した。

## 6.2 今後の展望

最後に、今後の展望について述べる。はじめに、自動車業界を取り巻く環境から、本研究の今後の課題を考える。自動車は大衆化の先駆けとなったT型フォードが誕生して以来、現在で約100年となる。その間、第1章で述べたようにCAE技術が成熟し、自動車の開発効率は劇的に向上したと思われる。一方で、この間に自動車業界を取り巻く様々な環境の変化が生じている(例えば、原油価格の高騰、市場の多様化、リコール問題、若者の自動車離れ)。このような環境の変化を踏まえると、自動車産業の次の100年はこれまでの延長線上ではなく、新たな価値の創造および、新しい開発手法が必要であると思われる。

新たな価値としては、そのひとつとして各種制御技術が挙げられる。現在でも既に予防安全、操安性向上、燃費向上など多くの用途で制御技術が実用化され、商品性を左右する重要な要素となっている。CAEとしては、このような車両制御を考慮した1DCAE技術が重要となると考えられる。一方、3DCAEでは1DCAEとの連成技術が必要となるとと思われる。具体的には、制御系と構造系の連成を考慮したマルチボディダイナミクス解析による車両全体の挙動の評価方法である。このような評価法が実現した先には、現象の制御・最適化のための技術が必要となると推測される。本研究では楕円型偏微分方程式の境界値問題で記述できる現象、即ち、静的・準静的な問題を扱っており、ここで挙げられたような動的な問題は考慮していない。その為、今後の課題のひとつとして、マルチボディダイナミクスのような動的な問題への応用が挙げられる。

一方、新しい開発手法としては、すでにモジュール設計という考え方が採用されている(例えば、VW社のMQB)。モジュール設計とはモジュール単位で開発したもの

を仕向けに応じて組み合わせることで多様な市場ニーズに対応する車両開発方法である。このような開発手法ではモジュールの組み合わせごとの評価が必要となる。その為、本研究の 3 章で扱ったようなアセンブリ状態で生じる性能特性を評価関数とする構造最適化技術が今後さらに重要になると思われる。本研究ではブレーキ鳴き現象を取り挙げたが、今後は他の現象に対しても適用領域を拡張することが必要であると考えられる。

次に、構造最適化分野の動向から本研究の今後の課題について考える。図 6.2.1 は構造最適化の国際会議 WCSMO-10 (10th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization Orlando, Florida. May 23, 2013) における発表論文の内容の分類である [98]。これをみると、産業への応用研究 (Novel industry applications) と構造最適化手法の基礎研究 (New optimization methods) が共に上位に位置づけられている。その為、基礎研究による新たなシーズを産業におけるニーズへと応用する研究が今後も重要であると考えられる。

また、性能のロバスト性に関する研究 (Uncertainty, material imperfections) が上位に位置していることにも着目したい。CAE では理想化された条件で評価を行うため、その評価結果に基づく構造最適化によって得られる解は理想化された条件下のものである。しかしながら、実際の製品においては形状、材質、入力のバラツキが存在するため、評価関数に設定した評価値は本来バラツキを有している。上記で述べたようなモジュール設計による開発手法では、同じ部品が様々な使用環境で利用されることが想定されるため、製品性能を下限で評価することへ重要性は今後さらに高まると考えられる。このような背景を考慮して、ロバスト性を考慮した構造最適化手法の開発とその産業への応用が本研究の今後の課題として挙げられる。

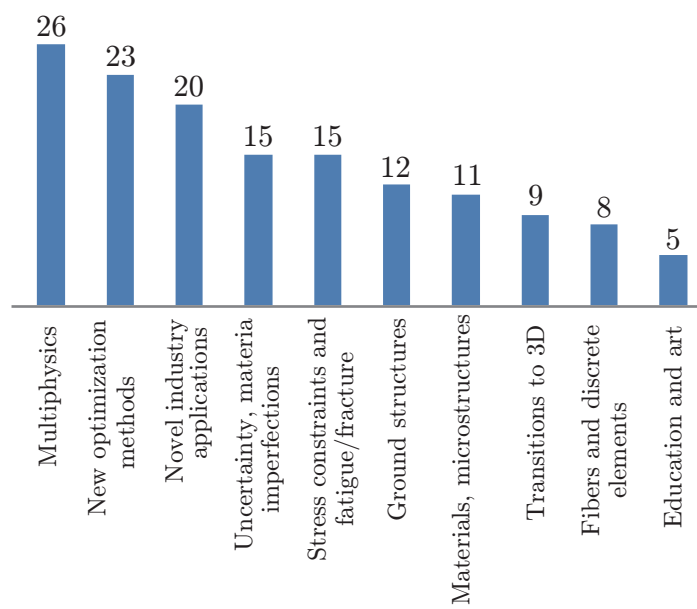


図 6.2.1: WCSMO10 における論文発表内容の分類 (上位 10 分類) [98]

## 参考文献

- [1] S. K. Tolani, Lemon, Jason R. and Albert L. Klosterman. Integration and implementation of computer aided engineering and related manufacturing capabilities into mechanical product development process. *CAD-Fachgesprch*, pp. 161–183, 1980.
- [2] H. Nishigaki, S. Nishiwaki, T. Amago, and N Kikuchi. First order analysis for automotive body structure design. *ASME DETC2000/DAC*, No. 14533, 2000.
- [3] S. Nishiwaki, H. Nishigaki, Y. Kojima, and N Kikuchi. Structural topology optimization in first order analysis. *ASME DETC2000/DAC*, No. 14533, 2000.
- [4] ASME Committee (PT60) on Verification and Validation in Computational Solid Mechanics. Guide for verification and validation in computational solid mechanics. Technical report, 2006.
- [5] 菊地文雄. 有限要素法の数理：数学的基礎と誤差解析. 培風館, 東京, 1994.
- [6] R Courant. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 49, No. 1, pp. 1–23, 1943.
- [7] M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, and L. P. Topp. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *J. Aeronautical Society*, Vol. 23, pp. 805–823, 1956.
- [8] R. W. Clough. The finite element method in plane stress analysis. In *2nd ASCE Conference on Electronic Computation*, 1960.
- [9] O. C. Zienkiewicz and J. S. Campbell. Shape optimization and sequential linear programming. In R.H. Gallagher and O. C. Zienkiewicz, editors, *Optimum Structural Design*. John Wiley, New York, 1973.
- [10] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The Finite Element Method, 5th ed.* Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.
- [11] M. E. Botkin. Shape optimization of plate and shell structures. *AIAA J.*,



- Vol. 20, No. 2, pp. 268–273, 1981.
- [12] L. A. Schmit. Structural design by systematic synthesis. In *Proc. of 2nd Conference on Electronic Computation ASCE*, 1960.
- [13] 柏村孝義, 白鳥正樹, 于強. 統計的最適化手法におけるばらつきと構造信頼性の評価. 日本機械学会論文集. A 編, Vol. 63, No. 610, pp. 1348–1353, 1997.
- [14] D.E. Goldberg. *Structural Design by Systematic Synthesis, Proceeding of 2nd Conference on Electric Computation ASCE*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., 1989.
- [15] 施勤忠, 萩原一郎, 高島太. 応答曲面法による多峰性問題の最適設計法の開発. 日本機械学会論文集. A 編, Vol. 65, No. 630, pp. 232–239, 1999.
- [16] 小平剛央, 小池真人, 天野浩平. 複数性能を扱う車体構造最適化手法の開発. Technical report, 2011.
- [17] J. S. Arora. Computational design optimization : a review and future directions. *Structural Safety*, Vol. 7, pp. 131–148, 1990.
- [18] Y. Ding. Shape optimization of structures : A literature survey. *Computers & Structures*, Vol. 24, No. 6, pp. 985–1004, 1986.
- [19] R. T. Haftka and R. V. Grandhi. Structural shape optimization - a survey. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 57, pp. 91–106, 1986.
- [20] N. Olhoff and J. E. Taylor. On structural optimization. *J. Appl. Mech.*, Vol. 50, pp. 1139–1151, 1983.
- [21] G. I. N. Rozvany. Analytical methods in structural optimization. *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 30, No. 11, pp. 1461–1470, 1977.
- [22] L. A. Schmit. Structural synthesis - its genesis and development. *AIAA J.*, Vol. 19, No. 10, pp. 1249–1263, 1981.
- [23] W. Stadler. Multicriteria optimization in mechanics (a survey). *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 37, No. 3, p. 277, 1984.
- [24] G. N. Vanderplaats. Structural optimization-rast, present, and future. *AIAA J.*, Vol. 20, No. 7, pp. 992–1000, 1981.
- [25] V. b. Venkayya. Structural optimization: a review and some recommendations. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, Vol. 13, pp. 203–228, 1978.
- [26] E. Atrek. Shape: a program for shape optimization of continuum structures. In C. A. Brebbia and S. Hernandez, editors, *Computer Aided Optimization Design of Structures: Applications*, pp. 135–144. Computational Mechanics Publications, Southampton, 1989.

- [27] B. Voth. Using automatically generated shape variables to optimize stamped plates. technical memorandum. Technical report, 1999.
- [28] 新谷浩平, 長谷高明, 伊藤聡, 畔上秀幸. サスペンション部品の非線形座屈現象に関する形状最適化の検討. 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 74, No. 748, pp. 1187–1198, 8 2011.
- [29] 畔上秀幸. 適応システム特論の教材 (名古屋大学 情報科学研究科). <http://www.az.cs.is.nagoya-u.ac.jp/class/adaptive-systems/nuide.html>.
- [30] 畔上秀幸. 形状最適化問題の正則化解法. 日本応用数理学会論文誌, Vol. 23, No. 2, pp. 83–138, 6 2014.
- [31] 藤井信夫. 領域最適化問題入門, 第 21 巻, pp. 18–21. Basic 数学, 1988.
- [32] V. Braibant and C. Fleury. Shape optimal design using b-splines. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 44, pp. 247–267, 1984.
- [33] M. H. Imam. Three-dimensional shape optimization. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, Vol. 18, pp. 661–673, 1982.
- [34] J. A. Bennett and M. E. Botkin. Shape optimization of two dimensional structures with geometric problem description and mesh refinement. In *Proceedings of AIAA/ASME/ASCE/AHS 24th Structures, Dynamics and Material Conference*, pp. 422–431. Structural Dynamics and Material Conference, 1983.
- [35] T. J. R. Hughes., J. A. Cottrell., and Y. Bazilevs. Isogeometric analysis : Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, pp. 4135–4195, 2005.
- [36] Morancay and Lionel. Abqnurbs. <http://abqnurbs.insa-lyon.fr/index.php/component/content/?view=featured>.
- [37] A. D. Belegundu and S. D. Rajan. A shape optimization approach based on natural design variables and shape functions. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 66, pp. 87–106, 1988.
- [38] J. Hadamard. *Mémoire des savants etrangers. Oeuvres de J. Hadamard*, chapter Mémoire sur le problème d’analyse relatif á l’équilibre des plaques élastiques encastrées, Mémoire des savants etrangers, Oeuvres de J. Hadamard, pp. 515–629. CNRS, Paris, 1968.
- [39] O. Pironneau. *Optimal Shape Design for Elliptic Systems*. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [40] F. Murat and J. Simon. Etude de problemes d’optimaldesign. In J. Cea, editor, *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 41, pp. 54–62, 1974.

- [41] N. V. Banichuk. Optimality conditions and analytical methods of shape optimization. In E. J. Haug and J. Cea, editors, *Optimization of Distributed Parameter Structures*, Vol. 2, pp. 973–1004. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1981.
- [42] N. V. Banichuk. *Introduction to Optimization of Structures*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [43] J. Cea. Problems of shape optimization. In E. J. Haug and J. Cea, editors, *Optimization of Distributed Parameter Structures*, Vol. 2, pp. 1005–1048. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1981.
- [44] J. Cea. Numerical methods of shape optimal design. In E. J. Haug and J. Cea, editors, *Optimization of Distributed Parameter Structures*, Vol. 2, pp. 1049–1088. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1981.
- [45] B. Rousselet. Shape design sensitivity of a membrane. *J. Opt. Th. Appl.*, Vol. 4, pp. 595–623, 1983.
- [46] K. Dems and Z. Mróz. Variational approach by means of adjoint systems to structural optimization and sensitivity analysis i. *Int. J. Solids Structures*, Vol. 19, No. 8, pp. 677–692, 1983.
- [47] Z. Dems, K. and Mroz. Variational approach by means of adjoint systems to structural optimization and sensitivity analysis-ii. structure shape variation. *Int. J. Solids Structures*, Vol. 20, pp. 527–552, 1984.
- [48] 畔上秀幸. 領域最適化問題の一解法. 日本機械学会論文集, A 編, Vol. 60, pp. 1479–1486, 1994.
- [49] J. L. Lions. Some aspects of the optimal control of distributed parameter system. In *Regional Conf. in Appl. Math.* Philadelphia SIAM, 1972.
- [50] 畔上秀幸, 吳志強. 線形弾性問題における領域最適化解析 (力法によるアプローチ). 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 60, No. 578, pp. 2312–2318, 10 1994.
- [51] 片峯英次, 畔上秀幸. 粘性流れ場領域最適化問題の解法 (力法によるアプローチ). 日本機械学会論文集, B 編, Vol. 60, No. 579, pp. 3859–3866, 1994.
- [52] 吳志強, 畔上秀幸. 固有振動問題における領域最適化解析 (力法によるアプローチ). 日本機械学会論文集, C 編, Vol. 61, No. 583, pp. 930–937, 1995.
- [53] M. Y. Wang, X. Wang, and D. Guo. A level set method for structural topology optimization. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 192, pp. 227–246, 2003.
- [54] G. Allaire, F. Jouve, and A. M. Toader. Structural optimization using sensitiv-

- ity analysis and a level-set method. *J. Comput. Phys.*, Vol. 194, pp. 363–393, 2004.
- [55] T. Yamada, K. Izui, S. Nishiwaki, and A. Takezawa. A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 199, pp. 2876–2891, 2010.
- [56] H. Azegami and K. Takeuchi. A smoothing method for shape optimization: Traction method using the Robin condition. *International Journal of Computational Methods*, Vol. 3, No. 1, pp. 21–33, 2006.
- [57] H. Azegami, S. Fukumoto, and T. Aoyama. Shape optimization of continua using NURBS as basis functions. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 47, No. 2, pp. 247–258, 1 2013.
- [58] 藤田宏, 今野浩, 田邊國士. 最適化法. 岩波書店, 東京, 1994.
- [59] L. Armijo. Minimization of functions having lipschitz-continuous first partial derivatives. *Pacific J. Math.*, Vol. 16, pp. 1–3, 1966.
- [60] P. Wolfe. Convergence conditions for ascent methods. *SIAM Review*, Vol. 11, pp. 226–235, 1969.
- [61] 田村明久, 村松正和. 最適化法. 共立出版, 東京, 2002.
- [62] 矢部博. 工学基礎 : 最適化とその応用. 数理工学社, 東京, 2006.
- [63] H Mills. *Brake squeal, Technical Report 9000B*. Institution of Automobile Engineers, 1938.
- [64] M North. *Disc brake squeal : A theoretical model. MIRA Report*, Vol. 1972/5. MIRA Report, 1972.
- [65] N Millner. An analysis of disc brake squeal. Technical Report 780332, SAE Technical Paper, 1978.
- [66] Sang Don Joo, Ji Hun Han, Kyung Whan Park, and Young Jin Kim. Reducing brake squeal through fem approach and parts design modifications. Technical Report 2006-01-3206, SAE Technical Paper, 2006.
- [67] Abd Rahim Abu-Bakar and Huajiang Ouyang. *New Research on Acoustics*. Nova Science Publishers, Inc., 1989.
- [68] Heewook Lee and Noboru Kikuchi. Sensitivity analysis of complex eigensolutions for brake noise. Technical Report 2003-01-1626, SAE Technical Paper, 2003.
- [69] Dihua Guan, Xindong Su, and Fang Zhang. Sensitivity analysis of brake squeal tendency to substructures’ modal parameters. *Journal of sound and*

- vibration*, Vol. 291, No. 1, pp. 72–80, 2006.
- [70] Yoshitsugu Goto, Hidetaka Saomoto, Noboru Sugiura, Toru Matsushima, Satoshi Ito, and Akihiro Fukui. Structural design technology for brake squeal reduction using sensitivity analysis. Technical Report 2010-01-1691, SAE Technical Paper, 2010.
- [71] Manoj Nelagadde and Edmond Smith. Optimization and sensitivity analysis of brake rotor frequencies. Technical Report 2009-01-3046, SAE Technical Paper, 2009.
- [72] HJ Soh and JH Yoo. Optimal shape design of a brake calliper for squeal noise reduction considering system instability. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, Vol. 224, No. 7, pp. 909–925, 2010.
- [73] Jaeyoung Kang. Finite element modelling for the investigation of in-plane modes and damping shims in disc brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 331, No. 9, pp. 2190–2202, 2012.
- [74] C. A. Soto and A. R. Dfaz. On the modelling of ribbed plates for shape optimization. *Structural Optimization*, Vol. 6, pp. 175–188, 1993.
- [75] R. J. Yang, C. J. Chen, and C. H. Lee. Bead pattern optimization. *Structural Optimization*, Vol. 12, pp. 217–221, 1996.
- [76] M. Krishna. Topology & topography optimization of a drive shaft. *SAE Technical Paper*, No. 2005-01-3552, 2005.
- [77] R. Chakravarty. Study of topography optimization on automotive body structure. *SAE Technical Paper*, No. 2009-01-1233, 2009.
- [78] C. Wang and F. Liao. Study of topography optimization and parametric analysis of bead layout for sheet metal bracket. *SAE Technical Paper*, No. 2010-01-0266, 2010.
- [79] MI Troy. *ALTAIR Engineering, Inc, Hyperworks Release 11 Users manual*. ALTAIR Engineering,, 11 edition, 2011.
- [80] F. Daoud, M. Firl, and K.-U. Bletzinger. Filter techniques in shape optimization with CAD-free parametrization. In *Proceedings 6th World Congresses of Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2005.
- [81] O. Sigmund and J. Petersson. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Struct. Optim.*, Vol. 16, pp. 68–75, 1998.

- [82] M. Shimoda, K. Iwasa, and H. Azegami. A shape optimization method for the optimal free-form design of shell structures. In *Proceedings of the 8th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-8) (CD-ROM)*, pp. 1–10, 6 2009.
- [83] Y. Liu and M. Shimoda. Parameter-free optimum design method of stiffeners on thin-walled structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 49, pp. 39–47, 2014.
- [84] H. Azegami, S. Kaizu, and K. Takeuchi. Regular solution to topology optimization problems of continua. *JSIAM Letters*, Vol. 3, pp. 1–4, 1 2011.
- [85] J.S. Y.S. Ryu and M. Haririan, C.C. and Wu. Structural design sensitivity analysis of nonlinear response. *Computers and Structures*, Vol. 21, No. 1, pp. 245–255, 1985.
- [86] J. B. Cardoso and J. S. Arora. Variational method for design sensitivity analysis in nonlinear structural mechanics. *AIAA*, Vol. 26, No. 5, pp. 595–603, 1988.
- [87] Hisada Toshiaki. Recent progress in nonlinear fem-based sensitivity analysis. *JSME international journal*, Vol. 38, No. 3, pp. 301–310, 1995.
- [88] 古矢渉, 李成健, 田中真人, 野口裕久. 離散力法を用いた多目的形状最適化手法の開発. 計算工学講演会論文集, Vol. 13, No. 1, pp. 461–462, 2008.
- [89] 守屋岳志. 最適化技術の自動車プレス成形シミュレーションへの適用. 塑性と加工, Vol. 53, No. 615, pp. 302–306, 2012.
- [90] 于強, 矢島秀起, 吉本毅, 白鳥正樹, 本山恵一. 自動車衝突安全設計における補強部材の多目的最適化. 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 66, No. 641, 2000.
- [91] 井原久, 畔上秀幸, 下田昌利. 幾何学的非線形性を考慮した変位経路制御問題に対する形状最適化. Vol. 67, No. 656, pp. 611–617, 2001.
- [92] G. Marckmann and E. Verron. Comparison of hyperelastic models for rubber-like materials. *Rubber Chemistry and Technology*, Vol. 79, No. 5, pp. 835–858, 2006.
- [93] S. Wenbin, L. H. Zhen, and S. Jianjun. Finite element analysis of static elastic characteristics of the rubber isolators in automotive dynamic systems. Technical Report 2003-01-0240, 2003.
- [94] L. R. Wang, Z. H. Lu, and I. Hagiwara. Finite element simulation of the static characteristics of a vehicle rubber mount. *Journal of automobile engineering*, Vol. 216, No. 12, pp. 965–973, 2002.

- [95] Q. Li, J. Zhao, B. Zhao, and X. Zhu. Parameter optimization of rubber mounts based on finite element analysis and genetic neural network. *Journal of Macromolecular Science, Part A: Pure and Applied Chemistry*, Vol. 46, No. 2, pp. 186–192, 2008.
- [96] J. J. Kim and H. Y. Kim. Shape design of an engine mount by a method of parameter optimization. *Computers and Structures*, Vol. 65, No. 5, pp. 725–731, 1997.
- [97] H. Azegami. Regularized solution to shape optimization problem (in Japanese). *Trans. JSIAM*, Vol. 23, No. 2, p. (to be published), 6 2014.
- [98] Glaucio H. Paulino. Where are we in topology optimization? <http://www.issmo.net/wp-content/uploads/WCSMO10-Panel-Session-Where-are-we-in-TopOpt.pdf>.

# 謝辞

本研究を遂行するにあたり，懇切丁寧にご指導頂きました名古屋大学情報科学研究科の畔上秀幸先生に深甚なる感謝の意を表します。そして，本論文を執筆するにあたっては，同学の大岡 昌博教授，渡邊 崇教授には様々な視点から助言を頂きました。心から感謝いたします。さらに，著者の多忙につきあっていただいた同研究室の皆様に感謝の意を表します。

また，トヨタ自動車株式会社の伊藤聡様と本間和正様には暖かい励ましを頂いた。ここに深く感謝いたします。さらに，名古屋大学大学院在籍時より現在に至るまで，有益な御教示，叱咤激励を頂きました株式会社くいんの竹内謙善様に深甚なる感謝の意を表します。

最後に，在学中支えてくれた家族に感謝致します。

2014年9月

新谷 浩平