別紙４

報告番号	※　　　　第　　　　号

主　論　文　の　要　旨

論 文 題 目
Previdi's delooping conjecture and the classification theorem for torsors over the sheaf of K-theory spaces

(Previdi の delooping 予想と K 理論空間の層上の torsors の分類定理)

氏　　名　齋藤　翔

論　文　内　容　の　要　旨

本論文では「K 理論空間の層上の torsor」と呼ばれる幾何学的対象を定義し，その分類定理を与える．すなわち，K 理論空間の層上の torsors のなすモジュライ空間が，Tate ベクトル束の K 理論と同値であることを示す．このために，本論文ではまず，Previdi によって予想された完全圏の K 理論の delooping に関する定理を証明する．次に，負の -1 次 K 群が Nisnevich 局所的に消えるという Drinfeld の定理をこの delooping と組み合わせることによって，目的の分類定理が導かれることを示す．理論的な枠組みとして Lurie 等によって近年発展させられた無限トポスの理論を用いる．

本論文において与えられる結果は Tate ベクトル空間の無限次元線形代数をその背景として持つ．体 k 上の位相ベクトル空間 $\mathbb{V}$ は，離散的ベクトル空間 U と W があって，U の双対 $U^\vee$ と W の直和 $\mathbb{V} = W \oplus U^\vee$ の形に書けるとき，Tate ベクトル空間と呼ばれる．例えば，形式 Laurent 級数のなす k ベクトル空間 $k((t)) = t^{-1}k[t^{-1}] \oplus k[[t]] = t^{-1}k[t^{-1}] \oplus k[t]^\vee$ 等が典型例である．Tate ベクトル空間はループ群の表現を研究するための枠組みを与える．実際，代数群 G が有限次元表現 V を持つとき，対応するループ群 $G((t))$ は Tate ベクトル空間 $V((t))$ に作用する．

$\mathbb{V}$ を Tate ベクトル空間とし，$GL(\mathbb{V})$ でその連続自己同型のなす群を表すとき，$GL(\mathbb{V})$ は Tate 中心拡大と呼ばれる標準的な $\mathbb{G}_m$ 中心拡大を持つ．一般論によってこの中心拡大は群スタックの写像 $GL(\mathbb{V}) \to B\mathbb{G}_m$ に対応するが，これによって Tate 中心拡大を，有限次元線形空間 V に対する通常の行列式 $\det : GL(V) \to \mathbb{G}_m$ の無限次元における類似とみなせる．Tate 中心拡大は曲線の幾何学，ループ群の表現論，幾何学的 Langlands プログラム等で重要な役割を担う．

より一般に，アファインスキーム $\operatorname{Spec} R$ 上の Tate ベクトル束の概念の定式化と

して, Drinfeld は次のような定義を与えた. 環 R に離散位相を与え, 位相 R 加群 M が離散的位相 R 加群 P と Q を用いて $M = P \oplus Q^{\vee}$ の形に書けるとき, M を初等的 Tate R 加群と呼ぶ. 初等的 Tate R 加群の直和成分となっているような位相 R 加群を Tate R 加群と呼ぶ. Drinfeld の Tate R 加群における最も重要な事実は, 任意の Tate R 加群は Nisnevich 局所的には初等的であるという定理である.

Drinfeld は Tate R 加群に対して, Tate ベクトル空間と同様に, その自己同型群が標準的な $\mathbb{G}_m$ 中心拡大を持つことを示した. Drinfeld はこの中心拡大を, 古典的な Tate 中心拡大の構成の直接の類似を考えることによって与えたが, 彼はまた興味深い代替的なアプローチとして, Tate 中心拡大を代数的 K 理論を用いて解釈することができる, という構想を紹介している. (彼はこれを Beilinson に帰している.) Drinfeld はこの構想は正確に定式化されているわけではないとしてこれを "vague picture" として紹介し, その定式化と証明を問題として掲げた.

本論文では Beilinson-Drinfeld の "vague picture" に対して次のような定式化を与え, その主要な部分の証明を与える. まず, 自己同型群の $\mathbb{G}_m$ 中心拡大は, 一般論によって, その群が作用する $\mathbb{G}_m$-gerbe に対応するが, $\mathbb{G}_m$ が層化された 1 次 K 群であることに基づき, $\mathbb{G}_m$-gerbe を, K 理論全体上で定義された torsor というより大きな構造の一断片と見なす. そして, Tate 中心拡大の K 理論的解釈を主張する "vague picture" を, そのような torsors のモジュライ空間の記述に関する主張として捉える. 本論文は次の定理を Beilinson-Drinfeld の picture の定式化として提示する. この定理において得られた標準的 K 理論 torsor が Drinfeld のものに truncate することを認めれば, これは彼らの問題に対する解答を与えることになる.

定理 (Theorems 1.10, 1.13). アファインスキーム $\operatorname{Spec} R$ の小 Nisnevich サイト $\operatorname{Spec} R_{\mathrm{Nis}}$ 上で非連結 K 理論により与えられる空間の層を $\mathcal{K}$ で表す. このとき, $\mathcal{K}$ は $\operatorname{Spec} R_{\mathrm{Nis}}$ 上の空間の層のなす無限トポス $\mathrm{Shv}_{(\mathrm{Spaces})}(N \operatorname{Spec} R_{\mathrm{Nis}})$ の群対象であり, その分類空間 $B\mathcal{K}$ は空間の層 $\mathcal{K}_{\mathrm{Tate}} : \operatorname{Spec} R' \mapsto \Omega^{\infty}\mathbb{K}((\underleftrightarrow{\lim}\, \mathcal{P}(R'))^{\natural})$ で与えられる. ただし $\mathbb{K}$ は非連結 K 理論, $(\underleftrightarrow{\lim}\, \mathcal{P}(R'))^{\natural}$ は $\operatorname{Spec} R$ 上の Tate ベクトル束の圏である. 特に, 各 Tate ベクトル束 M に対して標準的な方法で $\mathcal{K}$-torsor $\mathfrak{D}_M$ を対応させることができ, $\mathfrak{D}_M$ には M の自己同型群が標準的に作用する.