

論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※	第	号
------	---	---	---

氏 名 齋 藤 翔

論 文 題 目

Previdi's delooping conjecture and the classification theorem for torsors over the sheaf of K-theory spaces

(Previdi の delooping 予想と K 理論空間の層上の torsors の 分類定理)

論文審査担当者

主 査 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 博士(数理科学)
藤 原 一 宏

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 Ph. D.
Lars HESSELHOLT

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 Ph. D.
Thomas GEISSER

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 理学博士
齋 藤 博

論文審査の結果の要旨

この論文では L. Previdi により提案された, K -理論についての予想 (delooping conjecture) により適切な定式化を与え, その証明 (及び本来の予想の証明) が与えられている. さらにその応用として, K -理論を適当なホモトピー圏における群対象と見たとき, その分類空間が K -理論的に構成されている. この構成は J. Tate により発見された線形群の特殊な中心拡大 (Tate 中心拡大, K_2 における tame symbol に相当) と深く関係しており, その高次版に対応する幾何学的対象をホモトピー論的に与えることになっている.

以下, 概要を述べる. 完全圏 \mathcal{A} に対し, $\lim_{\leftarrow} \mathcal{A}$ を \mathcal{A} の Beilinson 構成とする. $\lim_{\leftarrow} \mathcal{A}$ の対象は \mathcal{A} の可算な ind-pro object から成る "locally compact 的" なものであり, 環 R に対して Laurent 級数環 $R((t)) = \varinjlim_m t^{-m} \varprojlim_n R[t]/(t^n)$ を考えることの圏論的類似となっている.

このとき主定理の一つ (Previdi の予想の再定式化) では \mathcal{A} (resp. $\lim_{\leftarrow} \mathcal{A}$) に伴う non-connective K -theory スペクトル $\mathbb{K}(\mathcal{A})$ (resp. $\mathbb{K}(\lim_{\leftarrow} \mathcal{A})$) に対しスペクトルのホモトピー同値

$$\mathbb{K}(\mathcal{A}) \simeq \Omega(\mathbb{K}(\lim_{\leftarrow} \mathcal{A}))$$

が示されている. Ω はループ関手であり, $\mathbb{K}(\mathcal{A})$ は $\mathbb{K}(\lim_{\leftarrow} \mathcal{A})$ により deloop されていることになる. 証明は $\mathbb{K}(\mathcal{A})$, $\mathbb{K}(\lim_{\leftarrow} \mathcal{A})$ 双方に対しそれらが現れる適切な fiber sequence を構成し, 他の項を比較することによってなされている.

さらに申請者はこの一般的な定理の応用としてもう 1 つの主結果, つまり分類空間の構成を行っている. 古典的な Tate 中心拡大が K_2 に関係するものであるため, 高次 K -理論により一般化が得られると予想されるが, 今までこの問題を取り扱う適切な枠組みが存在していなかった. しかしながら近年 ∞ -圏や ∞ -トポスの理論が発展し, 高次のホモトピー類であっても圏論的な意味づけを与え, 議論を層化することが可能になっている. 申請者はこの点に注目した.

そこで環 R に対し, $\mathcal{P}(R)$ を射影加群のなす完全圏, \mathcal{K} を $\text{Spec } R$ の Nisnevich site $(\text{Spec } R)_{\text{Nis}}$ 上定義された, 空間の圏に値をとる ∞ -関手

$$\mathcal{K} : \text{Spec } R' \mapsto \mathcal{K}(R') = \mathbb{K}(\mathcal{P}(R'))$$

とする. \mathcal{K} は $(\text{Spec } R)_{\text{Nis}}$ 上に拡がる ∞ -トポスにおける群対象であるが, 前定理を応用することで以下の結論が得られる:

- \mathcal{K} の ∞ -トポス内の群対象としての分類空間は ∞ -関手 $\mathcal{K}(\lim_{\leftarrow} \mathcal{P}(\cdot))$ により与えられる. ここで $\mathcal{K}(\lim_{\leftarrow} \mathcal{P}(\cdot))$ は $\text{Spec } R' \mapsto \mathbb{K}(\lim_{\leftarrow} \mathcal{P}(R'))$ である.

系として $\lim_{\leftarrow} \mathcal{P}(R)$ の idempotent 完備化の対象 M (Tate vector bundle) に対し \mathcal{K} -torsor \mathcal{D}_M が $(\text{Spec } R)_{\text{Nis}}$ 上に拡がる ∞ -トポスの対象として構成される. この \mathcal{K} -torsor \mathcal{D}_M が申請者による Tate 中心拡大の一般化であり, Drinfeld, Kapranov, Previdi による先行研究を踏まえたものとなっている (これら先行研究は申請者の構成の低次部分と見なせると予想されている). 証明では Drinfeld による $K_{-1}(\cdot)$ の消滅が重要な役割を果たす.

このように申請者によって与えられている結果は重要な先行研究を拡張することを目指したオリジナルなものであり, 適切な定式化により予想の証明が見通しがよいものになっている点, また応用にまで踏み込んで基本的な結果を得ている点が高く評価できる. この研究のためには ∞ -圏や ∞ -トポス等, 現代的なホモトピー論における圏論的アプローチを使いこなすことが必要であり, このことから申請者の力量が伺える. 論文のアイデアも明解であり, 説得力のあるものである.

論文審査の結果の要旨

本論文に関する公開学位審査セミナーが2014年10月8日に行われ、申請者が博士の学位を取得するに足る高い学識を有する事を確認した。

以上により、学位委員会は申請者には博士（数理学）の学位が授与される資格があると判断する。