社団法人 電子情報通信学会
THE INSTITUTE OF ELECTRONICS,
INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

信学技報
IEICE Technical Report
SS2009-40 (2009-12)

右線形右シャローな項書換え系における文脈依存停止性の決定可能性について

御宿 義勝† 酒井 正彦†† 坂部 俊樹†† 草刈圭一朗†† 西田 直樹††

†,†† 名古屋大学大学院情報科学研究科 〒464–8603 名古屋市千種区不老町
E-mail: †mishuku@sakabe.i.is.nagoya-u.ac.jp, ††{sakai,sakabe,kusakari,nishida}@is.nagoya-u.ac.jp

あらまし 依存対が右線形右シャローである項書換え系のクラスでは，停止性および最内停止性が決定可能であることが示されている (内山ら 2008 年)．しかし，文脈依存停止性の決定可能性は同クラスのうち，さらに左シャローであるクラスでしか示されていない．文脈依存書換えでは依存鎖中に停止しない項が存在することが，その停止性の解析を困難にしている．本論文ではまず，内山らの決定手続きが働かない左シャローでない項書換え系を例示する．次に，この困難性をもたらす原因を取り除くための十分条件を追加し，このクラスで文脈依存停止性が決定可能となることを示す．

キーワード 文脈依存停止性，決定可能性，右シャロー

On Decidability of Context-Sensitive Termination for Right-Linear Right-Shallow Term Rewriting Systems

Yoshimasa MISHUKU†, Masahiko SAKAI††, Toshiki SAKABE††, Keiichirou KUSAKARI††, and Naoki NISHIDA††

†, ††Graduate School of Information Science, Nagoya University
Furo–cho, Chikusa–ku, Nagoya, 464–8603, Japan
E-mail: †mishuku@sakabe.i.is.nagoya-u.ac.jp, ††{sakai,sakabe,kusakari,nishida}@is.nagoya-u.ac.jp

Abstract It is known that termination and innermost termination are decidable for term rewriting systems (TRSs for short) whose dependency pairs are all right-linear and right-shallow (Uchiyama et al, 2008). However, decidability of context-sensitive termination requires left-shallow restriction to those TRSs. The difficulty of context-sensitive termination analysis is caused by existence of non-terminating terms in dependency chains. In this paper, we first show a left-non-shallow TRS as a counterexample against the decision procedure. Then, we give a sufficient condition to make the procedure work properly, and show that context-sensitive termination is decidable for the class.

Key words context-sensitive termination, decidability, right-shallow

1. はじめに

項書換え系 (TRS：Term Rewriting System) とは，項の書換えの繰り返しにより計算を表現する関数型言語の計算モデルの一つである．本論文では，関数記号ごとに書換え可能な位置を制限可能な文脈依存書換えを扱う．これは OBJ，ELAN，MAUDE のような計算戦略を指定できるプログラミング言語の計算のモデル化に非常に適している．

本論文では，文脈依存書換えが必ず停止するという性質である文脈依存停止性について，それが決定可能なクラスを明らかにする．一般の書換えに関する停止性については，決定可能な TRS のクラスが研究されている [3]〜[10] が，文脈依存書換え系については内山らが準構成子 TRS [8]，ならびに，依存対が右線形かつシャローな TRS [9] の両方のクラスにおいて，この性質が決定可能であることを示している．本論文ではまず，後者のクラスから左シャローの条件を取り除くと，内山らの手法をそのまま拡張することが困難であることを例示する．その上で左シャローとは異なる新たな十分条件を与えることで，そのクラスでは文脈依存停止性が決定可能であることを示す．

2. 準　備

本節では本論文で必要となる定義を与える．項書換え系の基

本的な概念については文献[2]に，文脈依存書換えに関しては文献[1]に基づく．

$\mathcal{F}$ は**関数記号**の集合であり，$\mathcal{V}$ は**変数**の集合である．項の集合を $\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{V})$，**基底項**の集合を $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ で表す．項に2回以上出現する変数がないとき，項は**線形**であるという．項 t に**出現する変数**の集合を $\mathrm{Var}(t)$ と表記する．関数記号 f の**引数の個数**を $\mathrm{arity}(f)$ で表す．二項関係 $\succ$ について，$t_1 \succ t_2 \succ \cdots$ のような無限下降列が存在しないとき，$\succ$ は**整礎**であるという．

項 t の**位置**の集合を $\mathcal{P}os(t)$，また t の**変数が出現する位置**の集合を $\mathcal{P}os_{\mathcal{V}}(t)$，**関数記号が出現する位置**の集合を $\mathcal{P}os_{\mathcal{F}}(t)$ と表記する．項 t の**根の記号**は $\mathrm{root}(t)$ と表す．位置 p,q が位置上の半順序である**接頭順序**$\leqq$ に関して比較不能であるとき，p,q は**並列** $(p \parallel q)$ であるという．また $p \leqq q$ ならば位置 p は q の**上**であるという (**下**も同様に定義される)．全ての変数が深さ0か1にしか出現しないとき，項 t は**シャロー**であるという．**部分項関係**を $\trianglerighteq$ と表記する．

代入とは $\mathcal{V}$ から $\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ への写像である．以下ではこれを拡張した $\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ から $\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ への写像も区別せずに扱い，$\sigma(t)$ または $t\sigma$ と表記する．

穴 $\square$ が一箇所だけ出現する項 C を**文脈**と呼ぶ．C の位置 p にある $\square$ を t で置き換えて得られる項を $C[t]_p$ と書く．また位置 p を省略して $C[t]_p$ を単に $C[t]$ と書く場合もある．

書換え規則 $l \to r$ とは $l \notin \mathcal{V}$ かつ $\mathrm{Var}(l) \supseteq \mathrm{Var}(r)$ を満たす有向等式である．**項書換え系**(TRS：Term Rewriting System) は書換え規則の有限集合であり，以下では特に指定が無い限り R で表す．書換え規則 $l \to r$ に対して，r が線形 (l,r がシャロー，r がシャロー，r が変数) ならば，$l \to r$ は**右線形(シャロー，右シャロー，崩壊)** であるという．R の全ての規則が右線形 (シャロー，右シャロー，崩壊) ならば，R は右線形 (シャロー，右シャロー，崩壊) であるという．

写像 $\mu:\mathcal{F} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ は $\mu(f) \subseteq \{1,\ldots,\mathrm{arity}(f)\}$ のとき，**置換写像**であるという．項 t の **μ-置換位置**の集合 $\mathcal{P}os^{\mu}(t)$ は $t \in \mathcal{V}$ のとき $\mathcal{P}os^{\mu}(t)=\{\varepsilon\}$，$t=f(t_1,\ldots,t_n)$ のとき $\mathcal{P}os^{\mu}(t)=\{\varepsilon\} \cup \{ip \mid i \in \mu(f), p \in \mathcal{P}os^{\mu}(t_i)\}$ と定義する．$s \xrightarrow[R]{p} t$ かつ $p \in \mathcal{P}os^{\mu}(s)$ のとき，$s \xrightarrow[R]{p} t$ は **μ-R 書換え**であるといい，$s \xrightarrow[\mu,R]{} t$ と表す．$\mu(f) \neq \{1,\ldots,\mathrm{arity}(f)\}$ のとき f は **μ-R 書換え不能な引数を持つ**という．$p \in \mathcal{P}os^{\mu}(C)$ のとき，文脈 $C[\,]_p$ は **μ-置換**であるといい，$C_{\mu}[\,]_p$ と表す．t の全ての **μ-置換変数**の集合は $\mathrm{Var}_{\mu}(t)=\{x \in \mathrm{Var}(t) \mid \exists C, C_{\mu}[x]_p = t\}$ である．$t=C[s]_p$ であるような μ-置換文脈 $C_{\mu}[\,]_p$ が存在するとき，**μ-置換部分項関係** $\trianglerighteq_{\mu}$ は $s \trianglerighteq_{\mu} t$ で与えられる．また $\triangleright_{\mu} = \triangleright \setminus \triangleright_{\mu}$ とする．

$s \xrightarrow[\mu,R]{}{}^{*} t$ ならば，s から始まる t への **μ-R 書換え系列**が存在する，または s から t に **μ-R 到達可能**であるという．$t \in \mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ について，t から始まる無限 μ-R 書換え系列が存在しないとき，t は **μ-R 停止性**を持つ．また $\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ の全ての項が μ-R 停止性を持つとき，R は μ-R 停止性を持つ．

R の左辺の集合を $R_{\mathrm{lhs}}=\{l \mid l \to r \in R\}$，右辺の集合を $R_{\mathrm{rhs}}=\{r \mid l \to r \in R\}$，$T$ の項の直接の部分項の集合を $\mathrm{Arg}(T)=\{t_i \mid f(t_1,\ldots,t_n) \in T\}$，$T$ の項の変数に T' の項を代入して得られる項の集合を $\mathrm{Inst}(T,T')=\{t\sigma \mid t \in T, \forall x \in \mathrm{Var}(t).\sigma(x) \in T'\}$，$T$ の項から $\to$ によって書換え可能な項の集合を $\to[T]=\{s \mid t \in T, t \to s\}$ とする．

ある規則 $l \to r \in R$ において $f=\mathrm{root}(l)$ ならば，関数記号 $f \in \mathcal{F}$ は**被定義**であるという．R の全ての被定義記号の集合を $D_R=\{\mathrm{root}(l) \mid l \to r \in R\}$ と表記する．また，各関数記号 $f \in D_R$ に対し，**印付記号** $f^{\sharp}$ を用意し印付記号の全体からなる集合を $D_R^{\sharp}$ とする．項 t の**印付項** $t^{\sharp}$ を，$t=f(t_1,\ldots,t_n)$ かつ $f \in D_R$ のとき $t^{\sharp}=f^{\sharp}(t_1,\ldots,t_n)$ と定義する．項の集合 T について，$T^{\sharp}=\{t^{\sharp} \mid t \in T, \mathrm{root}(t) \in D_R\}$ と定義する．$l^{\sharp} \to r^{\sharp}$ または $l^{\sharp} \to x$ の規則からなる TRS を $S^{\sharp}$ で表す．

文脈依存依存対(μ-依存対) の集合を $\mathrm{DP}(R,\mu)=\{l^{\sharp} \to u^{\sharp} \mid l \to r \in R, r \trianglerighteq_{\mu} u, \mathrm{root}(u) \in D_R\} \cup \{l^{\sharp} \to x \mid l \to r \in R, x \in \mathrm{Var}_{\mu}(r) \setminus \mathrm{Var}_{\mu}(l)\}$ と定義する．$f \in \mathcal{F}$ について $\mu^{\sharp}(f)=\mu(f)$，$f \in D_R$ について $\mu^{\sharp}(f^{\sharp})=\mu(f)$ を $\mu^{\sharp}$ と定義する．$s \trianglerighteq_{\mu} t$ のとき，$s \trianglerighteq_{\mu}^{\sharp} t^{\sharp}$ と書く．

$i \geqq 1$ について以下を満たす代入 $\tau_1,\tau_2,\ldots$ が存在するならば，$S^{\sharp}$ の要素の (無限) 系列 $e_1^{\sharp},e_2^{\sharp},\ldots$ は **$(R,S^{\sharp},\mu)$-鎖**である．

- $e_i^{\sharp}=s_i^{\sharp} \to t_i^{\sharp}$ のとき，$t_i^{\sharp}\tau_i \xrightarrow[\mu^{\sharp},R]{}{}^{*} s_{i+1}^{\sharp}\tau_{i+1}$ かつ $s_i^{\sharp}\tau_i, t_i^{\sharp}\tau_i$ が $\mu^{\sharp}$-R 停止性を持つ．
- $e_i^{\sharp}=s_i^{\sharp} \to x$ のとき，ある項 $u_i^{\sharp}$ について $\tau_i(x) \trianglerighteq_{\mu}^{\sharp} u_i^{\sharp} \xrightarrow[\mu^{\sharp},R]{}{}^{*} s_{i+1}^{\sharp}\tau_{i+1}$ かつ $s_i^{\sharp}\tau_i, u_i^{\sharp}$ が $\mu^{\sharp}$-停止性を持つ．

このときこの鎖は代入 $\tau_1,\tau_2,\ldots$ を持つといい，$(R,\mathrm{DP}(R,\mu),\mu)$-鎖を **$\mu$-依存鎖**と呼ぶ．また，$S^{\sharp}$ の非崩壊規則を $S^{\sharp}{}_o$，崩壊規則を $S^{\sharp}{}_c$ として，以下では $\xrightarrow[\mu,R,S^{\sharp}]{} = \xrightarrow[\mu^{\sharp},S^{\sharp}{}_o]{} \cup (\xrightarrow[\mu^{\sharp},S^{\sharp}{}_c]{} \cdot \trianglerighteq_{\mu}^{\sharp}) \cup \xrightarrow[\mu^{\sharp},R]{}$ と表記する．

定理 2.1 ([1]) R が μ-R 停止性を持たないことと無限 μ-依存鎖が存在することは必要十分である．

命題 2.2 ([1]) $S^{\sharp} \subseteq \mathrm{DP}(R,\mu)$ と極小の μ-R 停止性を持たない項 t について，$t^{\sharp} \xrightarrow[\mu,R]{}{}^{*} s_0^{\sharp}\tau_0$ となるような代入 $\tau_0,\tau_1,\ldots$ を持つ $(R,S^{\sharp},\mu)$-鎖 $s_0^{\sharp} \to t_0^{\sharp}, s_1^{\sharp} \to t_1^{\sharp},\ldots$ が存在する．

3. 依存対が右線形右シャローなクラスの考察

内山ら[9]の手法では μ-依存対が右線形シャローである R が μ-R 停止性を持たないとき，ある印付項が循環する，つまり1回以上の $\mu^{\sharp}$-$(R \cup \mathrm{DP}(R,\mu))$ 書換えで同じ項に到達することを利用している．しかし左シャローの条件を取り除こうとすると，次の例が示すように，R が μ-R 停止性を持たない場合でも，循環する $\mu^{\sharp}$-$(R \cup \mathrm{DP}(R,\mu))$ 書換え系列が存在するとは限らない．

例 3.1 $R_1=\{f(m(x)) \to f(x), l(x) \to m(l(l(x)))\}$ を考える．ただし，$\mu(f)=\{1\}$，$\mu(l)=\mu(m)=\emptyset$ とする．このとき $f(l(t)) \xrightarrow[\mu,R_1]{} f(m(l(l(t)))) \xrightarrow[\mu,R_1]{} f(l(l(t))) \xrightarrow[\mu,R_1]{} \cdots$ となる系列が存在するので，R_1 は μ-R_1 停止性を持たない．一方，R_1 の μ-依存対は $\mathrm{DP}(R_1,\mu)=\{f^{\sharp}(m(x)) \to f^{\sharp}(x), f^{\sharp}(m(x)) \to x\}$ である．ここである印付項 $f^{\sharp}(t)$ から始まる循環する $\mu^{\sharp}$-$(R_1 \cup \mathrm{DP}(R_1,\mu))$ 書換え系列が存在すると仮定する．$R_1 \cup \mathrm{DP}(R_1,\mu)$ では書換えでは f の数が増えず，$f^{\sharp}(t)$ に到達できない．また，$f^{\sharp}(m(x)) \to f^{\sharp}(x)$ の適用で項に含まれる関

数記号 m の数が一つ減るため，$l(x) \to m(l(l(x)))$ の適用が必要である．このとき，必ず l の数が増加するが l を減少させる規則はないので矛盾する． □

例 3.1 のように，μ-依存対が右線形右シャローのクラスでは，μ-R_1 停止性を持たず，循環する $\mu^\sharp$-$(R_1 \cup \mathrm{DP}(R_1, \mu))$ 書換え系列が存在しない場合がある．このような TRS を除外する条件の追加を考える．そのためにこの例題における m のように，書換えにおいて左辺の内側で消費され，右辺で生成される関数の集合に注目する．

項の集合 T のいずれかの項に含まれる関数の集合を $\mathcal{F}(T) = \{\mathrm{root}(u) \mid t \trianglerighteq u, t \in T\}$ と，$S^\sharp$ を μ-依存対の集合とする．このとき $S^\sharp$ の左辺の根の位置以外に出現し，かつ μ-R 書換え不能な引数を持つ関数の集合を $\mathcal{F}_{\mu,S^\sharp} = \mathcal{F}({S^\sharp}_{\mathrm{lhs}}) \cap \{f \mid \mu(f) \neq \{1, \ldots, \mathrm{arity}(f)\}, f \in \mathcal{F}\}$ とする．関数の集合 $\mathcal{G}$ に対して $\mathcal{G} \cap \mathcal{F}(R_{\mathrm{rhs}}) = \emptyset$ ならば，$\boldsymbol{R}$ **は** $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ **非生成**であるという．

本論文の主定理は次の通りである．

定理 3.2 $\mathrm{DP}(R, \mu)$ が右線形右シャロー，かつ R が $\mathcal{F}_{\mu,\mathrm{DP}(R,\mu)}$ 非生成ならば，R の μ-R 停止性は決定可能である．

以下，本節および 4〜6 節を通してこの定理を証明する．本節では $\mathcal{F}_{\mu,\mathrm{DP}(R,\mu)}$ 非生成の条件下で成立する性質を明らかにする．

$\mathcal{F}_{\mu,S^\sharp}$ 非生成な書換え系では $\mathcal{F}_{\mu,S^\sharp}$ の関数を新たに生成できないため，書換え後の項に存在する $\mathcal{F}_{\mu,S^\sharp}$ の関数は，書換え前の項においても存在することが保証される．このことを命題 3.3 で示す．

命題 3.3 R は $\mathcal{F}_{\mu,S^\sharp}$ 非生成とする．さらに $s \xrightarrow[\mu,R]{}^{*} t$ かつ，ある $p \in \mathcal{P}os(t)$ について $\mathrm{root}(t|_p) \in \mathcal{F}_{\mu,S^\sharp}$ とする．このとき $s|_q \xrightarrow[\mu,R]{>\varepsilon}^{*} t|_p$ となる位置 q が存在する．

証明 $s \xrightarrow[\mu,R]{} t$ の場合についてのみ示す．$s \xrightarrow[\mu,R]{} t$ の書換えで適用された規則を $l \to r$ とすると，文脈 C，位置 k，代入 σ について，$s = C[l\sigma]_k$，$t = C[r\sigma]_k$ と書ける．

$\boldsymbol{p \geqq k}$ **のとき**，ある位置 k' について $p = kk'$ とおける．このとき $r\sigma|_{k'} = t|_p$ である．R の $\mathcal{F}_{\mu,S^\sharp}$ 非生成性より r には $\mathcal{F}_{\mu,S^\sharp}$ の関数が出現しないことから，$k' \notin \mathcal{P}os_{\mathcal{F}}(r)$ である．よって $m \in \mathcal{P}os_{\mathcal{V}}(r)$，$k' = mm'$ となる位置 m, m' が存在する．また $\mathrm{Var}(l) \supseteq \mathrm{Var}(r)$ より，$m'' \in \mathcal{P}os_{\mathcal{V}}(l)$，$l|_{m''} = r|_m$ となる位置 m'' が存在する．さらに $r\sigma|_{mm'} = t|_p$ から $l\sigma|_{m''m'} = t|_p$ なので，$s|_{km''m'} = t|_p$ である．

$\boldsymbol{p < k}$ **のとき**，ある位置 $k' (\neq \varepsilon)$ について $k = pk'$ とおける．このとき $s|_p \xrightarrow[\mu,R]{k'} t|_p$ より，$s|_p \xrightarrow[\mu,R]{>\varepsilon} t|_p$ である．

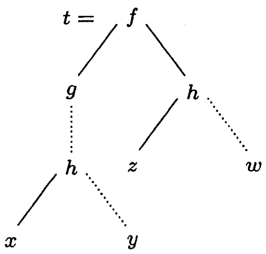
$\boldsymbol{p \parallel k}$ **のとき**，$s|_p = t|_p$ なので成り立つ． □

4. 無限個の崩壊規則を含む鎖の解析

TRS の依存対とは異なり，μ-依存対は崩壊規則を含む．本節では崩壊規則を無限個含む鎖に関する解析を行う．

代入 $\tau_0, \tau_1, \ldots$ を持つ μ-依存鎖 $e^\sharp_0, e^\sharp_1, \ldots$ において，$e^\sharp_0 = e^\sharp_n$ かつ e_0 に出現する全ての変数 x について $\tau_0(x) = \tau_n(x)$ ならば，この鎖は**循環する**という．

μ-依存対が右線形右シャローであり，かつ規則が $\mathcal{F}_{\mu,S^\sharp}$ 非生成である TRS について，崩壊規則を無限個含む無限 μ-依存鎖が存在するならば，循環する μ-依存鎖を含むことを示す．そのために，部分項関係を拡張したものを定義する．



	t の $(\{g,h\},\mu)$ 部分項
t	×
$g(h(x,y))$	×
$h(x,y)$	○
$h(z,w)$	×
x	○
y	○
z	×
w	○

図 1 $(\mathcal{F}_{\mu,S^\sharp}, \mu)$ 部分項関係

定義 4.1 $f \in \mathcal{F}_{\mu,S^\sharp}$ を根に持つ s の部分項 $f(u_1, \ldots, u_n)$ に対して，項 t が $i \notin \mu(f)$ を満たす u_i の部分項であるとき，t は s の $\boldsymbol{(\mathcal{F}_{\mu,S^\sharp}, \mu)}$ **部分項**であるといい，$s \rhd^{S^\sharp}_{\not\mu} t$ と表記する．また $s \trianglerighteq^{S^\sharp}_{\not\mu} t$ を，$s = t$ または $s \rhd^{S^\sharp}_{\not\mu} t$ で定義する．

例 4.2 $f(g(h(x,y)), h(z,w))$ と $(\mathcal{F}_{\mu,S^\sharp}, \mu)$ 部分項関係にある項を図 1 に示す．ただし，$\mu(f) = \{1,2\}$，$\mu(g) = \emptyset$，$\mu(h) = \{1\}$ かつ $\mathcal{F}_{\mu,S^\sharp} = \{g, h\}$ とし，破線は μ-R 書換え不能な引数を表す．

補題 4.3 $S^\sharp$ は右シャロー，R は $\mathcal{F}_{\mu,S^\sharp}$ 非生成とする．代入 $\tau_1, \ldots, \tau_n$ を持つ $(R, S^\sharp, \mu)$-鎖 $s^\sharp_1 \to t^\sharp_1, \ldots, s^\sharp_{n-1} \to t^\sharp_{n-1}, s^\sharp_n \to x$ について，$s^\sharp_1\tau_1 \rhd_{\not\mu} \tau_n(x)$ あるいは $\tau_n(x) \in \rhd_{\not\mu^\sharp}[{S^\sharp}_{\mathrm{rhs}}] \cap \mathcal{T}(\mathcal{F})$ のいずれかが成り立つ．

証明 $s = f(\ldots, u_i, \ldots)$ の形であり，ある $i \notin \mu(f)$ に対して $u_i \trianglerighteq_\mu t$ であるとき，$s \rhd^{\varepsilon}_{\not\mu} t$ とする．(1) $s^\sharp_1\tau_1 \rhd^{\varepsilon}_{\not\mu} \tau_n(x)$，(2) $s^\sharp_1\tau_1 \rhd^{S^\sharp}_{\not\mu} \tau_n(x)$，(3) $\tau_n(x) \in \rhd_{\not\mu^\sharp}[{S^\sharp}_{\mathrm{rhs}}] \cap \mathcal{T}(\mathcal{F})$ のいずれかが成立することを示せば十分である．鎖の長さ n に関する帰納法で証明する．

$\boldsymbol{n = 1}$ **のとき**．$s^\sharp_1 \to x$ について，μ-依存対の定義より $s_1 = f(\ldots, u_i, \ldots)$，$u_i \trianglerighteq x$ と書け，x は s_1 の書換え不能な位置に出現する．このとき $u_i \rhd_{\not\mu} x$ ならば，(2) が成り立つ．そうでないならば，$s_1 \rhd_{\not\mu} x$ から $i \notin \mu(f)$ なので，(1) が成立．

$\boldsymbol{n > 1}$ **のとき**．$s^\sharp_2 \to t^\sharp_2, \ldots, s^\sharp_n \to t^\sharp_n$ について帰納法の仮定より，(I) $s^\sharp_2\tau_2 \rhd^{\varepsilon}_{\not\mu} \tau_n(x)$，(II) $s^\sharp_2\tau_2 \rhd^{S^\sharp}_{\not\mu} \tau_n(x)$，(III) $\tau_n(x) \in \rhd_{\not\mu^\sharp}[{S^\sharp}_{\mathrm{rhs}}] \cap \mathcal{T}(\mathcal{F})$ のいずれかが成り立つ．

鎖の定義より $s^\sharp_1\tau_1 \xrightarrow[S^\sharp]{} t^\sharp_1\tau_1 \xrightarrow[\mu,R]{}^{*} s^\sharp_2\tau_2$ である．

(I) が成り立つとき．$t^\sharp_1 = f^\sharp(\ldots, u_i, \ldots)$，$s^\sharp_2 = f^\sharp(\ldots, v_i, \ldots)$ において，ある $i \notin \mu(f)$ に対して $v_i\tau_2 \trianglerighteq_\mu \tau_n(x)$ である．このとき $i \notin \mu(f)$ より，$u_i\tau_1 = v_i\tau_2 \trianglerighteq_\mu \tau_n(x)$ である．また右シャローより u_i は基底項か変数である．u_i が基底項ならば (3) が成り立つ．u_i が変数のとき，$s^\sharp_1 = g^\sharp(\ldots, w_j, \ldots)$，$w_j \trianglerighteq u_i$ となる j が存在する．このとき $\tau_n(x)$ は μ-R 停止性を持たないので，$\tau_n(x)$ は $s^\sharp_1$ 中の μ-R 書換え不能な位置のみに出現する．よって $w_j \rhd_{\not\mu} u_i$ または $j \notin \mu(g)$ である．$w_j \rhd_{\not\mu} u_i$ ならば，(2) が成り立つ．そうでないならば，$w_i\tau_1 \trianglerighteq_\mu u_i\tau_1 \trianglerighteq_\mu \tau_n(x)$ より (1) が成り立つ．

(II) が成り立つとき．$t^\sharp_1 = f^\sharp(\ldots, u_i, \ldots)$，$s^\sharp_2 = f^\sharp(\ldots, v_i, \ldots)$ に対して，$v_i\tau_2 \rhd^{S^\sharp}_{\not\mu} \tau_n(x)$ である．また右シャ

ローより u_i は基底項か変数である.

- $i \notin \mu(f)$ のとき $u_i\tau_1 = v_i\tau_2$ である. u_i が基底項ならば $u_i = v_i\tau_2$ で, $i \notin \mu(f)$ より (3) が成り立つ. u_i が変数ならば $s_1^\sharp\tau_1 \rhd u_i\tau_1 = v_i\tau_2 \unrhd_{\mu}^{S^\sharp} \tau_n(x)$ なので (2) が成り立つ.
- $i \in \mu(f)$ のとき $u_i\tau_1 \xrightarrow[\mu,R]{}^* v_i\tau_2$ である. $v_i\tau_2 \unrhd_{\mu}^{S^\sharp} \tau_n(x)$ より, $g \in \mathcal{F}_{\mu,S^\sharp}$ を根に持つ $v_i\tau_2$ の部分項 $g(w_1,\ldots,w_m)$ に対して, $\tau_n(x)$ は $k \notin \mu(g)$ を満たす w_k の部分項である. よって命題 3.3 より $u_i\tau_1 \unrhd g(\ldots,w_k,\ldots) \rhd w_k \unrhd \tau_n(x)$ である. したがって u_i が基底項ならば $k \notin \mu(g)$ より (3) が成り立つ. また u_i が変数ならば $s_1^\sharp\tau_1 \rhd u_i\tau_1 \unrhd g(\ldots,w_k,\ldots) \rhd w_k \unrhd \tau_n(x)$ と $g \in \mathcal{F}_{\mu,S^\sharp}$, $k \notin \mu(g)$ より (2) が成り立つ.

(III) が成り立つとき. 自明である. □

補題 4.4 $S^\sharp$ は右シャロー崩壊, R は $\mathcal{F}_{\mu,S^\sharp}$ 非生成とする. 崩壊規則を無限に含む無限 $(R,S^\sharp,\mu)$-鎖が存在するならば, ある項 $t^\sharp \in (\rhd_{\mu^\sharp}[S^\sharp{}_{\mathrm{rhs}}] \cap \mathcal{T}(\mathcal{F}))^\sharp$ について $t^\sharp \xhookrightarrow[\mu,R,S^\sharp]{}^+ t^\sharp$ となる.

証明 代入 $\tau_0,\tau_1,\ldots$ を持つ無限 $(R,S^\sharp,\mu)$-鎖 $e_0,e_1,\cdots$ を考え, 崩壊規則を $e_{n_i} = s_{n_i}^\sharp \to x_{n_i} (i \geqq 0)$, 非崩壊規則を $e_j = s_j^\sharp \to t_j^\sharp (j \geqq 0)$ とする. このとき鎖の定義より, 各 $i \geqq 0$ について項 u_{n_i} が存在し, $\tau_{n_i}(x_{n_i}) \unrhd_\mu^\sharp u_{n_i}^\sharp \xrightarrow[\mu,R]{}^* s_{n_i+1}^\sharp\tau_{n_i+1}$ である. また, $e_{n_i+1},\ldots,e_{n_{i+1}-1}, s_{n_{i+1}}^\sharp \to x_{n_{i+1}}$ であるから, 補題 4.3 より $s_{n_i+1}^\sharp\tau_{n_i+1} \rhd_{\mu} \tau_{n_{i+1}}(x_{n_{i+1}})$ または $\tau_{n_{i+1}}(x_{n_{i+1}}) \in \rhd_{\mu^\sharp}[S^\sharp{}_{\mathrm{rhs}}] \cap \mathcal{T}(\mathcal{F})$ が成り立つ.

前者のとき, $\tau_{n_{i+1}}(x_{n_{i+1}})$ は $s_{n_i+1}^\sharp\tau_{n_i+1}$ の書換え不能な位置にある部分項なので, 命題 3.3 より $u_{n_i}^\sharp \xrightarrow[\mu^\sharp,R]{}^* s_{n_i+1}^\sharp\tau_{n_i+1}$ では書き換えられない. よって $\tau_{n_i}(x_{n_i}) \rhd \tau_{n_{i+1}}(x_{n_{i+1}})$ である. このとき $\rhd$ の整礎性から, 後者が無限回成り立つ. 後者が成り立つ i について $u_{n_i}^\sharp \in (\rhd_{\mu^\sharp}[S^\sharp{}_{\mathrm{rhs}}] \cap \mathcal{T}(\mathcal{F}))^\sharp$ であることと, $(\rhd_{\mu^\sharp}[S^\sharp{}_{\mathrm{rhs}}] \cap \mathcal{T}(\mathcal{F}))^\sharp$ の有限性から, $u_{n_j}^\sharp \xhookrightarrow[\mu,R,S^\sharp]{}^+ u_{n_k}^\sharp = u_{n_j}^\sharp$ となる系列が, ある j,k $(0 \leqq j < k)$ について成立する. □

5. 項の文脈依存停止性の決定可能性

前節では崩壊規則を無限に持つ場合を解析した. そうでない場合には, 有限個出現する崩壊規則より後の無限 μ-依存鎖をとることにより, 崩壊規則を含まない無限 μ-依存鎖が存在する. 本節では, このときに循環する μ-依存鎖を含むことを示す. また, μ-依存対が右線形右シャローで, かつ規則が $\mathcal{F}_{\mu,S^\sharp}$ 非生成である TRS の項の μ-R 停止性の決定可能性を示す.

まず, 証明中の帰納法で用いる整礎な関係 $(\succ_{\mathcal{M}}, \succ_{\mathrm{Ran}})$ を定義する. $\mathcal{G}(\subseteq \mathcal{F})$ を関数の集合として, 項 t の各パスに出現する $\mathcal{G}$ 中の関数の最大個数 $\mathcal{M}_{\mathcal{G}}(t)$ は以下のように定義される.

- t が変数のとき, $\mathcal{M}_{\mathcal{G}}(t) = 0$
- $t = f(t_1,\ldots,t_n)$ かつ $f \notin \mathcal{G}$ のとき,
$$\mathcal{M}_{\mathcal{G}}(t) = \max\{\mathcal{M}_{\mathcal{G}}(t_1),\ldots,\mathcal{M}_{\mathcal{G}}(t_n),0\}$$
- $t = f(t_1,\ldots,t_n)$ かつ $f \in \mathcal{G}$ のとき,
$$\mathcal{M}_{\mathcal{G}}(t) = 1 + \max\{\mathcal{M}_{\mathcal{G}}(t_1),\ldots,\mathcal{M}_{\mathcal{G}}(t_n),0\}$$

$\mathcal{M}_{\mathcal{F}_{\mu,S^\sharp}}(t) \geqq \mathcal{M}_{\mathcal{F}_{\mu,S^\sharp}}(u)$ のとき, $t \succeq_{\mathcal{M}} u$ と表す. 次の命題 5.1 は, R の $\mathcal{F}_{\mu,S^\sharp}$ 非生成性と $\mathcal{M}_{\mathcal{F}_{\mu,S^\sharp}}(t)$ の定義より導かれる.

命題 5.1 R は $\mathcal{F}_{\mu,S^\sharp}$ 非生成とする. このとき $s \xrightarrow[\mu^\sharp,R]{}^* t$ ならば, $s \succeq_{\mathcal{M}} t$ である.

循環する無限 μ-依存鎖中の μ-依存対の右辺に出現する変数の値域となる項の集合 $\mathrm{Ran}(t,R,\mu)$ を定義する. ここで, $(\xrightarrow[\mu,R]{}^* \cdot \rhd_{\mu}^{S^\sharp}) \cup (\xrightarrow[\mu,R]{}^* \cdot \rhd_\mu) \cup \xrightarrow[\mu,R]{}^+$ を $\xrightarrow[\mathrm{Ran}]{}$ と, $\rhd_{\mu}^{S^\sharp} \cup \rhd_\mu$ を $\xrightarrow[\mathrm{nRan}]{}$ とする. t が μ-R 停止性を持つならば $t \xrightarrow[\mu,R]{}^* \cdot \unrhd_\mu u$ が成り立ち, t が μ-R 停止性を持たないならば $t \unrhd_\mu u$ が成り立つとき, $t \succeq_{\mathrm{Ran}} u$ と表す.

定義 5.2 項の集合 $\mathrm{Ran}(t,R,\mu)$ を以下のように定義する.

- t が μ-R 停止性を持つとき,
$$\mathrm{Ran}(t,R,\mu) = \{t\} \cup \bigcup_{\forall u.t \xrightarrow[\mathrm{Ran}]{} u} \mathrm{Ran}(u,R,\mu)$$
- t が μ-R 停止性を持たないとき,
$$\mathrm{Ran}(t,R,\mu) = \{t\} \cup \bigcup_{\forall u.t \xrightarrow[\mathrm{nRan}]{} u} \mathrm{Ran}(u,R,\mu)$$

補題 5.3 辞書式直積 $(\succ_{\mathcal{M}}, \succ_{\mathrm{Ran}})$ は整礎である.

証明 $\succ_{\mathcal{M}}$ は自然数集合上の比較であるから, $\succ_{\mathrm{Ran}}$ の整礎性を示せば十分である.

背理法で示す. $t_0 \succ_{\mathrm{Ran}} t_1 \succ_{\mathrm{Ran}} \cdots$ となる無限下降列が存在すると仮定する. 全ての i について t_i が μ-R 停止性を持たないとすると, $t_0 \rhd_\mu t_1 \rhd_\mu \cdots$ である. これは $\rhd_\mu$ の整礎性に反するので, ある i について t_i は μ-R 停止性を持つ. よって $\succ_{\mathrm{Ran}}$ の定義より t_i $((\xrightarrow[\mu,R]{}^* \cdot \rhd_\mu) \cup \xrightarrow[\mu,R]{}^+)$ t_{i+1} であるから, t_{i+1} も μ-R 停止性を持つ. すなわち, 全ての $j \geqq i$ について t_j は μ-R 停止性を持つ. $\rhd_\mu \cdot \xrightarrow[\mu,R]{} \subseteq \xrightarrow[\mu,R]{}^+ \cdot \rhd_\mu$ であることから, $\xrightarrow[\mu,R]{}$ の無限系列を作るため矛盾する. □

補題 5.4 $s \in \mathrm{Ran}(t,R,\mu)$ ならば, $\mathrm{Ran}(s,R,\mu) \subseteq \mathrm{Ran}(t,R,\mu)$ である.

証明 t の辞書式直積 $(\succ_{\mathcal{M}}, \succ_{\mathrm{Ran}})$ に関する帰納法で示せる. □

補題 5.5 $S^\sharp$ は右シャローかつ非崩壊とする. 代入 $\tau_0,\tau_1,\ldots$ を持つ $(R,S^\sharp,\mu)$-鎖 $s_0^\sharp \to t_0^\sharp, s_1^\sharp \to t_1^\sharp,\ldots$ が存在するならば, 全ての $i \geqq 0$ と全ての $x \in \mathrm{Var}(t_i^\sharp)$ について, ある $t \in (\mathrm{Arg}(S^\sharp{}_{\mathrm{rhs}}) \cap \mathcal{T}(\mathcal{F})) \cup \{\tau_0(y) \mid y \in \mathrm{Var}(s_0^\sharp)\}$ が存在して, $\tau_i(x) \in \mathrm{Ran}(t,R,\mu)$ である.

証明 i に関する帰納法で証明する. ***i* = 0 のとき**, $\mathrm{Var}(s_i^\sharp) \supseteq \mathrm{Var}(t_i^\sharp)$ より, $\tau_0(x) \in \{\tau_0(y) \mid y \in \mathrm{Var}(s_0^\sharp)\}$ が成り立つ.

***i* > 0 のとき**を考える. $x \in \mathrm{Var}(s_0^\sharp)$ より $s_i^\sharp = f^\sharp(\ldots,v_j,\ldots)$ かつ v_j $(\unrhd_{\mu}^{S^\sharp} \cup \unrhd_\mu)$ x と書け, 鎖の定義より $t_{i-1}^\sharp = f^\sharp(\ldots,u_j,\ldots)$ と書ける. 右シャローより u_j は基底項か変数である. ここで u_j が基底項ならば, t として $u_j (\in \mathrm{Arg}(S^\sharp{}_{\mathrm{rhs}}) \cap \mathcal{T}(\mathcal{F}))$ をとることにより, また変数の場合も帰納法の仮定より $t \in (\mathrm{Arg}(S^\sharp{}_{\mathrm{rhs}}) \cap \mathcal{T}(\mathcal{F})) \cup \{\tau_0(y) \mid y \in \mathrm{Var}(s_0^\sharp)\}$ が存在して $u_j\tau_{i-1} \in \mathrm{Ran}(t,R,\mu)$ である. したがって補題 5.4 より, $\tau_i(x) \in \mathrm{Ran}(u_j\tau_{i-1},R,\mu)$ を示せば十分である.

- $j \notin \mu(f)$ のとき, 鎖の定義より $u_j\tau_{i-1} = v_j\tau_i$ である. $u_j\tau_{i-1} = v_j\tau_i$ $(\unrhd_{\mu}^{S^\sharp} \cup \unrhd_\mu)$ $\tau_i(x)$ より $\tau_i(x) \in \mathrm{Ran}(u_j\tau_{i-1},R,\mu)$ である.
- $j \in \mu(f)$ のとき, 鎖の定義より $u_j\tau_{i-1} \xrightarrow[\mu,R]{}^* v_j\tau_i$ $(\unrhd_{\mu}^{S^\sharp} \cup \unrhd_\mu)$ $\tau_i(x)$ である. $u_j\tau_{i-1}$ は μ-R 停止性を持つので $\tau_i(x) \in \mathrm{Ran}(u_j\tau_{i-1},R,\mu)$ である. □

補題 5.6 $S^\sharp$ は非崩壊，R は $\mathcal{F}_{\mu,S^\sharp}$ 非生成とする．全ての項 $t \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ について $\mathrm{Ran}(t,R,\mu)$ は有限である．

証明 t の辞書式直積 $(\succ_{\mathcal{M}}, \succ_{\mathrm{Ran}})$ に関する帰納法で証明する．

t が μ-R 停止性を持つとき，t から $\xrightarrow[\mathrm{Ran}]{}$ に関して到達可能な項は有限であり，t が μ-R 停止性を持たないときも，$\xrightarrow[\mathrm{nRan}]{}$ に関して到達可能な項が有限であることは明らかである．よって $\xrightarrow[\mathrm{Ran}]{}$，$\xrightarrow[\mathrm{nRan}]{}$ によって関係が成り立つとき，$(\succ_{\mathcal{M}}, \succ_{\mathrm{Ran}})$ について真に小さくなることを示せば，補題 5.3 と帰納法の仮定より $\mathrm{Ran}(u,R,\mu)$ が有限であるため，以下ではこれを示す．

t が μ-R 停止性を持つとする．$t \xrightarrow[\mu,R]{}^* \cdot \rhd_\mu^{S^\sharp} u$ ならば，命題 5.1 と $\rhd_\mu^{S^\sharp}$ の定義より $t \succ_{\mathcal{M}} u$ なので成り立つ．$t\ ((\xrightarrow[\mu,R]{}^* \cdot \rhd_\mu) \cup \xrightarrow[\mu,R]{}^+)\ u$ ならば，命題 5.1 より $t \succeq_{\mathcal{M}} u$ かつ $t \succ_{\mathrm{Ran}} u$ なので成り立つ．

t が μ-R 停止性を持たないとする．$t \rhd_\mu^{S^\sharp} u$ ならば，$\rhd_\mu^{S^\sharp}$ の定義より $t \succ_{\mathcal{M}} u$ なので成り立つ．$t \rhd_\mu u$ ならば，$t \succeq_{\mathcal{M}} u$ かつ $t \succ_{\mathrm{Ran}} u$ なので成り立つ． □

補題 5.7 $S^\sharp$ は右シャローかつ非崩壊，R は $\mathcal{F}_{\mu,S^\sharp}$ 非生成とする．代入 $\tau_0, \tau_1, \ldots$ を持つ無限 $(R,S^\sharp,\mu)$-鎖 $s_0^\sharp \to t_0^\sharp, s_1^\sharp \to t_1^\sharp, \ldots$ が存在するならば，ある i,j $(0 \leqq i < j)$ の全ての $x \in \mathrm{Var}(t_i^\sharp)$ について，$s_i^\sharp \to t_i^\sharp = s_j^\sharp \to t_j^\sharp$ かつ $\tau_i(x) = \tau_j(x)$ が成り立つ．

証明 補題 5.5 と補題 5.6 より全ての $\tau_i(x)$ の値域は有限なので，鎖が無限であることから成り立つ． □

補題 5.8 $\mathrm{DP}(R,\mu)$ が右シャローかつ R が $\mathcal{F}_{\mu,\mathrm{DP}(R,\mu)}$ 非生成ならば，R に関する項 t の μ-R 停止性は決定可能である．

証明 R に関する項 t の μ-R 停止性を決定する手続きは以下のようになる．根の位置に被定義記号を持ち $t \unrhd_\mu s$ である全ての項 s について，$s^\sharp$ から始まる全ての μ-$(R \cup \mathrm{DP}(R,\mu))$ 書換え系列を同時に生成する．全ての μ-$(R \cup \mathrm{DP}(R,\mu))$ 到達可能な項を完全に列挙するか，循環する系列 $s^\sharp \xrightarrow[\mu,R,\mathrm{DP}(R,\mu)]{}^* u^\sharp \xrightarrow[\mu,R,\mathrm{DP}(R,\mu)]{}^* u^\sharp$ を発見したとき手続きは停止する．

t が μ-R 停止性を持たないならば，定理 2.1 より代入 $\tau_0, \tau_1, \ldots$ を持つ無限 $(R, \mathrm{DP}(R,\mu), \mu)$-鎖 $s_0^\sharp \to t_0^\sharp, s_1^\sharp \to t_1^\sharp, \ldots$ が存在する．命題 2.2 より $s^\sharp$ から $s_0^\sharp \tau_0$ に到達できる．したがって鎖が崩壊規則を無限個含むとき補題 4.4 より，そうでないときは補題 5.7 より手続きによって循環する系列を発見できる．t が μ-R 停止性を持つならば，s も μ-R 停止性を持つ．ゆえに命題 2.1 より $s^\sharp$ から始まる全ての μ-$(R \cup \mathrm{DP}(R,\mu))$ 書換え系列は有限である．μ-$(R \cup \mathrm{DP}(R,\mu))$ 書換え系列の分岐は有限なので，μ-$(R \cup \mathrm{DP}(R,\mu))$ 書換え系列の生成は最終的に停止する．よって有限ステップで t の μ-R 停止性を判定できる． □

6. 文脈依存停止性の決定可能性

前節までで，μ-依存対が右線形右シャローであり，かつ規則が $\mathcal{F}_{\mu,S^\sharp}$ 非生成である TRS では，無限 μ-依存鎖が循環することを示した．本節では，同クラスの μ-R 停止性の決定可能性を示すために調べる必要がある項の集合を求める．

定義 6.1 (引数伝播グラフ [8], [9]) $S^\sharp$ は右シャローかつ非崩壊とする．代入 $\tau_0, \ldots, \tau_n$ を持つ循環する $(R,S^\sharp,\mu)$-鎖 $s_0^\sharp \to t_0^\sharp, \ldots, s_n^\sharp \to t_n^\sharp$ において，鎖の**引数伝播グラフ**(APG：Argument Propagation Graph) とは頂点が $\{(i,\mathrm{lhs},j) \mid 0 \leqq i \leqq n, j \in \mathrm{arity}(\mathrm{root}(s_i^\sharp))\} \cup \{(i,\mathrm{rhs},j) \mid 0 \leqq i \leqq n, j \in \mathrm{arity}(\mathrm{root}(t_i^\sharp))\}$ である有向グラフであり，以下を満たす．

- 頂点 (k,lhs,l) から (k',rhs,l') への辺が存在することは，$k = k'$ かつ $t_{k'}^\sharp|_{l'} \in \mathrm{Var}(s_k^\sharp|_l)$ と同義である．
- 頂点 (k,rhs,l) から (k',lhs,l') への辺が存在することは以下の全てが成り立つことと同義である．
  - $k+1 = k'$，または，$k = n$ かつ $k' = 0$
  - $l = l'$

ある頂点から出ていく辺の数を**出次数**，入ってくる辺を持たず出ていく辺を持つ頂点を**始点**，ある頂点から同一の頂点への道を**サイクル**と呼ぶ．

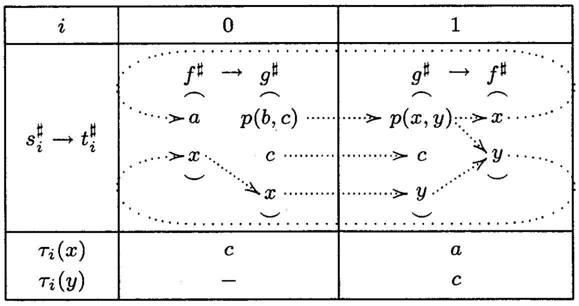


図 2 R_2 の μ-依存対から構成される APG

例 6.2 $R_2 = \{f(a,x) \to g(p(b,c),c,x), g(p(x,y),c,y) \to f(x,y), b \to a\}$ とする．$\mathrm{DP}(R_2,\mu) = \{f^\sharp(a,x) \to g^\sharp(p(b,c),c,x), g^\sharp(p(x,y),z,y) \to f^\sharp(x,y)\}$ である．R_2 の μ-依存対から構成される APG を図 2 で示す．破線の矢印が APG の辺である．

命題 6.3 $S^\sharp$ は右線形右シャローかつ非崩壊とする．代入 $\tau_0, \ldots, \tau_n$ を持つ循環する $(R,S^\sharp,\mu)$-鎖 $s_0^\sharp \to t_0^\sharp, \ldots, s_n^\sharp \to t_n^\sharp$ が存在するならば，鎖の APG は以下を満たす．

(1) 頂点 N が始点ならば，$N = (i,\mathrm{rhs},j)$ かつ $t_i^\sharp|_j \in \mathrm{Arg}(S^\sharp{}_{\mathrm{rhs}}) \cap \mathcal{T}(\mathcal{F})$ である．

(2) (i,rhs,j) から (i',lhs,j) への全ての辺に対し，全ての $x \in \mathrm{Var}(s_{i'}^\sharp|_j)$ について $\tau_{i'}(x) \in \mathrm{Ran}(t_i^\sharp|_j\tau_i, R, \mu)$ で，かつ

(a) $s_{i'}^\sharp|_j$ が変数でないとする．このとき $t_i^\sharp|_j\tau_i$ が μ-停止性を持つならば，$t_i^\sharp|_j\tau_i \xrightarrow[\mu,R]{}^* \cdot (\rhd_\mu^{S^\sharp} \cup \rhd_\mu)\ \tau_{i'}(x)$ であり，$t_i^\sharp|_j\tau_i$ が μ-停止性を持たないならば，$t_i^\sharp|_j\tau_i\ (\rhd_\mu^{S^\sharp} \cup \rhd_\mu)\ \tau_{i'}(x)$ である．

(b) $s_{i'}^\sharp|_j$ が変数ならば，$t_i^\sharp|_j\tau_i \xrightarrow[\mu,R]{}^* \tau_{i'}(x)$ である．

補題 6.4 $S^\sharp$ は右線形右シャローかつ非崩壊，R は $\mathcal{F}_{\mu,S^\sharp}$ 非生成とする．代入 $\tau_0, \ldots, \tau_n$ を持つ循環する $(R,S^\sharp,\mu)$-鎖 $s_0^\sharp \to t_0^\sharp, \ldots, s_n^\sharp \to t_n^\sharp$ が存在するならば，鎖の APG は以下の全てを満たす．

(1) 始点 (i,rhs,j) から (i',lhs,j') への道が存在するならば，全ての $x \in \mathrm{Var}(s_{i'}^\sharp|_{j'})$ について $\tau_{i'}(x) \in \mathrm{Ran}(t_i^\sharp|_j, R, \mu)$ である．

(2) APG においてサイクルが存在するならば，サイクルに含まれる全ての頂点 (i, lhs, j)，(i', lhs, j') において，$s_i^\sharp|_j \tau_i = s_{i'}^\sharp|_{j'} \tau_{i'}$ である．

(3) 始点からの道を持たない全ての頂点 (i, lhs, j) はサイクルに含まれる．

略証 (1) 命題 6.3(1) より $t_i^\sharp|_j$ は基底項である．始点 (i, rhs, j) から (i', lhs, j') への道の長さ m に関する帰納法で証明する．なお，APG の定義より道の長さは奇数である．

$m = 1$ のとき． 命題 6.3(2) より成り立つ．

$m \geqq 3$ のとき． 道は (i, rhs, j) から (k, lhs, l) への長さ $m-2$ の道，(k, lhs, l) から (k, rhs, j') への辺，(k, rhs, j') から (i', lhs, j') への辺に分けられる．帰納法の仮定より，全ての $x \in \mathrm{Var}(s_k^\sharp|_l)$ について $\tau_k(x) \in \mathrm{Ran}(t_i^\sharp|_j, R, \mu)$ である．(k, lhs, l) から (k, rhs, j') への辺が存在することから，$t_k^\sharp|_{j'}$ は変数なので $t_k^\sharp|_{j'}\tau_k \in \mathrm{Ran}(t_i^\sharp|_j, R, \mu)$ である．さらに命題 6.3(2) より，全ての $x \in \mathrm{Var}(s_{i'}^\sharp|_{j'})$ について $\tau_{i'}(x) \in \mathrm{Ran}(t_k^\sharp|_{j'}\tau_k, R, \mu)$ である．したがって補題 5.4 より，全ての $x \in \mathrm{Var}(s_{i'}^\sharp|_{j'})$ について $\tau_{i'}(x) \in \mathrm{Ran}(t_i^\sharp|_j, R, \mu)$ である．

(2) サイクル中では $\rhd_\mu^{S^\sharp}$ の関係は成り立たない．なぜならば，$\rhd_\mu^{S^\sharp}$ が成り立つことによって消費された $\mathcal{F}_{\mu,S^\sharp}$ の関数は書換えによって生成されることはないからである．

サイクル中の任意の頂点 (i, lhs, j) について考える．$s_i^\sharp|_j\tau_i$ が変数でないとする．$s_i^\sharp|_j\tau_i$ が μ-R 停止性を持つとき，命題 6.3(2a,2b) より，サイクル中の全ての項は μ-R 停止性を持つので，$(\xrightarrow[\mu,R]{}^* \cdot \rhd_\mu)$ の整礎性への矛盾が導ける．$s_i^\sharp|_j\tau_i$ が μ-R 停止性を持たないとき，サイクル中の全ての項は μ-R 停止性を持たない．よって命題 6.3(2a) から $\rhd_\mu$ の整礎性への矛盾が導ける．したがってサイクル中の項は全て変数である．サイクル中の全ての変数が μ-R 停止性を持つとき，命題 6.3(2b) とその μ-R 停止性より成り立つ．そうでないときには書換え不能であり，明らかに成り立つ．

(3) ある頂点 (i, lhs, j) について，始点から (i, lhs, j) への道が存在しないとき，以下のどちらかである．
- (i, lhs, j) はサイクルに含まれる
- (i, lhs, j) はサイクルに含まれない，かつ (i, lhs, j) はサイクルに含まれるある頂点から到達可能である

後者は $S^\sharp$ の右線形性より出次数が 1 であることから成り立たない．よって (3) が成り立つ．□

ここで固定の項を表現する記号 $\perp$ を導入する．

補題 6.5 $S^\sharp$ は右線形右シャローかつ非崩壊，R は $\mathcal{F}_{\mu,S^\sharp}$ 非生成とする．このとき無限 $(R, S^\sharp, \mu)$-鎖が存在するならば，ある項 $t^\sharp \in \mathrm{Inst}({S^\sharp}_{\mathrm{lhs}}, \bigcup_{u \in \mathrm{Arg}({S^\sharp}_{\mathrm{rhs}}) \cap \mathcal{T}(\mathcal{F})} \mathrm{Ran}(u, R, \mu) \cup \{\perp\})$ について系列 $t^\sharp \xhookrightarrow[\mu,R,S^\sharp]{}^+ t^\sharp$ が存在する．

証明 無限 $(R, S^\sharp, \mu)$-鎖が存在するとする．このとき補題 5.7 より循環する $(R, S^\sharp, \mu)$-鎖が存在する．この循環する鎖を $s_0^\sharp \to t_0^\sharp, \ldots, s_n^\sharp \to t_n^\sharp$ とし，代入 $\tau_0, \ldots, \tau_n$ を持つとする．ここで全ての $x \in \mathrm{Var}(s_n^\sharp)$ について以下のように代入 $\tau'_0, \ldots, \tau'_n$ を定める．
- 循環する鎖の APG において $s_i^\sharp|_j \in \mathcal{V}$ であるような頂点 (i, lhs, j) について，APG で始点から (i, lhs, j) への道が存在するならば $\tau'_i(x) = \tau_i(x)$．
- その他の場合は $\tau'_i(x) = \perp$．
- $\tau'_n = \tau'_0$．

補題 6.4(1)，(2)，(3) より，これらの代入は $(R, S^\sharp, \mu)$-鎖の条件を満たす．よって鎖の定義から系列 $s_0^\sharp\tau'_0 \xrightarrow[S^\sharp]{} t_0^\sharp\tau'_0 \xrightarrow[\mu,R]{}^* s_1^\sharp\tau'_1 \xrightarrow[S^\sharp]{} t_1^\sharp\tau'_1 \xrightarrow[\mu,R]{}^* \cdots \xrightarrow[\mu,R]{}^* s_n^\sharp\tau'_n = s_0^\sharp\tau'_0$ が存在する．命題 6.3-1 と補題 6.4-1 より，$s_i^\sharp\tau'_i \in \mathrm{Inst}({S^\sharp}_{\mathrm{lhs}}, \bigcup_{u \in \mathrm{Arg}({S^\sharp}_{\mathrm{rhs}}) \cap \mathcal{T}(\mathcal{F})} \mathrm{Ran}(u, R, \mu) \cup \{\perp\})$ である．□

定理 3.2 の証明 補題 5.8 の証明と同様にして，定理 2.1，補題 4.4，補題 6.5 を用いて示せる．□

謝辞 本研究は一部，科研費#18500011，#20300010，#20500008，#21700011，及び栢森情報科学振興財団の助成を受けたものである．

文献

[1] B. Alarcón, R. Gutiérrez, and S. Lucas. Context-Sensitive Dependency Pairs. In *the 26th Conference on Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science*, Vol. 4337 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 298–309, 2006.

[2] F. Baader and T. Nipkow. *Term Rewriting and All That.* Cambridge University Press, 1998.

[3] N. Dershowitz. Termination of Linear Rewriting Systems. In *the 8th International Colloquium on Automata, Languages and Programming*, Vol. 115 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 448–458, 1981.

[4] G. Godoy, E. Huntingford, and A. Tiwari. Termination of Rewriting with Right-Flat Rules. In *the 18th International Conference on Rewriting Techniques and Applications*, Vol. 4533 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 200 – 213, 2007.

[5] G. Godoy and A. Tiwari. Termination of Rewrite Systems with Shallow Right-Linear, Collapsing, and Right-Ground Rules. In *the 20th International Conference on Automated Deduction*, Vol. 3632 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 164–176, 2005.

[6] G. Huet and D. Lankford. On the Uniform Halting Problem for Term Rewriting Systems. Technical report, INRIA, 1978.

[7] T. Nagaya and Y. Toyama. Decidability for left-linear growing term rewriting systems. *Information and Computation*, Vol. 178, pp. 499–514, 2002.

[8] K. Uchiyama, M. Sakai, and T. Sakabe. Decidability of Innermost Termination and Context-Sensitive Termination for Semi-Constructor Term Rewriting Systems. *Electric Notes in Theoretical Computer Science*, Vol. 204, pp. 21–34, 2007.

[9] K. Uchiyama, M. Sakai, T. Sakabe, K. Kusakari, and N. Nishida. Decidability of Termination Properties for Term Rewriting Systems Consisting of Shallow Dependency Pairs. *Technical report of IEICE, SS2008-45*, Vol. 108, No. 362, pp. 37–42, 2008.

[10] Y. Wang and M. Sakai. Decidability of Termination for Semi-Constructor TRSs, Left-Linear Shallow TRSs and Related Systems. In *the 17th International Conference on Rewriting Techniques and Applications*, Vol. 4098 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 343–356, 2006.