

放熱量最大化を目的とした非定常熱伝導場の形状最適化*

片峯 英次^{*1}, 岩田侑太郎^{*2}, 畔上秀幸^{*3}

Shape Optimization of Un-steady Heat-conduction Fields for Thermal Dissipation Maximization

Eiji KATAMINE^{*1}, Yutaro IWATA and Hideyuki AZEGAMI

^{*1} Department of Mechanical Engineering, Gifu National College of Technology
2236-2, Kamimakuwa, Motosu, Gifu 501-0495, Japan

This paper presents a numerical analysis method for solving the shape optimization problems of domains in which unsteady heat conduction fields problems are defined. Reshaping was accomplished by the traction method that was proposed as a solution to domain optimization problems in which boundary value problems were defined. In this paper, we formulated a maximization problem of thermal dissipation on heat transfer boundaries in the steady and unsteady heat conduction fields and theoretically derived shape gradient function for these problems using the Lagrange multiplier method and the formulation of material derivative. The time-histories of temperature distributions are evaluated using the finite element method for space integral and the Crank-Nicolson method for time integral. The successful results to 2D problems of thermal dissipation model show the validity of the presented method.

Key Words : Optimum Design, Inverse Problem, Finite Element Method, Numerical Analysis, Heat Transfer Design, Heat Conduction, Shape Optimization, Traction Method

1. はじめに

伝熱性能の改善を目的とした機械構造物の形状設計は、工学の分野において重要な課題である。例えば、冷却のために設けられた熱交換器フィンでは、限られた伝熱領域あるいは境界における放熱性能がより向上するように形状が設計される。また電子機器においても、近年の高性能化などに伴い、部品の高密度化や機器の小型化によって発熱密度が増大し、冷却を目的とした機器の形状設計技術の確立が望まれている。本研究では、このような問題を数値モデルとして捉え、非定常性を考慮した熱伝導場の部分境界において、放熱量を最大化する形状設計法について取り上げる。

放熱性能の向上を目的とした伝熱機器の最適形状に関する研究は、古くから多くの研究者によって行われてきた⁽¹⁾。Duffin⁽²⁾, Minkler and Rouleau⁽³⁾ は薄形の直線フィンに対して、放熱量最大化のための形状最適化を試みた。また、与えられた放熱量に対して体積最小

化のための最適形状は Razani and Ahmadi⁽¹⁾ によって解かれ、その後、フィンの熱伝導率やフィン表面における熱伝達率の温度依存性を考慮した最適形状⁽⁴⁾⁽⁵⁾を示している。これらは全てフィン形状を一次元モデルとして取り扱うことによって解析的に解かれた。

数値解析を用いた伝熱機器モデルの最適形状に関する研究は、塚本と瀬口⁽⁶⁾⁽⁷⁾, Hou ら⁽⁸⁾, Bobaru ら⁽⁹⁾⁻⁽¹¹⁾ によって行われている。塚本ら⁽⁶⁾⁽⁷⁾ は、薄形直線フィンに対する定常一次元モデルを用いて、放熱量最大化あるいは材料(面積)最小化に対して、有限要素の離散節点座標を設計変数に選んだ離散系感度解析によって数値解を得ている。Hou ら⁽⁸⁾ は、同様に有限要素法を利用して定常問題の二次元伝熱機器モデルに対する数値解析を行っている。Bobaru らは、設計境界形状をスプライン曲線によって近似して、その未定係数を設計変数にした解析を行い、設計変数の個数の違い⁽¹⁰⁾や熱伝導率の変化⁽¹¹⁾による最適形状への影響を検討した。これまでの伝熱機器モデルの最適形状に関する多くの研究では、有限要素法などを用いて未知境界形状を離散化し、その節点自由度を設計変数にした離散系最適化問題を解く方法であった。この解析法にとって、設計変数の自由度を増加させることは、設計空間の次元を増加させることに繋がるため、非定常問題などの

* 原稿受付 2007 年 12 月 5 日

^{*1} 正員, 岐阜工業高等専門学校機械工学科(〒 501-0495 岐阜県本巣市上真桑 2236-2)

^{*2} 学生員, 名古屋大学大学院情報科学研究科(〒 464-8601 名古屋市千種区不老町 1)

^{*3} 正員, フェロー, 名古屋大学大学院情報科学研究科
Email: katamine@gifu-nct.ac.jp

複雑な問題に対する数値解析は困難である。また、上記の設計境界にスプライン曲線を用いた解法は、解析の困難さを避けるために、設計変数の自由度を極力少なくするように工夫した一つの解法として捉えることができる。

これに対して著者らは、粘性流れ場⁽¹²⁾⁽¹³⁾、ポテンシャル流れ場⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾、熱伝導場⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾などの形状決定問題に対して、分布系感度に基づく数値解法について検討を行ってきた。熱伝導場の問題では、部分境界や部分領域において温度分布あるいは温度勾配分布を規定する形状同定問題⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾の数値解析法を提案し、その妥当性を確認した。この非定常熱伝導場の形状同定問題⁽¹⁷⁾では、指定された熱流束境界の部分境界において、実際の温度分布の時間履歴が目標分布となるように、実際の温度分布と指定された温度分布の二乗誤差積分最小化を目的汎関数として最適化解析を行った。そのときに用いた手法は、領域最適化手法の一つとして提案された力法⁽¹⁸⁾であった。力法は分布系の勾配法を応用した手法であり、領域変動を写像で与え、最適化問題から理論的に導出される領域変動の感度(形状勾配関数)を直接用いた方法である。この方法では、領域変動量は形状勾配関数が外力として仮定された疑似弾性体の変形量として解析できるため、設計変数の自由度を減らすことなく多自由度の形状設計が容易となり、滑らかな形状設計が実現できる⁽¹⁹⁾。また、その領域変動の感度評価や形状更新には有限要素法などが利用できるため、複雑な問題に対する解析も可能である。

本研究の目的は、非定常熱伝導場の熱伝達境界において放熱量を最大化する形状最適化問題に対して、力法の適用を試みることである。本論文では、最初に部分境界において放熱量を最大化する形状最適化問題を定式化し、Lagrange 乗数法あるいは随伴変数法および物質導関数を利用して形状勾配関数を導出する。次に、導出された形状勾配関数に基づいて力法を利用した数値解析法を提示する。最後に、簡単な二次元放熱機器モデル問題の数値解析例を紹介する。この解析例においては、定常問題における解析、非定常問題における最終観測時間を変化させた解析、および目的汎関数である放熱量の設定時間を変化させた解析など、各解析条件における最適形状の違いについて検討し、提示した手法の妥当性を示す。

2. 記号

Ω : 熱伝導場領域

Γ : 熱伝導場領域の境界

n : 熱伝導場領域の空間次元, ($n = 2, 3$)

$\vec{x} \in \Omega$: 熱伝導場領域内の空間

$t \in [0, T]$: 熱伝導場領域における観測時間

$\phi(\vec{x}, t)$: 空間 $\vec{x} \in \Omega$, 時間 $t \in [0, T]$ における温度

$\phi(\vec{x}, 0) = \phi_0$: 初期時刻における温度分布

Γ_ϕ : 温度分布 $\hat{\phi}(\vec{x}, t)$ が既知の基本境界

Γ_q : 熱流束 $q(\vec{x}, t)$ が既知の熱流束境界

Γ_h : 熱伝達率 h と外気温度 ϕ_f が既知の熱伝達境界

k : 熱伝導場における熱伝導率

ρ : 熱伝導場における密度

c : 熱伝導場における比熱

f : 熱伝導場における発熱量

T_s : 領域変動を表す写像

s : 領域変動の履歴

$\Omega_s = T_s(\Omega)$: 領域変動後の領域

$J(\phi)$: 目的汎関数 (放熱量)

Γ_D : 放熱量の最大化を考える部分境界

Γ_{design} : 設計境界

t_1, t_2 : 目的汎関数の設定時間

M : 領域の大きさ制約の上限値

ν_i : 境界の単位法線ベクトル

$w(\vec{x}, t)$: 随伴温度

Λ : 領域の大きさ制約に対する Lagrange 乗数

$V_i(\Omega_s)$: 領域変動を記述するための速度場

$G\nu_i$: 形状勾配関数

G : 形状勾配密度関数

Δt : 時間積分における時間刻み

3. 放熱量最大化のための形状最適化問題

3.1 定式化 n 次元空間 ($n = 2, 3$) の領域 $\Omega \in R^n$, 時間 $[0, T]$ における非定常熱伝導場を考える。空間 $\vec{x} \in \Omega$, 時間 $t \in [0, T]$ における温度を $\phi(\vec{x}, t)$, 初期時刻 $t = 0$ の温度を $\phi(\vec{x}, 0) = \phi_0$ とする。領域 Ω の境界 Γ は基本境界 Γ_ϕ と熱流束境界 Γ_q および熱伝達境界 Γ_h によって構成されている。基本境界 Γ_ϕ では温度, 熱流束境界 Γ_q では熱流束, 熱伝達境界 Γ_h では熱伝達率と外部流体温度が, それぞれ既知関数 $\hat{\phi}(\Gamma_\phi, [0, T])$, $q(\Gamma_q, [0, T])$, $h(\Gamma_h, [0, T])$, $\phi_f(\Gamma_h, [0, T])$ として与えられている。

熱伝達境界 Γ_h の部分境界 $\Gamma_D \subset \Gamma_h$ における放

熱量を最大化する非定常熱伝導場領域 Ω の変動問題を考える．この熱伝導場領域 Ω の領域変動を写像 T_s (s は領域変動の履歴) で定義し，領域 Ω は変動して $\Omega_s = T_s(\Omega)$ になると仮定する． $T_s(\Omega)$ は，領域変動の制約を満たす適当に導関数が連続な許容関数空間 D の要素とする．簡単のために，領域変動の制約に境界 Γ_ϕ と境界 Γ_q が含まれると仮定する．このとき，時間 $t = t_1 \in [0, T]$ から $t = t_2 \in [0, T]$ における放熱量を目的汎関数にした形状最適化問題は次のように定式化される．

$$\begin{aligned} \text{Given } & \Omega \text{ and} \\ & k, \rho, c, f, q, h, \hat{\phi}, \phi_0, \phi_f, M \quad (1) \\ \text{find } & \Omega_s \text{ or } T_s(\Omega) \in D \quad (2) \\ \text{that maximizes } & \int_{t_1}^{t_2} J(\phi) dt \quad (3) \\ \text{subject to } & \int_0^T \left\{ a(\phi, w) + b(\phi_{,t}, w) - c(w) \right. \\ & \left. - d(w) + e(\phi, w) - p(w) \right\} dt = 0 \quad \phi \in \Psi_t \quad \forall w \in W_t \quad (4) \\ & \int_{\Omega} dx \leq M \quad (5) \end{aligned}$$

ここで，式 (4) は次の非定常熱伝導場における支配方程式 (6) の変分形式を表わしている．

$$\rho c \phi_{,t} - k \phi_{,jj} = f \quad \Omega \times [0, T] \quad (6)$$

ここで， ϕ ， k ， ρ ， c ， f はそれぞれ温度，熱伝導率，密度，比熱，発熱量を表し， $J(\phi)$ ， $a(\phi, w)$ ， $b(\phi_{,t}, w)$ ， $c(w)$ ， $d(w)$ ， $e(\phi, w)$ ， $p(w)$ は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} J(\phi) &= \int_{\Gamma_D \subset \Gamma_h} h(\phi - \phi_f) d\Gamma, \\ a(\phi, w) &= \int_{\Omega} k \phi_{,j} w_{,j} dx, \quad c(w) = \int_{\Omega} f w dx, \\ b(\phi_{,t}, w) &= \int_{\Omega} \rho c \phi_{,t} w dx, \quad d(w) = \int_{\Gamma_q} q w d\Gamma, \\ e(\phi, w) &= \int_{\Gamma_h} h \phi w d\Gamma, \quad p(w) = \int_{\Gamma_h} h \phi_f w d\Gamma \quad (7) \end{aligned}$$

なお，本論文のテンソル表示では Einstein の総和規約と偏微分表示 $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$ を使用し， $(\cdot)_{,t}$ は時間の導関数を表わしている．また，式 (5) は領域の大きさ制約を表し， M は制約の上限値であり，温度 ϕ ，随伴温度 w はそれぞれ次の関数空間の要素とする．

$$\begin{aligned} \Psi_t &= \{ \phi(\vec{x}, t) \in H^1(\Omega \times [0, T]) \mid \\ & \phi(\vec{x}, t) = \hat{\phi}(\vec{x}, t), \quad t \in [0, T], \quad \vec{x} \in \Gamma_\phi, \\ & k \phi(\vec{x}, t)_{,j} \nu_j = q(\vec{x}, t), \quad t \in [0, T], \quad \vec{x} \in \Gamma_q, \\ & k \phi(\vec{x}, t)_{,j} \nu_j = -h(\phi(\vec{x}, t) - \phi_f), \quad t \in [0, T], \quad \vec{x} \in \Gamma_h, \\ & \phi(\vec{x}, 0) = \phi_0(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega \} \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_t &= \{ w(\vec{x}, t) \in H^1(\Omega \times [0, T]) \mid \\ & w(\vec{x}, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad \vec{x} \in \Gamma_\phi, \\ & w(\vec{x}, T) = w_T(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in \Omega \} \quad (9) \end{aligned}$$

また， ν_i は境界の単位法線ベクトルを表わしている． $H^m(\Omega \times [0, T])$ は m 階の導関数まで領域 $\Omega \times [0, T]$ で 2 乗可積分な関数空間を表す．

3.2 形状勾配関数 この問題は Lagrange 乗数法によって制約のない停留化問題に書き換えることができる．この場合の Lagrange 汎関数 $L(\phi, w, \Lambda)$ は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} L &= - \int_{t_1}^{t_2} J(\phi) dt \\ & - \int_0^T \left\{ a(\phi, w) + b(\phi_{,t}, w) - c(w) - d(w) \right. \\ & \left. + e(\phi, w) - p(w) \right\} dt + \Lambda \left(\int_{\Omega} dx - M \right) \quad (10) \end{aligned}$$

ここで， Λ は領域の大きさ制約に対する Lagrange 乗数である．領域変動に対する L の導関数 \dot{L} は速度場 $V(\Omega_s) = \partial T_s / \partial s(\Omega) = \partial T_s / \partial s(T_s^{-1}(\Omega_s))$ を用いて，次のように得られる⁽¹⁸⁾．

$$\begin{aligned} \dot{L} &= - \int_0^T \left\{ a(\phi, w') + b(\phi_{,t}, w') - c(w') - d(w') \right. \\ & \left. + e(\phi, w') - p(w') \right\} dt \\ & - \int_0^T \left\{ a(\phi', w) + b(\phi'_{,t}, w) + e(\phi', w) \right\} dt \\ & - \int_{t_1}^{t_2} J(\phi') dt \\ & + \dot{\Lambda} \left(\int_{\Omega} dx - M \right) + \langle G\nu, V \rangle \quad (11) \end{aligned}$$

ここで， $(\dot{\cdot})$ は物質導関数， $(\cdot)'$ は空間座標に固定した分布関数の領域変動に対する導関数 (形状導関数) を表す．また

$$\langle G\nu, V \rangle = \int_{\Gamma_{design} \subset \Gamma_h} G\nu_i V_i d\Gamma, \quad (12)$$

$$G = G_0 + G_1 \Lambda, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} G_0 &= \int_0^T \left\{ -k \phi_{,j} w_{,j} - \rho c \phi_{,t} w + f w \right. \\ & \left. - \nabla_\nu(h\phi w) - (h\phi w)\kappa + \nabla_\nu(h\phi_f w) + (h\phi_f w)\kappa \right\} dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ -\nabla_\nu(h\phi - h\phi_f) - (h\phi - h\phi_f)\kappa \right\} dt, \quad (14) \end{aligned}$$

$$G_1 = 1. \quad (15)$$

ただし， $\nabla_\nu(\cdot) \equiv \nabla(\cdot) \cdot \nu$ ， κ は境界における平均曲率の $n-1$ 倍である．式 (11) からこの問題の Kuhn-Tucker

条件は次のように得られる．

$$\int_0^T \left\{ a(\phi, w') + b(\phi_{,t}, w') - c(w') - d(w') + e(\phi, w') - p(w') \right\} dt = 0 \quad \forall w' \in W_t \quad (16)$$

$$\int_0^T \left\{ a(\phi', w) + b(\phi'_{,t}, w) + e(\phi', w) \right\} dt + \int_{t_1}^{t_2} J(\phi') dt = 0 \quad \forall \phi' \in \Psi_t \quad (17)$$

$$\Lambda \geq 0, \quad \int_{\Omega} dx \leq M, \quad \Lambda \left(\int_{\Omega} dx - M \right) = 0 \quad (18)$$

上式によって ϕ, w, Λ が解析できれば，Lagrange 汎関数の導関数は評価関数の導関数と一致して，次の関係が成立する．

$$\dot{L}|_{\phi, w, \Lambda} = \langle G\nu, V \rangle. \quad (19)$$

式 (12) の $G\nu_i$ は評価関数の導関数において，領域の微小変動を与える速度場 V_i の係数関数になっていることから，この問題における感度関数あるいは形状勾配関数になっている．また式 (13) のスカラー関数 G は形状勾配密度関数と呼ばれる．式 (17) は随伴温度 $w(\vec{x}, t)$ に対する随伴方程式を表している．式 (18) は Λ に対する支配方程式を表している．このようにして，本問題に対する形状勾配密度が与えられれば，力法⁽¹⁸⁾を適用することが可能となる．

3.3 定常問題と形状勾配関数 問題を簡単化して，定常熱伝導場の部分境界 $\Gamma_D \subset \Gamma_h$ において放熱量を最大化する形状最適化問題を考える．この問題は次のように定式化される．

$$\text{Given } \Omega \text{ and } k, f, q, h, \hat{\phi}, \phi_f \quad (20)$$

$$\text{find } \Omega_s \text{ or } T_s(\Omega) \in D \quad (21)$$

$$\text{that maximizes } J(\phi) \quad (22)$$

$$\text{subject to } a(\phi, w) - c(w) - d(w) + e(\phi, w) - p(w) = 0 \quad (23)$$

$$\int_{\Omega} dx \leq M \quad (24)$$

前述と同様な手法を用いて，この定常問題に対する形状勾配密度関数 G は次のように導出できる．

$$G = G_0 + G_1\Lambda, \quad (25)$$

$$G_0 = -k\phi_{,j}w_{,j} + fw - \nabla_{\nu}(h\phi w) - (h\phi w)\kappa + \nabla_{\nu}(h\phi_f w) + (h\phi_f w)\kappa - \nabla_{\nu}(h\phi - h\phi_f) - (h\phi - h\phi_f)\kappa, \quad (26)$$

$$G_1 = 1. \quad (27)$$

ただし，この問題に対する随伴温度 $w(\vec{x})$ は次の随伴方程式から解析できる．

$$a(\phi', w) + e(\phi', w) + J(\phi') = 0 \quad (28)$$

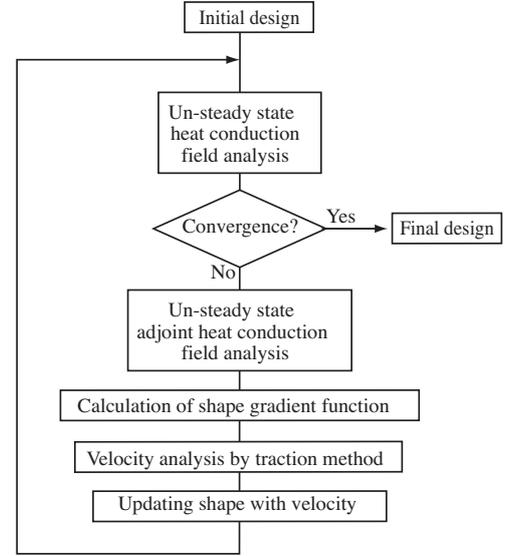


Fig. 1 Numerical procedure

4. 解 法

4.1 力法 力法は速度場 V を次の支配方程式に基づいて解く方法として提案されている⁽¹⁸⁾．

$$a^E(V, y) = - \langle G\nu, y \rangle, \quad \forall y \in D \quad (29)$$

ただし， $a^E(V, y)$ は線形弾性体のひずみエネルギーを与える双一次形式で，変位分布ベクトル関数 u_i, v_i に対して次式で定義されている．

$$a^E(u, v) = \int_{\Omega} A_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} dx \quad (30)$$

A_{ijkl} は正定値性を有する剛性テンソルである．式 (29) は，速度場 V が負の形状勾配関数 $-G\nu_i$ を外力として作用させたときの変位場として解析されることを示している．力法に基づく領域変動は，形状勾配関数を疑似弾性問題の外力として作用させたときの変位場として求められる．したがって，式 (29) の解法には通常の線形弾性問題の解法を用いて解くことが可能であり，汎用性のある方法である．本研究では有限要素法を用いた．

4.2 解析手順 非定常問題に対する解析手順を図 1 に示す．まず初期形状を与え，温度 $\phi(\vec{x}, t)$ ，随伴温度 $w(\vec{x}, t)$ を解析する．具体的には，式 (16) と式 (17) の方程式を空間的には有限要素法，時間的には差分法 (Crank-Nicolson 法) を用いて離散化された温度

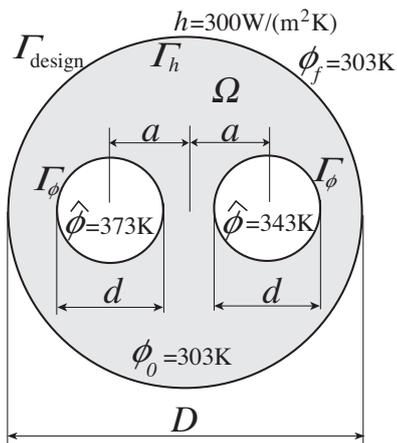


Fig. 2 2D thermal dissipation model

$\phi(\vec{x}, t)$ および随伴温度 $w(\vec{x}, t)$ を解析する．式 (16) の状態方程式の解法では，初期条件 $\phi(\vec{x}, 0) = \phi_0(\vec{x})$ を用いて $t = 0$ から $t = T$ の方向への温度 $\phi(\vec{x}, t)$ を解析する．式 (17) の随伴系方程式の解法では， $w(\vec{x}, T) = w_T(\vec{x}) = 0$ を初期条件として $t = T$ から $t = 0$ の方向への随伴温度 $w(\vec{x}, t)$ を解析する．その結果から式 (13) を用いて形状勾配密度関数 G を計算する．さらに，有限要素法を用いて式 (29) から速度場 $V(\vec{x})$ を計算して形状を更新する．形状が更新されれば最初に戻って解析が繰り返され，目的汎関数が停留したと判断されたときに解析は終了する．

5. 解析例

機械部品の一例として，図 2 に示す簡単な二次元の放熱機器モデルの問題を解析した．

基本境界 Γ_ϕ において，左側の境界温度 $\hat{\phi} = 373[\text{K}]$ ，右側の境界温度 $\hat{\phi} = 343[\text{K}]$ ，外側境界の熱伝達境界 Γ_h の熱伝達率 $h = 300[\text{W}/(\text{m}^2\text{K})]$ ，外部流体温度 $\phi_f = 303[\text{K}]$ ，領域の密度 $\rho = 7500 [\text{kg}/(\text{m}^3)]$ ，比熱 $c = 460 [\text{J}/(\text{kg K})]$ ，熱伝導率 $k = 40[\text{W}/(\text{mK})]$ ， $D = 0.3[\text{m}]$ ， $d = 0.09[\text{m}]$ ， $a = 0.0675[\text{m}]$ とした．

設計境界 Γ_{design} を全外側境界の熱伝達境界 Γ_h とし，二つの基本境界 Γ_ϕ は形状変動を拘束した．また領域の大きさ制約としては，初期形状における領域以下の条件で解析した．温度 ϕ ，随伴温度 w および速度場 V を解析するための有限要素法解析では三角形一次要素を用いた．要素数，節点数はそれぞれ 1996, 1078 である．初期温度を一定値 $\phi_0 = 303 [\text{K}]$ に設定し，時間積分では $t = 0$ から T までを時間刻み $\Delta t = 0.8[\text{sec}]$ で分割して Crank-Nicolson 法を適用した．なお，時間刻みについては，非定常計算における温度分布を安定に解くことを考慮して，計算機のメモリ容量から逆算

して最小の時間刻みとした．

感度の計算に関して，式 (14) が示すようにその境界における平均曲率 κ を計算する必要がある．二次元問題の場合，平均曲率 κ は境界曲線形状関数の空間二階微分で与えられる．したがって，設計境界において精度よく平均曲率 κ を評価するためには，より滑らかな設計境界形状を設定する必要がある．ここでは，提案する手法の基本的な妥当性を確認するために，式 (14) の感度 G_0 の第一項および第二項のみを評価して平均曲率等については考慮せず簡単化した．

本解析では，定常問題における解析，非定常問題における最終観測時間 T および目的汎関数の設定時間 t_1, t_2 を変化させた解析を行い，各条件における最適形状の違いについて検討した．

5.1 最終観測時間 T と最適形状 最終観測時間 T の設定の違いによる最適形状について検討を行った．

定常問題を Case A，初期形状での最終観測時間 T における温度分布が定常問題の温度分布とほぼ同様になる非定常問題を Case B ($t_1 = 0, t_2 = T = 600[\text{sec}]$)，Case B に比較して最終観測時間を短くした問題を Case C ($t_1 = 0, t_2 = T = 300[\text{sec}]$) とし，その三つの場合について解析を行った．

図 3 に Case A, B, C の解析条件に対して得られた最適形状を初期形状と比較して示している．また図 4 に初期形状と Case B の解析条件について，各時間 t における温度分布を示している．放熱量は外側熱伝達境界 Γ_h における温度 ϕ と外部流体温度 ϕ_f との差から評価されるので，放熱効果向上のため，いずれの最適形状においても外側境界が内側へ収縮した形状になっていることが確認できる．定常問題 (Case A) では，左右の基本境界 Γ_ϕ における温度分布 $\hat{\phi}$ の違いが影響を及ぼした左右非対称の最適形状になっている．Case B の最適形状は，定常問題 (Case A) の最適形状に比較してほぼ左右対称の形状となっている．また Case C では，最終観測時間 $T = 300[\text{sec}]$ が Case B に比較して短いので，中央部の基本境界 Γ_ϕ からの熱が外側境界まで伝わらず，外側境界が内側へより収縮した領域形状になっている様子が確認できる．

上記の各解析条件 Case A, B, C について，形状修正の繰り返しに対する目的汎関数の収束履歴を図 5 に示している．目的汎関数の値はそれぞれの解析条件における初期値によって規準化している．また， k 回目の形状修正における目的汎関数の値を $J(\phi)^{[k]}$ とし，目的汎関数の停留判定条件は次の条件によって判断した．

$$\frac{|J(\phi)^{[k+1]} - J(\phi)^{[k]}|}{J(\phi)^{[k+1]}} < 10^{-4} \quad (31)$$

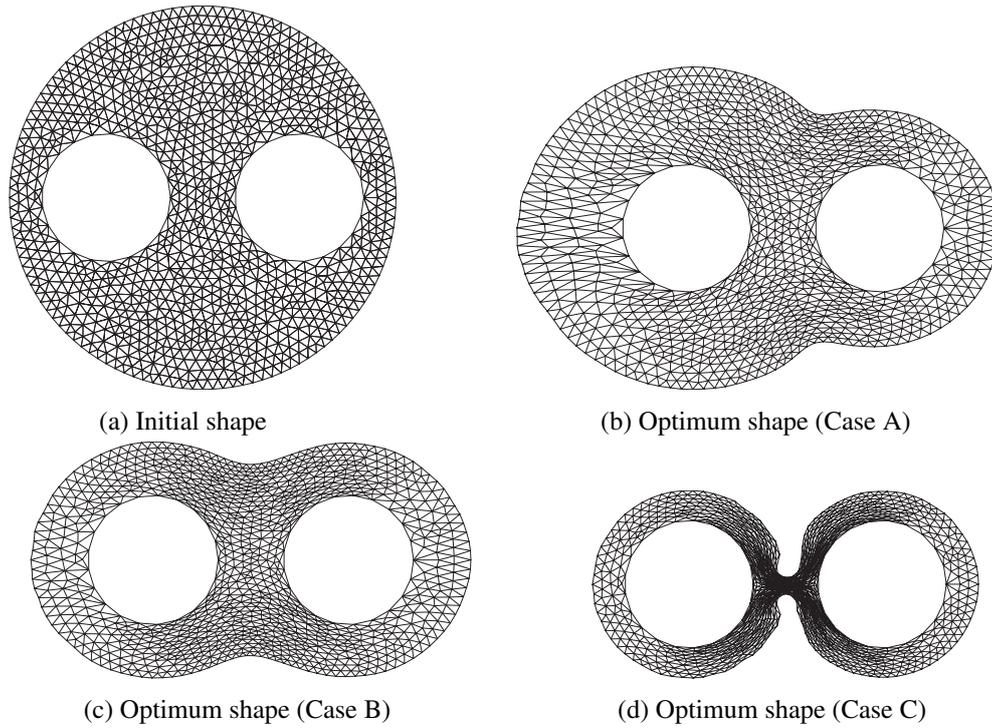


Fig. 3 Numerical results for 2D steady and unsteady thermal dissipation model: Initial shape and optimum shapes, Case A: steady problem, Case B: unsteady problem($t_1 = 0, t_2 = T = 600[\text{sec}]$), Case C: unsteady problem($t_1 = 0, t_2 = T = 300[\text{sec}]$)

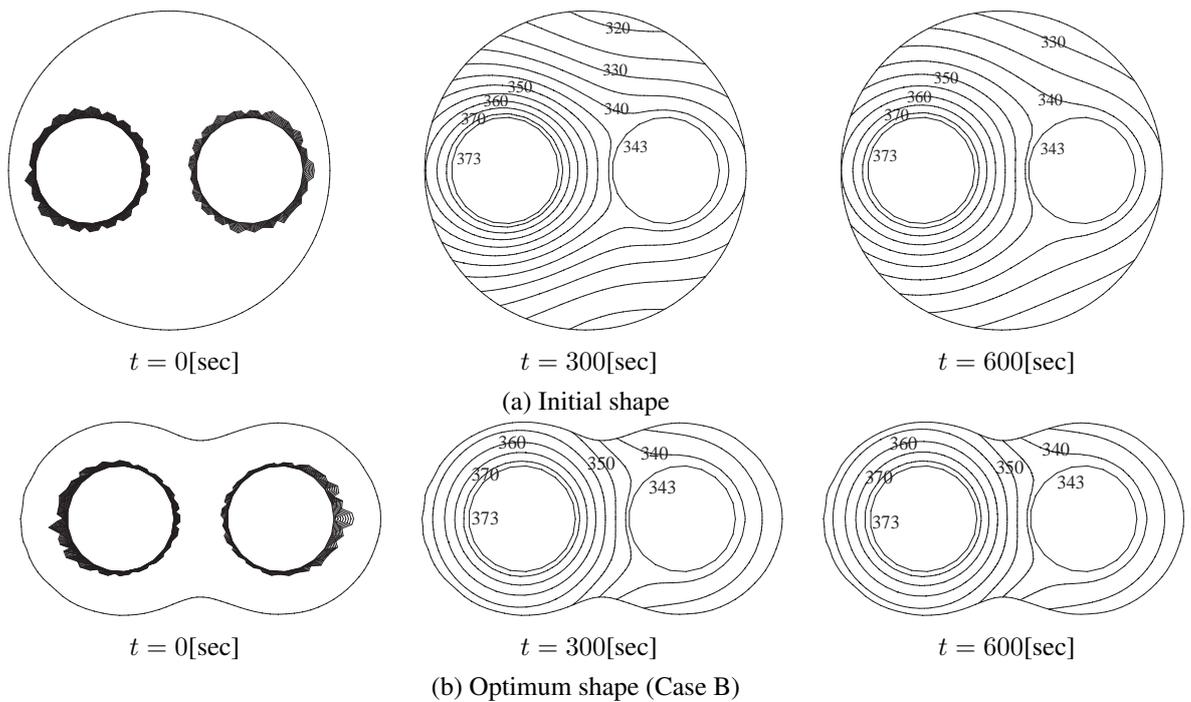


Fig. 4 Numerical results for 2D unsteady thermal dissipation model: temperature distributions

これらの結果，Case A, B, C のいずれの解析条件においても目的汎関数が増大して収束し，最終観測時間 T の設定に依存した最適形状が得られたことが確認できる。

5.2 目的汎関数の設定時間 t_1, t_2 と最適形状 最終観測時間 $T = 600[\text{sec}]$ (Case B) を一定とし，目的汎関数の設定時間 t_1, t_2 の違いによる最適形状について検討した。

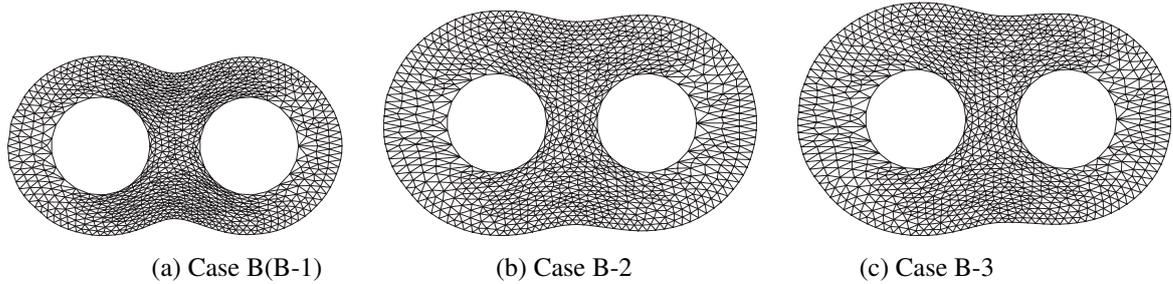


Fig. 6 Numerical results for 2D unsteady thermal dissipation model: Comparison of optimum shapes by a difference of thermal dissipation time t_1, t_2 , Case B-1($t_1 = 0, t_2 = T = 600[\text{sec}]$), Case B-2($t_1 = 300, t_2 = T = 600[\text{sec}]$), Case B-3($t_1 = 590, t_2 = T = 600[\text{sec}]$)

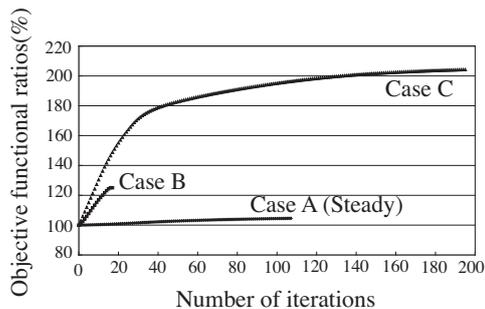


Fig. 5 Numerical results for 2D steady and unsteady thermal dissipation model: Iterative history of objective functional, Case A: steady problem, Case B, Case C

Case B(B-1)($t_1 = 0, t_2 = T = 600[\text{sec}]$), Case B-2($t_1 = 300, t_2 = T = 600[\text{sec}]$), Case B-3($t_1 = 590, t_2 = T = 600[\text{sec}]$) の三つの場合について解析した最適形状を図 6 に示す. Case B-3 は, ほぼ定常状態に達した時間 $t_1 = 590, t_2 = T = 600[\text{sec}]$ における放熱量最大化問題を解析したことを意味し, その最適形状は図 3 の定常問題 (Case A) の最適形状に似た左右非対称の形状になっていることが確認できる.

また, 図 7 に各解析条件 Case B-1, B-2, B-3 における目的汎関数の収束履歴を示している. 図 5 と同様に目的汎関数の値は初期値によって規準化している. 停留の判定は式 (31) によって判断した.

これらの結果, いずれの解析条件においても目的汎関数が増大して収束し, 目的汎関数の設定時間 t_1, t_2 に依存した最適形状が得られたことが確認できる.

以上の結果より, 簡単な二次元問題の解析例を通して本手法の妥当性が確認できた.

6. ま と め

非定常性を考慮した熱伝導場の部分境界において放熱量を最大化する形状最適化問題を定式化し, 形状勾

配関数を導出した. 導出した形状勾配関数に基づいて力法を利用した数値解析法を提示し, 二次元問題の数値解析例を紹介して, 本手法の妥当性を示した.

なお, この数値解析例では, 定常問題における解析, 非定常問題における最終観測時間を変化させた解析, および放熱量の設定時間を変化させた解析を行い, 各解析条件に対する最適形状を示した.

謝 辞

本研究は平成 18 年度財団法人三豊科学技術振興協会研究助成の援助を受けて行われた. 記して深く謝意を表する.

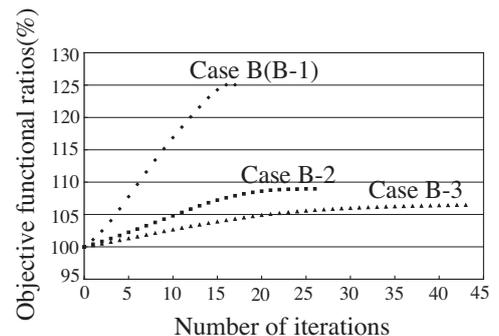


Fig. 7 Numerical results for 2D unsteady thermal dissipation model: Iterative history of objective functional, Case B-1, Case B-2, Case B-3

文 献

- (1) Razani, A. and Ahmadi G., On optimization of circular fins with heat generation, *J. Franklin Inst.*, Vol. 303, (1977), pp. 211-218.
- (2) Duffin, R. J., A variational problem relating to Cooling fins, *J. Math. Mech.* Vol. 8, No. 1, (1959), pp. 47-56.
- (3) Minkler, W.S. and Rouleau, W.T., The effect of internal heat generation on heat transfer thin fins, *Nuclear Science and Engineering*, Vol. 7, (1960), pp. 400-406.

- (4) Reardon, J. and Razani, A., The optimization of variable cross-sectional spines with temperature dependent thermal parameters, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, Vol. 19, (1992), pp. 549-557.
 - (5) Sohrabpour, S. and Razani, A., Optimization of convective fin with temperature-dependent thermal parameters, *J. Franklin Inst.*, Vol. 330, No.1, (1993), pp. 37-49.
 - (6) Tsukamoto, Y. and Seguchi, Y., A Discretization Method for Solving Optimization Problem in Structural Design (Using Finite Element Method Combined with Multiplier Method), *Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers* (in Japanese), Vol. 18, No. 8, (1982), pp. 763-769.
 - (7) Tsukamoto, Y. and Seguchi, Y., Shape Determination Problem of Minimum Volume for Heat Exchanger Fin, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B* (in Japanese), Vol. 49, No. 439, (1983), pp. 695-704.
 - (8) Hou, G. J. W. et al, Shape sensitivity analysis and design optimization of linear, thermoelastic solids, *AIAA J.*, Vol. 33, No.2, (1992), pp. 528-537.
 - (9) Bobaru, F. and Mukherjee, S., Meshless approach to shape optimization of linear thermoelastic solids, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 53, (2002), pp. 765-796.
 - (10) Bobaru, F. and Rachakonda, S., Boundary layer in shape optimization of convective fins using a meshfree approach, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 60, (2004), pp. 1215-1236.
 - (11) Bobaru, F. and Rachakonda, S., Optimal shape profiles for cooling fins of high and low conductivity, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 47, (2004), pp. 4953-4966.
 - (12) Katamine, E. and Azegami, H., Solution to Viscous Flow Fields Domain Optimization Problems (Approach by the Traction Method), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B* (in Japanese), Vol. 60, No. 579, (1994), pp. 3859-3866.
 - (13) Katamine, E. and Azegami, H., Domain Optimization Analysis of Viscous Flow Field (In the Case of Considering Convective Term) , *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B* (in Japanese), Vol. 61, No. 585, (1995), pp. 1646-1653.
 - (14) Katamine, E. and Azegami, H., Domain Optimization Analysis of Potential Flow Field, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B* (in Japanese), Vol. 61, No. 581, (1995), pp. 103-108.
 - (15) Katamine, E. et al, Shape Identification Analyses of Potential Flow Field (Prescribed Problems of Pressure Distribution and Solutions by the Traction Method), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B* (in Japanese), Vol. 64, No. 620, (1998), pp. 1063-1070.
 - (16) Katamine, E. et al, Boundary Shape Determination on Steady-State Heat Conduction Field, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B* (in Japanese), Vol. 65, No. 629, (1999), pp. 275-281.
 - (17) Katamine, E. et al, Solution to Shape Identification Problem of Unsteady Heat-Conduction Fields, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B* (in Japanese), Vol. 66, No. 641, (2000), pp. 227-234.
 - (18) Azegami, H., Solution to Domain Optimization Problems, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A* (in Japanese), Vol. 60, No. 574, (1994), pp. 1479-1486.
 - (19) Azegami, H. et al., Irregularity of Shape Optimization Problems and an Improvement Technique, *Computer Aided Optimum Design of Structures V*, OPTI 97, Editors: Hernandez, S. and Brebbia, C.A., Computational Mechanics Publications, Southampton, (1997), pp. 309-326.
-