

抗力最小化・揚力最大化を目的とした定常粘性流れ場の形状最適化*

片峯 英次*¹, 西橋 直志*², 畔上 秀幸*³

Shape Optimization of Steady-state Viscous Flow Fields for Drag Minimization and Lift Maximization

Eiji KATAMINE*¹, Naoshi NISHIHASHI and Hideyuki AZEGAMI

*¹ Department of Mechanical Engineering, Gifu National College of Technology
2236-2, Kamimakuwa, Motosu, Gifu 501-0495, Japan

This paper describes a numerical solution to the shape optimization problems of viscous flow fields. The drag minimization problem and lift maximization problem for an isolated body in uniform flow were formulated in the domain of steady-state viscous flow fields. The shape gradient of the shape optimization problems were derived theoretically using the adjoint variable method, the Lagrange multiplier method and the formulae of the material derivative. Reshaping was accomplished using a traction method that was proposed as a solution to domain optimization problems. The validity of the proposed method was confirmed by results of 2D numerical analyses using finite element method.

Key Words : Shape Optimization, Optimum Design, Computational Fluid Dynamics, Finite Element Method, Adjoint Method, Traction Method

1. はじめに

粘性流体の輸送に使われる流路においてエネルギー損失が最小化するように流路形状を決定する問題、また一様粘性流中に置かれた物体に生じる抵抗力を最小化する、あるいは揚力を最大化するように物体形状を決定する問題は、工学の分野において重要な問題である。これらの問題は、理学あるいは生物学的観点に立つと、流れによって形成される形状、あるいは生物の外形状や血管網の形態などを理解する上で基礎になる問題として捉えることもできる。

粘性流れ場の領域形状を設計対象にした形状最適化問題を数学的に取り扱う試みは、Pironneau⁽¹⁾⁻⁽⁴⁾によって始められた。彼は、一様粘性流中に置かれた孤立物体の抵抗動力最小化問題を定式化して、随伴法に基づいた領域変動に対する感度、すなわち形状勾配関数を理論的に導出した。その後、Glowinski and Pironneau⁽⁵⁾は孤立物体周り近傍の境界層方程式を利用して、差分法によって形状勾配関数を数値解析する方

法を示した。Ganesh⁽⁶⁾は、Pironneauの提案した孤立物体表面上の有限個の節点座標を設計変数に選んだ最適化アルゴリズムに基づき、有限要素モデルを用いた数値解析を行った。Huan and Modi⁽⁷⁾⁽⁸⁾は、随伴方程式の境界条件に工夫を施し、実際の流れとは逆向きとなる随伴流速の境界条件を設定して、随伴方程式を便宜的に解析することを提案した。数値解析には有限体積法を用いて最適形状を解析している。また最近では、Yagi and Kawahara⁽⁹⁾は、Jameson⁽¹⁰⁾が提案した形状勾配関数を平滑化する手法を用いて、粘性流れ場における孤立物体の抗力最小化問題を解析している。篠原ら⁽¹¹⁾は、Stokes流れ場に対して揚力最大化問題を解析している。

一方、著者らは、粘性流れ場の散逸エネルギー最小化を目的とした形状最適化について研究を行ない、低Reynolds数問題に対する二次元および三次元問題の数値解析結果から提案した解析手法の妥当性を示してきた⁽¹²⁾⁻⁽¹⁴⁾。その形状最適化法には力法⁽¹⁵⁾が用いられた。力法は、領域変動を写像で与え、最適化問題から理論的に導出される形状勾配関数を直接用いた分布系の勾配法を応用した方法である。この方法では、領域変動量は形状勾配関数が外力として仮定された疑似弾性体の変形量として解析できるため、設計変数の自由度を減らすことなく多自由度の形状設計が容易とな

* 原稿受付 2007年 12月 25日

*¹ 正員、岐阜工業高等専門学校機械工学科 (〒 501-0495 岐阜県本巣市上真桑 2236-2)

*² 千葉大学工学部電子機械工科学学生 (〒 263-8522 千葉市稲毛区弥生町 1-33)

*³ 正員、フェロー、名古屋大学大学院情報科学研究科 (〒 464-8601 名古屋市中千種区不老町 1)

Email: katamine@gifu-nct.ac.jp

り，滑らかな形状設計が実現できる⁽¹⁶⁾．また，形状更新には有限要素法などが利用できるため，三次元問題⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾などの複雑な問題に対する解析も可能である．

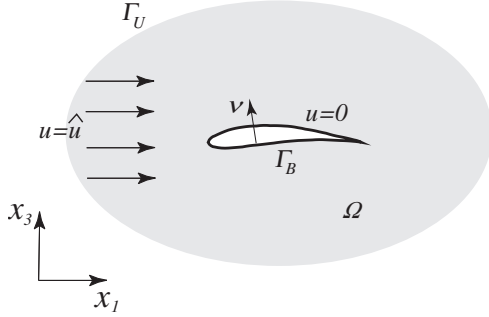


Fig. 1 Isolated body in uniform flow

本研究の目的は，定常一様粘性流体中に置かれた孤立物体に生じる抗力を最小化，あるいは揚力を最大化する形状決定問題に対して力法の適用を試みることである．本研究における抗力あるいは揚力の計算は，物体表面で評価される応力の境界積分による解析法ではなく，田端ら^{(17),(18)}によって提案された流れ場全体の領域積分による解析法を用いる．

本論文では，粘性流れ場の支配方程式を示した後に，抗力最小化と揚力最大化の二つの形状最適化問題を取り上げる．それぞれの問題に対して定式化を行い，Lagrange 乗数法あるいは随伴変数法および物質導関数を利用して，形状修正の感度となる形状勾配関数を理論的に導出する．さらに導出した形状勾配関数に基づいて力法を適用し，有限要素法によって数値解析した二次元問題の解析例を簡単に紹介する．

2. 粘性流れ場の支配方程式

図 1 に示すように，一様流中に置かれた孤立物体について考える．Pironneau⁽¹⁾⁻⁽⁴⁾の問題設定に基づき，粘性流れ場領域 $\Omega \subset R^n$, $n = 2, 3$ の境界 Γ は全て Dirichlet 型境界であり，流速ゼロの孤立物体境界 Γ_B と，一様流速 $u = \hat{u}(u_1 = \hat{u}, u_2 = 0, u_3 = 0)$ を有する孤立物体から十分に離れた境界 Γ_U から構成されている．流速 $u = \{u_i\}_{i=1}^n \in U$ は次の関数空間の要素であり，境界 Γ において $\hat{u} \in (H^{1/2}(\Gamma))^n$ が既知関数として与えられている．

$$U = \{u \in (H^1(\Omega))^n \mid u = \hat{u} \text{ on } \Gamma\} \quad (1)$$

また圧力 $p \in Q$ は次の関数空間の要素である．

$$Q = \{q \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} q \, dx = 0\} \quad (2)$$

無次元化された粘性流れ場の支配方程式，すなわち Navier-Stokes 方程式と連続の式の弱形式は，随伴流速

$$w = \{w_i\}_{i=1}^n \in W:$$

$$W = \{w \in (H^1(\Omega))^n \mid w = 0 \text{ on } \Gamma\} \quad (3)$$

と随伴圧力 $q \in Q$ を用いて，次のように表すことができる．

$$a^V(u, w) + b(u, u, w) + c(w, p) = 0 \quad \forall w \in W \quad (4)$$

$$c(u, q) = 0 \quad \forall q \in Q \quad (5)$$

ただし，粘性項 $a^V(u, w)$ ，対流項 $b(v, u, w)$ ，圧力項 $c(w, p)$ は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} a^V(u, w) &= \frac{2}{Re} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(w) \, dx \\ &= \frac{1}{Re} \int_{\Omega} w_{i,j} (u_{i,j} + u_{j,i}) \, dx, \end{aligned}$$

$$b(v, u, w) = \int_{\Omega} w_i v_j u_{i,j} \, dx,$$

$$c(w, p) = - \int_{\Omega} w_{i,i} p \, dx$$

ここで， Re は Reynolds 数， $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ である．なお，本論文のテンソル表示では Einstein 総和規約と偏微分表示 $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$ を使用する．

3. 領域積分による抗力と揚力の解析法

田端ら^{(17),(18)}は，物体に作用する抗力 F_D あるいは揚力 F_L を物体表面で評価される応力の境界積分によって解析するのではなく，流れ場領域全体の領域積分による解析法を提案している．この領域積分による解析法に従うと，抗力 F_D は前述の弱形式の領域積分を用いることによって，次のように表すことができる．

$$F_D = a^V(u, v^D) + b(u, u, v^D) + c(v^D, p) \quad (6)$$

ただし， v^D は次のように定義されている．

$$v^D = (e, 0, 0), \quad e = \begin{cases} 1 & \text{on } \Gamma_B \\ 0 & \text{on } \Gamma_U \end{cases} \quad (7)$$

この方法では，有限要素解析のために既に構築されている $a^V(u, v^D)$ などの弱形式の各項に，数値解析された解 u, p を代入する演算によって抗力が解析できる．また境界積分による解析法と比較して，高精度な数値解析が実現できることが知られている．

同様に，揚力 F_L は $v^L = (0, 0, e)$ とおいて，

$$F_L = a^V(u, v^L) + b(u, u, v^L) + c(v^L, p) \quad (8)$$

として表すことができる．

4. 抗力最小化問題

前述の領域積分によって表現された抗力を用いて，一様粘性流れ場中に置かれた孤立物体に作用する抗力が

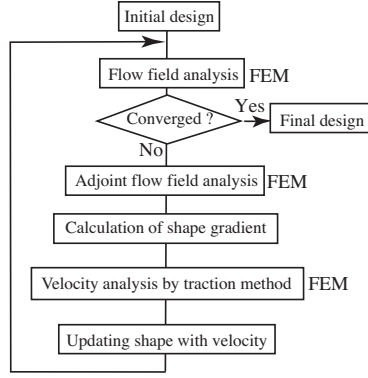


Fig. 2 Numerical procedure

最小となる形状決定問題を定式化する。また, Lagrange 乗数法, あるいは随伴変数法を用いて形状修正の感度となる形状勾配を導出する。

4.1 問題の定式化 この粘性流れ場領域 Ω の領域変動を T_s (s は領域変動の履歴) で定義し, 領域 Ω は変動して $\Omega_s = T_s(\Omega)$ になると仮定する。簡単のために, 領域変動の制約に境界 Γ_U が含まれると仮定する。このとき, 領域の大きさ制約を課した抗力最小化問題は次のように定式化される。

$$\text{Given } M, \hat{u}, Re \quad (9)$$

$$\text{find } \Omega_s \quad (10)$$

$$\text{that minimizes } a^V(u, v^D) + b(u, u, v^D) + c(v^D, p) \quad (11)$$

$$\text{subject to } a^V(u, w) + b(u, u, w) + c(w, p) = 0 \quad \forall w \in W \quad (12)$$

$$c(u, q) = 0 \quad \forall q \in Q \quad (13)$$

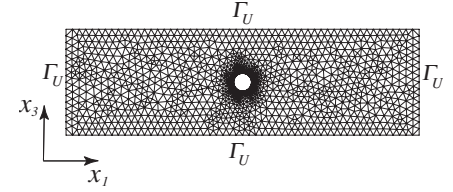
$$\int_{\Omega} dx \leq M, \quad (14)$$

ここで式 (12), (13) は Navier-Stokes 方程式, 連続の式の弱形式である。式 (14) は領域の大きさの上限値を M とした制約条件式を表している。

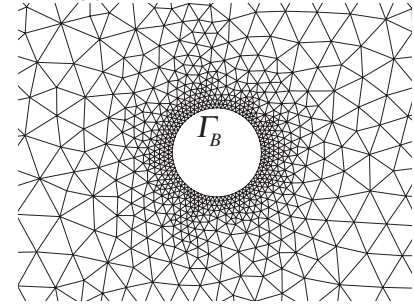
4.2 形状勾配 この問題は Lagrange 乗数法, あるいは随伴変数法によって制約条件のない停留化問題に書き換えることができる⁽¹²⁾。この場合の Lagrange 関数 $L(u, p, w, q, \Lambda)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} L = & a^V(u, v^D) + b(u, u, v^D) + c(v^D, p) \\ & - a^V(u, w) - b(u, u, w) - c(w, p) \\ & - c(u, q) \\ & + \Lambda \left(\int_{\Omega} dx - M \right) \end{aligned} \quad (15)$$

ここで, $w \in W$ と $q \in Q$ は Lagrange 乗数として用いている。また Λ は領域の大きさ制約条件式に対す



(a) FEM model of domain



(b) domain near isolated body

Fig. 3 2D isolated body problem and finite element meshes

る Lagrange 乗数である。

領域変動に対する L の導関数 \dot{L} は速度場 $V(\Omega_s) = \partial T_s(\Omega) / \partial s = \partial T_s(T_s^{-1}(\Omega_s)) / \partial s$ を用いて次のように得られる⁽¹⁵⁾。

$$\begin{aligned} \dot{L} = & -\{a^V(u, w') + b(u, u, w') + c(w', p)\} \\ & - c(u, q') \\ & -\{a^V(u', w) + b(u', u, w) + b(u, u', w) + c(u', q) \\ & \quad - b(u', u, v^D) - b(u, u', v^D) - a^V(u', v^D)\} \\ & - c(w, p') + c(v^D, p') \\ & + \dot{\Lambda} \left(\int_{\Omega} dx - M \right) \\ & + \langle G\nu, V \rangle \end{aligned} \quad (16)$$

ここで, $(\dot{\cdot})$ は物質導関数, $(\cdot)'$ は空間座標に固定した分布関数の領域変動に対する導関数 (形状導関数) を表す。また

$$\langle G\nu, V \rangle = \int_{\Gamma_B} G\nu_i V_i d\Gamma \quad (17)$$

ここで,

$$G = G_0 + G_1 \Lambda \quad (18)$$

$$G_0 = -\frac{1}{Re} w_{i,j} (u_{i,j} + u_{j,i}) - w_{i,i} p \quad (19)$$

$$G_1 = 1 \quad (20)$$

ただし, 設計境界 Γ_B では $u_j = 0, v_{i,j}^D = 0$ 等を考慮している。

式 (16) から $w' \in W, q' \in Q, u' \in W$ と $p' \in Q$ に対する停留条件を考慮すれば, u, p, w, q, Λ に関する

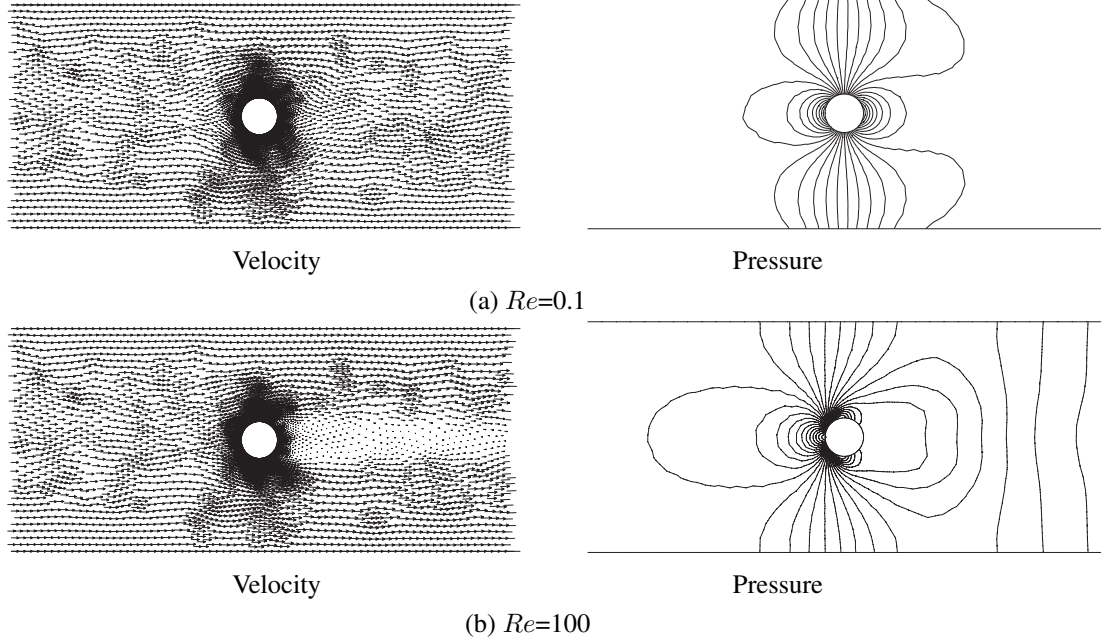


Fig. 4 Numerical results: Velocity and pressure distributions for initial shape

Kuhn-Tucker 条件は次のように得られる .

$$a^V(u, w') + b(u, u, w') + c(w', p) = 0 \quad \forall w' \in W \quad (21)$$

$$c(u, q') = 0 \quad \forall q' \in Q \quad (22)$$

$$a^V(u', w) + b(u', u, w) + b(u, u', w) + c(u', q) - b(u', u, v^D) - b(u, u', v^D) - a^V(u', v^D) = 0 \quad \forall u' \in W \quad (23)$$

$$-c(w, p') + c(v^D, p') = 0 \quad \forall p' \in Q \quad (24)$$

$$\Lambda \geq 0, \quad \int_{\Omega} dx \leq M, \quad \Lambda \left(\int_{\Omega} dx - M \right) = 0 \quad (25)$$

上式によって u, p, w, q が解析できれば, Lagrange 汎関数の導関数は評価関数の導関数と一致して, 次の関係が成立する .

$$\dot{L}|_{u,p,w,q,\Lambda} = \langle G\nu, V \rangle . \quad (26)$$

式 (17) の $G\nu_i$, 式 (18) の G は, それぞれこの問題における形状勾配および形状勾配密度と呼ばれる . 式 (23) と (24) は随伴流速 w と随伴圧力 q に対する随伴方程式を表している . 式 (25) は Λ に対する支配方程式を表している .

このようにして, 本問題に対する形状勾配が導出できれば, 力法⁽¹⁵⁾を適用することが可能となる .

5. 揚力最大化問題

前述の抗力最小化問題と同様な手順によって, 一様粘性流れ場中に置かれた孤立物体に作用する揚力が最

大となる形状決定問題を定式化して, 形状修正の感度となる形状勾配を導出する .

揚力最大化問題は次のように定式化できる .

$$\text{Given } M, \hat{u}, Re \quad (27)$$

$$\text{find } \Omega_s \quad (28)$$

$$\text{that maximizes } a^V(u, v^L) + b(u, u, v^L) + c(v^L, p) \quad (29)$$

$$\text{subject to } a^V(u, w) + b(u, u, w) + c(w, p) = 0 \quad \forall w \in W \quad (30)$$

$$c(u, q) = 0 \quad \forall q \in Q \quad (31)$$

$$\int_{\Omega} dx \leq M, \quad (32)$$

この揚力最大化問題を最小化問題に置き換えると, この問題に対する Lagrange 関数 $L(u, p, w, q, \Lambda)$ は次式のように与えられる .

$$L = -a^V(u, v^L) - b(u, u, v^L) - c(v^L, p) - a^V(u, w) - b(u, u, w) - c(w, p) - c(u, q) + \Lambda \left(\int_{\Omega} dx - M \right) \quad (33)$$

またこの問題の形状勾配密度 G_0 は, 先の抗力最小化問題と同様に次のように導出できる .

$$G_0 = -\frac{1}{Re} w_{i,j} (u_{i,j} + u_{j,i}) - w_{i,i} p \quad (34)$$

ただし, 随伴流速 w と随伴圧力 q に対する随伴方程

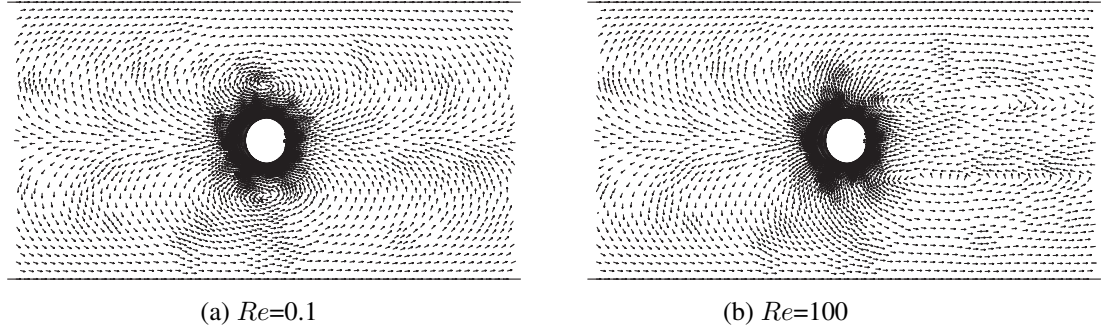


Fig. 5 Numerical results: Adjoint velocity distributions for initial shape in drag minimization problem

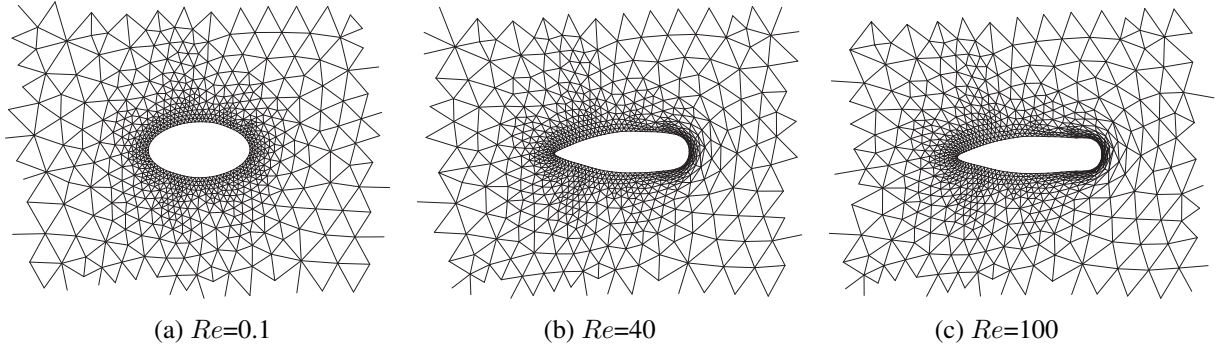


Fig. 6 Numerical results: Optimum shapes for drag minimization

式は次のように与えられる .

$$a^V(u', w) + b(u', u, w) + b(u, u', w) + c(u', q) + b(u', u, v^L) + b(u, u', v^L) + a^V(u', v^L) = 0 \quad \forall u' \in W \quad (35)$$

$$c(w, p') + c(v^L, p') = 0 \quad \forall p' \in Q \quad (36)$$

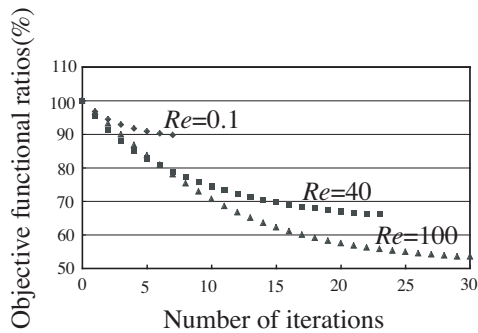


Fig. 8 Numerical results: iterative histories of objective functional for drag minimization

6. 解 法

6.1 有限要素法を用いた粘性流れ場解析 本研究では, 流れ場の数値解析法として有限要素法を利用する. 本節では, 粘性流れ場の支配方程式 (4), (5) か

ら流速分布 u_i , 圧力分布 p を数値的に解くことを示す. ここでは, 流速 u に対しては 2 次の補間関数, 圧力 p に対しては 1 次の補間関数をもつ三角形要素 (P2/P1 要素) を用いた定式化を行う.

有限要素法の手続きに従うと, 有限要素内の流速 u_i は, α 節点 ($\alpha = 1 \sim 6$) における流速 $u_{\alpha i}$ と λ 節点 ($\lambda = 1 \sim 3$) における圧力 p_λ によって次のように記述される.

$$u_i = \Phi_\alpha u_{\alpha i}, \quad p = \Psi_\lambda p_\lambda \quad (37)$$

ここで, $\Phi_\alpha, \Psi_\lambda$ はそれぞれ流速, 圧力の形状関数を表している. 有限要素に関する上の関係を Navier-Stokes 式 (4), 連続の式 (5) に代入すると, 次の粘性流れ場に対する有限要素方程式が得られる.

$$K_{\alpha\beta\gamma ij} u_{\beta j} + S_{\alpha i \beta j} u_{\beta j} + H_{\alpha i \lambda} p_\lambda = 0 \quad (38)$$

$$H_{\alpha i \lambda} u_{\alpha i} = 0 \quad (39)$$

ここで,

$$K_{\alpha\beta\gamma ij} = \left(\int_{\Omega} \Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_{\gamma, j} dx \right) u_{\gamma i} \quad (40)$$

$$S_{\alpha i \beta j} = \left(\int_{\Omega} \frac{1}{Re} \Phi_{\alpha, k} \Phi_{\beta, k} dx \right) \delta_{ij} + \int_{\Omega} \frac{1}{Re} \Phi_{\alpha, j} \Phi_{\beta, i} dx \quad (41)$$

$$H_{\alpha i \lambda} = \int_{\Omega} \Phi_{\alpha, i} \Psi_\lambda dx \quad (42)$$

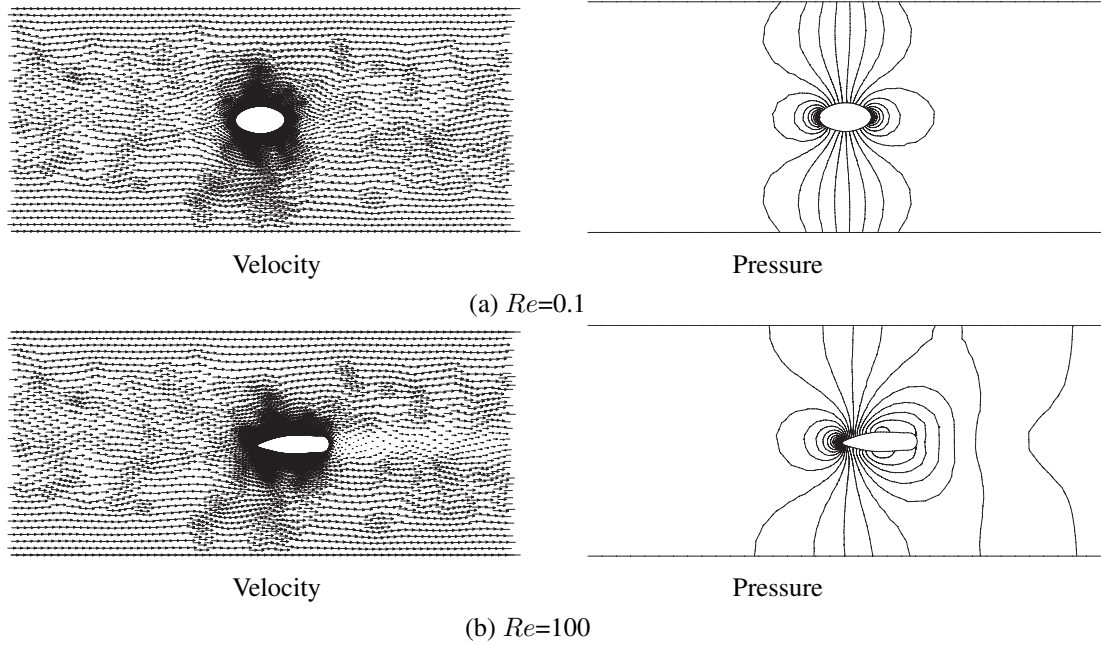


Fig. 7 Numerical results: Velocity and pressure distributions for optimum shapes in drag minimization problem

全節点に対する支配方程式は、式 (38) と (39) を全要素について重ね合わせることによって得られる。その結果、流速分布 u_i 、圧力分布 p は Newton-Raphson 法など非線形方程式の解法によって解析できる。

また随伴流速 w_i 、随伴圧力 q を評価する随伴流れ場の解析に対しても、同様な手続きによって線形の有限要素方程式が得られ、数値解析が可能となる。

6.2 力法 力法は速度場 V を次の支配方程式に基づいて解く方法として提案されている⁽¹⁵⁾。

$$a^E(V, y) = - \langle Gv, y \rangle, \quad \forall y \in D \quad (43)$$

ただし、 $a^E(V, y)$ は線形弾性体のひずみエネルギーを与える双一次形式で、変位分布ベクトル関数 u_i, v_i に対して次式で定義されている。

$$a^E(u, v) = \int_{\Omega} A_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} dx \quad (44)$$

A_{ijkl} は正定値性を有する剛性テンソルである。式 (43) は、速度場 V が負の形状勾配関数 $-Gv_i$ を外力として作用させたときの変位場として解析されることを示している。力法に基づく領域変動は、形状勾配関数を疑似弾性問題の外力として作用させたときの変位場として求められる。したがって、式 (43) の解法には通常の線形弾性問題の解法を用いて解くことが可能であり、汎用性のある方法である。

また、有限要素法を利用した力法による領域の形状修正解析では、感度に基づく外力作用によって、領域の外部境界節点だけでなく、領域内部の節点も変動す

る。したがって、この方法では、通常の形状最適化手法の中で課題の一つになっている逐次形状修正に伴う再メッシュ処理が、殆ど不要であるという特徴を有している。

6.3 解析手順 抗力最小化問題、揚力最大化問題に対する解析手順を図 2 に示す。まず初期形状を与え、状態方程式 (21) および (22) から流速分布 u_i 、圧力分布 p を解析する。次に、抗力最小化の場合には随伴方程式 (23), (24) から、揚力最大化の場合には随伴方程式 (35), (36) から、それぞれの問題に対する随伴流速分布 w_i 、圧力分布 q を解析する。これらの結果から、各問題に対する形状勾配密度関数 G を計算する。さらに、式 (43) から速度場 V を計算して形状を更新する。形状が更新されれば最初に戻って解析が繰り返され、目的汎関数が停留したと判断されたときに解析は終了する。本研究では、粘性流れ場の解析と同様に速度場の解析に対しても有限要素法を用いた。

7. 解析例

導出した形状勾配密度と力法を用いて解析した簡単な数値例を紹介する。

図 3 の一様流中に置かれた孤立物体の二次元問題に対して解析を行った。図 3(a) の孤立物体は流れ場の中央部に位置し、流れ場領域の大きさは、 x_1 方向には孤立物体直径の 20 倍、 x_3 方向には孤立物体直径の 6 倍の長さを設定した。図 3(b) では、物体周辺部を拡大して示している。流れ場解析の有限要素には Taylor-Hood 型の有限要素 (P2/P1 要素) を用い、節点数、要素数は

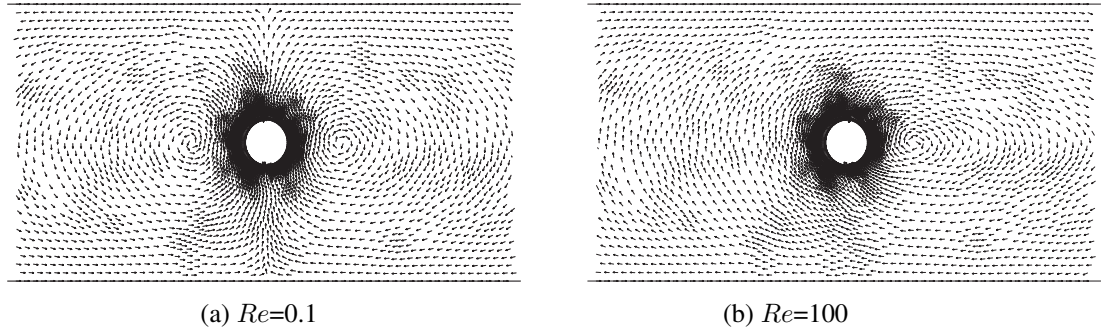


Fig. 9 Numerical results: Adjoint velocity distributions for initial shape in lift maximization problem

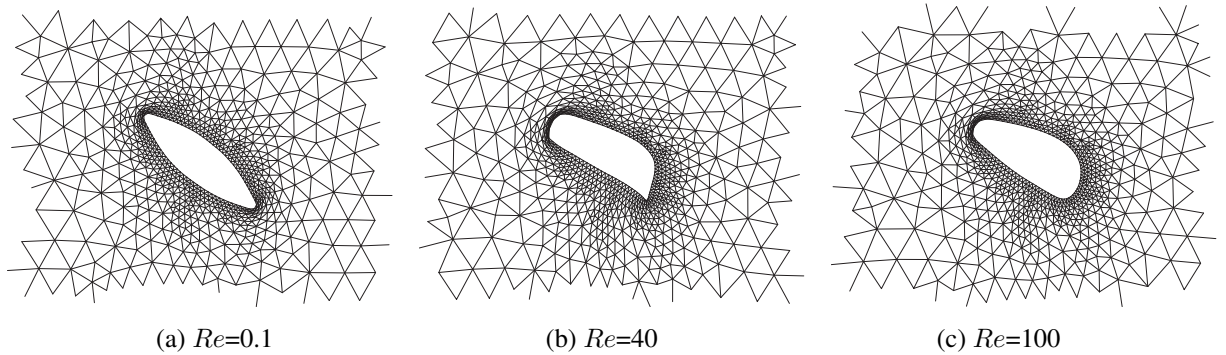


Fig. 10 Numerical results: Optimum shapes for lift maximization

それぞれ 6,184, 2,986 である．流れ場の境界条件として，流速は境界 Γ_U において $u_1 = 1.0, u_3 = 0.0$ ，境界 Γ_B において $u_1 = u_3 = 0.0$ とし，圧力については圧力の自由度を除去するために，境界 Γ_U の右側中央の一つの節点に $p = 0.0$ を課した．なお本解析例では，孤立物体から上部境界および下部境界までの十分な計算領域が設定されていないが，孤立物体まわりの感度をできるだけ精度良く評価することを目指して，所有する計算機メモリに基づいた可能な限りの細かなメッシュ分割を行って解析を行った．

図 4 に $Re=0.1, 100$ における，初期形状に対する孤立物体まわりの流速分布および圧力分布を示す． $Re=100$ では，孤立物体後流部で逆圧勾配が生じて渦が発生していることが確認できる．最適化解析は孤立物体の面積一定の制約条件で行い，形状修正の過程において再メッシュ分割処理を施さなかった．

抗力最小化問題に対する解析結果を図 5 から図 8 に示す．図 5 は $Re=0.1, 100$ における，初期形状に対する随伴流速分布を示している．また図 6 に $Re=0.1, 40, 100$ の各条件に対して解析された最適形状を示す．さらに図 7 は， $Re=0.1, 100$ における最適形状に対する流速分布および圧力分布を示し，形状修正後においても滑らかな圧力分布が得られ，計算の解析精度が確認できる．

これらの結果から，Reynolds 数に依存した最適形状が得られていることが確認できる． $Re=0.1$ の最適形状は楕円形状となり，散逸エネルギー最小化における最適形状^{(12),(13)}に似た形状となった．一方， $Re=40, 100$ の最適形状は，流れに向かって尖った形状になり，Yagi and Kawahara⁽⁹⁾が解析した最適形状に類似した結果となっている．図 4 から考察すると， $Re=0.1$ では孤立物体における流速分布および圧力分布の左右対称性に基づいた最適形状となり， $Re=40, 100$ では孤立物体後流部で渦が生じて，流れの左右非対称性に基づいた最適形状になったと考えることができる．図 7 から， $Re=100$ の最適形状における後流部での逆圧勾配および渦の発生が，図 4 の初期形状の場合に比較して緩和していることが確認できる．

また，形状修正の繰り返しに対する抗力の収束履歴を図 8 に示している．抗力の値は初期値によって規準化している．これらの結果，いずれの解析条件においても抗力が減少して収束していることが確認できる．

なお本解析例では，前述のように，孤立物体から上部境界および下部境界までの十分な計算領域が設定されていなかったため，得られた解析結果は，外部境界における流速境界条件の影響を多少受けていると考えられる．

揚力最大化問題に対する解析結果を図 9 から図 11 に示す．図 9 に $Re=0.1, 100$ における揚力最大化問題

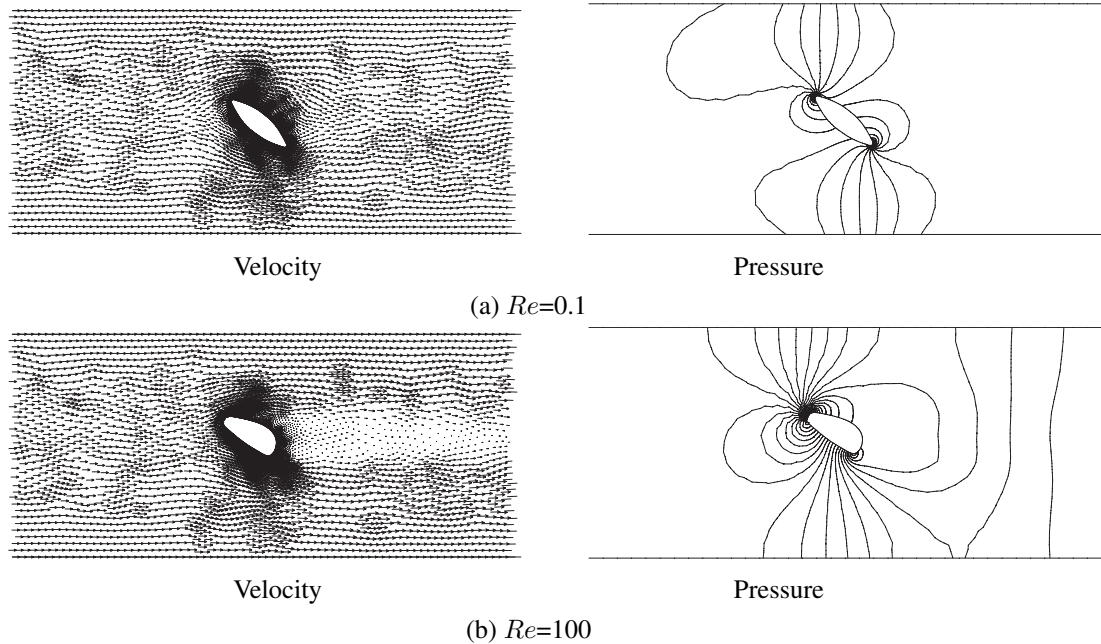


Fig. 11 Numerical results: Velocity and pressure distributions for optimum shapes in lift maximization problem

に対する随伴流速分布を，図 10 に $Re=0.1, 40, 100$ における揚力最大化の最適形状を示している．さらに図 11 は， $Re=0.1, 100$ の条件における最適形状に対する流速分布および圧力分布を示す．図 4 の初期形状の場合に比較して，図 11 の最適形状では，孤立物体の左下側境界における圧力値が上昇している様子が確認できる．その結果として，揚力が向上した形状となっていると考察できる．なお， $Re=0.1$ の最適形状は，篠原ら⁽¹¹⁾が Stokes 流れ場において解析した最適形状に類似して，流れ方向に対して約 45 度傾いた楕円のような形状となっている．

また，初期形状における揚力の大きさはゼロ近くになるために，前述の抗力最小化問題のように初期値によって規準化した揚力の収束履歴を図示することは困難であるが，いずれの解析条件においても，形状更新に対する揚力の大きさは増大して収束した．

これらの解析例から提示した解法の妥当性が確認できた．

8. ま と め

一様流体中に置かれた物体に生じる抗力を最小化，あるいは揚力を最大化する形状最適化問題を定式化し，それぞれの問題に対する形状勾配関数を導出した．導出した形状勾配関数に基づいて力法を利用した数値解析法を提示し，二次元問題の数値解析例を通して本手法の妥当性を示した．

謝 辞

本研究の一部は日本学術振興会科学研究費補助金基盤研究(C) No. 18560216 の援助を受けて行われた．また，数値解析では岐阜工業高等専門学校機械工学科の学生である川瀬遼君の協力を得た．記して深く謝意を表す．

文 献

- (1) Pironneau, O., On Optimum Profiles in Stokes Flow, *J. Fluid Mech.*, Vol. 59, Part 1 (1973), pp. 117-128.
- (2) Pironneau, O., On Optimum Design in Fluid Mechanics, *J. Fluid Mech.*, Vol. 64, Part 1 (1974), pp. 97-110.
- (3) Pironneau, O., *Optimal Shape Design for Elliptic Systems*, (1984), Springer-Verlag.
- (4) Mohammadi, B. and Pironneau, O., *Applied Shape Optimization for Fluids*, (2001), Oxford University Press.
- (5) Glowinski, R. and Pironneau, O., On the numerical computation of minimum-grag profile in laminar flow, *J. Fluid Mech.*, Vol. 72, Part 2, (1975), pp. 385-389.
- (6) Ganesh R. K., The Minimum Drag Profile in Laminar Flow, A Numerical way, *Transaction of the ASME, Journal of Fluids Engineering*, Vol. 116, (1994), pp. 456-462.
- (7) Huan, J.C. and Modi, V., Optimum Design of Drag Minimizing Bodies in Incompressible Flow, *Inverse Problems in Engineering*, Vol. 1, (1994), pp. 1-25.
- (8) Huan, J.C. and Modi, V., Design of Minimum Drag Bodies in Incompressible Laminar Flow, *Inverse Problems in Engineering*, Vol. 3, (1996), pp. 233-260.
- (9) Yagi H. and Kawahara M., Optimal Shape Determination of a Body Located in Incompressible Viscous Fluid Flow, *Comput., Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 196, (2007), pp. 5084-5091.

- (10) Jameson, A., Optimum Aerodynamic Design Using Control Theory, *Computational Fluid Dynamics Review 1995*, Editors: Hafez M. and Oshima K., John Wiley & Sons, (1995), pp. 495-528.
 - (11) Shinohara, K. et al., Shape Optimization Using Adjoint Variable Method for Maximum Lift, Proceedings of 20th Computational Fluid Dynamics Symposium (in Japanese), Nagoya, (2006), CD-ROM.
 - (12) Katamine, E. and Azegami, H., Solution to Viscous Flow Fields Domain Optimization Problems (Approach by the Traction Method), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B* (in Japanese), Vol. 60, No. 579, (1994), pp. 3859-3866.
 - (13) Katamine E., Azegami H., Tsubata T. and Itoh S., Solution to Shape Optimization Problems of Viscous Flow Fields, *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, Vol. 19, No.1, (2005), pp. 45-51.
 - (14) Katamine E., Nagatomo Y. and Azegami H., Shape Optimization of 3D Viscous Flow Fields, Proceedings of Inverse Problems, Design and Optimization Symposium, (IPDO-2007), Miami, Florida, U.S.A., Vol.1, (2007), pp. 122-128.
 - (15) Azegami, H., Solution to Domain Optimization Problems, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A* (in Japanese), Vol. 60, No. 574, (1994), pp. 1479-1486.
 - (16) Azegami, H. et al., Irregularity of Shape Optimization Problems and an Improvement Technique, *Computer Aided Optimum Design of Structures V*, OPTI 97, Editors: Hernandez, S. and Brebbia, C.A., Computational Mechanics Publications, Southampton, (1997), pp. 309-326.
 - (17) Tabata M., Finite Element Analyses of Fluid Problems, *Mathematical Sciences*, (in Japanese), No. 417, (1998), pp. 13-19.
 - (18) Tabata M. and Itakura K., A Precise Computation of Drag Coefficients of a Sphere, *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, Vol. 9, (1998), pp. 303-311.
-