

# 平均コンプライアンス最小化を目的とした熱弾性場の形状最適化\*

片峯 英次<sup>\*1</sup>, 吉岡 広起<sup>\*2</sup>, 松浦 浩佑<sup>\*2</sup>, 畔上 秀幸<sup>\*3</sup>

## Shape Optimization of Thermoelastic Fields for Mean Compliance Minimization

Eiji KATAMINE<sup>\*1</sup>, Hiroki YOSHIOKA, Kousuke MATSUURA and Hideyuki AZEGAMI

<sup>\*1</sup> Department of Mechanical Engineering, Gifu National College of Technology  
2236-2, Kamimakuwa, Motosu, Gifu 501-0495, Japan

This paper presents a numerical analysis method for shape optimization in order to achieve stiffness maximization in thermoelastic fields. Mean compliance is used as an objective functional for the shape optimization problem. The mean compliance minimization problem on the thermoelastic fields is formulated on volume constraint condition. The shape gradient of the shape optimization problems is derived theoretically using the adjoint variable method, the Lagrange multiplier method and the formulae of the material derivative. Reshaping is accomplished using a traction method that was proposed as a solution to shape optimization problems. In addition, a new numerical procedure for the shape optimization is proposed. The validity of the proposed method is confirmed based on the results of 2D numerical analysis.

**Key Words** : Shape Optimization, Optimum Design, Computer Aided Design, Thermoelastic Solid, Adjoint Method, Traction Method

### 1. はじめに

性能の改善を目的とした機器の形状最適化問題は、工学の分野において重要な問題である。その中でも、熱変形を考慮した熱弾性体の形状最適化は、工作機械あるいは精密測定機器の形状設計において特に重要視されている。例えば、高温環境下で作動する工作機械の開発においては、機器の部分境界における熱変形分布をコントロールするように、すなわち、熱変形分布を規定するように、機器の境界形状を決定する設計は加工精度の向上を目的とした形状設計の一つである。また機器の熱変形をできるだけ小さくして機器の剛性を高めた形状設計も本問題に直結した課題の一つである。熱変形が測定誤差に影響する精密測定機器の設計においても、同様なことを考える必要がある。本研究では、このような問題を数理モデルとして捉え、熱弾性場に対して剛性を高めることを目的とした平均コンプライアンス最小化の形状設計法について取り上げる。

熱弾性場の最適化を目的とした感度解析は、Merici<sup>(1)</sup>, Dems and Mroz<sup>(2)</sup>らによって始められた。Merici<sup>(1)</sup>は定常の線形熱弾性場に対して、Dems and Mroz<sup>(2)</sup>は、温度、ひずみ分布の非線形性を考慮した熱弾性場に対して解析した。温度場とひずみ場の連成熱弾性場に関する感度解析は、Tortorelliら<sup>(3)</sup>によって行われた。Houら<sup>(4)</sup>, Bobaru and Mukherjee<sup>(5)</sup>は熱弾性場における形状決定問題に対する数値解析法を提案した。Grindeanu<sup>(6)</sup>らは、縦弾性係数やポアソン比の温度依存性を考慮した熱弾性場の形状最適化解析を試みた。しかしながら、彼らの解析法は、形状を表す設計変数の自由度を極力少なくするよう工夫した解析法であった。

著者らはこれまでに、定常の熱弾性場に対して、部分境界における熱変形分布が規定した熱変形分布となるように熱弾性場の境界形状を決定する形状同定問題<sup>(7)</sup>, また体積最小化を目的とした形状最適化問題<sup>(8)</sup>の解法を提案してきた。その解析手法には力法<sup>(9)</sup>を用いた。力法は、領域変動を写像で与え、最適化問題から理論的に導出され

\* 原稿受付 2011年3月3日

<sup>\*1</sup> 正員, 岐阜工業高等専門学校機械工学科 (〒 501-0495 岐阜県本巣市上真桑 2236-2)

<sup>\*2</sup> 岐阜工業高等専門学校機械工学科 (〒 501-0495 岐阜県本巣市上真桑 2236-2)

<sup>\*3</sup> 正員, フェロー, 名古屋大学大学院情報科学研究科 (〒 464-8601 名古屋市千種区不老町 1)

Email: katamine@gifu-nct.ac.jp

る形状勾配関数を直接用いた分布系の勾配法を応用した方法である．この方法では，領域変動量は形状勾配関数が外力として仮定された疑似弾性体の変形量として解析できるため，設計変数の自由度を減らすことなく多自由度の形状設計が容易となり，滑らかな形状設計が実現できる<sup>(10)</sup>．また，形状更新には有限要素法などが利用できるため，三次元問題<sup>(11)</sup>などの複雑な問題に対する解析も可能である．

本論文では，定常の熱弾性場に対して，剛性を高めることを目的とした平均コンプライアンス最小化を目的汎関数に設定した形状最適化問題を取り上げる．最初に熱弾性場の支配方程式を示す．次に形状最適化問題を定式化し，Lagrange 乗数法あるいは随伴変数法および物質導関数を利用して，形状修正の感度となる形状勾配を理論的に導出する．最後に導出した形状勾配と方法を用いて解析した簡単な二次元問題の数値解析例を紹介する．この解析例においては，平均コンプライアンス最小化と既報の熱変形分布規定<sup>(7)</sup>の最適形状の違いについて検討し，提示した手法の妥当性を示す．

## 2. 熱弾性場の支配方程式

### 2.1 熱伝導場の支配方程式

$n$ 次元空間 ( $n = 2, 3$ ) の定常熱伝導場領域  $\Omega$  において，温度分布  $\phi \in H^1(\Omega)$  を解く問題を考える．熱伝導場領域  $\Omega$  の境界  $\Gamma$  は， $\Gamma = \Gamma_\phi \cup \Gamma_h \cup \Gamma_q \cup \Gamma_i$  から構成されている．温度  $\phi_0 \in H^{1/2}(\Gamma_\phi)$ ，熱流束  $q \in H^{-1/2}(\Gamma_q)$ ，熱源  $Q \in H^{-1}(\Omega)$  は既定関数として与えられている．境界  $\Gamma_h$  は，熱伝達率  $h \in L^\infty(\Gamma_h)$  と温度  $\phi_f \in L^\infty(\Gamma_h)$  の外部流体との熱伝達を考慮した境界であり，次の境界条件式で与えられる．

$$k_{ij}\phi_{,i}v_j = -h(\phi - \phi_f) \text{ on } \Gamma_h \quad (1)$$

ここで， $k = \{k_{ij}\}_{i,j=1}^n \in (L^\infty(\Omega))^{n \times n}$ ， $v = \{v_i\}_{i=1}^n$  はそれぞれ熱伝導率テンソル，境界での単位法線ベクトルを表している． $\Gamma_i$  は断熱境界である．

このとき，この熱伝導場の支配方程式の変分形式は次のように与えられる．

$$a_\phi(\phi, \varphi) = l_\phi(\varphi) \quad \phi - \phi_0 \in \Phi, \quad \forall \varphi \in \Phi \quad (2)$$

ただし，

$$a_\phi(\phi, \varphi) = \int_\Omega k_{ij}\phi_{,i}\varphi_{,j} dx + \int_{\Gamma_h} h\phi\varphi d\Gamma, \quad l_\phi(\varphi) = \int_\Omega Q\varphi dx + \int_{\Gamma_h} h\phi_f\varphi d\Gamma + \int_{\Gamma_q} q\varphi d\Gamma \quad (3)$$

$$\Phi = \{\phi \in H^1(\Omega) \mid \phi|_{\Gamma_\phi} = 0, \Gamma_\phi \subset \Gamma\} \quad (4)$$

なお，本論文のテンソル表示では Einstein 総和規約と偏微分表示  $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$  を使用する． $H^m(\Omega)$  は  $m$  階の導関数まで二乗可積分なスカラー関数空間， $L^\infty(\Gamma)$  は有界なスカラー関数空間を表す．

### 2.2 熱弾性場の支配方程式

温度  $\phi$  に基づいて熱変形  $u = \{u_i\}_{i=1}^n \in U$  が生じる線形熱弾性場の支配方程式の変分形式は次のように与えられる．

$$a_\varepsilon(\varepsilon(u), \varepsilon(v)) = a_{\varepsilon\phi}(\phi, \varepsilon(v)) + l_\varepsilon(v) \quad u - u_0 \in U, \quad \forall v \in U \quad (5)$$

ここで，

$$a_\varepsilon(\varepsilon(u), \varepsilon(v)) = \int_\Omega C_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u)\varepsilon_{ij}(v) dx, \quad a_{\varepsilon\phi}(\phi, \varepsilon(v)) = \int_\Omega C_{ijkl}\phi\alpha_{kl}\varepsilon_{ij}(v) dx \quad (6)$$

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad l_\varepsilon(u) = \int_\Omega f_i u_i dx + \int_{\Gamma_p} P_i u_i d\Gamma \quad (7)$$

$$U = \{u \in (H^1(\Omega))^n \mid u|_{\Gamma_u} = 0, \Gamma_u \subset \Gamma\} \quad (8)$$

ただし，熱弾性体領域  $\Omega$  の境界  $\Gamma$  は， $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_p \cup \Gamma_{p_0}$  から構成されている．変位  $u_0 = \{u_{0i}\}_{i=1}^n \in (H^{1/2}(\Gamma_u))^n$ ，表面力  $P = \{P_i\}_{i=1}^n \in (H^{-1/2}(\Gamma_p))^n$ ，体積力  $f = \{f_i\}_{i=1}^n \in (H^{-1}(\Omega))^n$  は既定関数として与えられ，境界  $\Gamma_{p_0}$  は表面力がゼロの境界を表している． $C = \{C_{ijkl}\}_{i,j,k,l=1}^n \in (L^\infty(\Omega))^{n \times n}$ ， $\alpha = \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^n \in (L^\infty(\Omega))^{n \times n}$  はそれぞれ剛性テンソル，熱膨張係数テンソルを表している．また， $(H^m(\Omega))^n$  は  $m$  階の導関数まで二乗可積分な  $n$  次元ベクトル関数空間を表す．

### 3. 平均コンプライアンス最小化問題

#### 3.1 問題の定式化

熱弾性場において，剛性最大化を目的とした平均コンプライアンス最小化問題を考える．この熱弾性場領域  $\Omega$  の領域変動を  $T_s$  ( $s$  は領域変動の履歴) で定義し，領域  $\Omega$  は変動して  $\Omega_s = T_s(\Omega)$  になると仮定する．このとき，領域の大きさの上限値を  $M$  に制限した形状最適化問題は次のように定式化できる．

$$\text{Given } M \text{ and } k, \phi_0, q, h, \phi_f, Q, C, u_0, \alpha, P, f: \text{ fixed in space,} \quad (9)$$

$$\text{find } \Omega_s \quad (10)$$

$$\text{that minimizes } a_{\varepsilon\phi}(\phi, \varepsilon(u)) + l_\varepsilon(u) \quad (11)$$

$$\text{subject to } a_\phi(\phi, \varphi) = l_\phi(\varphi), \quad \phi - \phi_0 \in \Phi, \quad \forall \varphi \in \Phi \quad (12)$$

$$a_\varepsilon(\varepsilon(u), \varepsilon(v)) = a_{\varepsilon\phi}(\phi, \varepsilon(v)) + l_\varepsilon(v), \quad u - u_0 \in U, \quad \forall v \in U \quad (13)$$

$$\int_{\Omega} dx \leq M, \quad (14)$$

#### 3.2 形状勾配

この問題は Lagrange 乗数法，あるいは随伴変数法によって制約条件のない停留化問題に書き換えることができる．この場合の Lagrange 関数  $L(\phi, u, \varphi, v)$  は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} L = & a_{\varepsilon\phi}(\phi, \varepsilon(u)) + l_\varepsilon(u) \\ & - a_\phi(\phi, \varphi) + l_\phi(\varphi) - a_\varepsilon(\varepsilon(u), \varepsilon(v)) + a_{\varepsilon\phi}(\phi, \varepsilon(v)) + l_\varepsilon(v) \\ & + \Lambda \left( \int_{\Omega} dx - M \right) \end{aligned} \quad (15)$$

ここで， $\varphi \in \Phi$ ， $v \in U$  は熱弾性場の支配方程式に関する Lagrange 乗数になっている．また  $\Lambda$  は領域の大きさ制約に対する Lagrange 乗数である．領域変動に対する  $L$  の導関数  $\dot{L}$  は速度場  $V = \partial T_s(\Omega) / \partial s = \partial T_s(T_s^{-1}(\Omega_s)) / \partial s$  を用いて次のように得られる<sup>(9)</sup>．

$$\begin{aligned} \dot{L} = & a_{\varepsilon\phi}(\phi', \varepsilon(u)) + a_{\varepsilon\phi}(\phi, \varepsilon(u')) + l_\varepsilon(u') \\ & - a_\phi(\phi', \varphi) - a_\phi(\phi, \varphi') + l_\phi(\varphi') - a_\varepsilon(\varepsilon(u'), \varepsilon(v)) - a_\varepsilon(\varepsilon(u), \varepsilon(v')) + a_{\varepsilon\phi}(\phi', \varepsilon(v)) + a_{\varepsilon\phi}(\phi, \varepsilon(v')) + l_\varepsilon(v') \\ & + \dot{\Lambda} \left( \int_{\Omega} dx - M \right) \\ & + \langle Gv, V \rangle \end{aligned} \quad (16)$$

ただし， $(\dot{\cdot})$  は物質導関数， $(\cdot)'$  は空間座標に固定した分布関数の領域変動に対する導関数 (形状導関数) を表す．ここで，

$$\langle Gv, V \rangle = \int_{\Gamma} Gv_i V_i d\Gamma, \quad (17)$$

$$G = G_0 + G_1 \Lambda, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} G_0 = & C_{ijkl} \phi \alpha_{kl} \varepsilon_{ij}(u) + f_i u_i + \nabla_v (P_i u_i) + (P_i u_i) \kappa - k_{ij} \phi_{,i} \phi_{,j} - \nabla_v (h\phi\varphi) - (h\phi\varphi) \kappa + Q\varphi \\ & + \nabla_v (q\varphi) + (q\varphi) \kappa + \nabla_v (h\phi_f \varphi) + (h\phi_f \varphi) \kappa \\ & - C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u) \varepsilon_{ij}(v) + C_{ijkl} \phi \alpha_{kl} \varepsilon_{ij}(v) + f_i v_i + \nabla_v (P_i v_i) + (P_i v_i) \kappa, \end{aligned} \quad (19)$$

$$G_1 = 1. \quad (20)$$

ただし， $\nabla_v(\cdot) \equiv \nabla(\cdot) \cdot v$ ， $\kappa$  は境界における平均曲率の  $n-1$  倍である．

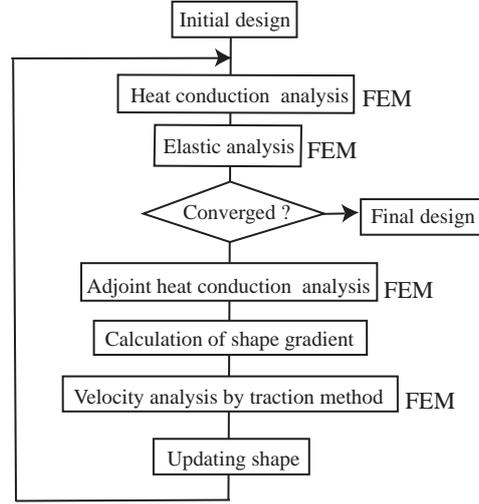


Fig. 1 Numerical procedure

$\phi, u, \varphi, v, \Lambda$  が次の条件

$$a_\phi(\phi, \varphi') = l_\phi(\varphi') \quad \forall \varphi' \in \Phi \quad (21)$$

$$a_\varepsilon(\varepsilon(u), \varepsilon(v')) = a_{\varepsilon\phi}(\phi, \varepsilon(v')) + l_\varepsilon(v') \quad \forall v' \in U \quad (22)$$

$$a_\phi(\phi', \varphi) = a_{\varepsilon\phi}(\phi', \varepsilon(u)) + a_{\varepsilon\phi}(\phi', \varepsilon(v)) \quad \forall \phi' \in \Phi \quad (23)$$

$$a_\varepsilon(\varepsilon(u'), \varepsilon(v)) = a_{\varepsilon\phi}(\phi, \varepsilon(u')) + l_\varepsilon(u') \quad \forall u' \in U \quad (24)$$

$$\Lambda \geq 0, \quad \int_{\Omega} dx \leq M, \quad \Lambda \left( \int_{\Omega} dx - M \right) = 0, \quad (25)$$

によって決定されたとき，Lagrange 汎関数の導関数は評価関数の導関数と一致して，次の関係が成立する．

$$\dot{L}|_{\phi, u, \varphi, v, \Lambda} = \langle Gv, V \rangle \quad (26)$$

式 (17) の  $Gv_i$ ，式 (18) の  $G$  は，それぞれこの問題における形状勾配および形状勾配密度と呼ばれる．式 (21) は温度  $\phi$  に対する熱伝導場の支配方程式，式 (22) は変位  $u$  に対する弾性場の支配方程式，式 (23) は随伴温度  $\varphi$  に対する随伴熱伝導場の支配方程式，式 (24) は随伴変位  $v$  に対する随伴弾性場の支配方程式を表している．また式 (25) は  $\Lambda$  に対する支配方程式を表している．

弾性場の支配方程式 (22) と随伴弾性場の支配方程式 (24) を比較すると，自己随伴関係  $u = v$  が成立する．したがって本問題では随伴変位  $v$  を評価する必要がないことが分かる．その結果，上記の支配方程式，随伴方程式，および形状勾配密度は次のようになる．

$$a_\phi(\phi, \varphi') = l_\phi(\varphi') \quad \forall \varphi' \in \Phi \quad (27)$$

$$a_\varepsilon(\varepsilon(u), \varepsilon(v')) = a_{\varepsilon\phi}(\phi, \varepsilon(v')) + l_\varepsilon(v') \quad (28)$$

$$a_\phi(\phi', \varphi) = 2a_{\varepsilon\phi}(\phi', \varepsilon(u)) \quad \forall \phi' \in \Phi \quad (29)$$

$$G = G_0 + G_1 \Lambda, \quad (30)$$

$$G_0 = 2C_{ijkl}\phi\alpha_{kl}\varepsilon_{ij}(u) + 2f_i u_i + 2\nabla_v(P_i u_i) + 2(P_i u_i)\kappa - k_{ij}\phi_{,i}\phi_{,j} - \nabla_v(h\phi\phi) - (h\phi\phi)\kappa + Q\phi + \nabla_v(q\phi) + (q\phi)\kappa + \nabla_v(h\phi_f\phi) + (h\phi_f\phi)\kappa - C_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u)\varepsilon_{ij}(u), \quad (31)$$

$$G_1 = 1. \quad (32)$$

このように形状勾配関数が与えられれば，力法<sup>(9)</sup>を適用することが可能となる．なお，形状勾配密度の計算に関して，式 (31) が示すようにその境界における平均曲率  $\kappa$  に関する項を計算する必要がある．二次元問題の場合，平

均曲率  $\kappa$  は境界曲線形状関数の空間二階微分で与えられる．したがって，設計境界において精度よく平均曲率  $\kappa$  を評価するためには，より滑らかな設計境界形状を設定する必要がある．また設計境界が表面力が作用しない断熱境界であれば，平均曲率  $\kappa$  に関する全ての項は省略されることになる．

さらに Xia ら<sup>(12)</sup>が設定した問題のように，熱伝導場の問題を簡単化して熱弾性場領域全体にわたって一様な温度変化を仮定すれば， $\phi' = 0$  となるため，式 (29) から随伴温度場を解く必要がなくなる．

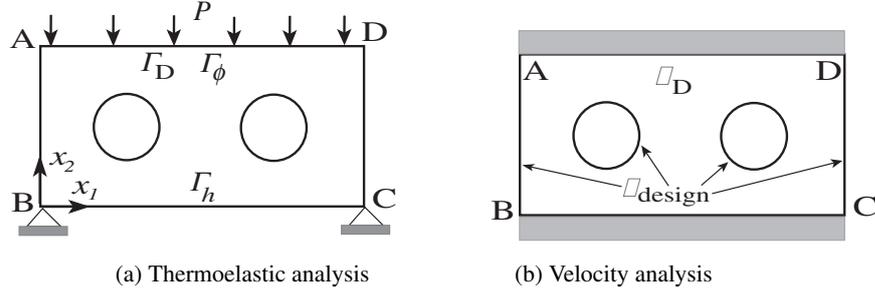


Fig. 2 2D Thermoelastic body with two holes

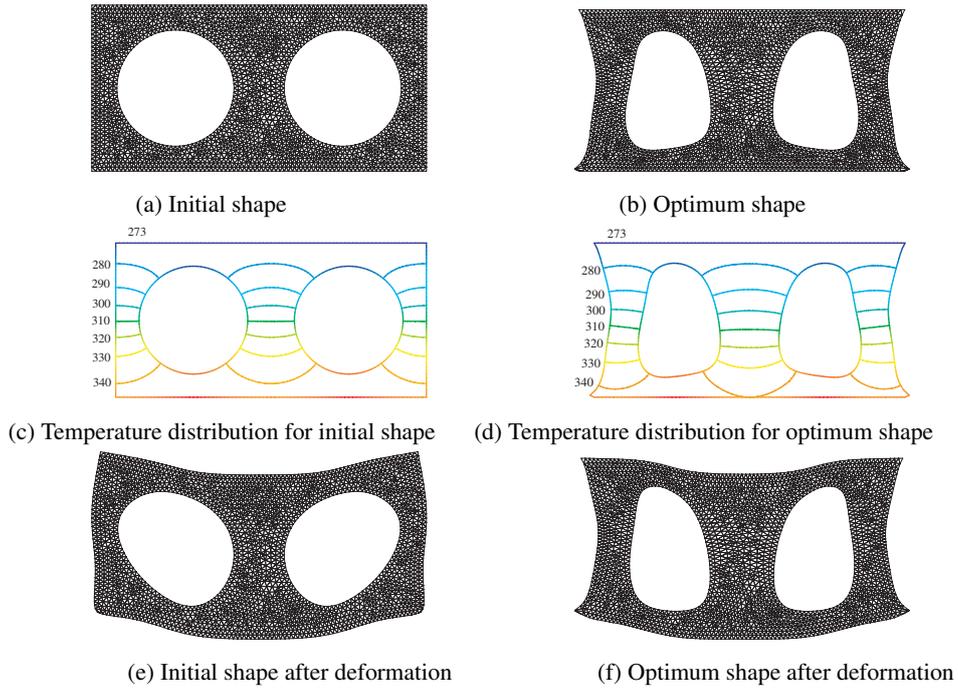


Fig. 3 Numerical results: Shapes with finite element meshes and temperature distribution for compliance minimization problem in 2D thermoelastic body with two holes

## 4. 解 法

### 4.1 力法

力法は速度場  $V$  を次の支配方程式に基づいて解く方法として提案されている<sup>(9)</sup>．

$$a_\varepsilon(\varepsilon(V), \varepsilon(y)) = - \langle Gv, y \rangle, \quad \forall y \in D \quad (33)$$

式 (33) は，速度場  $V$  が負の形状勾配関数  $-Gv_i$  を外力として作用させたときの変位場として解析されることを示している．力法に基づく領域変動は，形状勾配関数を疑似弾性問題の外力として作用させたときの変位場として求められる．したがって，式 (33) の解法には通常の線形弾性問題の解法を用いて解くことが可能であり，汎用性のある方法である．

## 4.2 解析手順

解析手順を図 1 に示す．まず初期形状を与え，熱伝導方程式 (27) から温度分布  $\phi$  を求める．得られた温度分布  $\phi$  を用いて，熱弾性方程式 (28) から変位分布  $u$  を求める．得られた変位分布  $u$  を用いて，随伴熱伝導方程式 (29) から随伴温度分布  $\varphi$  を求める．具体的には，随伴温度分布  $\varphi$  は，領域全体に仮想発熱量  $2\phi C_{ijkl}\alpha_{kl}\varepsilon_{ij}(u)$  を作用させたときの温度分布として求めることができる．これらの結果を用いて，式 (30) から形状勾配密度  $G$  を計算する．さらに，式 (33) から速度場  $V$  を計算して形状を更新する．形状が更新されれば最初に帰って解析が繰り返され，目的汎関数が停留したと判断されたときに解析は終了する．本研究では，温度分布  $\phi$ ，変位分布  $u$ ，随伴温度分布  $\varphi$ ，速度場  $V$  の解析には有限要素法を用いた．

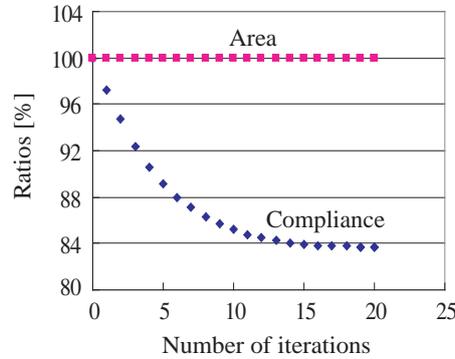


Fig. 4 Numerical results: Iterative history for mean compliance minimization problem in 2D thermoelastic body with two holes

## 5. 解析例

導出した形状勾配関数と方法を用いて解析した簡単な二次元問題の数値例を紹介する．左右下端を固定した有孔平板と両端を固定した有孔梁の問題を解析した．

### 5.1 左右下端を固定した有孔平板

問題設定を図 2 に示す．熱弾性場解析および形状修正のための速度場解析の境界条件を図 2 中に示している．初期形状は，長辺 40cm，短辺 20cm，直径 14cm の円孔を有する．材料特性は縦弾性係数を 210GPa，ポアソン比を 0.3，熱膨張係数  $\alpha_{ij} = \alpha\delta_{ij}$ ， $\alpha = 1.2 \times 10^{-5}m/m \cdot K$ ，熱伝導率は  $k = 50W/m \cdot K$  とした．有限要素分割サイズは約 5.0mm とした．熱伝導解析の境界条件は，上面境界  $A-D$  に既知温度境界  $\Gamma_\phi$  を設け温度を  $\phi = 273K$  とした．下面境界  $B-C$  に熱伝達境界を設け，熱伝達率  $h = 300W/m^2 \cdot K$ ，外気温度  $\phi_f = 373K$  とした．その他の境界を断熱境界  $\Gamma_i$  とした．熱弾性解析の境界条件は下面境界端点  $B, C$  を完全拘束とし，上面境界に圧縮力の表面力  $P = 40MN/m$  が作用する．設計境界  $\Gamma_{design}$  を穴境界及び左右の断熱境界に設定した．したがって，本解析例では，式 (31) の平均曲率  $\kappa$  に関する計算は不要である．またこの問題は平面ひずみ問題とし，領域の大きさに対する制約を初期形状の面積以下として解析を行った．

解析結果を図 3, 4 に示す．図 3 では，初期形状と解析された最適形状に対して，変形前の形状，温度分布，および変形後の形状を示している．形状修正の繰り返しに対する平均コンプライアンスと領域の大きさ（面積）の収束履歴を図 4 に示している．これらの値は初期値によって規準化している．この結果から，領域の大きさを一定に維持しながら，平均コンプライアンスが初期値に対して約 16% 減少して収束していることが確認できる．なお，本解析は形状勾配関数を用いた分布系の勾配法に基づいており，得られた最適形状は初期形状に依存するものである．

本解析例で紹介した問題設定に対して，部分境界  $\Gamma_D$  における熱変形分布が規定した熱変形分布となるように境界形状を決定する形状同定問題<sup>(7)</sup>の解析結果と，本平均コンプライアンス最小化との結果を比較してみる．この熱変形規定の形状同定問題における目的汎関数は，実際の熱変位分布  $u$  と目標の熱変位分布  $u_D$  との二乗誤差の境界積分  $\int_{\Gamma_D} (u - u_D)^2 d\Gamma$  によって定義されている<sup>(7)</sup>．本解析例では，熱変形規定境界  $\Gamma_D$  を上面境界  $A-D$  に設け， $x_2$

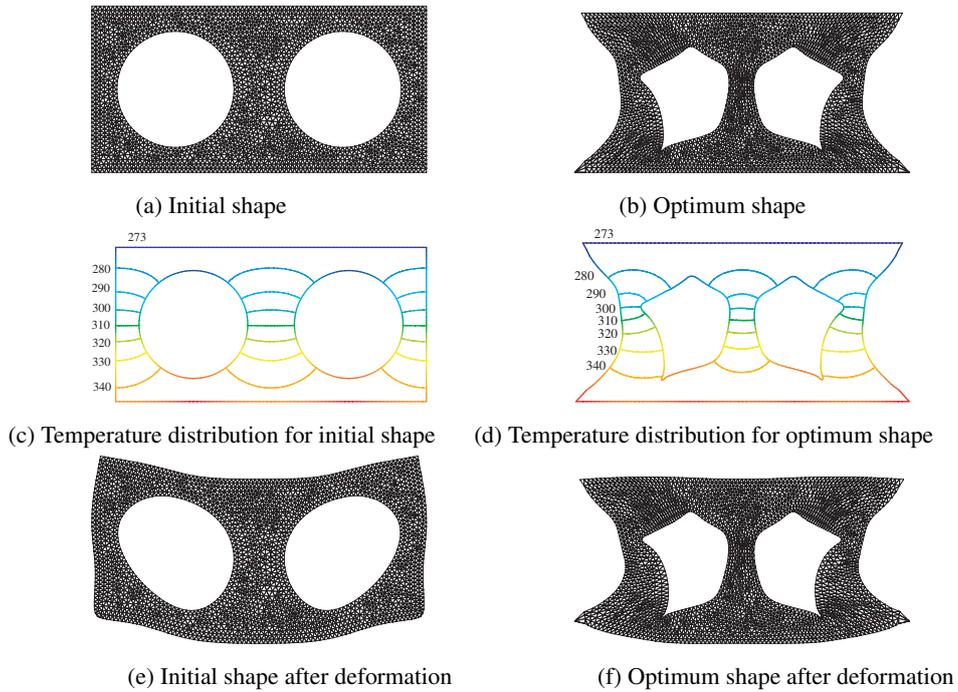


Fig. 5 Numerical results: Shapes with finite element meshes and temperature distribution for thermal deformation prescribed problem in 2D thermoelastic body with two holes

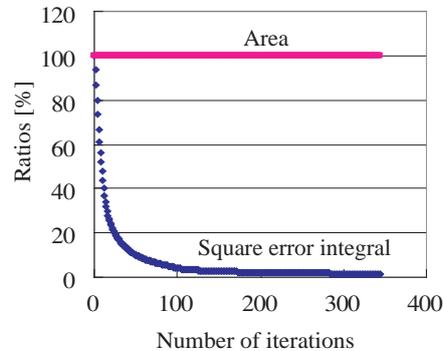


Fig. 6 Numerical results: Iterative history for thermal deformation prescribed problem in 2D thermoelastic body with two holes

方向の熱変位分布目標値を初期形状における変位分布の平均値  $u_D = -0.373\text{mm}$  とし、熱変形後の上面境界  $A-D$  を平面に近づけることを目的として解析を行った。

この熱変形規定問題の解析結果を図 5, 6 に示す。同定された形状に対する上面境界  $A-D$  の  $x_2$  方向の変位分布が均一化し、変位分布二乗誤差で定義される目的汎関数の値はほぼゼロに収束していることが確認できる。また当然の結果であるが、最適化の目的が異なれば得られる最適形状も異なることが確認できる。

## 5.2 両端を固定した有孔梁

問題設定を図 7 に示す。熱弾性場解析および形状修正のための速度場解析の境界条件を図 7 中に示している。初期形状は、長辺 80cm、短辺 20cm、直径 12cm の円孔を有する。縦弾性係数、ポアソン比、熱膨張係数、熱伝導率の材料特性は、上記の左右下端を固定した有孔平板の問題と同様に設定し、平面ひずみ問題として解析した。有限要素分割サイズは約 5.0mm とした。熱伝導解析の境界条件も、上記の問題と同様に、上面境界に温度既知境界  $\Gamma_\phi$  を設け温度を  $\phi=273\text{K}$  とし、下面境界に熱伝達境界  $\Gamma_h$  を設け、熱伝達率  $h = 100\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}$ 、外気温度  $\phi_f=323\text{K}$

とした．その他の境界を断熱境界  $\Gamma_i$  とした．上面境界に圧縮力の表面力  $P=30\text{MN/m}$  が作用し，設計境界  $\Gamma_{design}$  を断熱の穴境界および熱伝達境界の下面境界  $B-C$  に設定した．本解析では，下面境界  $B-C$  の形状勾配密度の計算に関して，厳密には式 (31) の平均曲率  $\kappa$  に関する項を計算する必要がある．しかしながら，境界  $B-C$  上における形状の変化がほとんどないと考え，また提案する手法の基本的な妥当性を確認するために，平均曲率  $\kappa$  に関する項を省略して解析した．

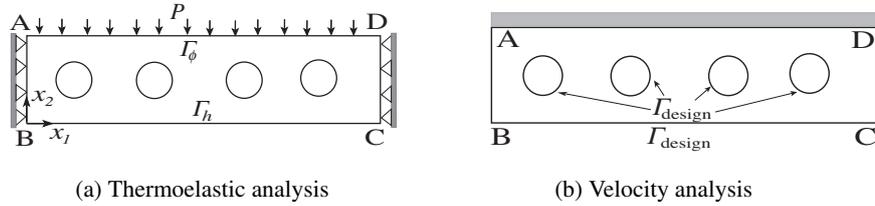


Fig. 7 2D Thermoelastic beam with four holes

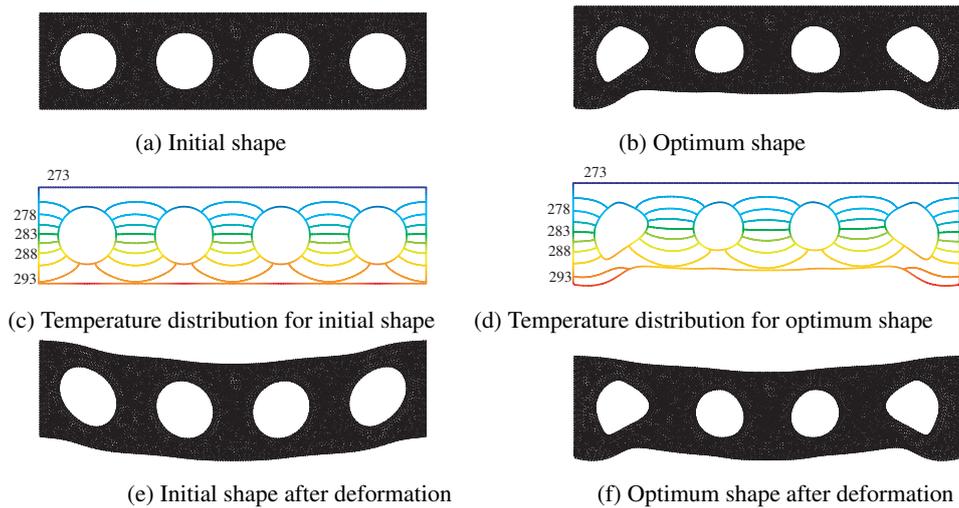


Fig. 8 Numerical results: Shapes with finite element meshes and temperature distribution for compliance minimization problem in 2D thermoelastic beam with four holes

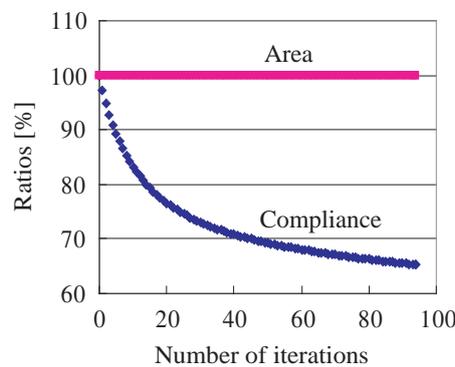


Fig. 9 Numerical results: Iterative history for mean compliance minimization problem in 2D thermoelastic beam with four holes

解析結果を図 8, 9 に示す．図 9 では，領域の大きさを一定に維持しながら，平均コンプライアンスが初期値に対して約 34% 減少して十分に改善している．本解析例では，両端下面の B 部および C 部が領域を拡大させる形状更新を繰り返すが，両端固定の問題設定による形状拘束のために，平均コンプライアンスが完全には停留しなかった．これらの結果から，平均コンプライアンス最小化を目的とした形状決定に対して提示した解法の基本的な妥当

性が確認できた。

## 6. ま と め

熱弾性場において平均コンプライアンス最小化を目的汎関数に設定した形状最適化問題を定式化し，形状修正の感度となる形状勾配を理論的に導出した．導出した形状勾配関数に基づいて法法を利用した数値解析法を提示し，二次元問題の数値解析例を通して本手法の基本的な妥当性を示した．

## 謝 辞

本研究は平成 20 年度財団法人マザック財団研究助成の援助を受けて行われた．記して深く謝意を表する．

## 文 献

- (1) R. A. Meric, "Material and Load Optimization of Thermoelastic Solids -Part I : Sensitivity Analysis", *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 9, (1986), pp. 359-372.
- (2) K. Dems and Z. Mroz, "Variational Approach to Sensitivity Analysis in Thermoelasticity", *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 9, (1987), pp. 283-306.
- (3) D. A. Tortorelli, G. Subramani and S. C. Y. Lu, "Sensitivity Analysis for Coupled Thermoelastic Systems", *International Journal of Solids Structures*, Vol.12, (1991), pp. 1477-1497.
- (4) G. J. W. Hou, J. S. Sheen and C. H. Chuang, "Shape Sensitivity Analysis and Design Optimization of Linear, Thermoelastic Solids", *AIAA Journal*, Vol.30, (1992), pp. 528-537.
- (5) F. Bobaru and S. Mukherjee, "Meshless Approach to Shape Optimization of Linear Thermoelastic Solids", *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol. 53, (2002), pp. 765-796.
- (6) I. Grindeanu, K. K. Choi and K. H. Chang, "Shape Design Optimization of Thermoelastic Structures for Durability", *Journal of Mechanical Design*, Vol.120, (1998), pp. 491-500.
- (7) E. Katamine, H. Azegami and M. Hirai, "Solution of Shape Identification Problem on Thermoelastic Solids", *International Journal of Computational Methods*, Vol.3, No.3, (2006), pp. 279-293.
- (8) 片峯英次，清水健一，畔上秀幸，"体積最小化を目的とした熱弾性場の形状最適化"，日本機械学会 2007 年度年次大会講演論文集，Vol.6,(2007)，pp.311-312.
- (9) 畔上秀幸，"領域最適化問題の一解法"，日本機械学会論文集 A 編，Vol.60, No.574, (1994), pp.1479-1486.
- (10) H. Azegami, S. Kaizu, M. Shimoda and E. Katamine, "Irregularity of Shape Optimization Problems and an Improvement Technique", *Computer Aided Optimum Design of Structures V, OPTI 97*, Editors: Hernandez, S. and Brebbia, C.A., Computational Mechanics Publications, Southampton, (1997), pp. 309-326.
- (11) E. Katamine, Y. Nagatomo and H. Azegami, "Shape Optimization of 3D Viscous Flow Fields", *Inverse Problems in Science Engineering*, Vol. 17, No.1, (2009), pp.105-114.
- (12) Q. Xia and M. Y. Wang, "Topology Optimization of Thermoelastic Structures Using Level Set Method", *Computational Mechanics*, Vol.42, (2008), pp. 837-857.