音場構造連成系における放射音圧を最大化する構造の形状最適化

Shape optimization of structure maximizing sound pressure power in acoustic-structural interaction system

中村 有里 (名大院)　　青山 大樹 (名大院)　　○正　畔上 秀幸 (名大院)

Yuri NAKAMURA, Graduate School of Information Science, Nagoya University, 1 Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya 464-8601
Taiki AOYAMA, Graduate School of Information Science, Nagoya University
Hideyuki AZEGAMI, Graduate School of Information Science, Nagoya University

Key Words: Optimal design, Acoustic-structural interaction, Finite-element method, Shape optimization, Sound radiant energy, Shape gradient, Traction method

1　はじめに

構造の振動によって音場が形成される音場構造連成系において，音を軽減する構造の形状最適化問題の解法については前報 [1] で報告した．本研究では，管弦打楽器を想定して，管弦打楽器に一定の外力を作用させた場合に，放射される音圧が最大となるような管弦打楽器の形状を決定する問題を考えてみたい．楽器は線形弾性体であると仮定し，その周りに流体で満たされた音場領域があると仮定する．放射音圧の評価には，球状音場の外側境界上で特定の周波数領域における音圧パワーの積分値を用いる．

2　楽器の放射音問題

図 1 のような系を考える．有界な Lipshitz 境界 Γ を有する領域 $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ $(d = 2, 3)$ は，Lipshitz 境界 Γ^{s} を有する線形弾性体の領域 Ω^{s} と音場の流体領域 $\Omega^{\mathrm{a}} = \Omega \setminus \Omega^{\mathrm{s}}$ で構成されている．時間領域を $\mathbf{R}$ とする．次の音場構造連成問題を考える．

問題 2.1 (AS(Ω)) 外力 $\boldsymbol{P} = \left(P^i\right)_i : \Gamma^P \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}^d$ $(\Gamma^P \subset \Gamma^{\mathrm{s}}, \Gamma_0 \subset \Gamma^{\mathrm{s}}, \Gamma^P \cap \Gamma_0 = \emptyset)$ を既知として，速度ポテンシャル $\phi : \Omega^{\mathrm{a}} \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ (音圧 p と $p = \rho^{\mathrm{a}} \phi_{,t}$ の関係が成り立つ) と変位 $\boldsymbol{u} = (u_i)_i : \Omega^{\mathrm{s}} \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}^d$ を次式を満たすように求めよ．

$$\frac{\rho^{\mathrm{a}}}{c^2} \phi_{,tt} - \rho^{\mathrm{a}} \Delta \phi = 0 \quad \text{in } \Omega^{\mathrm{a}} \times \mathbf{R} \tag{1}$$

$$\rho^{\mathrm{a}} \boldsymbol{\nabla} \phi \cdot \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{a}} + \rho^{\mathrm{a}} \boldsymbol{u}_{,t} \cdot \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{a}} = 0 \quad \text{on } (\Gamma^{\mathrm{s}} \setminus \Gamma_0) \times \mathbf{R} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \phi \cdot \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{a}} = 0 \quad \text{on } \Gamma_0 \times \mathbf{R} \tag{3}$$

$$\frac{\rho^{\mathrm{a}}}{c} \phi_{,t} + \rho^{\mathrm{a}} \boldsymbol{\nabla} \phi \cdot \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{a}} = 0 \quad \text{on } \Gamma \times \mathbf{R} \tag{4}$$

$$\rho^{\mathrm{s}} \boldsymbol{u}_{,tt} - (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}} = 0 \quad \text{in } \Omega^{\mathrm{s}} \times \mathbf{R} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{s}} + \rho^{\mathrm{a}} \phi_{,t} \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{s}} = 0 \quad \text{on } \left(\Gamma^{\mathrm{s}} \setminus \Gamma^P \cup \Gamma_0\right) \times \mathbf{R} \tag{6}$$

$$u_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_0 \times \mathbf{R} \tag{7}$$

$$\sigma^{ij}(\boldsymbol{u}) \nu^{\mathrm{s}}_j + \rho^{\mathrm{a}} \phi_{,t} \nu^{\mathrm{s}}_i = P^i \quad \text{on } \Gamma^P \times \mathbf{R} \tag{8}$$

ただし，c, ρ^{a}, ρ^{s} はそれぞれ音速，流体の密度，線形弾性体の密度を表す正定数である．$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) = \left(\sigma^{ij}(\boldsymbol{u})\right)_{ij} = \left(C^{ijkl} \varepsilon_{kl}(\boldsymbol{u})\right)_{ij}$, $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = 1/2 \left(\mathbf{D}(\boldsymbol{u}) + \mathbf{D}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u})\right)$, $C^{ijkl} = C^{klij} = C^{jikl}$, $\exists c_0 > 0$: $c_0 \xi_{ij} \xi_{ij} \leq C^{ijkl} \xi_{kl} \xi_{ij}$ $\forall \boldsymbol{\xi} \in \left\{\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^{d \times d} \middle| \ \xi_{ij} = \xi_{ji}\right\}$ とする．□

本稿では，$\boldsymbol{\nabla} \phi = \phi_{,i} = \partial \phi / \partial x_i$, $\mathbf{D}(\boldsymbol{v}) = \left(\partial v_i / \partial x_j\right)_{ij}$ $(\boldsymbol{x} = (x_i)_i \in \Omega)$, 時間 $t \in \mathbf{R}$ に対して $\partial \phi / \partial t = \phi_{,t}$ と総和規約を用いる．$\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{a}} = \left(\nu^{\mathrm{a}}_i\right)_i$ は Ω^{a} の外向き単位法線である．式 (1) と (4) の Fourier 変換はそれぞれ Helmholz 方程式，Sommerfeld の放射条件と呼ばれる．

外力 $\boldsymbol{P}$ の Fourier 変換 $\hat{\boldsymbol{P}}$ を次のように定義する．

$$\hat{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{x}; \mathrm{j}\omega) = \hat{\boldsymbol{P}}^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{x}; -\mathrm{j}\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \, \mathrm{d}t \tag{9}$$

ただし，j は単位虚数，$(\cdot)^{\mathrm{c}}$ は複素共役を表す．外力の周波数領域を (ω_1, ω_2) に限定し，構造減衰係数の正定数 g を仮定した場合，問題 2.1 **AS**(Ω) より次のような周波数応答の弱形式を得る．

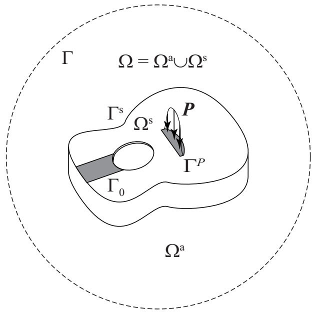

Fig. 1　A model for acoustic musical instruments

問題 2.2 (FR(Ω)) 外力 $\hat{\boldsymbol{P}} \in \mathcal{P}$ を既知として，$\left(\hat{\phi}, \hat{\boldsymbol{u}}\right) \in \hat{\Phi} \times \hat{U}$ を次式を満たすように求めよ．

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} A\left(\hat{\phi}, \hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\varphi}^{\mathrm{c}}, \hat{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{c}}; \mathrm{j}\omega\right) \mathrm{d}\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left\langle \hat{\boldsymbol{P}}, \hat{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{c}} \right\rangle_{\Gamma^P} \mathrm{d}\omega$$
$$\forall (\hat{\varphi}, \hat{\boldsymbol{v}}) \in \hat{\Phi} \times \hat{U} \tag{10}$$

$$\mathcal{P} = \left(L^2\left(\Gamma^P \times (\omega_1, \omega_2)\right)\right)^d \tag{11}$$

ここで，次の定義を用いた．

$$A\left(\hat{\phi}, \hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\varphi}^{\mathrm{c}}, \hat{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{c}}; \lambda\right) = a^{\mathrm{a}}(\hat{\phi}, \hat{\varphi}^{\mathrm{c}}) + \lambda^2 b^{\mathrm{a}}(\hat{\phi}, \hat{\varphi}^{\mathrm{c}}) + \lambda c^{\mathrm{a}}(\hat{\varphi}^{\mathrm{c}}, \hat{\boldsymbol{u}})$$
$$+ \lambda d^{\mathrm{a}}(\hat{\phi}, \hat{\varphi}^{\mathrm{c}}) + a^{\mathrm{s}}(\hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{c}}) + \lambda^2 b^{\mathrm{s}}(\hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{c}}) + \lambda c^{\mathrm{s}}(\hat{\phi}, \hat{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{c}}) \tag{12}$$

$$\hat{\Phi} = H^1(\Omega^{\mathrm{a}} \times (\omega_1, \omega_2)) \tag{13}$$

$$\hat{U} = \left\{ \boldsymbol{v} \in \left(H^1\left(\Omega^{\mathrm{s}} \times (\omega_1, \omega_2)\right)\right)^d \middle| \ \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_0 \right\} \tag{14}$$

$$a^{\mathrm{a}}(\phi, \varphi) = \int_{\Omega^{\mathrm{a}}} (1 + \mathrm{j}g) \rho^{\mathrm{a}} \boldsymbol{\nabla} \phi \cdot \boldsymbol{\nabla} \varphi \, \mathrm{d}\Omega,$$
$$a^{\mathrm{s}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_{\Omega^{\mathrm{s}}} (1 + \mathrm{j}g) \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}\Omega \tag{15}$$

$$b^{\mathrm{a}}(\phi, \varphi) = \int_{\Omega^{\mathrm{a}}} \frac{\rho^{\mathrm{a}}}{c^2} \phi \varphi \, \mathrm{d}\Omega, \quad b^{\mathrm{s}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_{\Omega^{\mathrm{s}}} \rho^{\mathrm{s}} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\Omega \tag{16}$$

$$c^{\mathrm{a}}(\varphi, \boldsymbol{u}) = \int_{\Gamma^{\mathrm{s}} \setminus \Gamma_0} \rho^{\mathrm{a}} \varphi \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{a}} \, \mathrm{d}\Gamma, \quad c^{\mathrm{s}}(\phi, \boldsymbol{v}) = \int_{\Gamma^{\mathrm{s}} \setminus \Gamma_0} \rho^{\mathrm{a}} \phi \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{s}} \, \mathrm{d}\Gamma \tag{17}$$

$$d^{\mathrm{a}}(\phi, \varphi) = \int_{\Gamma} \frac{\rho^{\mathrm{a}}}{c} \phi \varphi \mathrm{d}\Gamma, \quad \langle \boldsymbol{P}, \boldsymbol{v} \rangle_{\Gamma^P} = \int_{\Gamma^P} \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\Gamma \quad \square \tag{18}$$

一方，振動固有値問題は次のようになる．

問題 2.3 (EV(Ω)) r 次の振動固有値 $\lambda^{(r)} = -\sigma^{(r)} \pm \mathrm{j}\omega^{(r)}$ と固有振動モード $\left(\hat{\phi}^{(r)}, \hat{\boldsymbol{u}}^{(r)}\right) \in \Phi_0 \times U_0$ $(r = 1, 2, \cdots)$ を次式を満たすように求めよ．

$$A\left(\hat{\phi}^{(r)}, \hat{\boldsymbol{u}}^{(r)}, \hat{\varphi}^{\mathrm{c}}, \hat{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{c}}; \lambda^{(r)}\right) = 0 \quad \forall (\hat{\varphi}, \hat{\boldsymbol{v}}) \in \Phi_0 \times U_0 \tag{19}$$

$$\Phi_0 = H^1(\Omega^{\mathrm{a}}) \tag{20}$$

$$U_0 = \left\{ \boldsymbol{v} \in \left(H^1(\Omega^{\mathrm{s}})\right)^d \middle| \ \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_0 \right\} \quad \square \tag{21}$$

3　形状最適化問題

放射音圧パワー積分 $J^{(0)}$, 振動固有値制約 $J^{(l)}\left(l=1,2,\cdots,\bar{l}\right)$, 楽器の体積制約 $J^{(\bar{l}+1)}$ を次のように定義する．

$$J^{(0)}\left(\Omega,\hat{\phi}\right)=\int_{\omega_1}^{\omega_2}-\omega^2\rho^{a2}\left\langle\hat{\phi},\hat{\phi}^{c}\right\rangle_{\Gamma}\,\mathrm{d}\omega \tag{22}$$

$$J^{(l)}\left(\Omega,\lambda^{(r_l)}\right)=\lambda^{(r_l)2}-\lambda_0^{(r_l)2}\quad\left(l=1,2,\cdots,\bar{l}\right) \tag{23}$$

$$J^{(\bar{l}+1)}(\Omega)=m_0-\int_{\Omega^{s}}\mathrm{d}\Omega \tag{24}$$

ここで，$\lambda_0^{(r_l)}\left(l=1,2,\cdots,\bar{l}\right)$, m_0 は正定数である．

領域の集合がある固定領域 $D^{s}\subsetneq D\subset\mathbf{R}^{d}$ に対して $\mathcal{W}=\left\{(\Omega,\Omega^{s})\subset\left(\mathbf{R}^{d}\right)^{2}\,\middle|\,\Omega^{s}\subseteq D^{s}\subsetneq\Omega\subseteq D,\ \partial\Omega^{s}\cup\partial\Omega\text{: Lipschiz 境界}\right\}$ で与えられたとき，$\mathcal{W}$ はコンパクトとなる [2]．したがって，ある $\Omega\in\mathcal{W}$ に対して，次のような $\boldsymbol{\rho}\in\mathcal{U}=\left\{\boldsymbol{\rho}\in\left(C^{0,1}(\Omega)\right)^{d}\,\middle|\,\|\boldsymbol{\rho}\|=1\right\}$ を見つける問題を解いて，あるステップサイズ $\epsilon>0$ を用いて領域を $\Omega^{\epsilon}=\{x^{\epsilon}\mid x^{\epsilon}=x+\epsilon\boldsymbol{\rho}\ \forall x\in\Omega,\ \boldsymbol{\rho}\in\mathcal{U}\}$ に変動させることを繰り返していけば，局所解に到達できる．

問題 3.1 (DV(Ω)) ある $\Omega\in\mathcal{W}$ に対して問題 2.2 **FR**(Ω), 問題 2.3 **EV**(Ω) の解をそれぞれ $\left(\hat{\phi},\hat{\boldsymbol{u}}\right)\in\hat{\Phi}\times\hat{U}$,$\left(\hat{\phi}^{(r_l)},\hat{\boldsymbol{u}}^{(r_l)}\right)\in\Phi_0\times U_0$ $\left(l=1,2,\cdots,\bar{l}\right)$ とする．このとき，次のような $\boldsymbol{\rho}\in\mathcal{U}$ を求めよ．

$$\min_{\boldsymbol{\rho}\in\mathcal{U}}\left\{J^{(0)}\ \middle|\ J^{(l)}=0\ \left(l=1,2,\cdots,\bar{l}\right),\ J^{(\bar{l}+1)}\leq 0\right\}\quad\square \tag{25}$$

4　Gâteaux 微分

ある領域変動 $\boldsymbol{\rho}\in\mathcal{U}$ に対する問題 2.2 **FR**(Ω^{ϵ}), 問題 2.3 **EV**(Ω^{ϵ}) の解 $\left(\hat{\phi}^{\epsilon},\hat{\boldsymbol{u}}^{\epsilon}\right)$,$\left(\hat{\phi}^{(r_l)\epsilon},\hat{\boldsymbol{u}}^{(r_l)\epsilon}\right)\left(l=1,2,\cdots,\bar{l}\right)$ を用いて，形状微分 $\left(\hat{\phi}',\hat{\boldsymbol{u}}'\right)$,$\left(\hat{\phi}^{(r_l)\prime},\hat{\boldsymbol{u}}^{(r_l)\prime}\right)$ を，例えば $\hat{\phi}'=\lim_{\epsilon\to+0}\left(\hat{\phi}^{\epsilon}-\hat{\phi}\right)/\epsilon$ のように，定義する．$\left(\hat{\phi}',\hat{\boldsymbol{u}}'\right)$ について次の結果を得る．

補題 4.1 ($\left(\hat{\phi},\hat{\boldsymbol{u}}\right)$ の形状微分) ある $\boldsymbol{\rho}\in\mathcal{U}$ に対する問題 2.2 **FR**(Ω) の解 $\left(\hat{\phi},\hat{\boldsymbol{u}}\right)\in\hat{\Phi}\times\hat{U}$ の形状微分は $\left(\hat{\phi}',\hat{\boldsymbol{u}}'\right)\in\hat{\Phi}\times\hat{U}\left(\hat{\boldsymbol{u}}_{\rho}\right)$ に属し，次の弱形式を一意に満たす．

$$\begin{aligned}&\int_{\omega_1}^{\omega_2}2\mathrm{Re}\left[A\left(\hat{\phi}',\hat{\boldsymbol{u}}',\hat{\varphi}^{c},\hat{\boldsymbol{v}}^{c};\mathrm{j}\omega\right)\right]\mathrm{d}\omega-\left\langle G_A^{(0)\mathrm{a}}\left(\hat{\phi},\hat{\varphi};\mathrm{j}\omega\right)\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{a}},\boldsymbol{\rho}\right\rangle_{\Gamma}\\&-\left\langle G_A^{(0)\mathrm{s}}\left(\hat{\phi},\hat{\boldsymbol{u}},\hat{\varphi},\hat{\boldsymbol{v}};\mathrm{j}\omega\right)\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{s}},\boldsymbol{\rho}\right\rangle_{\Gamma^{\mathrm{s}}\setminus\Gamma_0}-\left\langle G_A^{(0)P}(\hat{\boldsymbol{v}})\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{s}},\boldsymbol{\rho}\right\rangle_{\Gamma^{P}}=0\\&\quad\forall(\hat{\varphi},\hat{\boldsymbol{v}})\in\hat{\Phi}\times\hat{U}\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}G_A^{[0]\mathrm{a}}\left(\hat{\phi},\hat{\varphi};\mathrm{j}\omega\right)=&-\int_{\omega_1}^{\omega_2}2\mathrm{Re}\Bigl[(1+\mathrm{j}g)\rho^{\mathrm{a}}\boldsymbol{\nabla}\hat{\phi}\cdot\boldsymbol{\nabla}\hat{\varphi}^{c}-\omega^2\frac{\rho^{\mathrm{a}}}{c^2}\hat{\phi}\hat{\varphi}^{c}\\&-\mathrm{j}\omega\frac{\rho^{\mathrm{a}}}{c}\left\{\boldsymbol{\nabla}\left(\hat{\phi}\hat{\varphi}^{c}\right)\cdot\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{a}}+\hat{\phi}\hat{\varphi}^{c}\kappa^{\mathrm{a}}\right\}\Bigr]\mathrm{d}\omega\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}G_A^{[0]\mathrm{s}}\left(\hat{\phi},\hat{\boldsymbol{u}},\hat{\varphi},\hat{\boldsymbol{v}};\mathrm{j}\omega\right)=&-\int_{\omega_1}^{\omega_2}2\mathrm{Re}\Bigl[\omega^2\frac{\rho^{\mathrm{a}}}{c^2}\hat{\phi}\hat{\varphi}^{c}-\mathrm{j}\omega\rho^{\mathrm{a}}\Bigl\{\boldsymbol{\nabla}\left(\hat{\varphi}^{c}\hat{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{s}}\right)\cdot\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{s}}\\&+\hat{\varphi}^{c}\hat{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{s}}\kappa^{\mathrm{s}}\Bigr\}+(1+\mathrm{j}g)\,\boldsymbol{\sigma}(\hat{\boldsymbol{u}})\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\boldsymbol{v}}^{c})-\omega^2\rho^{\mathrm{s}}\hat{\boldsymbol{u}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}^{c}\\&+\mathrm{j}\omega\rho^{\mathrm{a}}\left\{\boldsymbol{\nabla}\left(\hat{\phi}\hat{\boldsymbol{v}}^{c}\cdot\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{s}}\right)\cdot\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{s}}+\hat{\phi}\hat{\boldsymbol{v}}^{c}\cdot\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{s}}\kappa^{\mathrm{s}}\right\}\Bigr]\mathrm{d}\omega\end{aligned} \tag{28}$$

$$G_A^{[0]P}(\hat{\boldsymbol{v}})=\int_{\omega_1}^{\omega_2}2\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{\nabla}\left(\hat{\boldsymbol{P}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}^{c}\right)\cdot\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{s}}+\hat{\boldsymbol{P}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}^{c}\kappa^{\mathrm{s}}\right]\mathrm{d}\omega \tag{29}$$

$$\hat{U}\left(\hat{\boldsymbol{u}}_{\rho}\right)=\left\{\hat{\boldsymbol{v}}\in\left(H^1\left(\Omega^{\mathrm{s}}\times(\omega_1,\omega_2)\right)\right)^{d}\,\middle|\,\hat{\boldsymbol{v}}|_{\Gamma_0}=\hat{\boldsymbol{u}}_{\rho}=-\left(\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{s}}\cdot\boldsymbol{\rho}\right)\mathbf{D}(\hat{\boldsymbol{u}})\,\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{s}}\right\} \tag{30}$$

$J^{(0)}$ に対する随伴問題を次のように定義する．

問題 4.1 (AdFR$^{(0)}$(Ω)) 問題 2.2 **FR**(Ω) の解 $\hat{\phi}\in\hat{\Phi}$ を既知として，次の弱形式を満たす $\left(\hat{\varphi}^{(0)},\hat{\boldsymbol{v}}^{(0)}\right)\in\hat{\Phi}\times\hat{U}$ を求めよ．

$$\begin{aligned}&\int_{\omega_1}^{\omega_2}A\left(\hat{\psi},\hat{\boldsymbol{w}},\hat{\varphi}^{(0)c},\hat{\boldsymbol{v}}^{(0)c};\mathrm{j}\omega\right)\mathrm{d}\omega=-\omega^2\rho^{\mathrm{a}2}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\left\langle\hat{\psi},\hat{\phi}^{c}\right\rangle_{\Gamma}\mathrm{d}\omega\\&\quad\forall\left(\hat{\psi},\hat{\boldsymbol{w}}\right)\in\hat{\Phi}\times\hat{U}\quad\square\end{aligned} \tag{31}$$

補題 4.1 と問題 4.1 **AdFR**$^{(0)}$(Ω) の解より，次の結果を得る．

定理 4.1 ($J^{(0)}$ の Gâteaux 微分) ある Ω のときの問題 2.2 **FR**(Ω) の解を $\left(\hat{\phi},\hat{\boldsymbol{u}}\right)\in\hat{\Phi}\times\hat{U}$，随伴問題 4.1 **AdFR**$^{(0)}$(Ω) の解を $\left(\hat{\varphi}^{(0)},\hat{\boldsymbol{v}}^{(0)}\right)\in\hat{\Phi}\times\hat{U}$ とする．このとき，ある $\boldsymbol{\rho}\in\mathcal{U}$ に対する $J^{(0)}(\Omega,\boldsymbol{u}^{\mathrm{e}})$ の Gâteaux 微分 $\dot{J}^{(0)}\left(\Omega,\hat{\phi}\right)$ について，次式が成り立つ．

$$\begin{aligned}\dot{J}^{(0)}\left(\Omega,\hat{\phi}\right)&=\lim_{\epsilon\to+0}\frac{\left(J^{(0)}\left(\Omega^{\epsilon},\hat{\phi}^{\epsilon}\right)-J^{(0)}\left(\Omega,\hat{\phi}\right)\right)}{\epsilon}=\left\langle G^{(0)}\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\rho}\right\rangle_{\Gamma\cup\Gamma^{\mathrm{s}}}\\&=\left\langle G_A^{(0)\mathrm{a}}\left(\hat{\phi},\hat{\varphi}^{[0]};\mathrm{j}\omega\right)\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{a}},\boldsymbol{\rho}\right\rangle_{\Gamma}+\left\langle G_A^{(0)\mathrm{s}}\left(\hat{\phi},\hat{\boldsymbol{u}},\hat{\varphi}^{[0]},\hat{\boldsymbol{v}}^{[0]};\mathrm{j}\omega\right)\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{s}},\boldsymbol{\rho}\right\rangle_{\Gamma^{\mathrm{s}}\setminus\Gamma_0}\\&\quad+\left\langle G_A^{(0)P}\left(\hat{\boldsymbol{v}}^{[0]}\right)\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{s}},\boldsymbol{\rho}\right\rangle_{\Gamma^{P}}+\left\langle G_0^{(0)}\left(\hat{\boldsymbol{u}},\hat{\boldsymbol{v}}^{[0]}\right)\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{s}},\boldsymbol{\rho}\right\rangle_{\Gamma_0}+\left\langle G_J^{[0]}\left(\hat{\phi}\right)\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{a}},\boldsymbol{\rho}\right\rangle_{\Gamma}\end{aligned} \tag{32}$$

$$G_0^{(0)}(\hat{\boldsymbol{u}},\hat{\boldsymbol{v}})=\int_{\omega_1}^{\omega_2}2\mathrm{Re}\Bigl[(1+\mathrm{j}g)\,\boldsymbol{\sigma}(\hat{\boldsymbol{u}})\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\boldsymbol{v}}^{c})\Bigr]\mathrm{d}\omega \tag{33}$$

$$G_J^{[0]}\left(\hat{\phi}\right)=\int_{\omega_1}^{\omega_2}-\omega^2\rho^{\mathrm{a}2}\left\{\boldsymbol{\nabla}\left(\hat{\phi}\hat{\phi}^{c}\right)\cdot\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{a}}+\hat{\phi}\hat{\phi}^{c}\kappa^{\mathrm{a}}\right\}\mathrm{d}\omega\quad\square \tag{34}$$

同様に，問題 2.3 **EV**(Ω^{ϵ}) の解 $\left(\hat{\phi}^{(r_l)\epsilon},\hat{\boldsymbol{u}}^{(r_l)\epsilon}\right)\left(l=1,2,\cdots,\bar{l}\right)$ の形状微分に関する関係と随伴問題を考えることができる．この場合には自己随伴関係が成り立ち，次の結果を得る．

定理 4.2 ($J^{(l)}\left(l=1,2,\cdots,\bar{l}\right)$ の Gâteaux 微分) ある Ω のときの問題 2.3 **EV**(Ω^{ϵ}) の解を $\left(\hat{\phi}^{(r_l)\epsilon},\hat{\boldsymbol{u}}^{(r_l)\epsilon}\right)$ とする．このとき，ある $\boldsymbol{\rho}\in\mathcal{U}$ に対する $J^{(l)}\left(\Omega,\hat{\phi}\right)$ の Gâteaux 微分 $\dot{J}^{(l)}\left(\Omega,\hat{\phi}\right)$ について，次式が成り立つ．

$$\begin{aligned}\dot{J}^{(l)}\left(\Omega,\hat{\phi}\right)&=\left\langle G^{(l)}\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\rho}\right\rangle_{\Gamma\cup\Gamma^{\mathrm{s}}}=\left\langle G_A^{[l]\mathrm{a}}\left(\hat{\phi}^{(r_l)},\hat{\varphi};\lambda^{(r_l)}\right)\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{a}},\boldsymbol{\rho}\right\rangle_{\Gamma}\\&\quad+\left\langle G_A^{[l]\mathrm{s}}\left(\hat{\phi}^{(r_l)},\hat{\boldsymbol{u}}^{(r_l)},\hat{\varphi},\hat{\boldsymbol{v}};\lambda^{(r_l)}\right)\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{s}},\boldsymbol{\rho}\right\rangle_{\Gamma^{\mathrm{s}}}+\left\langle G_0^{[l]}\left(\hat{\boldsymbol{u}}^{(r_l)},\hat{\boldsymbol{v}}^{(r_l)}\right)\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{s}},\boldsymbol{\rho}\right\rangle_{\Gamma_0}\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}G_A^{[l]\mathrm{a}}\left(\hat{\phi}^{(r_l)},\hat{\varphi};\lambda^{(r_l)}\right)=&\,2\mathrm{Re}\Bigl[(1+\mathrm{j}g)\rho^{\mathrm{a}}\boldsymbol{\nabla}\hat{\phi}^{(r_l)}\cdot\boldsymbol{\nabla}\hat{\varphi}^{c}+\lambda^{(r_l)2}\frac{\rho^{\mathrm{a}}}{c^2}\hat{\phi}^{(r_l)}\hat{\varphi}^{c}\\&+\lambda^{(r_l)}\frac{\rho^{\mathrm{a}}}{c}\hat{\phi}^{(r_l)}\hat{\varphi}^{c}\kappa^{\mathrm{a}}\Bigr]\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}G_A^{[l]\mathrm{s}}\left(\hat{\phi}^{(r_l)},\hat{\boldsymbol{u}}^{(r_l)},\hat{\varphi},\hat{\boldsymbol{v}};\lambda^{(r_l)}\right)=&\,2\mathrm{Re}\Bigl[-(1+\mathrm{j}g)\rho^{\mathrm{a}}\boldsymbol{\nabla}\hat{\phi}^{(r_l)}\cdot\boldsymbol{\nabla}\hat{\varphi}^{c}\\&-\lambda^{(r_l)2}\frac{\rho^{\mathrm{a}}}{c^2}\hat{\phi}^{(r_l)}\hat{\varphi}^{c}-\lambda^{(r_l)}\rho^{\mathrm{a}}\left\{\boldsymbol{\nabla}\left(\hat{\varphi}^{c}\hat{\boldsymbol{u}}^{(r_l)}\cdot\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{s}}\right)\cdot\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{s}}+\hat{\varphi}^{c}\hat{\boldsymbol{u}}^{(r_l)}\cdot\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{s}}\kappa^{\mathrm{s}}\right\}\\&+(1+\mathrm{j}g)\,\boldsymbol{\sigma}\left(\hat{\boldsymbol{u}}^{(r_l)}\right)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\boldsymbol{v}}^{c})+\lambda^{(r_l)2}\rho^{\mathrm{s}}\hat{\boldsymbol{u}}^{(r_l)}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}^{c}\\&+\lambda^{(r_l)}\rho^{\mathrm{a}}\left\{\boldsymbol{\nabla}\left(\hat{\phi}^{(r_l)}\hat{\boldsymbol{v}}^{c}\cdot\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{s}}\right)\cdot\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{s}}+\hat{\phi}^{(r_l)}\hat{\boldsymbol{v}}^{c}\cdot\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{s}}\kappa^{\mathrm{s}}\right\}\Bigr]\end{aligned} \tag{37}$$

$$G_0^{[l]}\left(\hat{\boldsymbol{u}}^{(r_l)},\hat{\boldsymbol{v}}^{(r_l)}\right)=\int_{\omega_1}^{\omega_2}2\mathrm{Re}\Bigl[(1+\mathrm{j}g)\,\boldsymbol{\sigma}\left(\hat{\boldsymbol{u}}^{(r_l)}\right)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\left(\hat{\boldsymbol{v}}^{(r_l)c}\right)\Bigr]\mathrm{d}\omega\quad\square \tag{38}$$

$J^{(\bar{l}+1)}$ の Gâteaux 微分は，$\dot{J}^{(\bar{l}+1)}=\left\langle G^{(\bar{l}+1)}\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\rho}\right\rangle_{\Gamma\cup\Gamma^{\mathrm{s}}}$, $G^{(\bar{l}+1)}=1$ である．

5　H^1 勾配法

問題 3.1 **DV**(Ω) の解 $\boldsymbol{\rho}\in\mathcal{U}$ は，形状最適化問題に対する H^1 勾配法 [3] (力法) によって求めることができる．

文献

(1) Y. Hasegawa, Y. Kagiyama, and H. Azegami. Shape optimization on acoustic-structure interaction problems. In *Proceedings of the Fourth China-Japan-Korea Joint Symposium on Optimization of Structural and Mechanical Systems (CD-ROM)*, pp. 1–6, 2006.

(2) 海津聡, 畔上秀幸. 形状最適化問題と力法について. 日本応用数理学会論文誌, Vol. 16, No. 3, pp. 277–290, 9 2006.

(3) H. Azegami and S. Kaizu. Smoothing gradient method for non-parametric shape and topology optimization problems. In *Proceedings of the 7th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-7)(CD-ROM)*, pp. 1–10, 2007.