大変形を考慮した接触する弾性体の形状同定

Shape identification of contacting elastic continua considering large deformation

○　岩井 孝広 (名大院)　　　正　畔上 秀幸 (名大院)

Takahiro IWAI, Graduate School of Information Science, Nagoya University, 1 Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya 464-8601
Hideyuki AZEGAMI, Graduate School of Information Science, Nagoya University

Key Words: Inverse problem, Optimal design, Contact problem, Finite deformation theory, Finite-element method, Shape optimization, Shape gradient, Traction method

1　はじめに

接触する弾性体の接触圧力を望みの圧力分布になるように弾性体の形を決定する問題は，靴やタイヤの設計などへの応用が期待される．これまで，著者らは，異なる材料を接合した弾性体に対して，外力を固定した下で，指定した部分境界において指定したある変形を生ずるような界面の形状同定問題が解けることを示した [1]．さらに，接触する弾性体の接触圧力をある分布に近づける界面の形状同定問題についても検討した [2]．本研究では，弾性体の境界全体を設計対象にしたときの定式化と形状勾配の計算方法を明らかにする．

2　接触を含む弾性体の大変形問題

Fig. 1 のような 3 つの弾性体を考えよう．弾性体にラベル A, B, C を付けて，ラベル $m \in \mathcal{L} = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\}$ の弾性体は，変形前において，有界な Lipschitz 境界 $\Gamma^{(m)}$ を有する開領域 $\Omega^{(m)} \subset \mathbf{R}^d$ $(d = 2, 3)$ にあり，$\Omega^{(\mathrm{A})} \cap \Omega^{(\mathrm{B})} = \Omega^{(\mathrm{B})} \cap \Omega^{(\mathrm{C})} = \Omega^{(\mathrm{A})} \cap \Omega^{(\mathrm{C})} = \emptyset$ とする．図中の点線で示した部分境界 $\Gamma^{(\mathrm{A})} \cap \Gamma^{(\mathrm{B})}$ と $\Gamma^{(\mathrm{B})} \cap \Gamma^{(\mathrm{C})}$ $\left(\mathrm{meas}\left(\Gamma^{(\mathrm{A})} \cap \Gamma^{(\mathrm{B})}\right) \neq 0,\ \mathrm{meas}\left(\Gamma^{(\mathrm{B})} \cap \Gamma^{(\mathrm{C})}\right) \neq 0\right)$ では接合境界とする．接合境界の境界 $\partial\left(\Gamma^{(\mathrm{B})} \cap \Gamma^{(\mathrm{C})}\right)$ では特異性が生じないよう，$\Omega^{(\mathrm{B})} \cup \Omega^{(\mathrm{C})}$ の境界は滑らかであり，その法線と接合境界の法線とは直交していると仮定する．また，$\Omega = \bigcup_{m \in \mathcal{L}} \Omega^{(m)}, \Gamma = \bigcup_{m \in \mathcal{L}} \Gamma^{(m)}$ とする．

時間 $(0, T)$ にわたり，$\Gamma_0 \subset \Gamma^{(\mathrm{C})}$ $(\mathrm{meas}\,(\Gamma_0) \neq 0)$ において変形が拘束された下で，$\Gamma_p \subset \Gamma^{(\mathrm{A})}$ に外力 $\boldsymbol{p} = \left(p^i\right)_i : \Gamma_p \times (0, T) \mapsto \mathbf{R}^d$ が作用したとき，変形前の点 $\boldsymbol{X} = (X_i)_i \in \Omega$ は $\boldsymbol{x} = (x_i)_i : \Omega \times (0, T) \mapsto \mathbf{R}^d$ に移動し，変位 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}$ を生ずるとする．本研究では，Lagrange 表記を用いる．すなわち，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}$ は変形前の領域で定義されていると考える．変形後の領域は，$t \in (0, T)$ に対して $\Omega^t = \{\boldsymbol{X} + \boldsymbol{u} \mid \forall \boldsymbol{X} \in \Omega\}, \Gamma^t = \partial\Omega^t$ のように表すことにする．

本稿では，$\Gamma_c = \Gamma^{(\mathrm{A})} \setminus \left(\Gamma^{(\mathrm{B})} \cup \Gamma_p\right)$ を接触境界とする．接触条件は，貫通距離 $g(\boldsymbol{u})$ を用いて，次のように与えられる．

$$g(\boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{d}_{\Omega^{(\mathrm{B})t}}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\Omega^{(\mathrm{A})t}}(\boldsymbol{x}) \leq 0 \quad \text{on } \Gamma_c \tag{1}$$

$\boldsymbol{d}_\Omega(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \mapsto \mathbf{R}^d$ は $\boldsymbol{x}$ から Ω への最短ベクトルを求める作用素とする (図 1 参照)．$\boldsymbol{\nu}_\Omega = (\nu_{\Omega i})_i$ は Ω の外向き単位法線を表す．本研究では，$\boldsymbol{x} \in \Gamma_c^t$ において $\boldsymbol{d}_{\Omega^{(\mathrm{B})t}}(\boldsymbol{x})$ は一意に決定できるような Ω と $\boldsymbol{p}$ を選ぶものとする．

弾性体は Saint-Venant 材料であると仮定する．すなわち，第 2 Piola-Kirchhoff 応力 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) = \left(S^{ij}(\boldsymbol{u})\right)_{ij}$ と Green-Lagrange ひずみ $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) = \left(E_{ij}(\boldsymbol{u})\right)_{ij}$ について次の関係が成り立つ．

$$S^{ij}(\boldsymbol{u}) = C^{ijkl} E_{kl}(\boldsymbol{u}) \tag{2}$$

$$E_{ij}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\left(F_{ki}(\boldsymbol{u}) F_{kj}(\boldsymbol{u}) - \delta_{ij}\right) = E^{\mathrm{L}}_{ij}(\boldsymbol{u}) + \frac{1}{2} E^{\mathrm{BL}}_{ij}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \tag{3}$$

$$F_{ij}(\boldsymbol{u}) = x_{i,j}$$

$$E^{\mathrm{L}}_{ij}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \quad E^{\mathrm{BL}}_{ij}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\left(v_{k,i} u_{k,j} + u_{k,i} v_{k,j}\right)$$

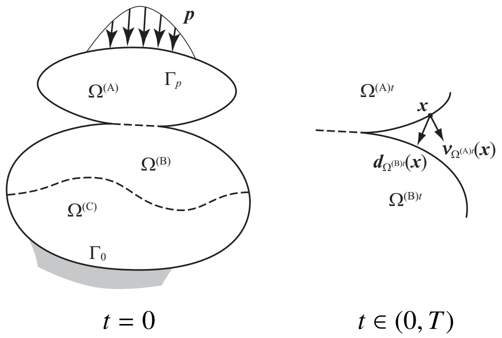

Fig. 1 Contacting elastic bodies

$\left(C^{ijkl}\right)_{ijkl} : \Omega \mapsto \mathbf{R}^{d^4}$ は $C^{ijkl} = C^{klij} = C^{jikl}$, $\exists c_0 > 0$: $c_0 \xi_{ij} \xi_{ij} \leq C^{ijkl} \xi_{kl} \xi_{ij}\ \forall \boldsymbol{\xi} \in \left\{\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^{d \times d} \middle| \ \xi_{ij} = \xi_{ji}\right\}$ を満たし，$\Omega^{(m)}$ $(m \in \mathcal{L})$ ごとに境界近傍に拡張された空間に固定された (領域変動に対して独立な) 定数あるいは定関数であると仮定する．本稿では，$(\,\cdot\,)_{,i} = \partial(\,\cdot\,)/\partial X_i$ と総和規約を用いる．

Saint-Venant 材料はひずみポテンシャルが定義できることから，ポテンシャルエネルギー最小原理が成り立つ．接触制約式 (1) に対して，圧縮を正とした接触圧力の意味をもつ Lagrange 乗数 $\lambda : \Gamma_c \times (0, T) \mapsto \mathbf{R}$ を定義して，鞍点定理を用いれば，外力 $\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}$ に対する接触制約付ポテンシャルエネルギー最小原理は次のように書ける．

$$\min_{\boldsymbol{u} \in U} \max_{\lambda \in \Lambda} \left\{ \int_0^T \left((\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{E}_{,t}(\boldsymbol{u}))_\Omega + \langle g(\boldsymbol{u}), \lambda_{,t} \rangle_{\Gamma_c} \right) \mathrm{d}t - \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}|_T \rangle_{\Gamma_p} \right\} \tag{4}$$

$$\mathcal{P} = \left(L^2\left(\Gamma_p\right)\right)^d \tag{5}$$

$$U = \left\{ \boldsymbol{u} \in \left(H^1(\Omega \times (0, T))\right)^d \middle| \ \boldsymbol{u}|_{t=0} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{u}|_{X \in \Gamma_0} = \boldsymbol{0},\ \text{Eq. (1)} \right\} \tag{6}$$

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \left(H^1(\Gamma_c \times (0, T))\right)^d \middle| \ \lambda|_{t=0} = 0,\ \lambda \geq 0 \right\} \tag{7}$$

ただし，次の表記を用いた．

$$(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}))_\Omega = \int_\Omega \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v})\, \mathrm{d}X = \int_\Omega S_{ij}(\boldsymbol{u}) E_{ij}(\boldsymbol{v})\, \mathrm{d}X \tag{8}$$

$$\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u} \rangle_{\Gamma_p} = \int_{\Gamma_p} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{u}\, \mathrm{d}\Gamma \tag{9}$$

また，$\partial(\,\cdot\,)/\partial t = (\,\cdot\,)_{,t}$, $(\,\cdot\,)|_{t=T} = (\,\cdot\,)|_T$ と表す．

この問題の Karush-Kuhn-Tucker 条件を用いて，接触を含む弾性体の大変形問題は次のように表せる．

問題 2.1 (NE(Ω))　外力 $\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}$ を既知として，次式を満たす $(\boldsymbol{u}, \lambda) \in U|_T \times \Lambda|_T$ を求めよ．

$$A(\boldsymbol{u}, \lambda, \boldsymbol{v}, \mu) = \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{v} \rangle_{\Gamma_p} \quad \forall (\boldsymbol{v}, \mu) \in U|_T \times \in \Lambda|_T \tag{10}$$

$$A_{,t}(\boldsymbol{u}, \lambda, \boldsymbol{v}, \mu) = 0 \quad \forall (\boldsymbol{v}, \mu) \in U|_T \times \in \Lambda|_T \tag{11}$$

ただし，$g_{\boldsymbol{u}} = (\partial g/\partial u_i)_i$ として，次の定義を用いた．

$$A(\boldsymbol{u},\lambda,\boldsymbol{v},\mu) = (\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}),\delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}))_\Omega + \langle g_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v},\lambda\rangle_{\Gamma_c} + \langle g(\boldsymbol{u}),\mu\rangle_{\Gamma_c} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} A_{,t}(\boldsymbol{u},\lambda,\boldsymbol{v},\mu) &= (\boldsymbol{S}_{,t}(\boldsymbol{u}),\delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}))_\Omega + (\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}),\delta\boldsymbol{E}_{,t}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}))_\Omega \\ &\quad + \langle g_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v},\lambda_{,t}\rangle_{\Gamma_c} + \langle g(\boldsymbol{u}),\mu_{,t}\rangle_{\Gamma_c} \end{aligned} \tag{13}$$

$$\delta F_{ij}(\boldsymbol{v}) = v_{i,j} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \delta E_{ij}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) &= \frac{1}{2}\left(\delta F_{ki}(\boldsymbol{v})F_{kj}(\boldsymbol{u}) + F_{ki}(\boldsymbol{u})\delta F_{kj}(\boldsymbol{v})\right) \\ &= E^{\mathrm{L}}_{ij}(\boldsymbol{v}) + E^{\mathrm{BL}}_{ij}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \delta E_{ij,t}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) &= E^{\mathrm{L}}_{ij}(\boldsymbol{v}_{,t}) + E^{\mathrm{BL}}_{ij}(\boldsymbol{u}_{,t},\boldsymbol{v}) + E^{\mathrm{BL}}_{ij}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_{,t}) \\ &= E^{\mathrm{BL}}_{ij}(\boldsymbol{u}_{,t},\boldsymbol{v}) \end{aligned} \tag{16}$$

$$S_{ij,t}(\boldsymbol{u}) = C_{ijkl}E_{kl,t}(\boldsymbol{u}) \tag{17}$$

$$E_{ij,t}(\boldsymbol{u}) = E^{\mathrm{L}}_{ij}(\boldsymbol{u}_{,t}) + E^{\mathrm{BL}}_{ij}(\boldsymbol{u}_{,t},\boldsymbol{u}) \quad \square \tag{18}$$

3　接触圧力に対する形状同定問題

Γ_c 上の接触圧力 λ を，大きさ $\alpha\in\mathbf{R}$ の任意性を許して，既定の分布 λ_0 に近づけることを考えよう．目的汎関数 $J^{(0)}$ を次式で定義する．

$$J^{(0)}(\Omega,\lambda,\alpha) = \langle\lambda-\alpha\lambda_0,\lambda-\alpha\lambda_0\rangle_{\Gamma_c} \tag{19}$$

2 節で定義した領域 Ω の集合 $\mathcal{W}$ が，ある固定した有界領域に含まれ， Lipschiz 境界を有する領域の集合であると仮定すれば，$\mathcal{W}$ はコンパクトとなる [3]．したがって，ある領域 Ω に対して，次のような最適形状変動問題の解 $\boldsymbol{\rho}\in\mathcal{U}$ を求めて，ある $\epsilon>0$ を用いて領域を $\Omega^\epsilon = \{x^\epsilon \mid x^\epsilon = x+\epsilon\boldsymbol{\rho}\ \forall x\in\Omega,\ \boldsymbol{\rho}\in\mathcal{U}\}$ に変動させることを繰り返していけば，局所解に到達できる．本研究では，領域変動の集合を次のように定義する．

$$\mathcal{U} = \left\{\boldsymbol{\rho}\in\left(C^{0,1}(\Omega)\right)^d \,\middle|\, \boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\nu}_{\Omega^{(\mathrm{B})}\cup\Omega^{(\mathrm{C})}} = 0 \text{ at } \partial\left(\Gamma^{(\mathrm{B})}\cap\Gamma^{(\mathrm{C})}\right)\right\} \tag{20}$$

問題 3.1 (DV(Ω)) 外力 $\boldsymbol{p}\in\mathcal{P}$ を既知として，ある $\Omega\in\mathcal{W}$ のときの問題 2.1 **NE**(Ω) の解を $(\boldsymbol{u},\lambda)\in U|_T\times\Lambda|_T$ とする．このとき，式 (20) の $\mathcal{U}$ を用いて，次のような $\boldsymbol{\rho}\in\mathcal{U}$ を求めよ．

$$\min_{\boldsymbol{\rho}\in\mathcal{U},\ \alpha\in\mathbf{R}} J^{(0)}(\Omega,\lambda,\alpha) \quad \square \tag{21}$$

4　Gâteaux 微分

ある $\boldsymbol{\rho}\in\mathcal{U}$ に対する $J^{(0)}$ の Gâteaux 微分を求めてみよう．

$\alpha\in\mathbf{R}$ は，領域変動とは独立に，次式の最適性条件が成り立つ．

$$\alpha = \langle\lambda,\lambda_0\rangle_{\Gamma_c}\Big/\langle\lambda_0,\lambda_0\rangle_{\Gamma_c} \tag{22}$$

また，領域変動後の問題 2.1 **NE**(Ω^ϵ) の解を $(\boldsymbol{u}^\epsilon,\lambda^\epsilon)$ とする． $(\boldsymbol{u},\lambda)$ の形状微分 $(\boldsymbol{u}',\lambda')$ を $\boldsymbol{u}' = \lim_{\epsilon\to+0}(\boldsymbol{u}^\epsilon-\boldsymbol{u})/\epsilon$, $\lambda' = \lim_{\epsilon\to+0}(\lambda^\epsilon-\lambda)/\epsilon$ のように定義する．$(\boldsymbol{u}',\lambda')$ について次の結果を得る．

補題 4.1 ((u, λ) の形状微分) ある $\boldsymbol{\rho}\in\mathcal{U}$ に対する問題 2.1 **NE**(Ω) の解を $(\boldsymbol{u},\lambda)\in U|_T\times\Lambda|_T$ とする．このとき，形状微分 $(\boldsymbol{u}',\lambda')$ は $U\left(\boldsymbol{u}_\rho\right)\Big|_T\times\Lambda|_T$ に属し，次の弱形式を一意に満たす．

$$A'(\boldsymbol{u},\lambda,\boldsymbol{v},\mu) - \left\langle G^{(0)}_A(\boldsymbol{u},\lambda,\boldsymbol{v},\mu)\boldsymbol{\nu}_\Omega,\boldsymbol{\rho}\right\rangle_{\Gamma\setminus\Gamma_0} = 0 \quad \forall(\boldsymbol{v},\mu)\in U|_T\times\Lambda|_T \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \left\langle G^{(0)}_A(\boldsymbol{u},\lambda,\boldsymbol{v},\mu)\boldsymbol{\nu}_\Omega,\boldsymbol{\rho}\right\rangle_{\Gamma\setminus\Gamma_0} &= \sum_{m\in\mathcal{L}}\left\langle G^{(0)(m)}_a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\boldsymbol{\nu}_{\Omega^{(m)}},\boldsymbol{\rho}\right\rangle_{\Gamma^{(m)}\setminus\Gamma_0} \\ &\quad + \left\langle G^{(0)}_p(\boldsymbol{v})\boldsymbol{\nu}_{\Omega^{(\mathrm{A})}},\boldsymbol{\rho}\right\rangle_{\Gamma_p} + \left\langle G^{(0)}_\lambda(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\lambda,\mu)\boldsymbol{\nu}_{\Omega^{(\mathrm{A})}},\boldsymbol{\rho}\right\rangle_{\Gamma_c} \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} G^{(0)(m)}_a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) &= -\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\cdot\delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{\nu}_{\Omega^{(m)}})\cdot\left(\left(\boldsymbol{\nabla}_x\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{\nu}_{\Omega^{(m)}}\right) \\ &= -\sum_{\alpha=1}^{d-1}\left(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{\tau}^\alpha_{\Omega^{(m)}}\right)\cdot\left(\left(\boldsymbol{\nabla}_x\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{\tau}^\alpha_{\Omega^{(m)}}\right) \end{aligned} \tag{25}$$

$$G^{(0)}_p(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{\nu}_{\Omega^{(\mathrm{A})}} + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}\kappa_{\Omega^{(\mathrm{A})}} \tag{26}$$

$$G^{(0)}_\lambda(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\lambda,\mu) = -(g_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v})\lambda - g(\boldsymbol{u})\mu \tag{27}$$

$$\begin{aligned} U\left(\boldsymbol{u}_\rho\right) = \Big\{ & \boldsymbol{v}\in\left(H^1(\Omega\times(0,T))\right)^d \,\Big|\, \boldsymbol{v}|_{t=0} = \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{v}|_{X\in\Gamma_0} = \boldsymbol{u}_\rho = -(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\nu}_\Omega)\mathbf{D}^t(\boldsymbol{u})\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{\nu}_\Omega,\ \text{Eq. (1)}\Big\} \end{aligned} \tag{28}$$

ただし，$(\cdot)'$ は式 (13) から (18) において，$(\cdot)_{,t}$ を $(\cdot)'$ に置き換えた式で定義する．□

κ_Ω は Ω の境界における平均曲率の $d-1$ 倍，$\boldsymbol{\tau}^\alpha = \left(\tau^\alpha_i\right)_i$ $(\alpha = 1,2,\cdots,d-1)$ は単位接線ベクトル， $\boldsymbol{\nabla}_x = (\partial/\partial x_i)_i$ とする．

問題 2.1 **NE**(Ω) に対して次の随伴問題を定義する．

問題 4.1 (AdNE$^{(0)}$(Ω)) 外力 $\boldsymbol{p}\in\mathcal{P}$ に対する問題 2.1 **NE**(Ω) の解 $(\boldsymbol{u},\lambda)\in U|_T\times\Lambda|_T$ を既知として，次の弱形式を満たす $\left(\boldsymbol{v}^{(0)},\mu^{(0)}\right)\in U|_T\times\Lambda|_T$ を求めよ．

$$A^*\left(\boldsymbol{u},\lambda,\boldsymbol{v}^{(0)},\mu^{(0)}\right) = 2\langle\lambda^*,\lambda-\alpha\lambda_0\rangle_{\Gamma_c} \quad \forall(\boldsymbol{u}^*,\lambda^*)\in U|_T\times\Lambda|_T \tag{29}$$

ただし，$(\cdot)^*$ は式 (13) から (18) において，$(\cdot)_{,t}$ を $(\cdot)^*$ に置き換えた式で定義する．□

補題 4.1 および問題 4.1 **AdNE**$^{(0)}$(Ω) の解より，次の結果を得る．

定理 4.1 ($J^{(0)}$ の Gâteaux 微分) 式 (19) で定義された汎関数 $J^{(0)}(\Omega,\boldsymbol{u}^{\mathrm{e}})$ のある領域変動 $\boldsymbol{\rho}\in\mathcal{U}$ に対する Gâteaux 微分 (形状勾配) は，問題 2.1 **NE**(Ω) の解 $(\boldsymbol{u},\lambda)\in U|_T\times\Lambda|_T$ と随伴問題 4.1 **AdNE**$^{(0)}$(Ω) の解 $\left(\boldsymbol{v}^{(0)},\mu\right)\in U|_T\times\Lambda|_T$ を用いて， $\dot{J}^{(0)}(\Omega,\lambda,\alpha) = \lim_{\epsilon\to+0}\left(J^{(0)}(\Omega^\epsilon,\lambda^\epsilon,\alpha^\epsilon) - J^{(0)}(\Omega,\lambda,\alpha)\right)/\epsilon$ と表すとき，次のような $G^{(0)}$ となる．

$$\begin{aligned} \dot{J}^{(0)}(\Omega,\lambda,\alpha) &= \left\langle G^{(0)}\boldsymbol{\nu}_\Omega,\boldsymbol{\rho}\right\rangle_\Gamma = \left\langle G^{(0)}_A\left(\boldsymbol{u},\lambda,\boldsymbol{v}^{(0)},\mu^{(0)}\right)\boldsymbol{\nu}_\Omega,\boldsymbol{\rho}\right\rangle_{\Gamma\setminus\Gamma_0} \\ &\quad + \left\langle G^{(0)}_0\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}^{(0)}\big|_T\right)\boldsymbol{\nu}_{\Omega^{(\mathrm{C})}},\boldsymbol{\rho}\right\rangle_{\Gamma_0} + \left\langle G^{(0)}_J(\lambda,\alpha)\boldsymbol{\nu}_{\Omega^{(\mathrm{A})}},\boldsymbol{\rho}\right\rangle_{\Gamma_c} \end{aligned} \tag{30}$$

$$G^{(0)}_0(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{\nu}_\Omega)\cdot(\mathbf{D}^t(\boldsymbol{v})\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{\nu}_\Omega) \tag{31}$$

$$G^{(0)}_J(\lambda,\alpha) = \boldsymbol{\nabla}\left(|\lambda-\alpha\lambda_0|^2\right)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\Omega^{(\mathrm{A})}} + |\lambda-\alpha\lambda_0|^2\kappa_{\Omega^{(\mathrm{A})}} \quad \square \tag{32}$$

証明　式 (19) と (10) で構成した Lagrange 乗数形式 L について次の結果を得る．

$$L(\Omega,\boldsymbol{u},\lambda,\boldsymbol{v},\mu,\alpha) = J^{(0)}(\Omega,\lambda,\alpha) - A(\boldsymbol{u},\lambda,\boldsymbol{v},\mu) + \langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{v}\rangle_{\Gamma_p} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} \dot{L} &= 2\langle\lambda',\lambda-\alpha\lambda_0\rangle_{\Gamma_c} + \left\langle G^{(0)}_J(\lambda,\alpha)\boldsymbol{\nu}_{\Omega^{(\mathrm{A})}},\boldsymbol{\rho}\right\rangle_{\Gamma_c} - A'(\boldsymbol{u},\lambda,\boldsymbol{v},\mu) \\ &\quad + \left\langle G^{(0)}_A(\boldsymbol{u},\lambda,\boldsymbol{v},\mu)\boldsymbol{\nu}_\Omega,\boldsymbol{\rho}\right\rangle_{\Gamma\setminus\Gamma_0} = \text{Eq. (30)} \quad \square \end{aligned} \tag{34}$$

$G^{(0)}$ を $J^{(0)}$ に対する Gâteaux 微分 (形状勾配) と呼ぶ．

5　H^1 勾配法

問題 2.1 および随伴問題 4.1 の有限要素法解析は，陳ら [4] のアルゴリズムにより解析できる．問題 3.1 **DV**(Ω) の解 $\boldsymbol{\rho}\in\mathcal{U}$ は，形状最適化問題に対する H^1 勾配法 [5] (力法) によって求めることができる．

文献

(1) 畔上秀幸, 小山悟. 規定した変形を生む異種材料境界面の形状設計．日本機械学会第 18 回計算力学講演会講演論文集, pp. 331–332, 11 2005.

(2) 杉本明信, 笹岡竜, 竹内謙善, 畔上秀幸. 接触する弾性体の形状最適化. 第 56 回理論応用力学講演会講演論文集, pp. 297–298, 3 2007.

(3) 海津聰, 畔上秀幸. 形状最適化問題と力法について．日本応用数理学会論文誌, Vol. 16, No. 3, pp. 277–290, 9 2006.

(4) 陳献, 久田俊明. 接触問題 patch test をパスする有限要素解析アルゴリズムの解析. 日本機械学会論文集 (A 編), Vol. 72, No. 713, pp. 39–46, 1 2006.

(5) H. Azegami and S. Kaizu. Smoothing gradient method for non-parametric shape and topology optimization problems. In *Proceedings of the 7th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-7)(CD-ROM)*, pp. 1–10, 2007.