Navier-Stokes 問題における形状最適化問題の数値解法

Numerical solution of shape optimization problems for Navier-Stokes problems

学　岩田 侑太朗 (名大院)　　正　畔上 秀幸 (名大院)　　正　片峯 英次 (岐阜高専)

Yutaro IWATA, Graduate School of Information Science, Nagoya University, 1 Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya 464-8601
Hideyuki AZEGAMI, Graduate School of Information Science, Nagoya University
Eiji KTAMINE Gifu National College of Technology

Key Words: Optimal design, Pressure drop, Finite-element method, Shape optimization, Shape gradient, Traction method

1　はじめに

Navier-Stokes 流れ場の境界形状を設計対象にしたノンパラメトリック形状最適化問題は，流れ場の改善を望む場面で遭遇する問題である．この問題の理論的な枠組みは古くから研究されてきた [1]．しかしながら，Navier-Stokes 問題自体を数値的に解く際に数値不安定を招かないためのふくう工夫が必要であった．その上，評価関数の Gâteaux 微分を評価するために，随伴問題も数値不安定を抑えながら解くための工夫が必要である．さらに，得られた評価関数の Gâteaux 微分（形状勾配）は滑らかさが不足する．したがって，それから本来の滑らかさを備えた最適な形状変動を求める方法が必要となる．

本研究では，この問題の理論的な枠組みを整理し，最適形状を得るまでの正則な数値解法について考察したい．

2　非圧縮性流体の Navier-Stokes 問題

図 1 のような流れ場を考えよう．有界な Lipshitz 境界を有する固定領域 $D \in \mathbf{R}^d$ $(d = 2, 3)$ に完全に含まれる Lipshitz 境界 Γ^{s} を有する部分領域 $\Omega^{\mathrm{s}} \subset D$ を障害物，残りの領域 $\Omega = D \setminus \Omega^{\mathrm{s}}$ を流れ場であるとする．$\partial\Omega = \Gamma$ とする．時間 $(0, T)$ にわたって，$\Gamma_0 \subset \partial D$ では流速 $\boldsymbol{u}_0 = (u_{0i})_i : \Gamma_0 \times (0, T) \mapsto \mathbf{R}^d$ が既知，Γ^{s} では流速が零とする．

Ω における非圧縮性流体の Navier-Stokes 問題は次のように書ける．$\boldsymbol{u}_0$ を既知として次式を満たす流速と圧力 $(\boldsymbol{u}, p)$ を求めよ．

$$\rho \boldsymbol{u}_{,t} + \mathbf{D}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} - \mu\Delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\nabla} p = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T) \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T) \tag{2}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 \quad \text{on } \Gamma_0 \times (0, T) \tag{3}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \quad \text{on } \Gamma^{\mathrm{s}} \times (0, T) \tag{4}$$

ただし，ρ は密度，μ は粘性率を表す正定数である．本稿では，$\mathbf{D}(\boldsymbol{v}) = \left(\partial v_i / \partial x_j\right)_{ij}$ $(\boldsymbol{x} = (x_i)_i \in \Omega)$，時間 $t \in (0, T)$ に対して $\partial(\,\cdot\,)/\partial t = (\,\cdot\,)_{,t}$ と表す．

この問題の弱形式は次のようになる．

問題 2.1 (非圧縮性流体の Navier-Stokes 問題 NS(Ω)) $\boldsymbol{u}_0$ を既知として，次式を満たす $(\boldsymbol{u}, p) \in V(\boldsymbol{u}_0) \times Q$ を求めよ．

$$A(\boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}, q) = 0 \quad \forall (\boldsymbol{v}, q) \in V \times Q \tag{5}$$

$$A(\boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}, q) = \int_0^T \Big(a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u}_{,t}, \boldsymbol{v}) + c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}, p)_\Omega + (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}, q)_\Omega \Big)\, \mathrm{d}t \tag{6}$$

$$V = \left\{ \boldsymbol{v} \in \left(H^1(\Omega \times (0, T))\right)^d \,\middle|\, \boldsymbol{v}|_{t=0} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{v}|_{\Gamma_0 \cup \Gamma^{\mathrm{s}}} = \boldsymbol{0} \right\} \tag{7}$$

$$V(\boldsymbol{u}_0) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \left(H^1(\Omega \times (0, T))\right)^d \,\middle|\, \boldsymbol{v}|_{t=0} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{v}|_{\Gamma_0} = \boldsymbol{u}_0,\ \boldsymbol{v}|_{\Gamma^{\mathrm{s}}} = \boldsymbol{0} \right\} \tag{8}$$

$$Q = \left\{ q \in L^2(\Omega \times (0, T)) \,\middle|\, \int_\Omega q \,\mathrm{d}\Omega = 0 \right\} \quad \square \tag{9}$$

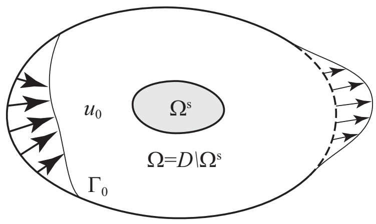

Fig. 1　Flow field Ω

ただし，次の定義を用いた．

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega \mu u_{i,j} v_{i,j} \,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \mu \mathbf{D}(\boldsymbol{u}) \cdot \mathbf{D}(\boldsymbol{v}) \,\mathrm{d}\Omega \tag{10}$$

$$b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega \rho \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \,\mathrm{d}\Omega \tag{11}$$

$$c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \int_\Omega v_{i,j} u_j w_i \,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega (\mathbf{D}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{w} \,\mathrm{d}\Omega \tag{12}$$

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_\Omega = \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \,\mathrm{d}\Omega \tag{13}$$

本稿では，$\boldsymbol{\nabla}(\,\cdot\,) = (\,\cdot\,)_{,i} = \partial(\,\cdot\,)/\partial x_i$ と総和規約を用いる．

3　圧力損失最小化問題

形状最適化問題の一例として，体積制約付圧力損失最小化問題を考えよう．目的汎関数 $J^{(0)}$ と制約汎関数 $J^{(1)}$ を次式で定義する．

$$J^{(0)}(\Omega, \boldsymbol{u}, p) = -\int_0^T (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\nabla} p)_\Omega \,\mathrm{d}t \tag{14}$$

$$J^{(1)}(\Omega) = m_0 - \int_\Omega \mathrm{d}\Omega \tag{15}$$

ここで，m_0 は正定数である．

2 節で定義した示した領域 Ω の集合 $\mathcal{W}$ は，ある固定した有界領域に含まれ，Lipschiz 境界を有する領域の集合であると仮定すれば，$\mathcal{W}$ はコンパクトとなる [2]．したがって，ある領域 Ω に対して，次のような最適形状変動問題の解 $\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{U}$ を求めて，ある $\epsilon > 0$ を用いて領域を $\Omega^\epsilon = \{x^\epsilon \mid x^\epsilon = x + \epsilon\boldsymbol{\rho}\ \forall x \in \Omega,\ \boldsymbol{\rho} \in \mathcal{U}\}$ に変動させることを繰り返していけば，局所解に到達できる．本研究では，領域変動の集合を次のように定義する．

$$\mathcal{U} = \left(C^{0,1}(\Omega)\right)^d \tag{16}$$

問題 3.1 (DV(Ω)) $\boldsymbol{u}_0$ を既知として，ある $\Omega \in \mathcal{W}$ のときの問題 2.1 **NS**(Ω) の解を $(\boldsymbol{u}, p) \in V(\boldsymbol{u}_0) \times Q$ とする．このとき，式 (16) の $\mathcal{U}$ を用いて，次のような $\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{U}$ を求めよ．

$$\min_{\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{U}} \left\{ J^{(0)}(\Omega, \boldsymbol{u}, p) \,\middle|\, J^{(1)}(\Omega) \leq 0 \right\} \quad \square \tag{17}$$

4 Gâteaux 微分

ある $\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{U}$ に対する $J^{(0)}$ の Gâteaux 微分を求めてみよう．

領域変動後の問題 2.1 $\mathbf{NS}(\Omega^\epsilon)$ の解を $(\boldsymbol{u}^\epsilon, p^\epsilon)$ とする．$(\boldsymbol{u}, p)$ の形状微分 $(\boldsymbol{u}', p')$ を $\boldsymbol{u}' = \lim_{\epsilon\to+0} (\boldsymbol{u}^\epsilon - \boldsymbol{u})/\epsilon$, $p' = \lim_{\epsilon\to+0} (p^\epsilon - p)/\epsilon$ のように定義する．$(\boldsymbol{u}', p')$ について次の結果を得る．

補題 4.1 ($(\boldsymbol{u}, p)$ の形状微分) $\boldsymbol{u}_0$ を既知として，ある $\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{U}$ に対する問題 2.1 $\mathbf{NS}(\Omega)$ の解を $(\boldsymbol{u}, p) \in V(\boldsymbol{u}_0) \times Q$ とする．このとき，形状微分 $(\boldsymbol{u}', p')$ は $V\left(\boldsymbol{u}_\rho\right) \times Q$ に属し，次の弱形式を一意に満たす．

$$A'(\boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}, q) - \left\langle G_A^{(0)}(\boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}, q)\, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\rho} \right\rangle_{\Gamma\setminus(\Gamma_0\cup\Gamma^s)} = 0 \quad \forall (\boldsymbol{v}, q) \in V \times Q \tag{18}$$

ただし，次の定義を用いた．

$$A'(\boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}, q) = \int_0^T \Big(a(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}) + b\left(\boldsymbol{u}'_{,t}, \boldsymbol{v}\right) + c(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}, p')_\Omega + (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}', q)_\Omega \Big)\, \mathrm{d}t \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\left\langle G_A^{(0)}(\boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}, q)\, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\rho} \right\rangle_{\Gamma\setminus(\Gamma_0\cup\Gamma^s)} &= \left\langle G_a^{(0)}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\rho} \right\rangle_{\Gamma\setminus(\Gamma_0\cup\Gamma^s)} \\ &\quad + \left\langle G_b^{(0)}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\rho} \right\rangle_{\Gamma\setminus(\Gamma_0\cup\Gamma^s)} + \left\langle G_c^{(0)}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\rho} \right\rangle_{\Gamma\setminus(\Gamma_0\cup\Gamma^s)} \\ &\quad + \left\langle G_d^{(0)}(\boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}, q)\, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\rho} \right\rangle_{\Gamma\setminus(\Gamma_0\cup\Gamma^s)}\end{aligned} \tag{20}$$

$$G_a^{(0)}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = -\int_0^T \mu \mathbf{D}(\boldsymbol{u}) \cdot \mathbf{D}(\boldsymbol{v})\, \mathrm{d}t \tag{21}$$

$$G_b^{(0)}(\boldsymbol{v}) = -\int_0^T \rho \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}t \tag{22}$$

$$G_c^{(0)}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = -\int_0^T (\mathbf{D}(\boldsymbol{v})\, \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{w}\, \mathrm{d}t \tag{23}$$

$$G_d^{(0)}(\boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}, q) = -\int_0^T \Big((\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v})\, p - (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u})\, q \Big)\, \mathrm{d}t \tag{24}$$

$$V\left(\boldsymbol{u}_\rho\right) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \left(H^1(\Omega \times (0, T))\right)^d \,\middle|\, \boldsymbol{v}|_{t=0} = \mathbf{0},\ \boldsymbol{v}|_{X\in\Gamma_0\cup\Gamma^s} = \boldsymbol{u}_\rho = -(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\nu})\, \mathbf{D}(\boldsymbol{u})\, \boldsymbol{\nu} \right\} \quad \square \tag{25}$$

本稿では，次の定義を用いる．

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle_\Gamma = \int_\Gamma \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\Gamma \tag{26}$$

問題 2.1 $\mathbf{NS}(\Omega)$ に対して次の随伴問題を定義する．

問題 4.1 ($\mathbf{AdNS}^{(0)}(\Omega)$) $\boldsymbol{u}_0$ に対する問題 2.1 $\mathbf{NS}(\Omega)$ の解 $(\boldsymbol{u}, p) \in V(\boldsymbol{u}_0) \times Q$ を既知とする．このとき，次の弱形式を満たす $\left(\boldsymbol{v}^{(0)}, q^{(0)}\right) \in V \times Q$ を求めよ．

$$A^*\left(\boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}^{(0)}, q^{(0)}\right) = -\int_0^T \Big((\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{\nabla} p)_\Omega + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\nabla} p^*)_\Omega \Big)\, \mathrm{d}t \quad \forall (\boldsymbol{u}^*, p^*) \in V \times Q \tag{27}$$

ただし，$(\cdot)^*$ は式 (19) において，$(\cdot)'$ を $(\cdot)^*$ に置き換えた式で定義する．□

補題 4.1 および問題 4.1 $\mathbf{AdNS}^{(0)}(\Omega)$ の解より，次の結果を得る．

定理 4.1 ($J^{(0)}$ の Gâteaux 微分) 式 (14) で定義された汎関数 $J^{(0)}(\Omega, \boldsymbol{u}, p)$ のある領域変動 $\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{U}$ に対する Gâteaux 微分 (形状勾配) は，問題 2.1 $\mathbf{NS}(\Omega)$ の解 $(\boldsymbol{u}, p) \in V(\boldsymbol{u}_0) \times Q$ と随伴問題 4.1 $\mathbf{AdNS}^{(0)}(\Omega)$ の解 $\left(\boldsymbol{v}^{(0)}, q^{(0)}\right) \in V \times Q$ を用いて，$\dot{J}^{(0)}(\Omega, \boldsymbol{u}, p) = \lim_{\epsilon\to+0} \left(J^{(0)}(\Omega^\epsilon, \boldsymbol{u}^\epsilon, p^\epsilon) - J^{(0)}(\Omega, \boldsymbol{u}, p) \right)/\epsilon$ と表すとき，次のような $G^{(0)}$ となる．

$$\begin{aligned}\dot{J}^{(0)}(\Omega, \boldsymbol{u}, p) &= \left\langle G^{(0)} \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\rho} \right\rangle_\Gamma = \left\langle G_A^{(0)}\left(\boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}^{(0)}, q^{(0)}\right) \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\rho} \right\rangle_{\Gamma\setminus(\Gamma_0\cup\Gamma^s)} \\ &\quad + \left\langle G_0^{(0)}\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}^{(0)}\right) \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\rho} \right\rangle_{\Gamma_0\cup\Gamma^s} + \left\langle G_J^{(0)}(\boldsymbol{u}, p)\, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\rho} \right\rangle_{\Gamma\setminus(\Gamma_0\cup\Gamma^s)}\end{aligned} \tag{28}$$

$$G_0^{(0)}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_0^T \mu (\mathbf{D}(\boldsymbol{u})\, \boldsymbol{\nu}) \cdot (\mathbf{D}(\boldsymbol{v})\, \boldsymbol{\nu})\, \mathrm{d}t \tag{29}$$

$$G_J^{(0)}(\boldsymbol{u}, p) = \int_0^T \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} p\, \mathrm{d}t \quad \square \tag{30}$$

証明 式 (14) と (5) で構成した Lagrange 乗数形式 L について次の結果を得る．

$$L(\Omega, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}, q) = J^{(0)}(\Omega, \boldsymbol{u}, p) - A(\boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}, q) \tag{31}$$

$$\begin{aligned}\dot{L} &= -\int_0^T \Big((\boldsymbol{u}', \boldsymbol{\nabla} p)_\Omega + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\nabla} p')_\Omega \Big)\, \mathrm{d}t + \left\langle G_J^{(0)}(\boldsymbol{u}, p)\, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\rho} \right\rangle_{\Gamma\setminus(\Gamma_0\cup\Gamma^s)} \\ &\quad - A'(\boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}, q) + \left\langle G_A^{(0)}(\boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}, q)\, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\rho} \right\rangle_{\Gamma\setminus(\Gamma_0\cup\Gamma^s)} = \text{Eq. (28)} \quad \square\end{aligned} \tag{32}$$

$G^{(0)}$ を $J^{(0)}$ に対する Gâteaux 微分 (形状勾配) と呼ぶ．

$J^{(1)}$ に対する Gâteaux 微分 (形状勾配) は $G^{(1)} = 1$ である．

5 H^1 勾配法

最適形状変動問題 3.1 $\mathbf{DV}(\Omega)$ の解 $\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{U}$ は，形状最適化問題に対する H^1 勾配法 (力法) によって求めることができる．解の存在に関する定理は文献 [2] に譲る．

6 数値解法

Stokes 問題における圧力損失の形状勾配の誤差解析に関して，次の結果が得られている [3]．非圧縮性流体の Navier-Stokes 問題 2.1 および随伴問題 4.1 にも有効と考えられる．

定義 6.1 (FEM スキーム (流速: 気泡付 P2 要素, 圧力: P1 要素)) 3 角形要素あるいは 4 面体要素 K からなるメッシュ分割を $\mathcal{T}^h = \{K\}$ とする．K の外接円の直径 h_K, 内接円の直径 r_K, $h = \max_K h_K$ について $\limsup_{h\to 0} \max_K h_K/r_K < \infty$ を満たすと仮定する．$\left(u^h, p^h\right) \in V^h \times Q^h \subset V \times Q$ とする．$V^h = \left\{W_2^h\right\}^d$, $W_k^h = \left\{ v^h \in C^0(\Omega^{ha}) \,\middle|\, v^h\big|_K \in P_K\ \forall K \in \mathcal{T}^h,\ P_k \subset P_K \subset C^1(K) \right\}$, P_k は k 次多項式, $Q^h = \left\{ q^h \in C^0(\Omega^{ha}) \,\middle|\, q^h\big|_K \in P_1\ \forall K \in \mathcal{T}^h \right\}$ とする．このスキームの解は inf-sup 条件を満たすことが知られている [4]．

定理 6.1 ($G^{(0)}$ に対する誤差評価) 上記スキームにより計算された $G^{(0)}$ を $G^{(0)h}$，適切な補間作用素によって評価された $G^{(0)}$ を $G^{(0)*}$ とするとき，h には依存しない定数 C に対して次式が成り立つ．

$$\left\| G^{(0)h} - G^{(0)*} \right\|_{L^2(\Gamma^h)} \le C h^{1/2} \quad \square \tag{33}$$

移流項に関する安定化法として SUPG 法が有効と考えられる [5]．

文献

(1) O. Pironneau. On optimum profiles in stokes flow. *J. Fluid Mech. (Part 1)*, Vol. 59, pp. 117–128, 1973.

(2) 海津聰, 畔上秀幸. 形状最適化問題と力法について. 日本応用数理学会論文誌, Vol. 16, No. 3, pp. 277–290, 9 2006.

(3) 海津聰. ストークス問題における感度解析と有限要素法. 数値流体力学シンポジウム, Vol. 20, , 2006.

(4) M. Crouzeix and P.-A. Raviart. Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary stokes equations I. *RAIRO. Analyse Numérique 7*, pp. 33–76, 1973.

(5) T. E. Tezduyar. Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-orer-interpolation velocity-pressure elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng*, Vol. 95, pp. 221–242, 1992.