

サスペンション部品の非線形座屈現象に関する形状最適化の検討

Examination of Shape Optimization for the Nonlinear Buckling Phenomenon of Suspension Parts.

○正 新谷 浩平(トヨタ自動車) 正 長谷 高明(トヨタ自動車)
正 伊藤 聡(トヨタ自動車) 正 畔上 秀幸(名古屋大学)

Kouhei SHINTANI, TOYOTA MOTOR CORPORATION, Toyota-cho1, Toyota-city, Aichi, 471-8572, JAPAN
Takaaki NAGATANI and Satoshi ITO, TOYOTA MOTOR CORPORATION
Hideyuki AZEGAMI, Nagoya University, Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya-city

This paper presents a numerical solution to a non-parametric shape optimization problem for design of suspension arm which strength is given by reaction force to plastic buckling loaded by compulsory displacement. In the buckling phenomena, the geometrical non-linearity and material non-linearity are taken into account. Assuming monotonous loading, hyper-elastic theory is applied to the deformation of suspension arm. Mass and the reaction force integral to the buckling phenomena are chosen as an objective function and a constraint functions. The shape derivatives of these functions are evaluated by the shape optimization theory. Using the shape gradients, a numerical scheme based on a sequential quadratic approximation problem is employed for reshaping. In this scheme, the traction method is used to find the decent directions of the cost functions. The scheme is implemented by using a commercial shape optimization program in which the shape gradients are computed by a user program developed in this study using the result of non-linear FEM analysis by a commercial program. The numerical example for a suspension arm model shows the weight reduction of 12% while keeping the reaction force integral constant.

Key Words: *Optimum Design, Finite Element Method(FEM), Nonlinear buckling, Weight Reduction, Traction Method, Geometrical Non-linearity, Material Non-linearity*

1. はじめに

自動車のサスペンション部品の設計においては、強度目標を満足した上で、走行性能や燃費効率向上などの観点から、軽量化が求められている。筆者らは、これまで、疲労強度を満足した上で軽量化を求める方法を開発した⁽¹⁾。

本研究では、サスペンションアームが過大な荷重を受けたときに、目標とする反力を満たした上で質量を最小化する形状最適化問題を設定し、その問題の解法を示す。

ササアームの設計では、コイルスプリングなどの周辺部品との重なりを避けるために様々な形状制約が課される。その結果、ササアームは、図1のように曲がりをもつ形状を強いられる。このような曲がりをもつために、ササアームが大荷重を受けたときには、幾何学のおよび材料非線形性を考慮する必要がある。

図1に、ササアームの過大荷重に対する線形弾性変形解析の結果と幾何学的非線形性を考慮した弾塑性変形解析の結果を示す。上端部の円環はゴムブッシュをモデル化した6軸方向の非線形バネで拘束され、下端の円環はボールジョイントとしてモデル化した。荷重は図中矢印の方向に与えた。線形弾性解析の結果では、曲がり最も大きな断面の凹側境界にMises応力の最大点が現れた。一方、非線形解析の結果では、荷重負荷点近傍で塑性変形が発生し、反力が減少に転じる、いわゆる塑性座屈とよばれる現象が生じた。

そこで本研究では、ササアームの過大荷重に対する応答を、ボールジョイント部の強制変位による大変形を考慮した弾塑性変形問題の解として定義する。反力を表す適切な評価関数は、強制変位が課された部分境界の反力積分として定義される。その上で、反力積分に対する制約を満たした下で、質量を最小化するノンパラメトリック形状最適化問題⁽²⁾を構成し、その解法を示す。ササア

ームの数值モデルに適用可能な数值解析プログラムは、市販の形状最適化プログラムと非線形有限要素法解析プログラムをユーザープログラムにより連携させることで実現する。最後に、ササアームモデルに本解法を適用した結果を紹介する。

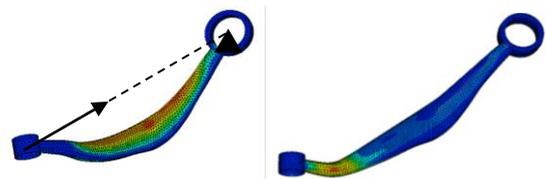


Fig.1 Comparison between linear analysis result(left) and non-linear analysis result(right)

2. 大変形を考慮した弾塑性変形問題

ササアームの過大荷重に対する応答を、大変形を考慮した弾塑性変形問題の解として定義する。

2.1 領域および強制変位による変位の定義

ササアームの領域を $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ (\mathbf{R} は実数)、時間 $(0, T) \subset \mathbf{R}$ とする。ただし、終端時刻 T の定義は後で示す。 Γ_D を Ω の部分境界として、 $\mathbf{u}_D : \Gamma_D \times (0, T) \mapsto \mathbf{R}^3$ (\mapsto は写像) を強制変位、 $\mathbf{u} : \Omega \times (0, T) \mapsto \mathbf{R}^3$ をその結果生ずる変位とする。

2.2 全ひずみ理論

古典弾塑性理論によれば、金属の弾塑性変形は、降伏関数を定義して、連合流れ則によって求められる応力増分と塑性ひずみ増分の構成式を用いて計算される⁽³⁾。しかし、外力あるいは強制変位が単調増加の場合は、理論が簡潔になるという理

由で、塑性を含む変形であっても弾性ポテンシャルが存在すると仮定する全ひずみ理論が用いられる。

本研究では、サスマームの過大荷重に対する反力を評価することを目標とすることから、過大荷重に達するまでの応答に注目して、全ひずみ理論を用いることにする。その結果、後で示されるように、反力積分に対する形状微分の計算が容易になる。

全ひずみ理論では、 $\mathbf{E}(\mathbf{u})$ を Green-Lagrange ひずみ、 $\mathbf{S}(\mathbf{u})$ を第2 Piola-Kirchhoff 応力、 $\mathbf{\Pi}(\mathbf{u})$ を第1Piola-Kirchhoff 応力、 $W : \mathbf{E} \mapsto \mathbf{R}$ を弾性ポテンシャルとすると、

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}) = \frac{\partial W(\mathbf{E}(\mathbf{u}))}{\partial \mathbf{E}(\mathbf{u})} = \mathbf{C}(\mathbf{E}(\mathbf{u}))\mathbf{E}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{\Pi}(\mathbf{u}) = \mathbf{S}(\mathbf{u})\mathbf{F}(\mathbf{u}) \quad (1)$$

が成り立つと仮定する。ただし、

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T(\mathbf{u})\mathbf{F}(\mathbf{u}) - \mathbf{I}) = \mathbf{E}^L(\mathbf{u}) + \frac{1}{2}\mathbf{E}^{BL}(\mathbf{u}, \mathbf{u}), \quad (2)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{x}^T)^T, \quad (3)$$

$$\mathbf{E}^L(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}((\nabla \mathbf{u}^T)^T + \nabla \mathbf{u}^T), \quad (4)$$

$$\mathbf{E}^{BL}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v}^T (\nabla \mathbf{u}^T)^T + \nabla \mathbf{u}^T (\nabla \mathbf{v}^T)^T), \quad (5)$$

$(\cdot)^T$ は転置、 $\nabla(\cdot) = (\partial(\cdot)/\partial x_i)_i$ 、 $\mathbf{I} = (\delta_{ij})_{ij}$ (δ_{ij} は Kronecker デルタ)とする。 $\mathbf{C}(\mathbf{E}(\mathbf{u}))$ は弾塑性変形に対する剛性を表す。 $\mathbf{E}^L(\mathbf{u})$ と $\mathbf{E}^{BL}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ は、それぞれ \mathbf{u} に関する1次形式、 \mathbf{u} と \mathbf{v} に関する双1次形式の意味で定義された。

さらに、式(1)を速度型で表せば、

$$\mathbf{S}'(\mathbf{u})(\dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{C}^{\tan}(\mathbf{E}(\mathbf{u}))\mathbf{E}'(\mathbf{u})(\dot{\mathbf{u}}), \quad \mathbf{\Pi}'(\mathbf{u})(\dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{S}'(\mathbf{u})(\dot{\mathbf{u}})\mathbf{F}(\mathbf{u}) \quad (6)$$

$$\mathbf{C}^{\tan}(\mathbf{E}(\mathbf{u})) = \left(\mathbf{I} - \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{E}(\mathbf{u}))}{\partial \mathbf{E}(\mathbf{u})} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}) \right)^{-1} \mathbf{C}(\mathbf{E}(\mathbf{u})) \quad (7)$$

となる。ただし、

$$\mathbf{E}'(\mathbf{u})(\dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{E}^L(\dot{\mathbf{u}}) + \mathbf{E}^{BL}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) \quad (8)$$

$(\cdot) = \partial(\cdot)/\partial t$ とする。なお、 $\mathbf{S}'(\mathbf{u})(\dot{\mathbf{u}})$ のような記号は、関数 $\mathbf{S}(\mathbf{u})$ の \mathbf{u} における $\dot{\mathbf{u}}$ 方向に対する一般化微分を表すものとする。式(7)は、コンシステント剛性とよばれる⁽³⁾。 $\mathbf{S}'(\mathbf{u})(\dot{\mathbf{u}})$ と $\mathbf{E}'(\mathbf{u})(\dot{\mathbf{u}})$ は、共に $\dot{\mathbf{u}}$ に関する1次形式となっている。

時刻 $t = T$ のときの Cauchy の第一運動法則の弱形式を Green-Lagrange ひずみと第2 Piola-Kirchhoff 応力の関係に書き換え、式(1)の構成式を組み込めば、変形前の領域で記述された弱形式が得られる。さらに、強制変位の条件を加えれば、 $t = T$ のときの強制変位を $\mathbf{u}_{DT} \equiv \mathbf{u}_D|_{t=T} : \Gamma_D \mapsto \mathbf{R}^3$ と表すこととして変位 $\mathbf{u}_T : \Omega \mapsto \mathbf{R}^3$ を求める問題が次のように構成される。

[問題 1: 大変形を考慮した弾塑性変形問題] \mathbf{u}_{DT} を既知として、任意の $\mathbf{v} : \Omega \mapsto \mathbf{R}^3$ に対して

$$\begin{aligned} a^{NL}(\mathbf{u}_T, \mathbf{v}) - \int_{\Gamma_D} (\mathbf{u}_T - \mathbf{u}_{DT}) \cdot (\mathbf{\Pi}^T(\mathbf{v})\mathbf{N}) dX \\ - \int_{\Gamma_D} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{\Pi}^T(\mathbf{u}_T)\mathbf{N}) dX = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

を満たす \mathbf{u}_T を求めよ。ただし、 \mathbf{N} を変形前の領域 Ω に対する

単位法線、 $\mathbf{u}_{DT} \equiv \mathbf{u}_D|_{t=T}$,

$$a^{NL}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}'(\mathbf{u})(\mathbf{v}) dX \quad (10)$$

とする。なお、 $(\cdot) \cdot (\cdot) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\cdot)_{ij} (\cdot)_{ij}$ とする。

式(9)は、弾性ポテンシャルの存在により、負荷履歴には依存しない式になっている。式(9)の2項目、3項目はそれぞれ \mathbf{u}_T と \mathbf{v} の基本境界条件の弱形式になっている。

式(9)は \mathbf{u}_T に対して非線形方程式となる。この方程式を Newton-Raphson 法で解く場合には、速度型の弱形式が必要となる。 $t = T$ のときの強制変位速度を $\dot{\mathbf{u}}_{DT} : \Gamma_D \mapsto \mathbf{R}^3$ 、変位速度を $\dot{\mathbf{u}}_T : \Omega \mapsto \mathbf{R}^3$ とすれば、その問題は、次のようにかける。

[問題 2: 速度型弾塑性変形問題] $\dot{\mathbf{u}}_{DT}$ を既知として、任意の \mathbf{v} に対して

$$\begin{aligned} a^{NL'}(\mathbf{u}_T)(\dot{\mathbf{u}}_T, \mathbf{v}) - \int_{\Gamma_D} (\dot{\mathbf{u}}_T - \dot{\mathbf{u}}_{DT}) \cdot (\mathbf{\Pi}^T(\mathbf{u}_T)(\mathbf{v})\mathbf{N}) dX \\ - \int_{\Gamma_D} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{\Pi}^T(\mathbf{u}_T)(\dot{\mathbf{u}}_T)\mathbf{N}) dX = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

を満たす。ただし、これまでの定義に加えて、

$$a^{NL'}(\mathbf{u})(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\mathbf{S}'(\mathbf{u})(\dot{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{E}'(\mathbf{u})(\mathbf{v}) + \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{E}}'(\mathbf{u})(\mathbf{v})) dX \quad (12)$$

$$\dot{\mathbf{E}}'(\mathbf{u})(\mathbf{v}) = \mathbf{E}^L(\dot{\mathbf{v}}) + \mathbf{E}^{BL}(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + \mathbf{E}^{BL}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}}) = \mathbf{E}^{BL}(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \quad (13)$$

とする。

$a^{NL'}(\mathbf{u})(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v})$ は $\dot{\mathbf{u}}$ と \mathbf{v} に関して非対称な双1次形式であることに留意する。式(11)は、Newton-Raphson 法において、非線形方程式(9)の残差を補正する際に用いられる。さらに、後で示されるように、随伴問題でも用いられる。

3. 形状最適化問題

問題1を満たす \mathbf{u}_T が得られたとして、反力に対する制約関数を定義して、それを制限した下で、質量を最小化する形状最適化問題を構成する。

$\phi : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ を密度として、質量

$$J^0(\Omega) = \int_{\Omega} \phi dX \quad (14)$$

を目的関数とする。

一方、反力に対する制約関数を次のように定義する。時刻 T を、強制変位 \mathbf{u}_D の単調な増加にともなって、 Γ_D 上の応力 $\mathbf{S}(\mathbf{u})\mathbf{N}$ は単調に増加し、減少に転じる直前で、かつ式(11)の有限要素方程式の係数行列が特異行列に陥らない時刻とする。このとき、

$$J^1(\Omega, \mathbf{u}_T) = - \int_{\Gamma_D} \mathbf{u}^1 \cdot (\mathbf{\Pi}^T(\mathbf{u}_T)\mathbf{N}) d\gamma + c^1 \quad (15)$$

を反力に対する制約関数として、右辺の積分を反力積分とよぶことにする。ただし、 c^1 は上限値を表す正定数、 $\mathbf{u}^1 : \Gamma_D \mapsto \mathbf{R}^3$ は強制変位と同じ方向をもつ無次元の単位ベクトルとする。 \mathbf{u}^1 は $\mathbf{\Pi}^T(\mathbf{u}_T)\mathbf{N}$ をスカラー化する役割をもつ。

これらの定義を用いて、本研究では、形状最適化問題を次のように定義する。

[問題 3: 反力積分制約付き質量最小化問題] 問題1の解 \mathbf{u}_T に対して

$$\min_{\Omega \in \mathbf{R}^3} \left\{ J^0(\Omega) \mid J^1(\Omega, \mathbf{u}_T) \leq 0 \right\} \quad (16)$$

を満たす Ω を求めよ。

4. 形状微分

領域変動に対する評価関数 $J^l(\Omega, \mathbf{u}_T)$, $l=1,2$, の形状微分を次のように定義する. $\boldsymbol{\rho}: \Omega \mapsto \mathbf{R}^3$ を領域変動方向, $\varepsilon > 0$ を定数として,

$$\Omega^\varepsilon = \{ \mathbf{x} + \varepsilon \boldsymbol{\rho} \mid \mathbf{x} \in \Omega \} \quad (17)$$

を変動後の領域, そのときの弾塑性変形問題の解を \mathbf{u}_T^ε とする. ただし, 時刻 T の定義は, Ω^ε に対して上で示したとおりの時刻とする. このとき,

$$\begin{aligned} J^l(\Omega, \mathbf{u}_T)(\boldsymbol{\rho}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J^l(\Omega^\varepsilon, \mathbf{u}_T^\varepsilon) - J^l(\Omega, \mathbf{u}_T)}{\varepsilon} \\ &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}^l(\mathbf{u}_T, \mathbf{v}^1) \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\rho} \, d\gamma \end{aligned} \quad (18)$$

を $J^l(\Omega, \mathbf{u}_T)$ の形状微分, $\mathbf{G}^l(\mathbf{u}_T, \mathbf{v}^1)$ を形状勾配とよぶ. ただし, $\partial\Omega$ は Ω の境界を表す.

4.1 質量の形状微分

$J^0(\Omega)$ の形状微分は, 付録の領域変動に対する領域積分の公式を用いれば,

$$J^0(\Omega)(\boldsymbol{\rho}) = \int_{\partial\Omega} G^0 \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\rho} \, d\gamma \quad (19)$$

$$G^0 = \phi \quad (20)$$

となる.

4.2 反力積分に対する制約関数の形状微分

$J^1(\Omega, \mathbf{u}_T)$ の形状微分は次のように求められる. 式(9)が \mathbf{u}_T に対する制約式であることから, $J^1(\Omega, \mathbf{u}_T)$ の Lagrange 関数は,

$$\begin{aligned} L^1(\Omega, \mathbf{u}_T, \mathbf{v}^1) &= J^1(\Omega, \mathbf{u}_T) - a(\mathbf{u}_T, \mathbf{v}^1) \\ &+ \int_{\Gamma_D} (\mathbf{u}_T - \mathbf{u}_{Dr}) \cdot \left(\boldsymbol{\Pi}^T(\mathbf{u}_T)(\mathbf{v}^1) \mathbf{N} \right) dX + \int_{\Gamma_D} \mathbf{v}^1 \cdot \left(\boldsymbol{\Pi}^T(\mathbf{u}_T) \mathbf{N} \right) dX \end{aligned} \quad (21)$$

で定義される. ただし, \mathbf{v}^1 は式(9)に対する Lagrange 乗数である. このとき, \mathbf{v}^1 の変動に対する $L^1(\Omega, \mathbf{u}_T, \mathbf{v}^1)$ の停留条件は, \mathbf{u}_T が問題 1 の解であれば, 満たされる. \mathbf{u}_T の変動 \mathbf{u}'_T に対する $L^1(\Omega, \mathbf{u}_T, \mathbf{v}^1)$ の停留条件は,

$$\begin{aligned} L^1(\Omega, \mathbf{u}_T, \mathbf{v}^1)(\mathbf{u}'_T) &= - \int_{\Gamma_0} \mathbf{u}'_T \cdot \left(\boldsymbol{\Pi}^T(\mathbf{u}_T)(\mathbf{u}'_T) \mathbf{N} \right) d\gamma - a'(\mathbf{u}_T)(\mathbf{u}'_T, \mathbf{v}^1) \\ &+ \int_{\Gamma_D} \mathbf{u}'_T \cdot \left(\boldsymbol{\Pi}^T(\mathbf{u}_T)(\mathbf{v}^1) \mathbf{N} \right) dX + \int_{\Gamma_D} \mathbf{v}^1 \cdot \left(\boldsymbol{\Pi}^T(\mathbf{u}_T)(\mathbf{u}'_T) \mathbf{N} \right) dX = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

となる. ただし, $a'(\mathbf{u}_T)(\mathbf{u}'_T, \mathbf{v}^1)$ は式(12)で定義する. この式が, 任意の \mathbf{u}'_T に対して成り立つ条件は, \mathbf{v}^1 を決定する $J^1(\Omega, \mathbf{u}_T)$ に対する随伴問題を構成する.

[問題 4: J^1 に対する随伴問題] 問題1の解 \mathbf{u}_T を既知として, 任意の $\mathbf{u}'_T: \Omega \mapsto \mathbf{R}^3$ に対して

$$a'(\mathbf{u}_T)(\mathbf{u}'_T, \mathbf{v}^1) = - \int_{\Gamma_0} \mathbf{u}'_T \cdot \left(\boldsymbol{\Pi}^T(\mathbf{u}_T)(\mathbf{u}'_T) \mathbf{N} \right) d\gamma, \quad (23)$$

$$\int_{\Gamma_D} \mathbf{u}'_T \cdot \left(\boldsymbol{\Pi}^T(\mathbf{u}_T)(\mathbf{v}^1) \mathbf{N} \right) dX = 0, \quad (24)$$

$$\int_{\Gamma_D} \mathbf{v}^1 \cdot \left(\boldsymbol{\Pi}^T(\mathbf{u}_T)(\mathbf{u}'_T) \mathbf{N} \right) dX = 0 \quad (25)$$

を満たす \mathbf{v}^1 を求めよ.

一方, $L^1(\Omega, \mathbf{u}_T, \mathbf{v}^1)$ の形状微分は, \mathbf{u}_T と \mathbf{v}^1 がそれぞれ問題 1 と 4 の解のとき, $J^1(\Omega, \mathbf{u}_T)$ の形状微分と一致して,

$$\begin{aligned} L^1(\Omega, \mathbf{u}_T, \mathbf{v}^1)(\boldsymbol{\rho}) &= - \int_{\Gamma_D} (\mathbf{N} \cdot \nabla + \kappa) (\mathbf{u}'_T \cdot \boldsymbol{\Pi}^T(\mathbf{u}_T) \mathbf{N}) \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\rho} \, d\gamma \\ &- \int_{\partial\Gamma_D} \left\{ \mathbf{u}'_T \cdot \left(\boldsymbol{\Pi}^T(\mathbf{u}_T) \mathbf{N} \right) \right\} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho} \, d\alpha \\ &- \int_{\partial\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{u}_T) \cdot \mathbf{E}'(\mathbf{u}_T)(\mathbf{v}^1) \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\rho} \, d\gamma \\ &+ \int_{\Gamma_D} (\mathbf{N} \cdot \nabla + \kappa) \\ &\quad \times \left\{ (\mathbf{u}_T - \mathbf{u}_{Dr}) \cdot \left(\boldsymbol{\Pi}^T(\mathbf{u}_T)(\mathbf{v}^1) \mathbf{N} \right) + \mathbf{v}^1 \cdot \left(\boldsymbol{\Pi}^T(\mathbf{u}_T) \mathbf{N} \right) \right\} \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\rho} \, d\gamma \end{aligned} \quad (26)$$

となる. ここで, 付録の領域変動に対する積分公式を用いた.

本研究では, 強制変位を与える部分境界 Γ_D は領域変動のときに固定すると仮定する. そのとき, 式(26)は

$$L^1(\Omega, \mathbf{u}_T, \mathbf{v}^1)(\boldsymbol{\rho}) = \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_D} G^1(\mathbf{u}_T, \mathbf{v}^1) \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\rho} \, d\gamma \quad (27)$$

$$G^1(\mathbf{u}_T, \mathbf{v}^1) = -\mathbf{S}(\mathbf{u}_T) \cdot \mathbf{E}'(\mathbf{u}_T)(\mathbf{v}^1) \quad (28)$$

となる.

問題 1 と 4 の具体的な数値解析については 6 章で説明する. それらの解 \mathbf{u}_T と \mathbf{v}^1 を用いれば, $J^1(\Omega, \mathbf{u}_T)$ の形状勾配は式(28)で計算できる.

5. 形状最適化問題の解法

評価関数 $J^0(\Omega)$, $J^1(\Omega, \mathbf{u}_T)$ の形状勾配 G^0 , G^1 が計算できれば, 問題 3 は次のように解くことができる.

最適ではない領域 Ω に対して, その近傍で次のような逐次 2

次近似問題を構成する。

[問題 5: 逐次 2 次近似問題] ε を小さな正定数として,

$$\min_{\boldsymbol{\varepsilon}, \|\boldsymbol{\rho}\|=1} \left\{ Q(\boldsymbol{\varepsilon}) \right\} J^1(\Omega, \mathbf{u}_T) + \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_D} G^1 \mathbf{N} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}) d\gamma \leq 0 \quad (29)$$

を満たす $\boldsymbol{\varepsilon}$ を求めよ。ただし,

$$Q(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2\varepsilon} a(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}) + \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_D} G^0 \mathbf{N} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}) d\gamma, \quad (30)$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{S}^L(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}^L(\mathbf{v}) dX + \alpha \int_{\partial\Omega} (\mathbf{N} \cdot \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{N} \cdot \mathbf{v}) dX, \quad (31)$$

$\mathbf{S}^L(\mathbf{u})$ は線形弾性体の応力, α は境界に配置した分布バネの定数を表す正定数, $\|\boldsymbol{\rho}\| = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + \mathbf{E}^L(\boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{E}^L(\boldsymbol{\rho})) dX$ とする。

この問題の Lagrange 関数は,

$$L(\boldsymbol{\varepsilon}, \lambda^1) = \frac{1}{2\varepsilon} a(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}) + \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_D} G^0 \mathbf{N} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}) d\gamma + \lambda^1 \left(J^1(\Omega, \mathbf{u}_T) + \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_D} G^1 \mathbf{N} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}) d\gamma \right) \quad (32)$$

とかける。この問題に対する KKT 条件は, 任意の $\mathbf{z} : \Omega \mapsto \mathbf{R}^3$ に対して

$$a(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{z}) + \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_D} (G^0 + \lambda^1 G^1) \mathbf{N} \cdot \mathbf{z} d\gamma = 0, \quad (33)$$

$$J^1(\Omega, \mathbf{u}_T) + \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_D} G^1 \mathbf{N} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}) d\gamma \leq 0, \quad (34)$$

$$\lambda^1 \left(J^1(\Omega, \mathbf{u}_T) + \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_D} G^1 \mathbf{N} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}) d\gamma \right) = 0, \quad (35)$$

$$\lambda^1 \geq 0 \quad (36)$$

が成り立つことである。

ここで, G^l , $l=1, 2$, を用いて, J^l が減少する領域変動 $\boldsymbol{\rho}_G^l : \Omega \mapsto \mathbf{R}^3$ を求める問題を構成する。この問題の解を領域変動に用いる方法は力法と呼ばれてきた⁽⁴⁾。

[問題 6: 形状更新問題] G^l , $l=1, 2$, を既知として, 任意の \mathbf{z} に対して

$$a(\boldsymbol{\rho}_G^l, \mathbf{z}) = - \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_D} G^l \mathbf{N} \cdot \mathbf{z} d\gamma \quad (37)$$

を満たす $\boldsymbol{\rho}_G^l : \Omega \mapsto \mathbf{R}^3$ を求めよ。このとき,

$$\boldsymbol{\rho}(\lambda^1) = \boldsymbol{\rho}^0 + \lambda^1 \boldsymbol{\rho}^1 = \frac{\boldsymbol{\rho}_G^0 + \lambda^1 \boldsymbol{\rho}_G^1}{\|\boldsymbol{\rho}_G^0 + \lambda^1 \boldsymbol{\rho}_G^1\|} \quad (38)$$

とおき, 式(34)は, 等号で成り立つと仮定すれば,

$$\begin{aligned} & \lambda^1 \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_D} G^1 \mathbf{N} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^1) d\gamma \\ &= - \left(J^1(\Omega, \mathbf{u}_T) + \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_D} G^1 \mathbf{N} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^0) d\gamma \right), \end{aligned} \quad (39)$$

の関係が得られる。

これらの関係から, 次のような数値スキームが考えられる。

[形状最適化問題に対する数値スキーム]

- (1) 初期領域 Ω^0 を定める。 $k=0$ とする。
- (2) $J^0(\Omega^k)$, $J^1(\Omega^k, \mathbf{u}_T)$ を計算し, 収束判定を行う。収束しないとき, G^0 , G^1 を計算する。
- (3) 式(37)の解 $\boldsymbol{\rho}_G^l : \Omega^k \mapsto \mathbf{R}^3$, $l=1, 2$, を求める。
- (4) 式(39)で λ^1 を計算する。 $\lambda^1 < 0$ のとき, $J^1(\Omega^k, \mathbf{u}_T) \leq 0$ の条件を無視する。 $\lambda^1 \geq 0$ のとき, 式(38)で $\boldsymbol{\rho}(\lambda^1)$ を計算する。
- (5) $\boldsymbol{\varepsilon}(\lambda^1)$ で領域変動を行い, ε の適切性を, 問題 3 の Lagrange 関数に対する Armijo の規準でチェックする。規準が満たされていない場合は, ε を $\varepsilon/2$ に置き換えて, 領域変動をやり直す。規準が満たされたならば, k を $k+1$ に置き換えて(2)にもどる。

6. 汎用形状最適化プログラムへの実装

本研究では, 大変形を考慮した弾塑性変形問題(問題 1)と J^1 に対する随伴問題(問題 4)を汎用非線形有限要素解析プログラムで解析した。それらの結果を用いて, ユーザープログラムにより形状勾配を計算した。形状勾配の結果は, 市販の形状最適化プログラムにプラグイン機能として提供されているインターフェイスを利用して, 受け渡した。その結果, 形状更新問題(問題 6)を含めた数値スキームに沿った形状最適化問題(問題 3)の解析は, 市販の形状最適化プログラムの制御により行われた。

図 2 に, 汎用形状最適化プログラムを用いた通常の計算手順と本研究の計算手順の違いを示す。

また, 非設計領域や型抜き等の形状変動制限は, 汎用形状最適化プログラムの機能を利用した⁽⁵⁾。

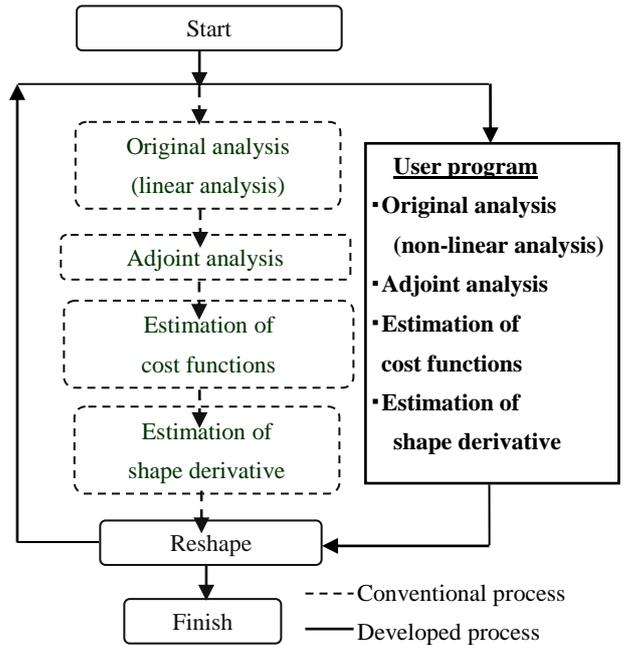


Fig.2 Comparison between Conventional process and Developed process

7. 数値例

本研究で開発した形状最適化プログラムを用いて、図1のサスアームモデルの形状を最適化した結果について紹介する。

7.1 サスアームモデルと境界条件

図 3 に解析モデルと境界条件を示す。サスアーム右側の円環部分には、ゴム Bush が使われることから、円環内部を 6 軸方向の非線形バネでモデル化し、その中心点を拘束した。サスアーム左側の円環部分には、Ball joint(BJ)を想定した境界条件を与えた。強制変位は、BJ の中心点から、図の矢印方向に与えた。サスアームはアルミ材で作られると想定し、ヤング率を 7.1×10^4 MPa、ポアソン比を 0.33 とした。

また、図 3 中央の大きな円筒は、コイルスプリングによる非設計領域を示す。円環部は、 Γ_D に相当し、本研究では領域変動を拘束した。円環部以外の部位の色分けで示された部分境界は、型抜きのための領域変動制約が課された部位を表す。

有限要素には、テトラ 2 次要素を用いた。ただし、形状更新問題(問題 6)の解析では、有限要素分割は変えずに、テトラ 1 次要素に置き換えた。この組み合わせは、形状最適化問題に対する誤差解析の結果に基づいている⁶⁾。

終端時刻 T は、強制変位が、反力積分が最大となるときの 90%となるように設定した。

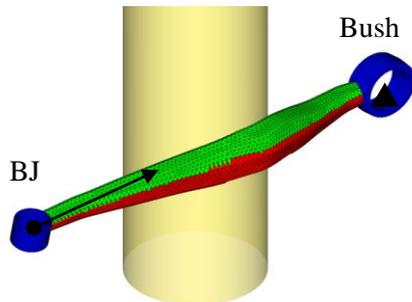


Fig.3 FE model of a suspension arm

7.2 評価関数

本研究では、目的関数と制約関数は、それぞれ、式(14)で定義された質量 $J^0(\Omega)$ と式(15)で定義された反力積分に対する制約関数 $J^1(\Omega, u_r)$ とした。さらに、実際の設計では疲労安全率(圧縮/引張)と平均コンプライアンスの目標比も評価対象とされることから、これらも評価関数に含めた。しかしながら、実際の解析では、いずれも制約条件としてアクティブにならなかったことから、参考に留め、具体的な評価方法は省略する。

7.3 解析結果

領域変動の回数に対する評価関数の変化を図 4 に示す。そのときの評価関数の数値を表 1 に示す。図 5 は、初期形状と最適化後形状のときの強制変位と反力積分の関係を示す。初期形状と最適化後形状の比較を図 6 に示す。

その結果、9 回の領域変動で各制約条件を満足し、質量が約

12%(130g)減少したことが観察される。9 回の領域変動に要した計算時間は Linux (64bit), 1CPU(Intel XEON 3.6GHz), メモリ 4G の環境下で約 18 時間であった。

Table.1 Results of cost functions

	Initial	Optimum	Limit value
Mass[g]	1124	994	-
Reaction force[kN]	58	80	above 80
Compressive fatigue stress [ratio]	0.26	0.22	below 1.0
Tensile fatigue stress [ratio]	0.48	0.47	below 1.0
Mean compliance [ratio]	0.18	0.12	below 1.0

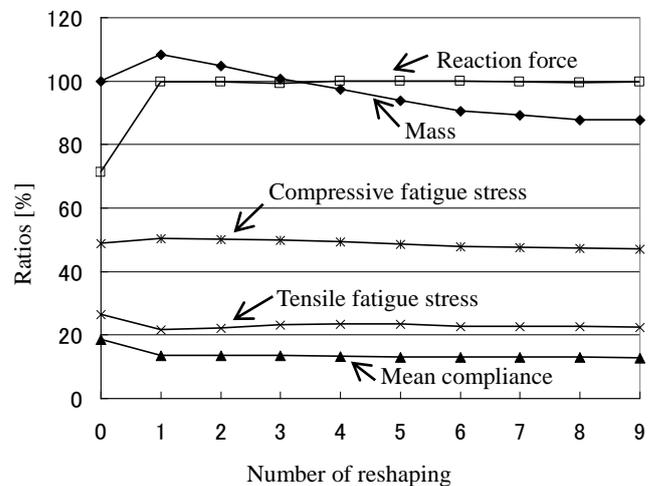


Fig.4 Variation of cost functions with respect to initial values

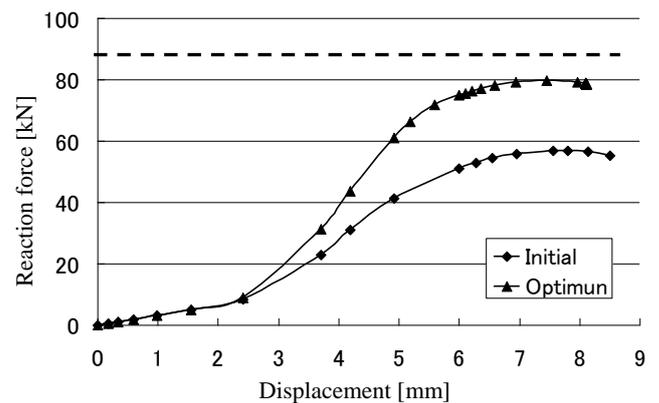


Fig.5 Relation between compulsory displacement and reaction force at center point of BJ

7.4 考察

初期形状と最適化後形状を比較すると、図 6 より、両端部では、作用線に接近するような領域変動が起こっている。左端に近い部

位は、図1より、塑性変形が集中した最弱部位であった。この部位が作用線側へ移動することにより、曲げによる応力が低減され、塑性変形が発生しにくい形状となっていると考察される。

さらに、図 6 の断面図より、サスアーム中央の断面形状の変化を観察すると、次のことがいえる。図中の矢印は強制変位を加えた際の変形方向を示すと考えられる。領域変動に伴って断面がI型に近くなる結果は、最大応力が発生する部位が優先的に補強され、変形方向への断面2次モーメントを、変形方向は、圧縮応力から引張応力への変化の方向を表し、その両端部では、最大圧縮応力と最大引張応力が発生していると確保しつつ、軽量化が達成されていると考察される。

8. まとめ

本稿では、サスアームが強制変位による過大な荷重を受けたときの強度を確保しながら、軽量化するための形状最適化問題を設定し、その問題の解法を示した。過大荷重による変形を全ひずみ理論に従うと仮定した。強度の指標を、強制変位による反力積分で定義した。反力積分の形状微分を最適化理論によって求めた。それを用いた形状最適化問題の解法を逐次2次近似問題を用いて示した。その際、それぞれの評価関数が減少する領域変動の方向を求める方法として、力法を用いた。

本研究では、汎用非線形有限要素解析プログラムの結果をユーザープログラムに読み込んで、形状勾配を計算した。その結果を市販の形状最適化プログラムに受け渡すことで、市販の形状最適化プログラムの制御により、非線形解析を含む形状最適化を実現した。

サスアームモデルに対する数値例は、実用上支障のない時間で、有意な結果が得られることを示した。

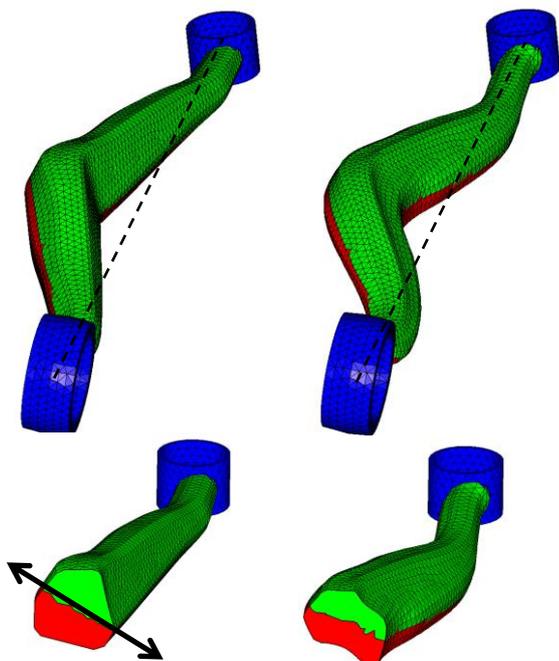


Fig.6 Comparison between initial shape(left) and optimum shape(right)

参考文献

- (1) 長谷高明, 畔上秀幸: サスペンション部品の疲労強度に関する形状最適化の検討, 自動車技術会 2008 年秋季大会講演論文集, pp. 15-18 (2008).
- (2) 畔上秀幸: 形状最適化問題の解法, 計算工学, Vol.2, pp. 239-247 (1997).
- (3) 久田俊明, 野口裕久. 非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善, pp. 361-379 (1995).
- (4) Azegami, H. and Takeuchi, K.: A Smoothing Method for Shape Optimization: Traction Method Using the Robin Condition, International Journal of Computational Methods, 3(1), pp. 21-33 (2006).
- (5) 月野誠, 竹内謙善, 丸山新一: 自動車部品における力法の有効性, 日本自動車技術会春季大会講演論文前刷集, No.73-06, pp.1-4 (2006).
- (6) 海津 聡, ストークス問題における最適形状問題と感度解析を用いた有限要素法(解析学における問題の計算機による解法), 数理解析研究所講究録, 1566 解析学における問題の計算機による解法, 京都大学数理解析研究所, pp. 158-169 (2007).

付録

[領域変動に対する領域積分の公式] $\varphi: \Omega \mapsto \mathbf{R}$ を固定関数,

$$J(\Omega, \varphi) = \int_{\Omega} \varphi \, dX$$

とする。このとき、領域変動 $\rho: \Omega \mapsto \mathbf{R}^3$ に対して、

$$J'(\Omega, \varphi)(\rho) = \int_{\partial\Omega} \varphi N \cdot \rho \, d\gamma$$

が成り立つ。ただし、 N は Ω の外向き単位法線である。

[領域変動に対する境界積分の公式] $\varphi: \Omega \mapsto \mathbf{R}$ を固定関数,

$$J(\Omega, \varphi) = \int_{\Gamma_D} \varphi \, d\gamma$$

とする。このとき、領域変動 $\rho: \Omega \mapsto \mathbf{R}^3$ に対して、

$$J'(\Omega, \varphi)(\rho) = \int_{\Gamma_D} (N \cdot \nabla + \kappa) \varphi N \cdot \rho \, d\gamma + \int_{\partial\Gamma_D} \varphi \tau \cdot \rho \, da$$

が成り立つ。ただし、 τ は Γ_D の外向き単位法線、 $\kappa = \nabla \cdot N$ は曲率である。