社団法人 電子情報通信学会
THE INSTITUTE OF ELECTRONICS,
INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

信学技報
IEICE Technical Report
SS2010-44 (2010-12)

順方向ナローイングに基づく 右線形右シャロー項書換え系の非停止性証明について

服部 達哉† 酒井 正彦† 西田 直樹† 草刈圭一朗† 坂部 俊樹†

† 名古屋大学大学院情報科学研究科
〒 464–8601 名古屋市千種区不老町
E-mail: †hattori@trs.cm.is.nagoya-u.ac.jp, ††{sakai,nishida,kusakari,sakabe}@is.nagoya-u.ac.jp

あらまし 順方向ナローイングに基づく非停止性証明解析は AProVE 等の停止性証明ツールに採用されている．しかしながら，それが完全である項書換え系のクラス，すなわち，非停止性をもつならば順方向ナローイングに基づく解析でそれが証明可能となるクラスは知られていない．本論文では，依存対が右線形右シャローである項書換え系においては，順方向ナローイングに基づく解析が完全であることを示す．

キーワード 停止性証明ツール，完全性，依存対

On non-termination proof of right-linear and right-shallow term rewriting systems based on forward narrowing

Tatsuya HATTORI†, Masahiko SAKAI†, Naoki NISHIDA†,
Keiichirou KUSAKARI†, and Toshiki SAKABE†

† Graduate School of Information Science, Nagoya University
Furoucho, Chikusaku, Nagoyashi, 464–8601 Japan
E-mail: †hattori@trs.cm.is.nagoya-u.ac.jp, ††{sakai,nishida,kusakari,sakabe}@is.nagoya-u.ac.jp

Abstract Detecting non-termination of term rewriting systems based on forward narrowing is used in termination tools such as AProVE. However, there is no known class of term rewriting systems for which the detection method is complete, that is, non-termination is always proved by the method. This paper proves that the detection method is complete for the term rewriting systems whose dependency pairs are right-linear and right-shallow.

Key words termination tool, completeness, dependency pair

1. はじめに

項書換え系 (TRS) において，計算が必ず停止することを表す停止性は重要な性質の一つである．そのため，TRS の停止性を自動的に検証するツールの研究が盛んであり，定理自動証明などに応用されている．高速で証明力の高い停止性証明ツールである AProVE [5] に採用されている非停止性証明手法の一つに，順方向ナローイングに基づく解析が挙げられる．この解析は健全であることが知られているが，それが完全である TRS のクラス，すなわち，非停止性をもつならば順方向ナローイングに基づく解析でそれが証明可能となるクラスは知られていない．一方で，停止性が決定可能である TRS のクラスとして，右線形右シャロー TRS [6]，左線形シャロー TRS [9]，準構成子 TRS [9] などが挙げられる．特に広いクラスとして，依存対が右線形右シャローである TRS [8] が知られている．しかしながら，文献 [8] のクラスにおける停止性判定法は，停止性をもたない可能性のある有限個の基底項を洗い出し，それらに強ループする書換え系列があるかを実際に書換えて検査することで（非）停止性を判定するため，停止性証明ツールへ実装するには非効率的である．そこで本論文では，順方向ナローイングに基づく非停止性証明解析が，依存対が右線形右シャローである TRS のクラスにおいて完全であることを証明する．その手順は以下の通りである．

（1） 右シャローの規則で構成されるループするベーシックな依存鎖をもつ TRS においては，順方向ナローイングに基づく解析でその非停止性を証明できることを示す (3 章).

（2） 非停止性をもち，依存対が右線形右シャローである TRS には，強ループするベーシックな依存鎖が存在することを

示す (5 章).

2. 準　　備

2.1 項書換え系 (TRS)

本論文では，項書換え系の一般的な記法に従う [2].

抽象書換え系S は，対象となる集合 A と A 上の**簡約化関係**と呼ばれる二項関係 $\to$ の組 $(A, \to)$ である．関係 $\to$ 上の反射推移閉包及び推移閉包をそれぞれ $\xrightarrow{*}$，$\xrightarrow{+}$ と表す．任意の $a \in A$ に対して a から始まる $\to$ の無限系列が存在しないとき，S は**停止性**をもつという．S が停止性をもたないとき，S は**非停止性**をもつという．

関数記号の集合 $\mathcal{F}$，**変数**の可算無限集合 $\mathcal{V}$ から生成されるすべての**項**の集合を $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ と記す．変数は項であり，f を引数 n の関数記号，$t_1, \cdots, t_n$ を項とすると，$f(t_1, \cdots, t_n)$ は項である．特に，$n = 0$ のときは項 $f()$ を括弧を省略して f と記し，**定数**という．項 $t_1, \cdots, t_n$ に現れるすべての変数の集合を $\mathcal{V}ar(t_1, \cdots, t_n)$ と記す．項 s 中のどの変数も一回しか現れないとき，s は**線形**であるという．変数を含まない項を**基底項**と呼び，基底項の集合 $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \emptyset)$ を $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ と記す．項 t における**位置**の集合を $Pos(t)(\subseteqq \mathbb{N}^*)$ と記す．項 t における変数の位置の集合を $\mathcal{V}Pos(t)(\subseteqq Pos(t))$ と記す．位置 p の深さを $|p|$ と記す．項 s 中のどの変数も深さ 2 以上の位置には表れないとき，s は**シャロー**であるという．$root(s)$ は項 s の先頭 (位置 ϵ) の記号を表す．**ホール** $\square$ を特別な定数とする．**文脈**とは，$\square$ を 1 つだけ含む項である．ホール自身も文脈であり，このような文脈を空の文脈という．文脈 $C[\,]$ において位置 p に出現するホール $\square$ を項 t で置き換えることによって得られる項を $C[t]$ と記す．ホールの位置 p を明記する場合は $C[t]_p$ と記す．$\mathcal{F}, \mathcal{V}$ 上のすべての文脈の集合を $\mathcal{T}_\square(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ とする．項 t, u に対して $t = C[u]_p$ となるような文脈 $C[\,]$ が存在するとき，u を t の**部分項**と呼ぶ．このとき，u を $t|_p$ と記す．

代入σ の定義域と値域をそれぞれ $\mathcal{D}om(\sigma)$ $(= \{\ x \mid x \neq \sigma(x)\})$ と $\mathcal{R}an(\sigma)$ $(= \{\sigma(x) \mid x \in \mathcal{D}om(\sigma)\})$ で表す．値域に現れる変数の集合を $\mathcal{VR}an(\sigma) = \bigcup_{t \in \mathcal{R}an(\sigma)} \mathcal{V}ar(t)$ とする．$\mathcal{D}om(\sigma) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ であり，かつ $\sigma(x_i) = t_i$ のとき，σ を $\{x_1 \mapsto t_1, \cdots, x_n \mapsto t_n\}$ と記す．項 t に対して，$\sigma(t)$ を t の**インスタンス**と呼び，$t\sigma$ と略記する．代入 σ, σ' について，$\mathcal{D}om(\sigma) = \mathcal{D}om(\sigma')$ かつすべての $x \in \mathcal{D}om(\sigma)$ において $\sigma(x) = \sigma'(x)$ のとき，$\sigma = \sigma'$ と記す．σとσ' の合成を $\sigma\sigma'$ と記し，$x(\sigma\sigma') = \sigma'(\sigma(x))$ で定義する．ある代入 θ が存在して，$\sigma\theta = \sigma'$ が成り立つとき，$\sigma \lesssim \sigma'$ と記す．

$\mathcal{F}$ を関数記号の集合とする．このとき，$\mathcal{F}$ 上の**書換え規則**(l, r) は，$l \notin \mathcal{V}$，$l, r \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$，$\mathcal{V}ar(l) \supseteqq \mathcal{V}ar(r)$ を満たす左辺項 l，右辺項 r の組であり，$l \to r$ と記す．R を $\mathcal{F}$ 上の書換え規則の有限集合とする．R で定められる書換え関係 $\xrightarrow[R]{}$ を $\{(C[l\sigma]_p, C[r\sigma]_p) \mid l \to r \in R,\ C[\,] \in \mathcal{T}_\square(\mathcal{F}, \mathcal{V})\}$ と定義する．書換え規則 $l \to r$ を明記する場合は $\xrightarrow[l \to r]{}$ と記す．書換えの位置 p を明記する場合は $\xrightarrow[R,p]{}$ と記す．n ステップの書換えを $\xrightarrow[R]{n}$ と記す．$\mathcal{F}$ 上の**項書換え系 (TRS)** は項の集合 $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ と書換え関係 $\xrightarrow[R]{}$ で定められる抽象書換え系 $(\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V}), \xrightarrow[R]{})$ であり，これを単に書換え規則の集合 R のみで表す．R のすべての規則の右辺がシャローであるとき，R は右シャローであるという．同様に，右辺がすべて線形であるとき，R は右線形であるという．

項 s と t が**単一化可能**とは，ある代入 σ が存在して $s\sigma = t\sigma$ となることである．このとき，σ を s と t の**単一化子**と呼ぶ．s と t の単一化子 σ が，s, t のどの単一化子 σ' に対しても，$\sigma \lesssim \sigma'$ が成り立つとき σ を**最汎単一化子**と呼ぶ．最汎単一化について，次の定理が知られている．

定理 1　項 s, t が単一化可能ならば以下の 2 つの性質を満たす最汎単一化子 σ が存在する．

- $\mathcal{D}om(\sigma) \subseteqq \mathcal{V}ar(s, t)$
- $\mathcal{VR}an(\sigma) \subseteqq \mathcal{V}ar(s, t)$

2.2 ナローイング

本節ではナローイング [7] の定義を述べる．R を TRS とする．$l \to r \in R$ とし，$\mathcal{V}ar(l, r) \cap \mathcal{V}ar(t) = \emptyset$ とする．C を文脈，p を位置，u を変数でない項とし，$t = C[u]_p$ とする．l と u は単一化可能とし，その最汎単一化子を μ とする．$t' = (C[r]_p)\mu$ とする．このとき，t は μ, p のもとで t' に**ナローイング可能**であるといい，$t \underset{R,\mu}{\rightsquigarrow} t'$ と記す．なお，$\mathcal{D}om(\mu) \cap \mathcal{V}ar(t) = \emptyset$ のときは μ を省略することがある．書換え規則 $l \to r$ を明記する場合は $t \underset{l \to r, \mu}{\rightsquigarrow} t'$ と記す．ナローイングの位置 p を明記する場合は，$t \underset{R,\mu,p}{\rightsquigarrow} t'$ と記す．$\overset{*}{\underset{R,\delta}{\rightsquigarrow}}$ は $\underset{R,\delta_1}{\rightsquigarrow} \cdots \underset{R,\delta_n}{\rightsquigarrow}, \delta = \delta_1 \cdots \delta_n, n \geqq 0$ を満たすナローイング系列を表す．

2.3 依　存　対

本節では，依存対 [1] の定義を述べる．

\# 付き関数記号の集合を $\mathcal{F}^\# = \{f^\# \mid f \in \mathcal{F}\}$ と定義する．$t = f(t_1, \cdots, t_n)$ $(n \geqq 0)$ のとき，$t^\#$ は $f^\#(t_1, \cdots, t_n)$ を表す．TRSR に対して，**非定義記号**の集合を $\mathcal{D}_R = \{root(l) \mid l \to r \Leftarrow c \in R\}$ と定義する．

$f(s_1, \cdots, s_n) \to C[g(t_1, \cdots, t_m)] \in R$ とする．$g \in \mathcal{D}_R$ であるとき，$f^\#(s_1, \cdots, s_n) \to g^\#(t_1, \cdots, t_m)$ を R の**依存対**という．R のすべての依存対の集合を $DP(R)$ と記す．依存対の集合は $\mathcal{F}^\# \cup \mathcal{F}$ 上の TRS とみなせる．以下では，$S^\#$ は書換え規則が $l^\# \to r^\#$ の形式の TRS を表す．$s_1^\# \to t_1^\#, s_2^\# \to t_2^\#, \cdots$ を規則間に共有変数をもたないように変数が名前替えされた $S^\#$ の依存対の有限または無限の列とする．代入 σ がすべての j に対して，$t_j^\#\sigma \xrightarrow{*}_R s_{j+1}^\#\sigma$ を満たすとする．このとき，$s_1^\# \to t_1^\#$, $s_2^\# \to t_2^\#, \cdots$ を σ による $(S^\#, R)$ **依存鎖**という．文脈から明らかな場合は $(S^\#, R)$ を省略することがある．

依存対について，次の定理が知られている．

定理 2 ([1])　R を TRS とする．無限の $(DP(R), R)$ 依存鎖が存在するならば，また，そのときに限り R は非停止性をもつ．

2.4 その他の定義

多重集合は要素に重複を許した集合である．要素間の狭義の順序 $<$ から定まる多重集合間の狭義の順序を $<_{mul}$ と記す．$<$

が整楚ならば $<_{mul}$ も整楚であることが知られている [3].

有向グラフとは集合 $\mathcal{N}$ と集合 $\mathcal{E}(\subseteq \mathcal{N}\times\mathcal{N})$ の対 $\langle \mathcal{N}, \mathcal{E}\rangle$ である．$\mathcal{N}$ の要素を**頂点**と呼ぶ．$\mathcal{E}$ の要素を**辺**と呼ぶ．$N_1, \cdots, N_n$ を頂点とし，各 i $(0 < i < n)$ について，頂点 N_i から頂点 N_{i+1} への辺があるとき，$N_1 \cdots N_n$ を**経路**という．$N_1 = N_n$ である経路を**サイクル**という．$(N', N) \in \mathcal{E}$ を満たす頂点 N' が存在しないとき，頂点 N を**ソース**と呼ぶ．

3. 順方向ナローイング解析の完全性

本節では，依存鎖とその代入に対してベーシックという性質を提案する．そして，強ループするベーシックな依存鎖をもつ右シャローな TRS では順方向ナローイング解析が完全であることを示す．

非停止性の証明の準備として，ループ [4] の定義と順方向ナローイング解析 [4] について述べる．

定義 3 $u_1^\# \to v_1^\#, \cdots, u_{n+1}^\# \to v_{n+1}^\#$ $(n \geqq 1)$ を δ による依存鎖とする．このとき，$u_1^\# \to v_1^\#$ と $u_{n+1}^\# \to v_{n+1}^\#$ が変数の名前替えのもとで同一規則であり，かつ $u_{n+1}^\#\delta = u_1^\#\delta\rho$ を満たす代入 ρ が存在するとき，この依存鎖は**ループ**するという．特に $\mathcal{D}om(\rho) = \emptyset$ であるとき，**強ループ**するという．

定義 4 (順方向ナローイング解析) $S^\#, R$ を TRS とする．$u^\# \to v^\# \in S^\#$ とする．このとき，ナローイング系列 $v^\# \overset{*}{\underset{R\cup S^\#,\tau}{\rightsquigarrow}} t^\#$ と $u^\#\tau\sigma\rho = t^\#\sigma$ を満たす代入 σ, ρ が存在するならば，順方向ナローイング解析に成功するという．

定理 5 ([4]) TRS $S^\#, R$ に対して順方向ナローイング解析が成功するならばループする $(S^\#, R)$ 依存鎖が存在する．

ループする依存鎖から無限の依存鎖を作ることができるので，定理 2 と定理 5 より順方向ナローイング解析を用いて非停止性を証明できることがわかる．

順方向ナローイング解析に成功する例を以下に述べる．

例 6 次の 2 つの TRS $S_1^\#, R_1$ を考える．

$$S_1^\# = \begin{cases} f^\#(x,x) \to g^\#(a,b) \\ g^\#(x,y) \to f^\#(x,y) \end{cases} \quad R_1 = \begin{cases} a \to b \end{cases}$$

$g^\#(x,y) \to f^\#(x,y) \in S_1^\#$ の右辺 $f^\#(x,y)$ をナローイングすると，

$$f^\#(x,y) \underset{\{x\mapsto x', y\mapsto x'\}}{\rightsquigarrow} g^\#(a,b) \rightsquigarrow g^\#(b,b)$$

であり，$\sigma = \{x' \mapsto b\}, \rho = \{\}$ と与えると，

$$f^\#(x,y)\{x \mapsto x', y \mapsto x'\}\sigma\rho = g^\#(b,b)\sigma$$

が成り立つ．

以下では，ベーシックに関する定義とその性質を述べる．

定義 7 (ベーシックな依存鎖) $c = u_1^\# \to v_1^\#, \cdots, u_n^\# \to v_n^\#$ を δ による依存鎖，$v_1^\#, \cdots, v_n^\#$ をシャローとする．任意の $i (0 < i < n)$ と $p \in \mathcal{V}Pos(v_i^\#)$ に対して，以下の条件を満たすとき，δ による依存鎖 c は**ベーシック**であるという．

- $(v_i^\#\delta)|_p = (u_{i+1}^\#\delta)|_p$

例 8 例 6 の TRS $S_1^\#, R_1$ を考える．δ によるベーシックでない依存鎖 c の例を以下に記す．

$$c = g^\#(x_1,y_1) \to f^\#(x_1,y_1)\ ,\ f^\#(x_2,x_2) \to g^\#(a,b)$$

$$\delta = \{x_1 \mapsto a\ ,\ x_2 \mapsto b\ ,\ y_1 \mapsto b\}$$

$f^\#(x_1,y_1)\delta|_1 = a \neq b = f^\#(x_2,x_2)\delta|_1$ であることから，(c,δ) はベーシックでない．一方で，次の代入 δ' による依存鎖 c はベーシックである．

$$\delta' = \{x_1 \mapsto b\ ,\ x_2 \mapsto b\ ,\ y_1 \mapsto b\}$$

補題 9 (ベーシックの性質) R を TRS，$S^\#$ は右シャローな TRS とする．$u_1^\# \to v_1^\#, \cdots, u_n^\# \to v_n^\#$ を δ によるベーシックな $(S^\#, R)$ 依存鎖とする．このとき任意の i $(0 < i < n)$ に対してある項 $t^\#$ が存在して

$$v_i^\# \xrightarrow[R]{*} t^\#\ ,\ t^\#\delta = u_{i+1}^\#\delta$$

が成り立つ．

<u>証明</u> $v_i^\# = f^\#(t_1, \cdots, t_m)$ とする．$S^\#$ が右シャローより，$v_i^\#$ はシャローであることから，$t_1, \cdots, t_m \in \mathcal{V} \cup \mathcal{T}(\mathcal{F})$ である．ベーシックな依存鎖の定義より，$\forall p \in \mathcal{V}Pos(v_i^\#).\ (v_i^\#\delta)|_p = (u_{i+1}^\#\delta)|_p$ が成り立つことから，各 $t_1, \cdots, t_m$ について以下が成り立つ．

- $t_j \in \mathcal{V}$ のとき: $t_j\delta = u_{i+1}^\#\delta|_j$
- $t_j \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ のとき: $\forall\theta.\ t_j\theta \xrightarrow[R]{*} u_{i+1}^\#\delta|_j$

よって

$$t^\# = f^\#(t'_1, \cdots, t'_m)\ ,\ t'_j = \begin{cases} t_j & \text{if } t_j \in \mathcal{V} \\ u_{i+1}^\#\delta|_j & \text{otherwise} \end{cases}$$

と与えると，

$$v_i^\# \xrightarrow[R]{*} t^\#\ ,\ t^\#\delta = u_{i+1}^\#\delta$$

が成り立つ． □

補題 10 R を TRS，$S^\#$ は右シャローな TRS とする．$u_1^\# \to v_1^\#, u_2^\# \to v_2^\#, \cdots, u_n^\# \to v_n^\#$ $(n > 1)$ を δ による各規則に変数の重複のないベーシックな $(S^\#, R)$ 依存鎖とする．このとき，ある代入 τ, σ と項 $t^\#$ が存在し，以下の 5 つが成り立つ．

(1) $\tau\sigma = \delta$

(2) $v_1^\# \overset{*}{\underset{R\cup S^\#,\tau}{\rightsquigarrow}} t^\#$

(3) $t^\#\sigma = u_n^\#\sigma$

(4) $\mathcal{D}om(\tau) \subseteq \mathcal{V}ar(u_1^\#, \cdots, u_{n-1}^\#)$

(5) $\mathcal{V}ar(t^\#) \subseteq \mathcal{V}ar(u_1^\#, \cdots, u_{n-1}^\#)$

<u>証明</u> n に関する帰納法で示す．

- $n = 2$ のとき 補題 9 より $v_1^\# \xrightarrow[R]{*} t^\#$ と $t^\#\delta = u_2^\#\delta$ が成

り立つため $\tau := \{\}$，$\sigma := \delta$ と与えることで (1) から (4) は明らかに成り立つ．

- $n > 2$ のとき　帰納法の仮定よりある代入 τ', σ' と項 $t'^{\#}$ について以下の 5 つが成り立つ．

(1') $\tau'\sigma' = \delta$

(2') $v_1^{\#} \overset{*}{\underset{R \cup S^{\#}, \tau'}{\rightsquigarrow}} t'^{\#}$

(3') $t'^{\#}\sigma' = u_{n-1}^{\#}\sigma'$

(4') $\mathcal{D}om(\tau') \subseteqq \mathcal{V}ar(u_1^{\#}, \cdots, u_{n-2}^{\#})$

(5') $\mathcal{V}ar(t'^{\#}) \subseteqq \mathcal{V}ar(u_1^{\#}, \cdots, u_{n-2}^{\#})$

(3') より $t'^{\#}$ と $u_{n-1}^{\#}$ は単一化可能であることから，定理 1 より，$\mathcal{D}om(\theta) \subseteqq \mathcal{V}ar(t'^{\#}) \cup \mathcal{V}ar(u_{n-1}^{\#})$ を満たす最汎単一化子 $\theta = mgu(t'^{\#}, u_{n-1}^{\#})$ が存在する．θ の最汎性から $\theta\sigma = \sigma'$ となる σ が存在する．よって $t'^{\#} \underset{S^{\#}, \theta}{\rightsquigarrow} v_{n-1}^{\#}\theta$ が成り立つ．$\tau = \tau'\theta$ と与えると，(2') と $t'^{\#} \underset{S^{\#}, \theta}{\rightsquigarrow} v_{n-1}^{\#}\theta$ より，$v_1^{\#} \overset{*}{\underset{R \cup S^{\#}, \tau}{\rightsquigarrow}} v_{n-1}^{\#}\theta$ が成り立つ．一方，(1') より，

$$\tau\sigma = \tau'\theta\sigma = \tau'\sigma' = \delta$$

であり，(1) が成り立つ．

また，補題 9 より，ある項 $t''^{\#}$ が存在し，$v_{n-1}^{\#} \overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}} t''^{\#}$，$t''^{\#}\delta = u_n^{\#}\delta$ が成り立つ．$t^{\#} := t''^{\#}\theta$ と与えると $v_{n-1}^{\#}\theta \overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}} t''^{\#}\theta = t^{\#}$ が成り立つ．よって，(2) $v_1^{\#} \overset{*}{\underset{R \cup S^{\#}, \tau}{\rightsquigarrow}} t^{\#}$ が成り立つ．

次に (3)$u_n^{\#}\sigma = t^{\#}\sigma$ を示す．$\tau = \tau'\theta$ より，$\mathcal{D}om(\tau) \subseteqq \mathcal{D}om(\tau') \cup \mathcal{D}om(\theta)$ が成り立つ．(4') と $\mathcal{D}om(\theta) \subseteqq \mathcal{V}ar(t'^{\#}) \cup \mathcal{V}ar(u_{n-1}^{\#})$ より $u_n^{\#} = u_n^{\#}\tau'\theta$ が成り立つことと $\tau = \tau'\theta$ から，$u_n^{\#}\sigma = u_n^{\#}\tau\sigma$ が成り立つ．また (1) より $u_n^{\#}\tau\sigma = u_n^{\#}\delta$ が，$u_n^{\#}\delta = t''^{\#}\delta$ と $\delta = \tau'\sigma' = \tau'\theta\sigma$ より $u_n^{\#}\delta = t''^{\#}\tau'\theta\sigma$ が成り立つ．よって

$$u_n^{\#}\sigma = t''^{\#}\tau'\theta\sigma$$

．さらに (4') と $\mathcal{V}ar(t^{\#}) \subseteqq \mathcal{V}ar(u_{n-1}^{\#})$ より $t''^{\#}\tau'\theta\sigma = t''^{\#}\theta\sigma$ が，$t^{\#} := t''^{\#}\theta$ より $t''^{\#}\theta\sigma = t^{\#}\sigma$ であり，

$$t''^{\#}\tau'\theta\sigma = t^{\#}\sigma$$

よって (3)$u_n^{\#}\sigma = t^{\#}\sigma$ が成り立つ．

一方，$\tau = \tau'\theta$ より $\mathcal{D}om(\tau) \subseteqq \mathcal{D}om(\tau') \cup \mathcal{D}om(\theta) \subseteqq \mathcal{V}ar(u_1^{\#}, \cdots, u_{n-1}^{\#})$ であることから (4) が成り立つ．

また，$v_{n-1}^{\#}\theta \overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}} t^{\#}$ より，

$$\mathcal{V}ar(t^{\#}) \subseteqq \mathcal{V}ar(u_{n-1}^{\#}) \cup \mathcal{VR}an(\theta) \subseteqq \mathcal{V}ar(u_1^{\#}, \cdots, u_{n-1}^{\#})$$

であり，(5) が成り立つ．□

定理 11　R を TRS，$S^{\#}$ を右シャローな TRS とする．このとき，ループするベーシックな $(S^{\#}, R)$ 依存鎖が存在するならば順方向ナローイング解析が成功する．

<u>証明</u>　$u_1^{\#} \rightarrow v_1^{\#}, \cdots, u_{n+1}^{\#} \rightarrow v_{n+1}^{\#}$ を δ によるループするベーシックな依存鎖 c とする．このとき，補題 10 より，ある項 $t^{\#}$ と代入 τ, σ が存在し以下の 4 つが成り立つ．

（1）　$\tau\sigma = \delta$

（2）　$v_1^{\#} \overset{*}{\underset{R \cup S^{\#}, \tau}{\rightsquigarrow}} t^{\#}$

（3）　$t^{\#}\sigma = u_{n+1}^{\#}\sigma$

（4）　$\mathcal{D}om(\tau) \subseteqq \mathcal{V}ar(u_1^{\#}, \cdots, u_n^{\#})$

(4) より $\mathcal{D}om(\tau) \cap \mathcal{V}ar(u_{n+1}^{\#}) = \emptyset$ であることより $u_{n+1}^{\#}\sigma = u_{n+1}^{\#}\tau\sigma$ である．また，c はループするので $u_{n+1}^{\#}\delta = u_1^{\#}\delta\rho$ を満たす代入 ρ が存在する．これらと (1) より $u_1^{\#}\tau\sigma\rho = u_{n+1}^{\#}\sigma$ が得られ，されに (3) より $u_1^{\#}\tau\sigma\rho = t^{\#}\sigma$ である．よって順方向ナローイング解析に成功する．□

この定理より，依存対が右シャローかつループするベーシックな依存鎖をもつ TRS のクラスにおいては順方向ナローイング解析が完全であることがわかる．

4. 引数伝播グラフ

本節では，強ループする依存鎖を解析するために導入された引数伝播グラフ [9] の定義とその性質を述べる．

$u_1^{\#} \rightarrow v_1^{\#}, \cdots, u_{n+1}^{\#} \rightarrow v_{n+1}^{\#}$ を δ による強ループする依存鎖とすると，$u_{n+1}^{\#}\delta = u_1^{\#}\delta$ である．$u_1^{\#} \rightarrow v_1^{\#}$ と $u_{n+1}^{\#} \rightarrow v_{n+1}^{\#}$ は変数の名前替えのもとで同一の規則であるので，これら 2 つの規則は変数も含めて全く同一の規則とみなす，すなわち，$u_1^{\#} \rightarrow v_1^{\#}, \cdots, u_n^{\#} \rightarrow v_n^{\#}, u_1^{\#} \rightarrow v_1^{\#}$ と置きかえることができる．以下 4 節と 5 節では，強ループする依存鎖を扱う場合には，これを前提として議論を進める．

定義 12 (引数伝播グラフ)　$S^{\#}$ を右シャローな TRS とする．$u_1^{\#} \rightarrow v_1^{\#}, \cdots, u_n^{\#} \rightarrow v_n^{\#}, u_1^{\#} \rightarrow v_1^{\#}$ を強ループする依存鎖とする．

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} = \ & \{(i, lhs, j) \mid 1 \leqq i \leqq n, 1 \leqq j \leqq arity(root(u_i^{\#}))\} \\
& \cup \{(i, rhs, j) \mid 1 \leqq i \leqq n, 1 \leqq j \leqq arity(root(v_i^{\#}))\} \\
& \cup \{(i, x) \mid x \in \mathcal{V}ar(u_i^{\#}) - \mathcal{V}ar(v_i^{\#})\} \\
\mathcal{E} = \ & \{((i, lhs, j), (i, rhs, j')) \mid v_i^{\#}|_{j'} \in \mathcal{V}ar(u_i^{\#}|_j)\} \\
& \cup \{((i, rhs, j), (i', lhs, j)) \mid i + 1 = i' \vee \\
& \qquad (i = n \wedge i' = 1)\} \\
& \cup \{((i, lhs, j), (i, x)) \mid x \in \mathcal{V}ar(u_i^{\#}|_j)\}
\end{aligned}$$

有向グラフ $G = \langle \mathcal{N}, \mathcal{E} \rangle$ をこの依存鎖の**引数伝播グラフ (APG)** という．また，この依存鎖が代入 δ によるものであるとき t_δ^N を次のように定義する．

$$t_\delta^N = \begin{cases} u_i^{\#}|_j\delta & \cdots N = (i, \mathrm{lhs}, j) \\ v_i^{\#}|_j\delta & \cdots N = (i, \mathrm{rhs}, j) \\ x\delta & \cdots N = (i, x) \end{cases}$$

例 13　例 8 の依存鎖 c の APG を図 1 に示す．

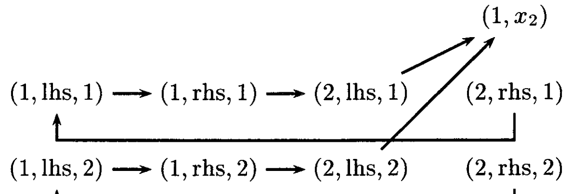

図 1. 依存鎖 c の APG

以下では，APG のサイクルに関する基本的な性質を示す．

定理 14 ([8]) $S^{\#}$ が右線形右シャローならば，頂点が APG のサイクルに含まれるとき，その頂点から出る辺がただ一つ存在する．

補題 15 (サイクルの性質) $(\mathcal{N},\mathcal{E})$ を APG とする．$(N,N')\in\mathcal{E}$ かつ $t_\delta^N \neq t_\delta^{N'}$ とする．このとき，$(N'',N)\in\mathcal{E}^*$ を満たすいかなる $N''\in\mathcal{E}$ もサイクルに属さない．

__証明__ 背理法で示す．N'' がサイクルに属すと仮定すると，定理 14 よりサイクルに属す頂点から出る辺はただ一つであるから，N もサイクルに属す．$t_\delta^N \neq t_\delta^{N'}$ より N はサイクルに属さないことに矛盾する．□

5. 右線形右シャロー TRS におけるベーシック依存鎖

本節では，右線形右シャローな依存対で構成される強ループする依存鎖が存在するならば，それをベーシックにする代入が存在することを示す．前節で証明した定理と組み合わせることで，依存対が右線形右シャローである TRS のクラスでは順方向ナローイング解析が完全であることを示す．

非停止性をもち，依存対が右シャローな TRS は強ループする依存鎖をもつことが知られている．

定理 16 ([8]) 無限の右シャローな依存鎖が存在するならば，強ループする依存鎖が存在する．

以下では，ベーシックでない代入 δ による強ループする依存鎖 c が存在するならば，δ' による依存鎖 c がベーシックかつ強ループする代入 δ' が構成できることを述べる．

定義 17 (代入の書換え) δ,δ' を代入とする．任意の変数 x に対して $x\delta \xrightarrow{*} x\delta'$ が成り立つとき，δ は δ' に**書換えられる**といい $\delta \xrightarrow{*} \delta'$ と記す．

補題 18 $\delta \xrightarrow{*} \delta'$ とする．このとき，任意の項 t に対して，$t\delta \xrightarrow{*} t\delta'$ が成り立つ．

__証明__ t の構造に関する帰納法で示す．

- $t\in\mathcal{V}$ のとき，$t\delta \xrightarrow{*} t\delta'$ が成り立つ．
- $t=f(t_1,\cdots,t_n)$ のとき，帰納法の仮定より $t_i\delta \xrightarrow{*} t_i\delta'$

が成り立つことから，

$$t\delta = f(t_1\delta,\cdots,t_n\delta) \xrightarrow{*} f(t_1\delta',t_2\delta',\cdots,t_n\delta') = t\delta'$$

が成り立つ．

□

補題 19 (書換え順の入れ替え) R を TRS，$S^{\#}$ を右線形右シャローな TRS とする．$u^{\#}\to v^{\#}\in S^{\#}$ とし，以下の 3 つが成り立つとする．

- $u^{\#}\delta \xrightarrow[u^{\#}\to v^{\#}]{} v^{\#}\delta \xrightarrow[R]{*} t^{\#}$
- $v^{\#}|_p \in \mathcal{V}$
- $v^{\#}\delta|_p \neq t^{\#}|_p$

このとき，ある代入 δ' が存在し，以下の 2 つが成り立つ．

- $u^{\#}\delta \xrightarrow[R]{*} u^{\#}\delta' \xrightarrow[u^{\#}\to v^{\#}]{} v^{\#}\delta' \xrightarrow[R]{*} t^{\#}$
- $v^{\#}\delta'|_p = t^{\#}|_p$

__証明__

δ' を次のように与える．

$$x\delta' = \begin{cases} t^{\#}|_p & \textbf{if} \quad x = v^{\#}|_p \\ x\delta & \textbf{otherwise} \end{cases}$$

$v^{\#}$ がシャローより，$|p|=1$．また，$v^{\#}$ が線形より，$\forall q\ (|q|=1\ ,\ q\neq p)$. $v^{\#}\delta'|_q \xrightarrow[R]{*} t^{\#}|_q$．よって $v^{\#}\delta'|_p = t^{\#}|_p$ より，$\forall q\ (|q|=1)$. $v^{\#}\delta'|_q \xrightarrow[R]{*} t^{\#}|_q$ が成り立つことから，

$$v^{\#}\delta' \xrightarrow[R]{*} t^{\#}$$

が成り立つ．

$v^{\#}\delta \xrightarrow[R]{*} t^{\#}$ と $v^{\#}|_p\in\mathcal{V}$ より，$v^{\#}|_p\delta \xrightarrow[R]{*} t^{\#}|_p$ から，$\delta \xrightarrow{*} \delta'$ である．よって補題 18 より

$$u^{\#}\delta \xrightarrow[R]{*} u^{\#}\delta'$$

が成り立つ．□

補題 20 補題 19 の操作が不可能な右線形右シャローな δ による依存鎖 c を考える．このとき，c は δ によるベーシックな依存鎖である．

__証明__ c を δ によるベーシックでない依存鎖とすると，補題 19 の操作が適用できることを示す．c は $u_1^{\#}\to v_1^{\#},\cdots,u_n^{\#}\to v_n^{\#}$ とかける．c がベーシックでないことから，ある $i\ (1\leqq i<n)$ と $p\in\mathcal{V}Pos(v_i^{\#})$ が存在し，$(v_i^{\#}\delta)|_p \neq (u_{i+1}^{\#}\delta)|_p$ が成り立つ．よって以下の 3 つが成り立つ．

- $u_i^{\#}\delta \xrightarrow[u_i^{\#}\to v_i^{\#}\in S^{\#}]{} v_i^{\#}\delta \xrightarrow[R]{*} u_{i+1}^{\#}\delta$
- $v_i^{\#}|_p\in\mathcal{V}$
- $v_i^{\#}\delta|_p \neq u_{i+1}^{\#}\delta|_p$

よって補題 19 を適用できる．□

以下では，強ループする依存鎖への補題 19 の操作の繰り返し適用が停止することを示す．そのための測度を定義する．

定義 21 (最長の距離) c を強ループする依存鎖とし，$(\mathcal{N},\mathcal{E})$ を c から作られる APG とする．関数 $\Phi(\mathcal{N}\to\mathbb{N})$ を次のように定義する．

$$\Phi(N) = \begin{cases} m & m = max(\{n \mid N'\in\mathcal{N}\ ,\ (N',N)\in\mathcal{E}^n\}) \\ & \text{が定義されるとき} \\ \text{未定義} & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

定義 22 (依存鎖の重み) (c,δ) を δ による強ループする依存鎖とする．$(\mathcal{N},\mathcal{E})$ を c から作られる APG とする．(c,δ) の重み $\|(c,\delta)\|$ を以下のように多重集合で定義する．

$$\|(c,\delta)\| = \{\!\{\Phi((i,\mathrm{rhs},j)) \mid ((i,\mathrm{rhs},j),N') \in \mathcal{E}\ ,\ t_\delta^{(i,\mathrm{rhs},j)} \mp t_\delta^{N'}\}\!\}$$

補題 15 より (c,δ) の重み $\|(c,\delta)\|$ は自然数の多重集合であることがわかる．

例 23 例 6 の TRS $S_1^\#, R_1$ を考える．δ による強ループする依存鎖 (c,δ) の例とその重み $\|(c,\delta)\|$ を以下に記す．

$$\begin{aligned} c &= g^\#(x_1,y_1) \to f^\#(x_1,y_1)\ ,\ f^\#(x_2,x_2) \to g^\#(a,b)\ ,\\ &\quad\ g^\#(x_1,y_1) \to f^\#(x_1,y_1) \\ \delta &= \{x_1 \mapsto a\ ,\ x_2 \mapsto b\ ,\ y_1 \mapsto b\} \end{aligned}$$

$t_\delta^{(1,\mathrm{rhs},1)} \mp t_\delta^{(2,\mathrm{lhs},1)}$ より $\|(c,\delta)\| = \{\!\{2\}\!\}$ である．

補題 24 (APG の保存と重みの減少) (c,δ) を δ による強ループする依存鎖とする．c に補題 19 の操作を行ってできた依存鎖を c'，その代入を δ' とする．このとき，$c = c'$，すなわち APG は変化せず，c' も強ループする．また，$\|(c,\delta)\| >_{mul} \|(c',\delta')\|$ が成り立つ．

<u>**証明**</u> 補題 19 の操作では依存対同士の書換え順が入れ替わらないことから，$c = c'$ は明らか．δ による強ループする依存鎖 c を $u_1^\# \to v_1^\#, \cdots, u_n^\# \to v_n^\#, u_1^\# \to v_1^\#$ とし，その APG を $(\mathcal{N},\mathcal{E})$ とする．c に補題 19 を適用できたことから，ある辺 $(N,N') \in \mathcal{E}$ が存在し，(c,δ) において $t_\delta^N \mp t_\delta^{N'}$ が成り立ち，(c',δ') において $t_\delta^N = t_\delta^{N'}$ が成り立つ．よって $C_1 = \{\!\{\Phi(N)\}\!\}$ と与え，$C_2 = \{\!\{\Phi(N'') \mid (N'',N) \in \mathcal{E}^2\}\!\}$ と与えると，$\|(c,\delta)\| = C \cup C_1$，$\|(c',\delta')\| = C \cup C_2$ とかける．よって $C_1 >_{mul} C_2$ より $\|(c,\delta)\| >_{mul} \|(c',\delta')\|$ が成り立つ． □

補題 25 (c,δ) を δ による強ループする右線形右シャローな依存鎖とする．このとき，強ループするベーシックな依存鎖が存在する．

<u>**証明**</u> 補題 15 より (c,δ) の重みは有限であることから，補題 24，補題 20 より，(c,δ) から補題 19 の操作を有限回繰り返して作られる強ループするベーシックな依存鎖 (c',δ') が存在する． □

定理 26 R を TRS，$S^\#$ を右線形右シャローな TRS とする．このとき，無限の $(S^\#,R)$ 依存鎖が存在するならば順方向ナローイング解析が成功する．

<u>**証明**</u> 定理 16 より強ループする依存鎖が存在する．よって，補題 25 より強ループするベーシックな依存鎖 $u_1^\# \to v_1^\#, \cdots, u_n^\# \to v_n^\#$ とその代入 δ が存在することから，定理 11 より順方向ナローイング解析に成功する． □

この定理より，R が非停止性をもち依存対が右線形右シャローな TRS においては，その非停止性を順方向ナローイング解析で証明できることがわかる．よって，この TRS のクラスに対して順方向ナローイング解析は完全である．

6. 終わりに

本論文では，非停止性をもつ依存対が右線形右シャローである TRS は強ループするベーシックな依存鎖をもつことと，ループするベーシックな依存鎖が存在するならば順方向ナローイング解析で非停止性を証明可能であることを示した．

今後の課題としてベーシックの条件の緩和と，非停止性をもつならば強ループするベーシックな依存鎖が存在する TRS のクラスの発見が挙げられる．ベーシックの条件に関しては，本論文のベーシックの定義から依存鎖が右シャローという条件を取り除けると考えている．右シャローの条件は証明の簡略化を狙ったもので，書換え系列におけるベーシック [7] と同様の定義にすることで，順方向ナローイング解析が完全となるクラスの拡張が期待できる．強ループするベーシックな依存鎖が存在するクラスに関しては，本論文で用いた，依存対が右線形右シャローである TRS においては，停止性が決定可能であることが知られている [8]．強ループするベーシックな依存鎖が存在する TRS のより広いクラスを明らかにすることで，非停止性が証明可能となる TRS の新たなクラスの発見が期待できる．

謝辞：本研究は一部，科研費#20300010，#20500008，#21700011 の助成を受けたものである．

文献

[1] Arts, T. and Giesl, J.: Termination of term rewriting using dependency pairs. *Theoretical Computer Science*, Vol.236, No.(1-2), pp.133–178, 2000.

[2] Baader, F. and Nipkow, T.: Term Rewriting and All That, Cambridge University Press, 1998.

[3] Dershowitz, N. and Manna,Z.: Proving termination with multiset orderings. *Communications of the ACM*, Vol.22, No.8, pp.465–476, 1979.

[4] Giesl, J., Schneider-Kamp, P. and Thiemann, R.: Proving and Disproving Termination of Higher-Order Functions. *IN: PROC, 5TH FROCOS*, pp.216–231, 2005.

[5] Giesl, J., Schneider-Kamp, P. and Thiemann, R. AProVE 1.2: Automatic termination proofs in the dependency pair framework. In *Proc. of IJCAR 2006*, *Lecture Notes in Artificial Intelligence*. Vol.4130, pp.281–286. Springer-Verlag, 2006.

[6] Godoy, G., Huntingford, E. and Tiwari, A.: Termination of Rewriting Techniquies and Applications. *Lecture Notes in Computer Science*, Vol.4533, pp.200–213, 2007.

[7] Hullot, J.M.: Canonical Forms and Unification. Proceedings of the 5th Conference on Automated Deduction, *Lecture Notes in Computer Science*, Vol.87, pp.318–334, 1980.

[8] Uchiyama, K., Sakai, M., Sakabe, T.: Decidability of Termination and Innermost Termination for Term Rewriting Systems with Right-Shallow Dependency Pairs, *Institute of Electronics, Information and Communication Engineers*, VOL.E93-D, No.5, pp.935–962, 2010.

[9] Wang, Y. and Sakai, M.: Decidability of termination for semi-constructor TRSs, left-linear shallow TRSs and related systems. *17th International Conference on Rewriting Techniques and Applications*, *Lecture Notes in Computer Science*, Vol.4098, pp.343–356, 2006.