連続体の位相最適化問題に対する H^1 勾配法

H^1 Gradient Method for Topology Optimization Problems of Continua

[1] 畔上 秀幸, [2] 海津 聰

1) 名古屋大学, 2) 茨城大学

[1,*]Hideyuki AZEGAMI, [2]Satoshi KAIZU

1) Nagoya University, 2) Ibaraki University

*Email: azegami@is.nagoya-u.ac.jp

キーワード: 偏微分方程式, 境界値問題, 位相最適化問題, 密度法, SIMP 法, 勾配法, H^1 勾配法

Keywords: Partial differential equation, Boundary value problem, Topology optimization problem, Density method, SIMP method, Gradient method, H^1 Gradient method

1 はじめに

偏微分方程式の境界値問題が定義された領域の最適な孔配置を求める問題は，連続体の位相最適化問題と呼ばれている (1),(2)．著者らは，昨年，偏微分方程式の係数関数に密度のべき乗を乗じた境界値問題に対して，最適な密度を求める問題（SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) 問題）に注目し，解の存在と最適な密度変動を求める方法を H^1 勾配法と呼んで提案した (3),(4)．数値検証により密度に関する数値不安定が解消された良好な結果が得られている (5),(6)．

本研究では，昨年示した H^1 勾配法について，次の点に関して再考したい．昨年の議論では，密度の値域に関して制約を課していた．しかしながら， H^1 勾配法ではその制約を無視していた．本研究では，昨年の議論を再検討し， H^1 勾配法を変分不等式で記述し直す．

2 SIMP 位相最適化問題

本稿では次の境界値問題を考える．

問題 2.1 (BV(ρ)) 有界領域 $\Omega \in \mathbf{R}^d$ $(d = 2, 3)$ の境界 Γ は Lipschitz 境界とする．ある正定数 M と小さな正定数 $\underline{\rho} > 0$ に対して密度 $\rho \in \mathcal{W}$ とする．

$$\mathcal{W} = \left\{ \rho \in H^1(\Omega) \;\middle|\; \underline{\rho} \le \rho \le 1,\ \|\rho\|_{H^1} \le M \right\} \tag{2.1}$$

べき指数 p は次式を満たすと仮定する．

$$p > 1 \tag{2.2}$$

$F \in L^2(\Omega)$ を既知とするとき，次式を満たす $u : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ を求めよ．

$$-\nabla \cdot (\rho^p \nabla u) = \rho F \quad \text{in } \Omega \tag{2.3}$$

$$u = 0 \quad \text{on } \Gamma \quad \square \tag{2.4}$$

目的汎関数 $J^{(0)}(\rho, u)$ と制約汎関数 $J^{(l)}(\rho, u)$ $\left(l = 1, 2, \cdots, \bar{l}\right)$ を次のように定義する．

$$J^{(l)}(\rho, u) = \int_\Omega g^{(l)}(\rho, u)\, \mathrm{d}\Omega \tag{2.5}$$

ただし，$g^{(l)} \in \mathcal{G} = \left\{ g^{(l)} \in W^{2,\infty}\left(\mathbf{R}^2\right) \;\middle|\; g^{(l)}(\underline{\rho}, 0) = 0 \right\}$ あるいは $g^{(l)} \in \left\{ g^{(l)} \in C^{1,1}\left(\mathbf{R}^2\right) \;\middle|\; g^{(l)}(\underline{\rho}, 0) = 0 \right\}$ と仮定する．

SIMP 位相最適化問題を次のように定義する．

問題 2.2 (TO) 式 (2.1), (2.2) を満たす $\mathcal{W}$, p とする．ある $\rho \in \mathcal{W}$ に対して問題 (2.3), (2.4) の解を $u(\rho) \in H^1_0(\Omega)$ とする．このとき，次のような $\rho \in \mathcal{W}$ を求めよ．

$$\min_{\rho \in \mathcal{W}} \left\{ J^{(0)}(\rho, u) \;\middle|\; J^{(l)}(\rho, u) \le 0 \ \left(l = 1, 2, \cdots, \bar{l}\right) \right\} \quad \square \tag{2.6}$$

注意 2.1 $\mathcal{W}$ は H^1 弱コンパクトである．したがって，問題 2.2 (**TO**) の最適解 $\rho^* \in \mathcal{W}$ が存在するためには次の条件が必要である．

(1) $\rho_n \to \rho_0$ in $H^1(\Omega)$ (弱) のとき，境界値問題 2.1 (**BV**(ρ_n)) の解について $u(\rho_n) \to u(\rho_0)$ in $H^1(\Omega)$ (弱) である．

(2) $J^{(l)}(\rho, u)$ $\left(l = 0, 1, 2, \cdots, \bar{l}\right)$ は H^1 連続である．

$$\lim_{\rho_n \to \rho_0 \text{ in } H^1(\Omega)} J^{(l)}(\rho_n; u(\rho_n)) = J^{(l)}(\rho_0; u(\rho_0))$$

(2) のために $g^{(l)} \in \mathcal{G}$ を仮定した．□

3 最適解の存在

注意 2.1 (1) に対して次の結果を得る (3),(4)．

定理 3.1 (最適解の存在) p が式 (2.2) を満たすとき，問題 2.1 (**BV**(ρ_n)) の解の部分列 $\{\rho_{n_m}\}_m$, $\rho_0 \in \mathcal{W}$ および $u_0 \in H^1_0(\Omega)$ が存在し，次の関係を満たす．

$$\rho^p_{n_m} \to \rho^p_0 \quad L^2(\Omega)\ (\text{強}) \tag{3.1}$$

$$u_{n_m} \to u_0 \quad H^1_0(\Omega)\ (\text{弱}) \tag{3.2}$$

$$\rho_{n_m} F \to \rho_0 F \quad L^2(\Omega)\ (\text{強}) \tag{3.3}$$

また， u_0 は 問題 2.1 (**BV**(ρ_0)) の一意解である．□

4 Gâteaux 変分

密度変動 $\dot{\rho} \in H^1(\Omega)$ に対する u の Gâteaux 変分 $\dot{u}$ を次のように定義する．十分小さな $\epsilon_1 > 0$ があり，$\rho, \rho + \epsilon\dot{\rho} \in \mathcal{W}$ $(0 < \epsilon \le \epsilon_1)$ に対して

$$\lim_{\epsilon \to +0} \frac{u(\rho + \epsilon\dot{\rho}) - u(\rho)}{\epsilon} = \dot{u} \quad \text{in } H^1(\Omega)\ (\text{強}).$$

$\dot{u}$ について次の結果を得る．

補題 4.1 (u の Gâteaux 変分) 式 (2.1), (2.2) を満たす p, $\mathcal{W}$ のとき，密度変動 $\dot{\rho} \in H^1(\Omega)$ に対する u の Gâteaux 変分 $\dot{u}$ は次の問題の一意解である．

$$-\nabla \cdot \left(p\rho^{p-1}\dot{\rho}\nabla u\right) - \nabla \cdot (\rho^p \nabla \dot{u}) = \dot{\rho} F \text{ in } \Omega \tag{4.1}$$

$$\dot{u} = 0 \text{ in } \Gamma \quad \square \tag{4.2}$$

注意 4.1 変数 ρ が集合 $\mathcal{W}$ の内点であれば，変数 ρ に関して $\dot{u}$ は線形作用素となる．このとき，$\dot{u}$ は Gâteaux 微分と呼ばれる．ρ が $\mathcal{W}$ の境界点であれば非線形作用素となるが， Gâteaux 変分の定義は有効である．□

随伴問題を次のように定義する．

問題 4.1 (AD) $\partial g^{(l)}/\partial u \left(l = 0, 1, 2, \cdots, \bar{l}\right)$ を既知として，次式を満たす $v^{(l)} : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ を求めよ．

$$-\nabla \cdot \left(\rho^p \nabla v^{(l)}\right) = \frac{\partial g^{(l)}}{\partial u} \quad in\ \Omega \tag{4.3}$$

$$v^{(l)} = 0 \quad on\ \Gamma \tag{4.4}$$

補題 4.1 と問題 4.1 (**AD**) より，次の結果を得る [3],[4]．

補題 4.2 式 (2.1), (2.2) を満たす p, $\mathcal{W}$ および $g^{(l)} \in \mathcal{G}$ $\left(l = 0, 1, 2, \cdots, \bar{l}\right)$ のとき，ある $\rho \in \mathcal{W}$ からの密度変動 $\dot{\rho} \in H^1(\Omega)$ に対する汎関数 $j^{(l)}(\epsilon) = J^{(l)}(\rho + \epsilon\dot{\rho}, u)$ $\left(l = 0, 1, 2, \cdots, \bar{l}\right)$ の Gâteaux 変分は，問題 4.1 (**AD**) の解 $v^{(l)}$ を用いて，次のような $G_\rho^{(l)}$ となる．

$$j^{(l)}(\epsilon) = j^{(l)}(0) + \epsilon \int_\Omega G_\rho^{(l)} \dot{\rho}\, \mathrm{d}\Omega + o(\epsilon) \tag{4.5}$$

$$G_\rho^{(l)} = \frac{\partial g^{(l)}}{\partial \rho} - p\rho^{p-1}\left(\nabla v^{(l)} \cdot \nabla u\right) + F v^{(l)} \quad \square \tag{4.6}$$

$G_\rho^{(l)}$ は $J^{(l)}(\rho, u(\rho))$ の Gâteaux 変分である．$G_\rho^{(l)}$ を密度勾配と呼ぶ．

5 H^1 勾配法

密度勾配 $G_\rho^{(l)}$ が計算できれば，密度の許容集合 $\mathcal{W}$ が属する $H^1(\Omega)$ における勾配法が適用できる．昨年の議論では，ρ が $\mathcal{W}$ の内点であることを前提としていた [3],[4]．本稿では，ρ が $\mathcal{W}$ の境界点であることを仮定して，H^1 勾配法を記述する．

密度の許容集合 $\mathcal{W}$ は凸集合である．ρ は $\mathcal{W}$ の境界点であると仮定する．このとき，次の 2 つの場合が考えられる．

(1) $\left(G_\rho^{(l)}, \rho_1 - \rho\right)_{L^2(\Omega)} \geq 0 \quad \forall \rho_1 \in \mathcal{W}$

(2) $\exists \rho_1 \in \mathcal{W} : \left(G_\rho^{(l)}, \rho_1 - \rho\right)_{L^2(\Omega)} < 0$

(1) の場合，ρ が問題 2.2 (**TO**) の局所解である．$J^{(l)}(\rho, u)$ $\left(l = 0, 1, 2, \cdots, \bar{l}\right)$ が凸作用素の場合は最適解となる．

(2) の場合，ρ は局所解ではない．このとき，H^1 勾配法による密度の更新が必要である．$H^1(\Omega)$ におけるある強圧的な双 1 次形式 $b_H(\cdot, \cdot)$ を考える．例えば，内積 $(\cdot, \cdot)_{H^1(\Omega)}$ を用いて次式を考えることができる．

$$b_H(y, z) = (y, z)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega (\nabla y \cdot \nabla z + yz)\ \mathrm{d}\Omega \tag{5.1}$$

$J^{(l)}(\rho, u) \left(l = 0, 1, 2, \cdots, \bar{l}\right)$ に対する H^1 勾配法を次のように定義する．

定義 5.1 (SIMP 問題の H^1 勾配法) ある $\rho \in \mathcal{W}$ に対して式 (4.6) の $G_\rho^{(l)}$ は既知とする．次式を満たす $\rho_G^{(l)} \in \mathcal{W}$ を求め， $\rho_G^{(l)} - \rho$ の方向に密度を更新する．ここで，$b_H(\cdot, \cdot)$ は $H^1(\Omega)$ におけるある強圧的な双 1 次形式とする．

$$b_H(\rho_G^{(l)} - \rho, \rho_1 - \rho_G^{(l)}) \geq -\left(G_\rho^{(l)}, \rho_1 - \rho_G^{(l)}\right)_{L^2(\Omega)}$$
$$\forall \rho_1 \in \mathcal{W} \tag{5.2}$$

この H^1 勾配法の解について次の定理を得る．

定理 5.1 (H^1 勾配法の解) 式 (2.1), (2.2) を満たす $p, \mathcal{W}$ および $g^{(l)} \in \mathcal{G}$ のとき，ある $\rho \in \mathcal{W}$ に対して式 (4.6) の $G_\rho^{(l)}$ が与えられ， $H^1(\Omega)$ におけるある強圧的な双 1 次形式 $b_H(\cdot, \cdot)$ を用いた式 (5.2) の解 $\rho_G^{(l)} \in \mathcal{W}$ が一意に存在する．□

変分不等式 (5.2) に対して処罰法を用いることにすれば，多制約問題 2.2 (**TO**) は次のようにして解くことができる．$\epsilon > 0$ に対して，$\rho_G \in \mathcal{W}$ を次のように求める．

$$\rho_G = \lim_{\epsilon \to +0} \rho_G^\epsilon$$

ここで，$\rho_G^\epsilon - \rho = \rho_G^{(0)\epsilon} - \rho + \sum_{l=1}^{\bar{l}} \lambda^{(l)\epsilon} \left(\rho_G^{(l)\epsilon} - \rho\right) \in H^1(\Omega)$ を次式で解く．

$$b_H\left(\rho_G^\epsilon - \rho, \rho_1\right) + \frac{1}{\epsilon}\left(\rho_G^\epsilon - P_{\mathcal{W}}\left(\rho_G^\epsilon\right), \rho_1\right)_{L^2(\Omega)}$$
$$= -\left(G_\rho^{(0)} + \sum_{l=1}^{\bar{l}} \lambda^{(l)\epsilon} G_\rho^{(l)}, \rho_1\right)_{L^2(\Omega)} \quad \forall \rho_1 \in H^1(\Omega) \tag{5.3}$$

$P_{\mathcal{W}}$ は H^1 閉凸集合 $\mathcal{W}$ への直交射影作用素である．Lagrange 乗数 $\lambda^{(l)\epsilon} \geq 0 \left(l = 1, 2, \cdots, \bar{l}\right)$ は Karush-Kuhn-Tucker 条件で決定する．

参考文献

[1] M. P. Bendsøe and O. Sigmund. *Topology optimization : theory, methods and applications*. Springer, Berlin ; Tokyo, 2003.

[2] J. Haslinger and R. A. E. Mäkinen. *Introduction to Shape Optimization: Theory, Approximation, and Computation*. SIAM, 2003.

[3] H. Azegami and S. Kaizu. Smoothing gradient method for non-parametric shape and topology optimization problems. In *Proceedings of the 7th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-7)(CD-ROM)*, pp. 1–10, 2007.

[4] 畔上秀幸, 海津聰. 連続体の位相最適化問題について. 日本応用数理学会 2007 年度年会講演予稿集, pp. 210–211, 2007.

[5] 野々川舞, 笹岡竜, 竹内謙善, 畔上秀幸. 連続体の位相最適化問題に関する平滑化解法. 第 56 回理論応用力学講演会講演論文集, pp. 295–296, 2007.

[6] 竹内謙善, 古屋耕平. H1 勾配法による位相最適化の一実装. 日本応用数理学会 2008 年研究部会連合発表会にて発表, 首都大学東京南大沢キャンパス, 2008.