楽器のための形状最適化問題

Shape Optimization Problem for Acoustic Musical Instruments

1) 中村有里, 2) 新谷浩平, 3) 青山大樹, 4) 畔上秀幸

1–4) 名古屋大学 情報科学研究科

1,*) Yuri NAMKAMURA, Kouhei SHINTANI, Taiki AOYAMA, Hideyuki AZEGAMI

1) Nagoya University, Graduate School of Information Science

*Email: nakamura@az.cs.is.nagoya-u.ac.jp

キーワード: 偏微分方程式, 境界値問題, 音場構造連成系, 形状最適化, H^1 勾配法

Keywords: Partial differential equation, Boundary value problem, Acoustic-structural interaction system, Shape optimization, H^1 Gradient method

1　はじめに

管弦打楽器の形状を設計対象にした数理問題の構築と解法について考えたい．楽器の性能評価は感性が関与することから容易ではない．しかしながら，楽器は演奏者が与えた刺激に対して音を放射するシステムである．そこで，一定の刺激に対して放射音圧を最大化させることを考えれば，数理的な扱いは可能となる．

本研究では，楽器は線形弾性体であると仮定し，それを音場の流体領域が囲む連成系を考える．刺激は楽器に外力として与え，放射音圧の評価には，球状音場の外側境界と特定の周波数領域における音圧パワーの積分値を用いる．

2　楽器の放射音問題

図 1 のような系を考える．有界な Lipshitz 境界 Γ を有する領域 $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ $(d = 2, 3)$ は， Lipshitz 境界 Γ^{s} を有する線形弾性体の領域 Ω^{s} と音場の流体領域 $\Omega^{\mathrm{a}} = \Omega \setminus \Omega^{\mathrm{s}}$ で構成されている．また，時間領域 $\mathbf{R}$ とする．

次の連成境界値問題を考える．

問題 2.1 (BV(Ω)) 外力 $\boldsymbol{P} = \left(P^i\right)_i :\ \Gamma^P \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}^d$ $(\Gamma^P \subset \Gamma^{\mathrm{s}}, \Gamma_0 \subset \Gamma^{\mathrm{s}}, \Gamma^P \cap \Gamma_0 = \emptyset)$ を既知として，速度ポテンシャル [*1] $\phi :\ \Omega^{\mathrm{a}} \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ と変位 $\boldsymbol{u} = (u_i)_i :\ \Omega^{\mathrm{s}} \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}^d$ を次式を満たすように求めよ．

$$\frac{\rho^{\mathrm{a}}}{c^2}\phi_{,tt} - \rho^{\mathrm{a}}\phi_{,ii} = 0 \quad \text{in } \Omega^{\mathrm{a}} \times \mathbf{R} \tag{2.1}$$

$$\rho^{\mathrm{a}}\phi_{,i}\nu_i^{\mathrm{a}} + \rho^{\mathrm{a}}u_{i,t}\nu_i^{\mathrm{a}} = 0 \quad \text{on } (\Gamma^{\mathrm{s}} \setminus \Gamma_0) \times \mathbf{R} \tag{2.2}$$

$$\phi_{,i}\nu_i^{\mathrm{a}} = 0 \quad \text{on } \Gamma_0 \times \mathbf{R} \tag{2.3}$$

$$\frac{\rho^{\mathrm{a}}}{c}\phi_{,t} + \rho^{\mathrm{a}}\phi_{,i}\nu_i^{\mathrm{a}} = 0 \quad \text{on } \Gamma \times \mathbf{R} \tag{2.4}$$

$$\rho^{\mathrm{s}}u_{i,tt} - \sigma^{ij,j}(\boldsymbol{u}) = 0 \quad \text{in } \Omega^{\mathrm{s}} \times \mathbf{R} \tag{2.5}$$

$$\sigma^{ij}(\boldsymbol{u})\nu_j^{\mathrm{s}} + \rho^{\mathrm{a}}\phi_{,t}\nu_i^{\mathrm{s}} = 0 \quad \text{on } \left(\Gamma^{\mathrm{s}} \setminus \Gamma^P \cup \Gamma_0\right) \times \mathbf{R} \tag{2.6}$$

$$u_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_0 \times \mathbf{R} \tag{2.7}$$

$$\sigma^{ij}(\boldsymbol{u})\nu_j^{\mathrm{s}} + \rho^{\mathrm{a}}\phi_{,t}\nu_i^{\mathrm{s}} = P^i \quad \text{on } \Gamma^P \times \mathbf{R} \tag{2.8}$$

ただし，$c, \rho^{\mathrm{a}}, \rho^{\mathrm{s}}$ はそれぞれ音速，流体の密度，線形弾性体の密度を表す正定数である．$\nu^{\mathrm{a}} = \left(\nu_i^{\mathrm{a}}\right)_i$ は Ω^{a} の外向き単位法線である．$\sigma^{ij}(\boldsymbol{u}) = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{u})$, $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) = 1/2\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$, $C^{ijkl} = C^{klij} = C^{jikl}$, $\exists c_0 > 0$: $c_0\xi_{ij}\xi_{ij} \leq C^{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij}$ $\forall \boldsymbol{\xi} \in \left\{\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^{d\times d} \middle| \ \xi_{ij} = \xi_{ji}\right\}$ とする． □

[*1] 音圧 p と次の関係が成り立つ． $p = \rho^{\mathrm{a}}\phi_{,t}$

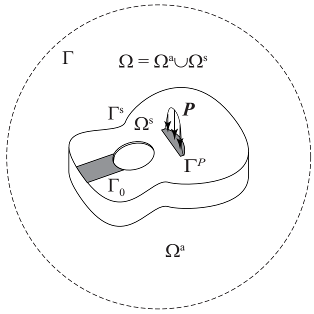

Fig. 1 A model for acoustic musical instruments

本稿では総和規約を用いる．式 (2.1) と (2.4) の Fourier 変換はそれぞれ Helmholz 方程式，Sommerfeld の放射条件と呼ばれる．

外力 $\boldsymbol{P}$ の Fourier 変換 $\hat{\boldsymbol{P}}$ を次のように定義する．

$$\hat{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{x}; \mathrm{j}\omega) = \hat{\boldsymbol{P}}^*(\boldsymbol{x}; -\mathrm{j}\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{2.9}$$

ただし，j は単位虚数，$(\cdot)^*$ は複素共役を表す．外力の周波数領域を (ω_1, ω_2) に限定した場合，問題 2.1 (**BV**(Ω)] より次のような周波数応答の弱形式を得る．

問題 2.2 (FR(Ω)) 外力 $\hat{\boldsymbol{P}} \in \left(L^2\left(\Gamma^P \times (\omega_1, \omega_2)\right)\right)^d$ を既知として，$\left(\hat{\phi}, \hat{\boldsymbol{u}}\right) \in \hat{\Phi} \times \hat{U}$ を次式を満たすように求めよ．

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} A\left(\hat{\phi}, \hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\varphi}^*, \hat{\boldsymbol{\nu}}^*; \mathrm{j}\omega\right) \mathrm{d}\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left(\hat{\boldsymbol{P}}, \hat{\boldsymbol{\nu}}^*\right)_{(L^2(\Gamma^P))^d} \mathrm{d}\omega$$
$$\forall (\hat{\varphi}, \hat{\boldsymbol{\nu}}) \in \hat{\Phi} \times \hat{U} \tag{2.10}$$

ここで，$A\left(\hat{\phi}, \hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\varphi}^*, \hat{\boldsymbol{\nu}}^*; \mathrm{j}\omega\right)$ は $\left(\hat{\phi}, \hat{\boldsymbol{u}}\right)$, $(\hat{\varphi}^*, \hat{\boldsymbol{\nu}}^*)$ についての双 1 次形式である． $\hat{\Phi}, \hat{U}$ は次式で定義する．

$$\hat{\Phi} = H^1(\Omega^{\mathrm{a}} \times (\omega_1, \omega_2)) \tag{2.11}$$

$$\hat{U} = \left\{\boldsymbol{\nu} \in \left(H^1\left(\Omega^{\mathrm{s}} \times (\omega_1, \omega_2)\right)\right)^d \middle| \ \boldsymbol{\nu} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_0\right\} \ \square \tag{2.12}$$

一方，固有振動の弱形式は次のようになる．

問題 2.3 (EV(Ω)) r 次の固有値 $\lambda^{(r)} = -\sigma^{(r)} \pm \mathrm{j}\omega^{(r)}$ と固有振動モード $\left(\hat{\phi}^{(r)}, \hat{\boldsymbol{u}}^{(r)}\right) \in \Phi_0 \times U_0$ $(r = 1, 2, \cdots)$ を次式を満たすように求めよ．

$$A\left(\hat{\phi}^{(r)}, \hat{\boldsymbol{u}}^{(r)}, \hat{\varphi}^*, \hat{\boldsymbol{\nu}}^*; \lambda^{(r)}\right) = 0 \quad \forall (\hat{\varphi}, \hat{\boldsymbol{\nu}}) \in \Phi_0 \times U_0 \tag{2.13}$$

ここで，Φ_0 と U_0 は次のように定義する．

$$\Phi_0 = H^1\left(\Omega^{\mathrm{a}}\right) \tag{2.14}$$

$$U_0 = \left\{\boldsymbol{\nu} \in \left(H^1\left(\Omega^{\mathrm{s}}\right)\right)^d \middle| \ \boldsymbol{\nu} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_0\right\} \quad \square \tag{2.15}$$

3 形状最適化問題

楽器のための形状最適化問題を考えよう．放射音圧積分 $J^{(0)}$, 固有振動数制約 $J^{(l)}\left(l=1,2,\cdots,\bar{l}\right)$, 楽器の体積制約 $J^{(\bar{l}+1)}$ を次のように定義する．

$$J^{(0)}\left(\Omega,\hat{\phi}\right)=\int_{\omega_1}^{\omega_2}-\omega^2\rho^{a2}\left(\hat{\phi},\hat{\phi}^*\right)_{L^2(\Gamma)}\,d\omega \tag{3.1}$$

$$J^{(l)}\left(\Omega,\lambda^{(r_l)}\right)=\lambda^{(r_l)2}-\lambda_0^{(r_l)2}\quad\left(l=1,2,\cdots,\bar{l}\right) \tag{3.2}$$

$$J^{(\bar{l}+1)}(\Omega)=m_0-\int_{\Omega^s}d\Omega \tag{3.3}$$

ここで，$\lambda_0^{(r_l)}\left(l=1,2,\cdots,\bar{l}\right)$, m_0 は正定数である．

Lipshitz 境界を有する有界領域集合 $\mathcal{W}$ はコンパクトである [1]．したがって，ある領域 $\Omega\in\mathcal{W}$ に対して，次のような連続な領域変動 $\boldsymbol{\rho}\in\mathcal{U}=\left(C^{0,1}(\Omega)\right)^d$ を見つける問題を解いて，ある $\epsilon>0$ を用いて領域を $\Omega^\epsilon=\{x^\epsilon\mid x^\epsilon=x+\epsilon\boldsymbol{\rho}\ \forall x\in\Omega,\ \boldsymbol{\rho}\in\mathcal{U}\}$ に変動させていけば最適な領域に到達できる．

問題 3.1 (SO(Ω)) ある $\Omega\in\mathcal{W}$ に対して問題 (2.2) (**FR**(Ω)), 問題 (2.3) (**EV**(Ω)) の解をそれぞれ $\left(\hat{\phi},\hat{\boldsymbol{u}}\right)\in\hat{\Phi}\times\hat{U}$, $\left(\hat{\phi}^{(r_l)},\hat{\boldsymbol{u}}^{(r_l)}\right)\in\Phi_0\times U_0\ \left(l=1,2,\cdots,\bar{l}\right)$ とする．このとき，次のような $\boldsymbol{\rho}\in\mathcal{U}$ を求めよ．

$$\min_{\boldsymbol{\rho}\in\mathcal{U}}\left\{J^{(0)}\left(\Omega,\hat{\phi}\right)\,\middle|\,J^{(l)}\left(\Omega,\lambda^{(r_l)}\right)=0\ \left(l=1,2,\cdots,\bar{l}\right),\right.$$
$$\left.J^{(\bar{l}+1)}(\Omega)\le 0\right\}\quad\square \tag{3.4}$$

4 Gâteaux 微分

領域変動 $\boldsymbol{\rho}\in\mathcal{U}$ に対する問題 (2.2) (**FR**(Ω^ϵ)), 問題 (2.3) (**EV**(Ω^ϵ)) の解 $\left(\hat{\phi}^\epsilon,\hat{\boldsymbol{u}}^\epsilon\right)$, $\left(\hat{\phi}^{(r_l)\epsilon},\hat{\boldsymbol{u}}^{(r_l)\epsilon}\right)\left(l=1,2,\cdots,\bar{l}\right)$ を用いて，形状微分 $\left(\hat{\phi}',\hat{\boldsymbol{u}}'\right)$, $\left(\hat{\phi}^{(r_l)\prime},\hat{\boldsymbol{u}}^{(r_l)\prime}\right)$ を，例えば $\hat{\phi}'=\lim_{\epsilon\to+0}\left(\hat{\phi}^\epsilon-\hat{\phi}\right)/\epsilon$ のように，定義する．

$\left(\hat{\phi}',\hat{\boldsymbol{u}}'\right)$ について次の結果を得る．

補題 4.1 ($\left(\hat{\phi},\hat{\boldsymbol{u}}\right)$ の形状微分) 領域変動 $\boldsymbol{\rho}\in\mathcal{U}$ に対する問題 (2.2) (**FR**(Ω)) の解の形状微分は $\left(\hat{\phi}',\hat{\boldsymbol{u}}'\right)\in\hat{\Phi}\times\hat{U}_{\hat{\boldsymbol{u}}}$ として，次の弱形式の一意解である．

$$\begin{aligned}&\int_{\omega_1}^{\omega_2}2\mathrm{Re}\left[A\left(\hat{\phi}',\hat{\boldsymbol{u}}',\hat{\varphi}^*,\hat{\boldsymbol{v}}^*;j\omega\right)\right]d\omega\\&=-\left(G_A^{(0)a}\boldsymbol{\nu}^a,\boldsymbol{\rho}\right)_{(L^2(\Gamma))^d}-\left(G_A^{(0)s}\boldsymbol{\nu}^s,\boldsymbol{\rho}\right)_{(L^2(\Gamma^s\setminus\Gamma_0))^d}\\&\quad+\left(G_A^{(0)p}\boldsymbol{\nu}^s,\boldsymbol{\rho}\right)_{(L^2(\Gamma^p))^d}\quad\forall\left(\hat{\varphi},\hat{\boldsymbol{v}}\right)\in\hat{\Phi}\times\hat{U}\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}\hat{U}_{\hat{\boldsymbol{u}}}=\Big\{&\hat{\boldsymbol{v}}=(\hat{v}_i)_i\in\left(H^1\left(\Omega^s\times(\omega_1,\omega_2)\right)\right)^d\Big|\\&\hat{v}_i=-\hat{u}_{i,j}\nu_j^s\nu_k^s\rho_k \text{ on }\Gamma_0\times(\omega_1,\omega_2),\\&\hat{\boldsymbol{u}}\text{: solution of Eq. (2.10)}\Big\}\end{aligned} \tag{4.2}$$

$J^{(0)}$ に対する随伴問題を次のように定義する．

問題 4.1 (AD$^{(0)}$(Ω)) 問題 (2.2) (**FR**(Ω)) の解 $\hat{\phi}\in\hat{\Phi}$ を既知として，次の弱形式を満たす $\left(\hat{\varphi}^{(0)},\hat{\boldsymbol{v}}^{(0)}\right)\in\hat{\Phi}\times\hat{U}$ を求めよ．

$$\begin{aligned}&\int_{\omega_1}^{\omega_2}A\left(\hat{\psi},\hat{\boldsymbol{w}},\hat{\varphi}^{(0)*},\hat{\boldsymbol{v}}^{(0)*};j\omega\right)d\omega\\&=-\omega^2\rho^{a2}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\left(\hat{\psi},\hat{\phi}^*\right)_{L^2(\Gamma)}d\omega\quad\forall\left(\hat{\psi},\hat{\boldsymbol{w}}\right)\in\hat{\Phi}\times\hat{U}\quad\square\end{aligned} \tag{4.3}$$

補題 4.1 と問題 4.1 (**AD**$^{(0)}$(Ω)) の解より，次の結果を得る．

補題 4.2 ($J^{(0)}$ の Gâteaux 微分) 問題 (2.2) (**FR**(Ω)) の解を $\left(\hat{\phi},\hat{\boldsymbol{u}}\right)\in\hat{\Phi}\times\hat{U}$ および問題 4.1 (**AD**$^{(0)}$(Ω)) の解を $\left(\hat{\varphi}^{(0)},\hat{\boldsymbol{v}}^{(0)}\right)\in\hat{\Phi}\times\hat{U}$ とする．式 (3.1) で定義された汎関数 $J^{(0)}\left(\Omega,\hat{\phi}\right)$ のある領域変動 $\boldsymbol{\rho}\in\mathcal{U}$ に対する Gâteaux 微分 (形状勾配) は，$j^{(0)}(\epsilon)=J^{(0)}\left(\Omega^\epsilon,\hat{\phi}^\epsilon\right)$ と表して，次のような $G_\rho^{(0)}$ となる (詳細を省略).

$$j^{(0)}(\epsilon)=j^{(0)}(0)+\int_{\Gamma\cup\Gamma^s}\boldsymbol{G}_\rho^{(0)}\cdot\boldsymbol{\rho}\,d\Gamma+o(\epsilon) \tag{4.4}$$

$$\boldsymbol{G}_\rho^{(0)}=\begin{cases}-\left(G_A^{(0)a}+G_J^{(0)}\right)\boldsymbol{\nu}^a & \text{on }\Gamma\\-G_A^{(0)s}\boldsymbol{\nu}^s & \text{on }\Gamma^s\setminus\Gamma_0\cup\Gamma^p\\-G_A^{(0)s}\boldsymbol{\nu}^s+G_A^{(0)p}\boldsymbol{\nu}^s & \text{on }\Gamma^p\\+G_A^{(0)0}\boldsymbol{\nu}^s & \text{on }\Gamma_0\end{cases}\quad\square \tag{4.5}$$

同様に，問題 (2.3) (**EV**(Ω^ϵ)) の解 $\left(\hat{\phi}^{(r_l)\epsilon},\hat{\boldsymbol{u}}^{(r_l)\epsilon}\right)$ $\left(l=1,2,\cdots,\bar{l}\right)$ の形状微分に関する関係と随伴問題を考えることができる．この場合には自己随伴関係が成り立ち，次の結果を得る．

補題 4.3 ($J^{(l)}\left(l=1,2,\cdots,\bar{l}\right)$ の Gâteaux 微分) 問題 (2.3) (**EV**(Ω^ϵ)) の解を $\left(\hat{\phi}^{(r_l)\epsilon},\hat{\boldsymbol{u}}^{(r_l)\epsilon}\right)\left(l=1,2,\cdots,\bar{l}\right)$ とする．式 (3.2) で定義された汎関数 $J^{(l)}\left(\Omega,\hat{\phi}\right)$ のある領域変動 $\boldsymbol{\rho}\in\mathcal{U}$ に対する Gâteaux 微分 (形状勾配) は，$j^{(l)}(\epsilon)=J^{(l)}\left(\Omega^\epsilon,\hat{\phi}^\epsilon\right)$ と表して，次のような $G_\rho^{(l)}$ となる (詳細を省略).

$$j^{(l)}(\epsilon)=j^{(l)}(0)+\int_{\Gamma\cup\Gamma^s}\boldsymbol{G}_\rho^{(l)}\cdot\boldsymbol{\rho}\,d\Gamma+o(\epsilon) \tag{4.6}$$

$$\boldsymbol{G}_\rho^{(l)}=\begin{cases}-G_A^{(l)a}\boldsymbol{\nu}^a & \text{on }\Gamma\\-G_A^{(l)s}\boldsymbol{\nu}^s & \text{on }\Gamma^s\setminus\Gamma_0\\+G_A^{(l)0}\boldsymbol{\nu}^s & \text{on }\Gamma_0\end{cases}\quad\square \tag{4.7}$$

$J^{(\bar{l}+1)}$ の Gâteaux 微分 (形状勾配) は，同様の表示を用いて，$\boldsymbol{G}_\rho^{(\bar{l}+1)}=1$ on Γ^s, 0 on Γ である．

5 H^1 勾配法

問題 (3.1) **SO**(Ω) の解 $\boldsymbol{\rho}\in\mathcal{U}$ は，形状最適化問題に対する H^1 勾配法 [2] (力法 [3]) によって求めることができる．解の存在に関する定理は文献 [1] に譲る．

参考文献

[1] 海津聰, 畔上秀幸. 形状最適化問題と力法について. 日本応用数理学会論文誌, Vol. 16, No. 3, pp. 277–290, 9 2006.

[2] H. Azegami and S. Kaizu. Smoothing gradient method for non-parametric shape and topology optimization problems. In *Proceedings of the 7th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-7)(CD-ROM)*, pp. 1–10, 2007.

[3] 畔上秀幸. 形状最適化問題の解法. 応用数理, Vol. 11, No. 3, pp. 49–52, 2001.