形状最適化問題における高階の H^1 勾配法

Higher order H^1 gradient method for shape optimization problems

畔上 秀幸,
名古屋大学 情報科学研究科
Hideyuki Azegami,
Nagoya University, Graduate School of Information Science
Email: azegami@is.nagoya-u.ac.jp

偏微分方程式, 境界値問題, 形状最適化問題, 形状微分, H^1 勾配法
Partial differential equation, Boundary value problem, Shape optimization problem, Shape derivative, H^1 gradient method

1　はじめに

偏微分方程式の境界値問題が定義された領域を設計対象にした形状最適化問題に対して，これまで，H^1 勾配法と称した数値解法を提案してきた [1]．しかしながら，問題設定によっては，その解法で得られる新領域が，元の領域と同一の滑らかさをもつことが示せないことが課題として残されていた．

本稿では，元の滑らかさにもどれるような解法について検討した．

2　形状最適化問題の定義

定義 2.1 (Lipschitz 領域) 有界領域 $\Omega \in \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, が次の条件を満たすとき，Lipschitz 領域という．固定した $N \in \mathbb{N}$, $r > 0$, $\boldsymbol{a}^i \in \partial\Omega$, $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^N B\left(\boldsymbol{a}^i, r\right)$, $B\left(\boldsymbol{a}^i, r\right) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \middle| \ \left|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}^i\right| \le r\right\}$, に対して，一様に全単射かつ Lipschitz 連続な関数 $\boldsymbol{\phi}^i:\ B\left(\boldsymbol{a}^i, r\right) \to Q = B(\boldsymbol{0}, 1)$ が存在し，

$$\boldsymbol{\phi}^i\left(\partial\Omega \cap B\left(\boldsymbol{a}^i, r\right)\right) = \{\boldsymbol{\xi} \in Q|\ \xi_d = 0\},$$
$$\boldsymbol{\phi}^i\left(\Omega \cap B\left(\boldsymbol{a}^i, r\right)\right) = \{\boldsymbol{\xi} \in Q|\ \xi_d > 0\}$$

とする．

$D \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, を固定 Lipschitz 領域とする． $r > 0$ および $M > 0$, $s = 1, 2, 3$, $1 \le p \le \infty$ に対して，領域の許容集合 $\mathcal{W}^{s,p}(r, M)$ を次のように定義する．

定義 2.2 (領域の許容集合) D の部分領域 Ω は $W^{s,p}$ 級で，かつ Ω に対する定義 *2.1* の $\boldsymbol{\phi}^i:\ B\left(\boldsymbol{a}^i, r\right) \to Q$, $i = 1, 2, \cdots, N$, が $\left\|\boldsymbol{\phi}^i\right\| \le M$ を満たすとき，$\mathcal{W}^{s,p}(r, M)$ に属するという．

$\mathcal{W}^{1,\infty}(r, M)$ は， $\Omega \in \mathcal{W}^{1,\infty}(r, M)$ の特性関数の $L^2\left(D, \mathbb{R}^d\right)$ 強位相を用いて，コンパクトであることが示されている [2]．

Lipschitz 領域に対して，$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nabla}\phi_d^i / \left|\boldsymbol{\nabla}\phi_d^i\right|$ を法線，$W^{2,1}$ 級領域に対して，$\kappa = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nu}$ を曲率と定義する．

Hilbert 空間上の抽象的最適化問題との対応を考える上では，$\mathcal{W}^{s,p}(r, M)$ の代わりに，領域写像の許容集合 $\mathcal{S}^{s,p}$ を用いる．

定義 2.3 (領域写像の許容集合) ある固定領域 $\Omega^0 \in \mathcal{W}^{s,p}(r, M)$ に対して，

$$\mathcal{S}^{s,p} = \left\{\boldsymbol{T} \in W^{s,p}\left(D;\ \mathbb{R}^d\right) \middle|\ \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y},\right.$$
$$\left.\boldsymbol{x} \in \Omega^0,\ \boldsymbol{y} \in \Omega \in \mathcal{W}^{s,p}(r, M)\right\}$$

を領域写像の許容集合という．

$\Omega \in \mathcal{W}^{2,\infty}(r, M)$ が次の条件を満たすとき，$\mathcal{W}^{2,3,\infty}(r, M)$ に属するという．$\Gamma_{\mathrm{D}} \subset \partial\Omega$, 固定関数 $p \in W^{2,\infty}(D; \mathbb{R})$ に対して $\Gamma_{\boldsymbol{p}} = \{\boldsymbol{x} \in \partial\Omega \setminus \Gamma_{\mathrm{D}}|\ p \neq 0\}$ は $\mathcal{W}^{3,\infty}(r, M)$ 級である．また，$\mathcal{S}^{2,3,\infty}(r, M)$ は $\mathcal{W}^{2,3,\infty}(r, M)$ に対応した領域写像の集合とする．

問題 2.1 (Poisson 問題) 領域 $\Omega \in \mathcal{W}^{2,3,\infty}(r, M)$, $\Gamma_{\mathrm{D}} \subset \partial\Omega$, $f \in W^{1,\infty}(D; \mathbb{R})$, $p \in W^{2,\infty}(D; \mathbb{R})$, $u_{\mathrm{D}} \in W^{3,\infty}(D; \mathbb{R})$ とするとき，任意の $v \in H^1(\Omega; \mathbb{R})$ に対して

$$\int_\Omega \boldsymbol{\nabla}(u - u_{\mathrm{D}}) \cdot \boldsymbol{\nabla} v \ \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \ \mathrm{d}x$$
$$+ \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_{\mathrm{D}}} p v \ \mathrm{d}\gamma - \int_\Omega \boldsymbol{\nabla} u_{\mathrm{D}} \cdot \boldsymbol{\nabla} v \ \mathrm{d}x,$$
$$\int_{\Gamma_{\mathrm{D}}} (u - u_{\mathrm{D}}) \nabla_{\boldsymbol{\nu}} v \ \mathrm{d}\gamma = 0, \int_{\Gamma_{\mathrm{D}}} v \nabla_{\boldsymbol{\nu}} u \ \mathrm{d}\gamma = 0$$

を満たす $u \in H^1(\Omega; \mathbb{R})$ を求めよ．

評価汎関数を一般形で次のように定義する．

定義 2.4 (評価汎関数) u を問題 *2.1* の解，g^l, j^l, $l = 0, 1, 2, \cdots, m$, を $W^{2,\infty}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ に属する既知関数とするとき，

$$J^l(\Omega, u) = \int_\Omega g^l(u)\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} j^l(u)\ \mathrm{d}\gamma$$

を評価関数という．J^0 を目的関数，$\boldsymbol{J} = \left(J^l\right)_{l=1}^m$ を制約関数 という．

問題 2.2 (形状最適化問題) u を問題 *2.1* の解とするとき，

$$\min_{\Omega \in \mathcal{W}^{2,3,\infty}(r,M)} \left\{ J^0(\Omega, u) \middle|\ \boldsymbol{J}(\Omega, u) \leq \boldsymbol{0} \right\}$$

を満たす Ω を求めよ．

制約付き問題 2.2 に対する解法の枠組みは文献 [1] に譲る．以下では，J^l ごとに，J^l が減少し，かつ新領域が $\mathcal{W}^{2,3,\infty}(r, M)$ に属するような領域変動を求める方法に注目する．

3 形状微分

問題 2.2 は，$H^1\left(D; \mathbb{R}^d\right)$ のコンパクト集合 $\mathcal{S}^{2,3,\infty}(r, M)$, あるいは $\mathcal{W}^{2,3,\infty}(r, M)$, 上で定義された J^l, $l = 0, 1, 2, \cdots, m$, を用いた制約付き最適化問題であると考えれば，J^l の領域変動に対する一般化微分が定義できる．ここでは，それを形状微分とよぶ．

形状微分について，次の結果が得られる．

定理 3.1 (J^l の形状微分) u, v^l を $\Omega \in \mathcal{W}^{2,3,\infty}(r, M)$ に対する問題 2.1, 随伴問題 (省略) の解のとき，任意の $\boldsymbol{\rho} \in \bar{B}(\boldsymbol{0}, 1) = \left\{\boldsymbol{\rho} \in H^1\left(D; \mathbb{R}^d\right) \middle|\ \|\boldsymbol{\rho}\| \leq 1\right\}$ に対して，

$$J^{l\prime}\left(\Omega, u, v^l\right)(\boldsymbol{\rho}) = \int_{\partial\Omega} G^l\left(u, v^l\right) \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\rho}\ \mathrm{d}\gamma$$

が成り立つ．このとき，$G^l\left(u, v^l\right)\boldsymbol{\nu}$ (内訳を省略) は $W^{1,\infty}\left(D; \mathbb{R}^d\right)$ に属する．

4 H^1 勾配法

形状最適化問題に対する H^1 勾配法では，J^l が減少する領域変動を次の問題の解として求める．

問題 4.1 (H^1 勾配法) $G^l\boldsymbol{\nu}$ が与えられたとき，任意の $\boldsymbol{v} \in H^1\left(D; \mathbb{R}^d\right)$ に対して

$$a\left(\boldsymbol{\rho}_G^l, \boldsymbol{v}\right) = -\int_{\partial\Omega} G^l \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{v}\ \mathrm{d}\gamma$$

を満たす $\boldsymbol{\rho}_G^l \in H^1\left(D; \mathbb{R}^d\right)$ を求めよ．ただし，$a(\cdot, \cdot)$ は $H^1\left(D; \mathbb{R}^d\right)$ における強圧的な双 1 次形式とする．

例えば，$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = \left(\frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)\right)_{ij}$, $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{E} \in \mathbb{R}^{d\times d\times d\times d}$ は楕円的，として，$\alpha > 0$, $\beta = 0$ あるいは $\alpha = 0$, $\beta > 0$ に対して

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_D \left(\boldsymbol{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) + \alpha \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}\right) \mathrm{d}x + \int_{\partial D} \beta (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nu})\ \mathrm{d}\gamma$$

とすれば，$a(\cdot, \cdot)$ は強圧的となる．D を Ω に限定しても支障はない．

問題 4.1 の解 $\boldsymbol{\rho}_G^l \in H^1\left(D; \mathbb{R}^d\right)$ に対して，$\boldsymbol{\rho}^l = \boldsymbol{\rho}_G^l / \left\|\boldsymbol{\rho}_G^l\right\| \in \bar{B}(\boldsymbol{0}, 1)$ は，$W^{2,\infty}\left(D; \mathbb{R}^d\right)$ に属する．しかし，新領域が $\mathcal{W}^{2,3,\infty}(r, M)$ に属するためには，Γ_p は $W^{3,\infty}$ 級まで滑らかさを回復させなければならない．

4.1 高階の H^1 勾配法

H^1 勾配法を複数回繰り返す方法を考える．この方法を高階の H^1 勾配法とよぶ．

問題 4.2 (高階の H^1 勾配法) $\boldsymbol{\rho}_G^l = \boldsymbol{\rho}_G^{l(1)}$ を問題 *4.1* の解とする．このとき，$\boldsymbol{\rho}_G^{l(i)}$, $i = 1, 2, \cdots,$ を用いて，任意の $\boldsymbol{v} \in H^1\left(D; \mathbb{R}^d\right)$ に対して

$$a\left(\boldsymbol{\rho}_G^{l(i+1)}, \boldsymbol{v}\right) = -\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\rho}_G^{l(i)} \cdot \boldsymbol{v}\ \mathrm{d}\gamma$$

を満たす $\boldsymbol{\rho}_G^{l(i+1)} \in H^1\left(D; \mathbb{R}^d\right)$ を求めよ．

問題 4.2 において，領域 Ω は固定されたままであり，Neumann 条件のみが変更されている点に注意する．

問題 4.2 は，$i = 1$ のとき問題 4.1 と同一となる．$i = 2$ のとき，$\partial\Omega \setminus \Gamma_p$ を固定すれば，Γ_p が $W^{3,\infty}$ 級に回復することが期待される．なお，$\left\|\boldsymbol{\phi}^i\right\| \leq M$ の制約がアクティブになった場合には，この条件を制約条件に加える必要がある．

本稿では，Γ_p の変動に対しては 2 階の H^1 勾配法を用いることを提案する．

参考文献

[1] 畔上 秀幸. 境界値問題が定義された領域の形状および位相最適化問題の正則化解法. 数理解析研究所講究録, 1638:1–17, 4 2009.

[2] D. Chenais. On the existence of a solution in a domain identification problem. *J. of mathematical analysis and applications*, 52:189–219, 1975.