Phase field 法による連続体位相最適化問題の正則化解法

Regularization solution of topology optimization problem for continuum by Phase-field method

1,*) 伊藤 友文, 1) 畔上 秀幸,

1) 名古屋大学 情報科学研究科

1,*)Tomofumi Ito and 1)Hideyuki Azegami,

1) Nagoya University, Graduate School of Information Science

*Email: ito@az.is.nagoya-u.ac.jp

変分法, 境界値問題, 位相最適化問題, フェーズフィールド法, H^1 勾配法

Partial differential equation, Boundary value problem, Topology optimization problem, Phase-field method, H^1 gradient method

1 はじめに

偏微分方程式の境界値問題が定義された領域の最適な孔配置を求める問題は，連続体の位相最適化問題と呼ばれている．この問題の構成法には，いく通りかの方法が示されている．本稿では，密度を設計変数に選ぶ密度型位相最適化問題に注目する．

密度型では，次の仮定が使われる．

(1) Lipschitz 領域 $D \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, を固定する．

(2) 密度 ϕ は D 上で定義された関数で，値域を $[0^+, 1]$ $(0^+ = \lim_{\epsilon \to 0,\ \epsilon > 0} \epsilon)$ に制限する．

(3) 定数 $\alpha > 1$ として，ϕ^α を材料特性値として偏微分方程式に乗じる．

3. は，中間の密度を排除する効果をもつことから，密度型は SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) 型ともよばれる [1].

このような密度型位相最適化問題に対して，著者らは，Hilbert 空間上の抽象的最適化問題との対応を考えて，密度とは別の設計変数 $\theta \in H^1(D; \mathbb{R})$ で問題を再構成し，H^1 勾配法で解く方法を示した [2]．上記 2. の仮定は，逆正弦関数などの固定関数 $\phi \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ による変換で満たされるようにした．

本研究では，上記 2. の仮定を，フェーズフィールド法で使われる 2 重井戸型ポテンシャルを制約関数に用いる方法について検討した．

2 密度型位相最適化問題の定義

固定 Lipschitz 領域 $D \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, 定数 $M > 0$ に対して，

$$\mathcal{S}(M) = \left\{ \phi \in W^{1,\infty}(D; \mathbb{R}) \middle| \ \|\phi\| \le M \right\}$$

を設計変数 ϕ の許容集合とする．ここで，境界値問題を定義するためには境界は Lipschitz 連続である必要があり，ϕ のレベルセットで境界をイメージすることを考えると，$\phi \in W^{1,\infty}(D; \mathbb{R})$ が必要となる．また，Hilbert 空間上の抽象的最適化問題との対応を考える上では，$H^1(D; \mathbb{R})$ 上のコンパクトな部分集合として $\mathcal{S}(M)$ を選んだとみなせる．

境界値問題の弱形式を次のように表す．

問題 2.1 (Poisson 問題) $D \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, $\Gamma_{\mathrm{D}} \subset \partial D$, $f \in H^1(D, \mathbb{R})$, $p \in H^{3/2}(\partial D \setminus \Gamma_{\mathrm{D}}; \mathbb{R})$, $u_{\mathrm{D}} \in H^3(D; \mathbb{R})$, $\alpha > 1$, $\phi \in \mathcal{S}(M)$ とするとき，任意の $v \in H^1(D; \mathbb{R})$ に対して，

$$\begin{aligned} &\int_D \phi^\alpha \boldsymbol{\nabla}(u - u_{\mathrm{D}}) \cdot \boldsymbol{\nabla} v \ \mathrm{d}x \\ &= \int_D f v \ \mathrm{d}x + \int_{\partial D \setminus \Gamma_{\mathrm{D}}} p v \ \mathrm{d}\gamma \\ &\quad - \int_D \phi^\alpha \boldsymbol{\nabla} u_{\mathrm{D}} \cdot \boldsymbol{\nabla} v \ \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_{\mathrm{D}}} (u - u_{\mathrm{D}}) \phi^\alpha \boldsymbol{\nabla} v \cdot \boldsymbol{\nu} \ \mathrm{d}\gamma = 0,$$

$$\int_{\Gamma_{\mathrm{D}}} \phi^\alpha \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nu} v \ \mathrm{d}\gamma = 0$$

を満たす $u \in H^1(D; \mathbb{R})$ を求めよ．

評価関数を一般形で次のように定義する．

定義 2.1 (評価関数) u を $\phi \in \mathcal{S}(M)$ に対する問題 *2.1* の解，g^l, j^l, $l = 0, 1, 2, \cdots, m$, を $W^{2,\infty}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ に属する既知関数とするとき，

$$J^l(\phi, u) = \int_D g^l(\phi, u) \ \mathrm{d}x$$

$$+\int_{\partial D} j^l(\phi,u)\ \mathrm{d}\gamma + c^l$$

を評価関数という．J^0 を目的関数，$\boldsymbol{J}$ を制約関数 という．ただし，c^l は，ある $\phi\in\mathcal{S}(M)$ に対して $J^l \le 0$ が成り立つような定数とする．

さらに，本研究では，ϕ の値域を $[0^+,1]$ に制限するために，フェーズフィールド法の 2 重井戸型ポテンシャルを制約関数に加える．

定義 2.2 (密度制約関数) $\phi\in\mathcal{S}(M)$ に対して，

$$J^{m+1}(\phi)=\int_D \phi^2(1-\phi)^2\ \mathrm{d}x-\epsilon^{m+1}$$

を密度制約関数とよぶ．ϵ^{m+1} は許容値を与える正定数とする．

問題 2.2 (密度型位相最適化問題) u を $\phi\in\mathcal{S}(M)$ に対する問題 *2.1* の解とするとき，

$$\min_{\phi\in\mathcal{S}(M)}\left\{ J^0(\phi,u) \,\middle|\, \boldsymbol{J}(\phi,u)\le\boldsymbol{0},\right.$$
$$\left. J^{m+1}(\phi)\le 0\right\}$$

を満たす ϕ を求めよ．

3 評価関数の密度微分

問題 2.2 は，$H^1(D;\mathbb{R})$ のコンパクト集合 $\mathcal{S}(M)$ 上で定義された J^l，$l=0,1,2,\cdots,m+1$，を用いた制約付き最適化問題とみなせる．このとき，J^l の密度変動に対する Gâteaux 微分が定義できる．それを密度微分とよぶ．

密度微分について，次の結果が得られる．

定理 3.1 (J^l の一般化微分) u，v^l，$l=0,1,2,\cdots,m$，が $\phi\in\mathcal{S}(M)$ に対する問題 2.1，随伴問題 (省略) の解のとき，$\rho\in\bar{B}(0,1)=\left\{\rho\in H^1(D;\mathbb{R})\,\middle|\,\|\rho\|\le 1\right\}$ に対して，J^l の密度微分

$$\begin{aligned} &J^{l\prime}(\phi,u,v^l)(\rho)\\ &=\int_D\left(G_g^l(\theta,u)+G_a^l(\theta,u,v^l)\right)\rho\ \mathrm{d}x\\ &+\int_{\partial D}G_j^l(\theta,u)\rho\ \mathrm{d}\gamma+\int_{\Gamma_{\mathrm{D}}}\Big(G_{\mathrm{D}}^l(\theta,u-u_{\mathrm{D}},v^l)\\ &+G_{\mathrm{D}}^l(\theta,v^l,u)\Big)\ \mathrm{d}\gamma=\left\langle G^l(\phi,u,v^l),\rho\right\rangle\end{aligned}$$

が成り立つ．このとき，$G^l(\phi,u,v^l)$ (内訳を省略) は $L^\infty(D;\mathbb{R})$ に属する．また，J^{m+1} の密度微分は，

$$\begin{aligned}J^{m+1\prime}(\phi)(\rho)&=\int_D 2\phi(1-\phi)(1-2\phi)\rho\ \mathrm{d}x\\ &=\left\langle G^{m+1}(\phi),\rho\right\rangle,\end{aligned}$$

$G^{m+1}(\phi)\in W^{1,\infty}(D;\mathbb{R})$ となる．

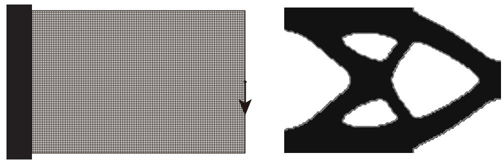

図 1: 質量制約付き線形弾性問題の平均コンプライアンス最小化

4 制約付問題の解法

最適解ではない $\phi\in\mathcal{S}(M)$ に対して，逐次 2 次近似問題を構成し，H^1 勾配法の解と KKT 条件により，問題 2.2 の解法を示せる [3]．$\rho_G^l\in W^{1,\infty}(D;\mathbb{R})$ を $G^l\left(\phi,u,v^l\right)$，$l=0,1,2,\cdots,m+1$，に対する H^1 勾配法の解として，

$$\rho(\boldsymbol{\lambda})=\rho^0+\sum_{l=1}^{m+1}\lambda^l\rho^l=\frac{\rho_G^0+\sum_{l=1}^{m+1}\lambda^l\rho_G^l}{\left\|\rho_G^0+\sum_{l=1}^{m+1}\lambda^l\rho_G^l\right\|}$$

とする．ただし，G^{m+1} のように $G^l\in W^{1,\infty}(D;\mathbb{R})$ のときは $\rho_G^l=G^l$ とする．$\epsilon>0$ を小定数として，$\phi+\epsilon\rho(\boldsymbol{\lambda})$ において，すべての不等式制約がアクティブであると仮定すれば，$\boldsymbol{J}\le\boldsymbol{0}$，$J^{m+1}\le 0$ に対する Lagrange 乗数 $\boldsymbol{\lambda}=\left\{\lambda^l\right\}_l\in\mathbb{R}^{m+1}$ は，

$$\begin{pmatrix}\int_D G^1\epsilon\rho^1\ \mathrm{d}x & \cdots & \int_D G^1\epsilon\rho^{m+1}\ \mathrm{d}x\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \int_D G^{m+1}\epsilon\rho^1\ \mathrm{d}x & \cdots & \int_D G^{m+1}\epsilon\rho^{m+1}\ \mathrm{d}x\end{pmatrix}$$
$$\times\begin{pmatrix}\lambda^1\\ \vdots\\ \lambda^{m+1}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}J^1(\phi,u)+\int_D G^1\epsilon\rho^0\ \mathrm{d}x\\ \vdots\\ J^{m+1}(\phi,u)+\int_D G^{m+1}\epsilon\rho^0\ \mathrm{d}x\end{pmatrix}$$

を満たす．この式を満たす λ^l の中で負の要素があったときにはその制約を削除して，この式を解き直す．ϵ は Armijo と Wolfe の規準を満たすように決定する．

質量制約付き線形弾性問題の平均コンプライアンス最小化問題の解析例を図 1 に示す．

参考文献

[1] M. P. Bendsøe. *Optimization of Structural Topology, Shape, and Material.* Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[2] 畔上秀幸, 海津聰, 竹内謙善. 連続体の位相最適化問題に対する H1 勾配法. 3 2010.

[3] 畔上秀幸. 境界値問題が定義された領域の形状および位相最適化問題の正則化解法. 数理解析研究所講究録, Vol. 1638, pp. 1–17, 4 2009.

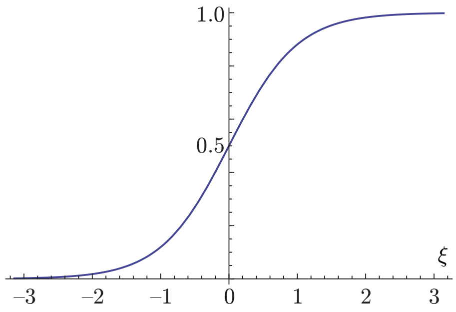

図 2: $\phi = \frac{1}{2}\tanh\xi + \frac{1}{2}$

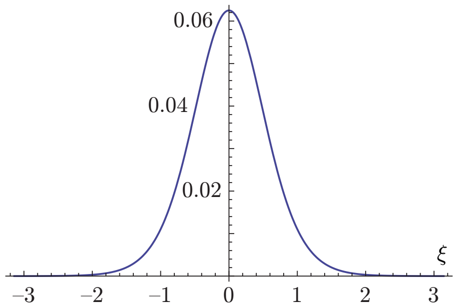

図 3: $\phi^2\left(1-\phi\right)^2$

付 録

A 密度制約関数の許容値 ϵ^{m+1} の設定方法

密度制約関数 $J^{m+1}(\phi)$ における積分 $\int_D \phi^2\left(1-\phi\right)^2\,\mathrm{d}x$ の被積分項について，次のことがいえる．

(1) $\phi=0$ あるいは $\phi=1$ の近傍値をとる領域では零となる．

(2) Modica-Mortola 問題の解析解からの類推により， $\phi=1$ の値をとる部分領域の境界の近傍では，その法線方向の座標を ξ としたとき，

$$\phi = \frac{1}{2}\tanh\xi + \frac{1}{2}$$

状の分布をもつと予測される (図 2)．このとき，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi^2\left(1-\phi\right)^2\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{12}$$

が成り立つ (図 3)．

(3) $h>0$ を有限要素の長さとして，

$$\phi = \frac{1}{2}\tanh\frac{\xi}{h} + \frac{1}{2}$$

のとき，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi^2\left(1-\phi\right)^2\,\mathrm{d}\xi = \frac{h}{12}$$

が成り立つ．

したがって，h のオーダーで ϕ が 0 から 1 に変動し，そのような境界が D の境界の測度 $|\partial D|$ の $\beta>0$ 倍程度であるとき，

$$\int_D \phi^2\left(1-\phi\right)^2\,\mathrm{d}x \approx \frac{\beta h\left|\partial D\right|}{12}$$

が成り立つ．

したがって，密度制約関数 $J^{m+1}(\phi)$ における正定数 ϵ^{m+1} は，$\beta h\left|\partial D\right|/12$ に設定する方法が考えられる．ここで，β は，$|\partial D|$ に対する $\phi=1$ の値をとる部分領域の境界の測度の比を与える無次元量で，$2\sim10$ 程度に設定する．