形状最適化問題に対するH1勾配法の見直し

畔上 秀幸 [1]，村井 大介 [1]，大塚 厚二 [2]，木村 正人 [3]
[1] 名古屋大学，[2] 広島国際学院大学，[3] 九州大学
e-mail：azegami@is.nagoya-u.ac.jp

1　はじめに

偏微分方程式の境界値問題が定義された領域を設計対象にした形状最適化問題に対して，H1勾配法と称した形状更新の計算方法を提案してきた [1]．そのようによんだ理由は，その方法が形状変動に対する評価関数の Fréchet 微分 (形状微分とよぶ) を用いたある H^1 級関数空間上の勾配法になっていると考えたためであった．

しかしながら，そこで使われていた形状微分は，境界が滑らかなときに使える公式で得られた境界上の関数 ($H^{1/2}$ 級関数空間に対する双対空間の要素) であった．そのことはH1勾配法のよび方が適切であったかという疑いを招く．

一方，形状微分の評価方法に関しては，連続体におけるき裂の特異性を評価する目的で考えられた一般化 J 積分が使えることが示されている [2, 3, 4]．そこでは，境界の滑らかさを必要とせずに，形状微分は領域上の関数として得られている．また，境界が滑らかなときに従来の境界上関数と等しくなることも示されている．

以上のことを背景にして，本稿では，H1勾配法の見直しを行うことにする．

2　設計変数の集合

$\Omega^0 \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2,3\}$, を境界値問題を定義する有界な初期領域として次のように選ぶ．$\partial\Omega^0$ は $W^{1,\infty}$ 級，あるいは $W^{1,\infty}$ 級かつ区分的に $W^{2,\infty}$ 級とする．$\Gamma_{\mathrm{D}}^0 \subset \partial\Omega^0$, $\left|\Gamma_{\mathrm{D}}^0\right| > 0$, を Dirichlet 境界とする．$\Gamma_{\mathrm{N}}^0 \subset \partial\Omega^0 \backslash \partial\Gamma_{\mathrm{D}}^0$ を Neumann 境界，$\Gamma_p^0 \subset \Gamma_{\mathrm{N}}^0$ を非斉次 Neumann 境界とする．f^i を後で示す (4) の評価関数とするとき，境界積分の被積分関数が非零の境界を $\Gamma_\eta^{i0} \subseteq \partial\Omega^0$ とかく．さらに，$\Gamma_\eta^0 = \bigcup_{i=0}^m \Gamma_\eta^{i0}$ とおく．Γ_η^0 は Γ_{D}^0 や Γ_{N}^0 とは独立に選べるとする．後で示す評価関数の形状微分では，Γ_p^0 と Γ_η^0 において曲率 κ を含む項が現れる．そこで，それらをまとめて $\Gamma_\kappa^0 = \Gamma_p^0 \cup \Gamma_\eta^0$ とかく．Γ_κ^0 は区分的に $W^{3,\infty}$ 級とする．なお，区分的連続を $d-2$ 次元の集合 $\Theta^0 \subset \partial\Omega^0$ を除く点で連続と表現する．

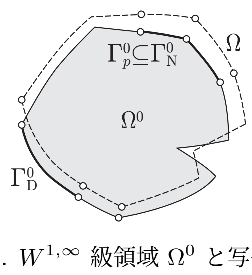

図 1. $W^{1,\infty}$ 級領域 Ω^0 と写像 $\boldsymbol{\varphi}$

領域の集合は写像 $\boldsymbol{\varphi} : \Omega^0 \to \mathbb{R}^d$ の集合を以下のように定義して，$\Omega = \Omega(\boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{\varphi}(\Omega^0)$, $\Gamma_p = \Gamma_p(\boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{\varphi}(\Gamma_p^0)$ のようにつくられると仮定する．$W^{1,\infty}$ 級の Ω^0 に対して，

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_0 = \Big\{ \boldsymbol{\varphi} \in W^{1,\infty}\left(\Omega^0;\mathbb{R}^d\right) \ \Big| \ & \boldsymbol{\varphi}|_{\Gamma_{\mathrm{D}}^0 \backslash \Theta^0} \in W^{2,\infty}\left(\Gamma_{\mathrm{D}}^0 \setminus \Theta^0;\mathbb{R}^d\right), \\ & \boldsymbol{\varphi}|_{\Gamma_\kappa^0 \backslash \Theta^0} \in W^{3,\infty}\left(\Gamma_\kappa^0 \setminus \Theta^0;\mathbb{R}^d\right) \Big\} \end{aligned} \quad (1)$$

を，区分的 $W^{2,\infty}$ 級の Ω^0 に対して，

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_1 = \Big\{ \boldsymbol{\varphi} \in W^{1,\infty}\left(\Omega^0;\mathbb{R}^d\right) \ \Big| \ & \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{O}_0, \\ & \boldsymbol{\varphi}|_{\partial\Omega^0 \backslash \Theta^0} \in W^{2,\infty}\left(\partial\Omega^0 \setminus \Theta^0;\mathbb{R}^d\right) \Big\} \end{aligned} \quad (2)$$

を $\boldsymbol{\varphi}$ のための実 Banach 空間とする．$\boldsymbol{\varphi}$ の集合は，$s \in \{0,1\}$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_s = \Big\{ \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{V}_s \ \Big| \ & \|\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varphi}_0\|_{W^{1,\infty}(\Omega^0;\,\mathbb{R}^d)} < 1, \\ & \operatorname*{ess\,inf}_{\boldsymbol{x}\in\Omega^0} \det \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}) > 0 \Big\} \end{aligned} \quad (3)$$

とおく．ただし，$\boldsymbol{\varphi}_0$ を恒等写像とする．

3　形状最適化問題

$u \in H^1(\Omega;\mathbb{R})$ を $\Omega = \Omega(\boldsymbol{\varphi})$, $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{O}_s$, に対する Poisson 問題の解とする．$\zeta^i$, η^i, $i \in \{0,1,2,\cdots,m\}$, を与えられた関数として

$$f^i(\Omega,u) = \int_\Omega \zeta^i(\boldsymbol{\varphi},u)\ \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_\eta^i} \eta^i(\boldsymbol{\varphi},u)\ \mathrm{d}\gamma + c^i \quad (4)$$

を評価関数として，次の問題を考える．

問題 3.1 (形状最適化問題) $f^0, \boldsymbol{f} = (f^1, \cdots, f^m)^{\mathrm{T}}$ を (4) とするとき,

$$\min_{(\Omega(\boldsymbol{\varphi}),u)} \left\{ f^0 (\Omega(\boldsymbol{\varphi}), u) \;\middle|\; \boldsymbol{f}(\Omega(\boldsymbol{\varphi}), u) \le \boldsymbol{0} \right\}$$

を満たす $(\Omega(\boldsymbol{\varphi}), u) \in \mathcal{O}_s \times H^1(\Omega; \mathbb{R})$ を求めよ.

4 評価関数の形状微分

f^i に対する Lagrange 関数を $\mathscr{L}^i(\Omega, u, v^i)$ とかく. ただし, v^i は境界値問題に対する Lagrange 乗数である. $\mathscr{L}^i(\Omega, u, v^i)$ の停留条件から, u, v^i が $\Omega = \Omega(\boldsymbol{\varphi}_0)$ のときのそれぞれ境界値問題と随伴問題の解のとき, f^i の領域変動 $\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{V}_s$ に対する変分

$$\begin{aligned} f^{i\prime}(\Omega, u)[\boldsymbol{\rho}] &= \mathscr{L}^{i\prime}(\Omega, u, v^i)[\boldsymbol{\rho}] \\ &= \langle \boldsymbol{g}^i_\Omega, \boldsymbol{\rho} \rangle_\Omega + \langle \boldsymbol{g}^i_\Gamma, \boldsymbol{\rho} \rangle_{\Gamma^i_\kappa \cup \Gamma_{\mathrm{D}}} = \langle \boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{\rho} \rangle \end{aligned} \quad (5)$$

を得る. ここで,

$$\begin{aligned} &\langle \boldsymbol{g}^i_\Gamma, \boldsymbol{\rho} \rangle_{\Gamma^i_\kappa \cup \Gamma_{\mathrm{D}}} \\ &= \int_{\Gamma^i_\eta} \left\{ \eta^i_{\boldsymbol{\varphi}} + \left(\eta^i_u \partial_\nu u + \kappa \eta^i \right) \boldsymbol{\nu} \right\} \cdot \boldsymbol{\rho} \, \mathrm{d}\gamma \\ &+ \int_{\partial\Gamma^i_\eta \cup \Theta} \eta^i \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho} \, \mathrm{d}a + \int_{\Gamma_p} (\partial_\nu + \kappa) p v^i \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\rho} \, \mathrm{d}\gamma \\ &+ \int_{\partial\Gamma_p \cup \Theta} p v^i \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho} \, \mathrm{d}a \\ &+ \int_{\Gamma_{\mathrm{D}}} \left\{ \partial_\nu (u - u_{\mathrm{D}}) \partial_\nu v^i + \partial_\nu v^i \partial_\nu u \right\} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\rho} \, \mathrm{d}\gamma \end{aligned} \quad (6)$$

となる. また, $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{O}_0$, $\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{V}_0$ に対して

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{g}^i_\Omega, \boldsymbol{\rho} \rangle_\Omega = \int_\Omega \Big\{ & \zeta^i_{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{\varphi}, u) \cdot \boldsymbol{\rho} \\ & + \left(\boldsymbol{\nabla} v^i \boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{T}} u + \boldsymbol{\nabla} u \boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{T}} v^i \right) \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}} \right) \\ & + \left(\zeta^i(\boldsymbol{\varphi}, u) - \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v^i + b v^i \right) \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\rho} \Big\} \mathrm{d}x \end{aligned} \quad (7)$$

となる. さらに, $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{O}_1$, $\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{V}_1$ ならば

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{g}^i_\Omega, \boldsymbol{\rho} \rangle_\Omega &= \langle \boldsymbol{g}^i_{\partial\Omega}, \boldsymbol{\rho} \rangle_{\partial\Omega} \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(\zeta^i(\boldsymbol{\varphi}, u) - \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v^i + b v^i \right) \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\rho} \, \mathrm{d}\gamma \end{aligned}$$

となる. ただし, $\boldsymbol{\nu}$ は法線を表す. これらの公式は, 滑らかさに関する適当な仮定のもとで, Fréchet 微分を用いて数学的に正当化することが可能である [2, 3, 4].

$\boldsymbol{g}^i_\Omega$, $\boldsymbol{g}^i_\Gamma$, $\boldsymbol{g}^i_{\partial\Omega}$ について, 次の結果を得る. ただし, U_r を境界値問題と随伴問題の解における特異点の r 近傍とする. また, $\Omega_r = \Omega \setminus U_r$, $\Gamma_{\mathrm{D}r} = \Gamma_{\mathrm{D}} \setminus U_r$ のようにかく.

定理 4.1 (f^i の形状微分) 境界問題の既知関数と (4) の ζ^i, η^i が滑らかであれば, $\boldsymbol{g}^i_\Omega\big|_{\Omega_r} \in L^\infty(\Omega_r, \mathbb{R}^d)$, $\boldsymbol{g}^i_\Gamma\big|_{\Gamma^i_{\kappa r} \cup \Gamma_{\mathrm{D}r}} \in W^{1,\infty}(\Gamma^i_{\kappa r} \cup \Gamma_{\mathrm{D}r}; \mathbb{R}^d)$ を得る. さらに, $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{O}_1$ のとき, $\boldsymbol{g}^i_{\partial\Omega}\big|_{\partial\Omega_r} \in W^{1,\infty}(\partial\Omega_r, \mathbb{R}^d)$ を得る.

5 H^1 勾配法

そこで H^1 勾配法を次のように定義する.

問題 5.1 (形状最適化問題に対する H^1 勾配法) $X = H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ とする. $a : X \times X \to \mathbb{R}$ を, ある $\alpha > 0$ に対して,

$$a(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}) \ge \alpha \|\boldsymbol{z}\|^2_X$$

が成り立つような X 上の強圧的双 1 次形式とする. (7), (6) の $\boldsymbol{g}^i_\Omega$, $\boldsymbol{g}^i_\Gamma$ が与えられたとき, 任意の $\boldsymbol{z} \in X$ に対して

$$a(\boldsymbol{\rho}^i_g, \boldsymbol{z}) = -\langle \boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{z} \rangle$$

を満たす $\boldsymbol{\rho}^i_g \in X$ を求めよ. ただし, $\langle \boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{\rho} \rangle$ は (5) の定義に従う.

参考文献

[1] 畔上秀幸. 境界値問題が定義された領域の形状および位相最適化問題の正則化解法. 数理解析研究所講究録, Vol. 1638 (2009), pp. 1–17.

[2] K. Ohtsuka and A. Khludnev. Generalized J-integral method for sensitivity analysis of static shape design. *Control and Cybernetics*, Vol. 29 (2000), pp. 513–533.

[3] M. Kimura. Shape derivative of minimum potential energy: abstract theory and applications. *Jindřich Nečas Center for Mathematical Modeling Lecture notes Volume IV, Topics in Mathematical Modeling*, pp. 1–38, 2008.

[4] M. Kimura and I. Wakano. Shape derivative of potential energy and energy release rate in fracture mechanics. *Journal of Math-for-industry*, Vol. 3 (2011), pp. 21–31.