

熱伝導率の温度依存性を考慮した定常熱伝導場の形状最適化

Shape Optimization of Steady-state Heat-conduction Fields Considering Temperature Dependence of Thermal Conductivity

1,*) 片峯 英次, 1) 箕浦 好二, 1) 三ヶ田 真吾, 2) 畔上 秀幸

1) 岐阜工業高等専門学校, 2) 名古屋大学

1) Eiji KATAMINE, 1) Koji MINOURA, 1) Shingo MIKADA and 2) Hideyuki AZEGAMI

1) Gifu National College of Technology, 2) Nagoya University

* Email: katamine@gifu-nct.ac.jp

キーワード: 形状最適化, 最適設計, 計算機援用設計, 熱伝導, 随伴変数法, 力法

Key Words: Shape Optimization, Optimum Design, Computer Aided Design, Heat Conduction Field, Adjoint Method, Traction Method

1. はじめに

伝熱性能の改善を目的とした機械構造物の形状設計は、工学の分野において重要な課題である。例えば、冷却のために設けられた熱交換器フィンでは、限られた伝熱領域あるいは境界における放熱性能がより向上するように形状が設計される。また電子機器においても、近年の高性能化などに伴い、部品の高密度化や機器の小型化によって発熱密度が増大し、冷却を目的とした機器の形状設計技術の確立が望まれている。

著者らは、これらの問題を数値モデルとして捉え、これまでに定常および非定常熱伝導場の部分境界や部分領域において温度分布あるいは温度勾配分布を規定する形状同定問題^{(1),(2)}、および部分境界における放熱量最大化を目的とした形状最適化問題⁽³⁾に対する数値解析法を提案し、その妥当性を示してきた。そのときに用いた手法は、領域最適化手法の一つとして提案された力法⁽⁴⁾であった。しかしながら、これらまでに取り扱った熱伝導場の形状最適化は、熱伝導率の大きさを領域内で一定と仮定した基本的な問題に限られてきた。本研究では、熱伝導率の温度依存性を考慮した定常熱伝導場の形状最適化への拡張を試みる。

本小論文では、はじめに、熱伝導場の部分境界において放熱量を最大化する形状最適化問題を定式化する。次に、Lagrange乗数法あるいは随伴変数法および物質導関数を利用して形状勾配関数を導出する。最後に、導出した形状勾配関数と力法を用いて解析した簡単な数値解析例を紹介する。

2. 放熱量最大化問題

2.1 定式化 n 次元空間 ($n = 2, 3$) の熱伝導場領域 $\Omega \in R^n$ の境界 Γ は、既知温度境界 Γ_ϕ 、熱流束境界 Γ_q 、熱伝達境界 Γ_h から構成されている。境界 Γ_ϕ では温度 ϕ_0 、境界 Γ_q では熱流束 q がそれぞれ既知関数として与えられている。境界 Γ_h は熱伝達率 h と外部流体温度 ϕ_f の熱伝達を考慮した境界である。また領域 Ω では大きさ Q の熱源を仮定し、領域での熱伝導率 $k_{ij}(\phi)$ は温度依存性を考慮している。

この熱伝導場領域 Ω の領域変動を T_s (s は領域変動の履歴) で定義し、領域 Ω は変動して $\Omega_s = T_s(\Omega)$ になると仮定する。熱伝達境界の部分境界 $\Gamma_D \subset \Gamma_h$ における放熱量最大化問題は、次のように定式化できる。

$$\text{Given } M, k_{ij}(\phi), Q, \phi_0, q, h, \phi_f \quad (1)$$

$$\text{find } \Omega \quad (2)$$

$$\text{that maximizes } J(\phi) = \int_{\Gamma_D \subset \Gamma_h} h(\phi - \phi_f) d\Gamma \quad (3)$$

$$\text{subject to } a_\phi(k_{ij}(\phi), \phi, \varphi) + b_\phi(\phi, \varphi) = l_\phi(\varphi) \quad (4)$$

$$\int_{\Omega} dx \leq M \quad (5)$$

ここで、式 (4) は、随伴温度 φ を用いた定常熱伝導場の支配方程式に対する弱形式を表し、 $a_\phi(k_{ij}(\phi), \phi, \varphi)$ 、 $b_\phi(\phi, \varphi)$ 、 $l_\phi(\varphi)$ は次式で与えられる。

$$a_\phi(k_{ij}(\phi), \phi, \varphi) = \int_{\Omega} k_{ij}(\phi) \phi_{,i} \varphi_{,j} dx \quad (6)$$

$$b_\phi(\phi, \varphi) = \int_{\Gamma_h} h \phi \varphi d\Gamma \quad (7)$$

$$l_\phi(\varphi) = \int_{\Gamma_q} q \varphi d\Gamma + \int_{\Gamma_h} h \phi_f \varphi d\Gamma + \int_{\Omega} Q \varphi dx \quad (8)$$

また式 (5) は M を上限値とした領域の大きさに関する制約条件式であり、温度 ϕ 、随伴温度 φ はそれぞれ次のような集合の要素とする。

$$\begin{aligned} \Phi = \{ \phi \in H^1(\Omega) \mid \phi = \phi_0 \text{ on } \Gamma_\phi, \\ k_{ij}(\phi) \phi_{,i} \nu_j = q \text{ on } \Gamma_q, \\ k_{ij}(\phi) \phi_{,i} \nu_j = -h(\phi - \phi_f) \text{ on } \Gamma_h \} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Psi = \{ \varphi \in H^1(\Omega) \mid \varphi = 0 \text{ on } \Gamma_\phi \} \quad (10)$$

ここで、 ν_i は境界における単位法線ベクトルを表す。なお、本論文のテンソル表示では Einstein 総和規約と偏微分表示 $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$ を使用する。

2.2 形状勾配関数 この問題は Lagrange 乗数法あるいは随伴変数法によって制約条件のない停留化問題に書き換えることができる。この場合の Lagrange 関数 $L(\phi, \varphi, \Lambda)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} L = -J(\phi) - a_\phi(k_{ij}(\phi), \phi, \varphi) - b_\phi(\phi, \varphi) + l_\phi(\varphi) \\ + \Lambda \left(\int_{\Omega} dx - M \right) \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 Λ は領域の大きさ制約に対する Lagrange 乗数である。領域変動に対する L の導関数 \dot{L} は速度場 $V(\Omega) = \partial T_s(\Omega)/\partial s = \partial T_s(T_s^{-1}(\Omega_s))/\partial s$ を用いて次のように得られる⁽⁴⁾。

$$\begin{aligned} \dot{L} = -\{ a_\phi(k_{ij}(\phi), \phi, \varphi') + b_\phi(\phi, \varphi') - l_\phi(\varphi') \} \\ - \{ a_\phi(k_{ij}(\phi)', \phi, \varphi) + a_\phi(k_{ij}(\phi), \phi', \varphi) + b(\phi', \varphi) \\ + J(\phi') \} \\ + \dot{\Lambda} \left(\int_{\Omega} dx - M \right) + \langle G\nu, V \rangle \end{aligned} \quad (12)$$

ただし、 (\cdot) は物質導関数、 $(\cdot)'$ は空間座標に固定した分布関数の領域変動に対する導関数 (形状導関数) を表す。また

$$\langle G\nu, V \rangle = \int_{\Gamma_{\text{design}} \subset \Gamma_h} G\nu_i V_i d\Gamma, \quad (13)$$

$$G = G_0 + G_1 A, \quad (14)$$

$$G_0 = -k_{ij}(\phi)\phi_{,i}\varphi_{,j} - \nabla_\nu(h\phi\varphi) - (h\phi\varphi)\kappa + \varphi Q \quad (15)$$

$$G_1 = 1. \quad (16)$$

ただし、 $\nabla_\nu(\cdot) \equiv \nabla(\cdot) \cdot \nu$ 、 κ は境界における平均曲率の $n-1$ 倍である。式 (12) からこの問題の Kuhn-Tucker 条件は次のように得られる。

$$a_\phi(k_{ij}(\phi), \phi, \varphi') + b_\phi(\phi, \varphi') = l_\phi(\varphi') \quad \forall \varphi' \in \Psi \quad (17)$$

$$a_\phi(k_{ij}(\phi)', \phi, \varphi) + a_\phi(k_{ij}(\phi), \phi', \varphi) + b_\phi(\phi', \varphi) = -J(\phi') \quad \forall \phi' \in \Phi \quad (18)$$

$$\Lambda \geq 0, \quad \int_\Omega dx \leq M, \quad \Lambda \left(\int_\Omega dx - M \right) = 0 \quad (19)$$

によって決定されたとき、Lagrange 汎関数の導関数は評価関数の導関数と一致して、次の関係が成立する。

$$\dot{L}|_{\phi, \varphi, \Lambda} = \langle G\nu, V \rangle \quad (20)$$

式 (17) と (18) はそれぞれ熱伝導場の状態方程式と随伴系方程式の変分形式を表し、式 (19) は Λ に対する支配方程式を表わしている。また、式 (13) で与えられる $G\nu_i$ は、評価関数の導関数において領域の微小変動を与える速度場 V の係数関数になっていることから、この問題における感度関数あるいは形状勾配関数になっている。形状勾配関数が与えられれば、力法⁽⁴⁾を適用することが可能となる。

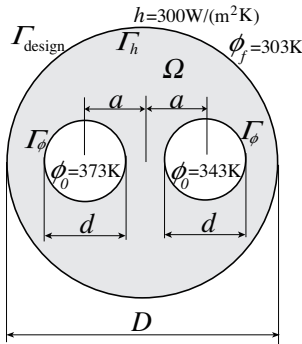


Fig. 1 2D thermal dissipation model

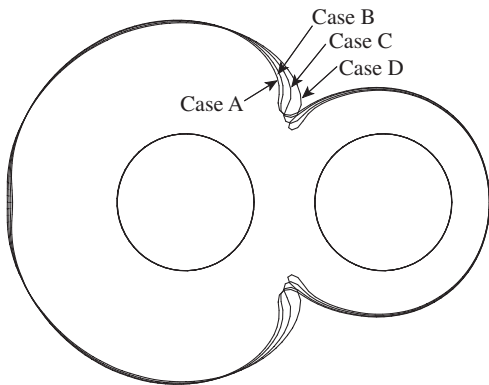


Fig. 2 Numerical results: optimum shapes

3. 熱伝導率の温度依存性を考慮した熱伝導場解析

本研究では、数値解析法として有限要素法を利用する。有限要素法の手続きに従うと、有限要素内の温度 ϕ 、随伴温度 φ を、 α 節点上の形状関数 N_α を用いて次のように表し、

$$\phi = N_\alpha \phi_\alpha, \quad \varphi = N_\alpha \varphi_\alpha \quad (21)$$

これらを式 (17) に代入し、さらに熱伝導率が温度に依存した関数として簡単な温度の一次関数 $k_{ij}(\phi) = k_{ij}(1 + a\phi)$ として仮定すると、次の有限要素方程式が得られる。

$$K_{\alpha\beta}\phi_\beta + G_{\alpha\beta\gamma}\phi_\gamma\varphi_\beta = f_\alpha \quad (22)$$

ここで、

$$K_{\alpha\beta} = \int_\Omega k_{ij} N_{\alpha,i} N_{\beta,j} dx + \int_{\Gamma_h} h N_\alpha N_\beta d\Gamma \quad (23)$$

$$G_{\alpha\beta\gamma} = \int_\Omega k_{ij} a N_{\alpha,i} N_{\beta,j} N_\gamma dx \quad (24)$$

$$f_\alpha = \int_{\Gamma_q} q N_\alpha d\Gamma + \int_{\Gamma_h} h \phi_f N_\alpha d\Gamma + \int_\Omega Q N_\alpha dx \quad (25)$$

である。式 (22) は温度 ϕ に関して非線形方程式であるために、何らかの繰り返し計算を必要とする。そこで、 $n+1$ 回目の節点温度を $\phi_\beta^{n+1} = \phi_\beta^n + \Delta\phi_\beta^n$ という増分形式で表現して式 (22) に代入し、有限要素節点での $\Delta\phi_\beta^n$ を未知数とした次式から増分温度 $\Delta\phi_\beta^n$ を求め、繰り返し計算を行うことによって温度分布 ϕ を解析する方法を用いた。

$$(K_{\alpha\beta} + G_{\alpha\beta\gamma}\phi_\gamma^n + G_{\alpha\gamma\beta}\phi_\gamma^n)\Delta\phi_\beta^n = f_\alpha - K_{\alpha\beta}\phi_\beta^n - G_{\alpha\beta\gamma}\phi_\gamma^n\phi_\beta^n \quad (26)$$

4. 解析例

機械部品の一例として、Fig.1 に示す簡単な二次元の放熱機器モデルの問題を解析した。基本境界 Γ_ϕ において、左側の境界温度 $\phi_0 = 373[\text{K}]$ 、右側の境界温度 $\phi_0 = 343[\text{K}]$ 、外側境界の熱伝達境界 Γ_h の熱伝達率 $h = 300[\text{W}/(\text{m}^2\text{K})]$ 、外部流体温度 $\phi_f = 303[\text{K}]$ 、 $D = 0.3[\text{m}]$ 、 $d = 0.09[\text{m}]$ 、 $a = 0.0675[\text{m}]$ とした。設計境界 Γ_{design} を全外側境界の熱伝達境界 Γ_h とし、二つの基本境界 Γ_ϕ は形状変動を拘束した。また領域の大きさ制約としては、初期形状の 70% 以下の条件で解析した。温度 ϕ 、随伴温度 φ および速度場 V を解析するための有限要素法解析では三角形一次要素を用いた。

熱伝導率を温度の一次関数 $k_{ij}(\phi) = k(\phi)\delta_{ij} = k(1 + a\phi)\delta_{ij}$ 、 $k = 92.5[\text{W}/(\text{mK})]$ とし、Case A: $a = 0.0$ 、Case B: $a = -2.0 \times 10^{-4}$ 、Case C: $a = -4.0 \times 10^{-4}$ 、Case D: $a = -6.0 \times 10^{-4}$ の各条件について解析を行った。

各条件に対して得られた最適形状を Fig.2 に示す。温度に依存して熱伝導率の値が小さくなると、外側の設計境界での温度分布が低くなり、放熱の促進が期待できなくなる。このことに基づいて、図 2 の解析結果は、熱伝導率が小さくなるにしたがって (Case A, B, C, D の順にしたがって)、外側境界長さを長くして放熱量を増大させた形状になっている。これらの結果から、熱伝導率の温度依存性に応じた最適形状が得られていることが確認できる。

文 献

- (1) 片峯ほか、定常熱伝導場における境界形状決定、日本機械学会論文集、B 編、65 巻、629 号、(1999)、275-281。
- (2) 片峯ほか、非定常熱伝導場における形状同定問題の解法、日本機械学会論文集、B 編、66 巻、641 号、(2000)、227-234。
- (3) 片峯ほか、放熱量最大化を目的とした非定常熱伝導場の形状最適化、日本機械学会論文集、B 編、74 巻、743 号、(2008)、1609-1616。
- (4) 畔上、領域最適化問題の一解法、日本機械学会論文集、A 編、60 巻、574 号 (1994)、1479-1486。