

# ソリッド体の境界面問題に対する形状最適化 (応力分布のコントロール)

## Shape Optimization for Interface Problem of Solid Structure (Control of Stress distribution)

正 下田 昌利 (湘南工科大)

○学 元良 新太郎 (湘南工科大(院))

正 畔上 秀幸 (名大)

Masatoshi SHIMODA, Shonan Institute of Technology, 1-1-25 Nishikaigan Tsujido Fujisawa  
Shintaro MOTORA, Graduate School, Shonan Institute of Technology  
Hideyuki AZEGAMI, Nagoya University

*Key Words:* Optimum Design, Interface, Shape Optimization, Structural Optimization, Traction Method, Shape Identification

### 1. はじめに

設計問題において、ある境界条件下で、変位分布や応力分布を所望の分布へ近づける形状最適化問題は構造に機能を持たせる観点からも興味を持たれている。著者らは同一材料の場合の変位分布のコントロール問題<sup>(1)</sup>とミーゼス応力のコントロール問題<sup>(2)</sup>について、その二乗誤差を目的汎関数として感度関数(形状勾配関数)を導出し、力法による解法を示した。また、畔上らは異なる材料から構成された構造体の境界面形状の決定問題を、変位二乗誤差を目的汎関数として、力法による解法を示している<sup>(3)</sup>。本報では異なる材料から構成された3次元構造体に対して、応力分布を所望の分布へ近づけることを狙い応力二乗誤差を目的汎関数とし、異種材料境界面や荷重境界面を含む設計境界の形状最適化問題の解法を提示することを目的とする。物質導関数法を用いて、形状勾配関数を導出し、力法により最適形状を求めたので、解法と計算結果を紹介する。

### 2. 応力規定問題

図1のような材料Aと材料Bの異種材料からなる全体領域 $\Omega$ 、境界 $\Gamma(\equiv\partial\Omega)$ (材料Aからなる部分領域とその境界を $\Omega_A, \Gamma_A$ 、材料Bからなる部分領域とその境界を $\Omega_B, \Gamma_B$ 、両者の境界面を $\Gamma_{AB}\equiv\Gamma_A\cap\Gamma_B$ )の3次元線形弾性体の変動して領域 $\Omega_s$ 、境界 $\Gamma_s$ となるものと仮定する。 $s$ は領域の変動履歴を表す。物体力 $f(x)$ と表面力 $P(x)$ 、及び表面力の特殊な場合として圧力のような法線方向表面力 $p(x)\mathbf{n}$ がそれぞれ $\Omega_s, \Gamma_{s1}, \Gamma_{s2}$ に作用しているものとする。応力分布を所望の分布へ近づけるため、応力規定領域 $\Omega_D$ (その周囲境界は $\partial\Omega_D$ )での目標とする規定応力テンソル $\tilde{\sigma}$ と応力テンソル $\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}\}^T$ との二乗誤差を目的汎関数とする。状態方程式と体積 $M$ (制約値 $M_0$ )を制約条件とすると、この形状最適化問題は次のように表すことができる。

$$\text{Find } \Omega_s \text{ (or } V) \quad (1)$$

$$\text{that minimize } E_{\Omega}((\sigma(\mathbf{v})-\tilde{\sigma}), (\sigma(\mathbf{v})-\tilde{\sigma})) \quad (2)$$

subject to

$$a_A(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - h_A(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + a_B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - h_B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = l(\mathbf{w}), \quad \forall \mathbf{w} \in U \quad (3)$$

$$M(= \int_{\Omega} d\Omega) \leq M_0 \quad (4)$$

ここで、双1次形式 $E_{\Omega}((\sigma(\mathbf{v})-\tilde{\sigma}), (\sigma(\mathbf{v})-\tilde{\sigma})), a_m(\mathbf{v}, \mathbf{w}), h_m(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ と1次形式 $l(\mathbf{w})$ を式(5)から式(8)のように定義する。ただし、 $m=A, B$ とし、歪と応力は式(9)と(10)で定義される。また、 $U$ は変位の拘束条件を満たす許容関数空間とする。

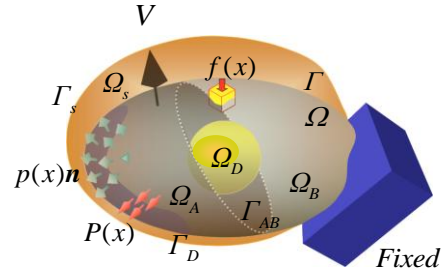


Fig1. Domain Variation of Continuum

$$E_{\Omega}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \int_{\Omega_b} y_{ij} z_{ij} d\Omega \quad (5)$$

$$a_m(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega_m} \sigma_{ij}^m(\mathbf{v}) \varepsilon_{ij}^m(\mathbf{w}) d\Omega \quad (6)$$

$$h_m(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega_m} \sigma_{i,j}^m n_j^m w_i d\Omega \quad (7)$$

$$l(\mathbf{w}) = \int_{\Omega} f_i w_i d\Omega + \int_{\Gamma_1} P_i w_i d\Gamma + \int_{\Gamma_2} p(x) n_i w_i d\Gamma \quad (8)$$

$$\varepsilon_{ij}^m(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(v_{i,j}^m + v_{j,i}^m), \quad \sigma_{ij}^m(\mathbf{v}) = C_{ijkl}^m \varepsilon_{i,j}^m(\mathbf{v}) \quad (9)(10)$$

この問題に対するラグランジュ汎関数 $L$ は $\mathbf{w}, \Lambda$ をそれぞれ状態方程式と体積制約に対するラグランジュ乗数として次のように表される。

$$L(\Omega_s \mathbf{v}, \mathbf{w}, \Lambda) = E_{\Omega}((\sigma(\mathbf{v})-\tilde{\sigma}), (\sigma(\mathbf{v})-\tilde{\sigma})) - a_A(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + h_A(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - a_B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + h_B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + l(\mathbf{w}) + \Lambda(M - M_0) \quad (11)$$

Dirichlet境界は変動しないことを仮定すると、ラグランジュ汎関数 $L$ の領域変動に対する導関数 $\dot{L}$ は次式のように表される。

$$\begin{aligned} \dot{L} = & 2E_{\Omega}(\sigma - \tilde{\sigma}, \sigma') - a_A(\mathbf{v}', \mathbf{w}) - a_A(\mathbf{v}, \mathbf{w}') + h_A(\mathbf{v}', \mathbf{w}) + h_A(\mathbf{v}, \mathbf{w}') \\ & - a_B(\mathbf{v}', \mathbf{w}) - a_B(\mathbf{v}, \mathbf{w}') + h_B(\mathbf{v}', \mathbf{w}) + h_B(\mathbf{v}, \mathbf{w}') + l(\mathbf{w}') \\ & + \dot{\Lambda}(M - M_0) + l_G(\mathbf{V}) \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、

$$l_G(\mathbf{V}) = \int_{\partial\Omega_b} (\sigma_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij})(\sigma_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij}) V_n d\Gamma$$

$$+ \int_{\Omega} f'_i w_i d\Omega + \int_{\Gamma} (f_i w_i - e_{ijkl} v_{k,l} w_{i,j} + \Lambda) V_n d\Gamma$$

$$+ \int_{\Gamma_{AB}} [ \{ -\sigma_{ij}^A(\mathbf{v}) \varepsilon_{ij}^A(\mathbf{w}') + (\sigma_{ij}^A(\mathbf{v}) n_j^A w_i)_{,m} n_m^A + (\sigma_{ij}^A(\mathbf{v}) n_j^A w_i) \kappa^A \} V_n^A$$

$$\{ -\sigma_{ij}^B(\mathbf{v}) \varepsilon_{ij}^B(\mathbf{w}') + (\sigma_{ij}^B(\mathbf{v}) n_j^B w_i)_{,m} n_m^B + (\sigma_{ij}^B(\mathbf{v}) n_j^B w_i) \kappa^B \} V_n^B ] d\Gamma$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Gamma_1} \{P_i^A w_i + (P_{i,j} n_j w_i + P_j w_{i,j} n_j + \kappa P_i w_i) V_n\} d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma_2} \{p^A w_i n_i + \text{div}(p w_i) V_n\} d\Gamma
\end{aligned} \quad (13)$$

ただし、 $\mathbf{V}_n = n_i V_i(\mathbf{x})$ 、 $\mathbf{V}_n^m = n_i^m V_i^m(\mathbf{x})$  とし、 $\mathbf{V}(\mathbf{x})$  は領域変動  $s$  に対する (設計) 速度場を表す。  $\kappa$  は 3 次元の場合、平均曲率の 2 倍を表し、本研究では、評価点近傍をベジエ曲面で近似して求めた。また、 $(\cdot)'$  は形状導関数、 $(\cdot)$  は物質導関数を表す。次の関係を考慮し、

$$\mathbf{n}^A = -\mathbf{n}^B, \kappa^A = -\kappa^B, \quad (14)(15)$$

$$\mathbf{w}^A = -\mathbf{w}^B, \sigma_{ij}^A n_j^A = \sigma_{ij}^B n_j^B \quad (16)(17)$$

$f$ ,  $P$ ,  $p$  が空間固定 ( $f'(\mathbf{x}) = P'(\mathbf{x}) = p'(\mathbf{x}) = 0$ )、 $\tilde{\sigma}$  が物質固定 ( $\dot{\tilde{\sigma}} = 0$ ) の場合、 $l_G(\mathbf{V})$  は次式のように速度場  $\mathbf{V}$  と形状勾配関数  $\mathbf{G}$  の一次形式 (この場合は境界積分) で表される。

$$\begin{aligned}
l_G(\mathbf{V}) = & \int_{\Gamma} G V_n d\Gamma + \int_{\Omega_D} G_D V_n d\Gamma + \int_{\Gamma_{AB}} G_{AB} V_n^A d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma_1} G_1 V_n d\Gamma + \int_{\Gamma_2} G_2 V_n d\Gamma \quad (18)
\end{aligned}$$

$$G = f_i w_i - e_{ijkl} v_{k,l} w_{i,j} + A \quad (19)$$

$$G_D = (\sigma_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij})(\sigma_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij}) \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
G_{AB} = & -\{\sigma_{ij}^A(\mathbf{v}) \varepsilon_{ij}^A(\mathbf{w}) - \sigma_{ij}^B(\mathbf{v}) \varepsilon_{ij}^B(\mathbf{w})\} \\
& + \sigma_{ij}^A(\mathbf{v}) n_j^A \{\varepsilon_{im}^A(\mathbf{w}) - \varepsilon_{im}^B(\mathbf{w})\} n_m^A \quad (21)
\end{aligned}$$

$$G_1 = P_{i,j} n_j w_i + P_j w_{i,j} n_j + \kappa P_i w_i \quad (22)$$

$$G_2 = \text{div}(p w_i) \quad (23)$$

ラグランジュ汎関数  $L$  の  $\mathbf{v}, \mathbf{w}, A$  に対する最適性条件は次のようになる。

$$a_A(\mathbf{v}, \mathbf{w}') - h_A(\mathbf{v}, \mathbf{w}') + a_B(\mathbf{v}, \mathbf{w}') - h_B(\mathbf{v}, \mathbf{w}') = l(\mathbf{w}'), \quad \forall \mathbf{w}' \in U \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
a_A(\mathbf{v}', \mathbf{w}) - h_A(\mathbf{v}', \mathbf{w}) + a_B(\mathbf{v}', \mathbf{w}) - h_B(\mathbf{v}', \mathbf{w}) \\
= 2E_{\Omega}((\sigma(\mathbf{v}) - \tilde{\sigma}), \sigma'(\mathbf{v}')), \quad \forall \mathbf{v}' \in U \quad (25)
\end{aligned}$$

$$A(M - M_0) = 0, M - M_0 \leq 0, A \geq 0 \quad (26)(27)(28)$$

これらの条件で決定された  $\mathbf{v}$  または  $\mathbf{w}$ 、及び  $A$  を式(18)から式(23)に代入することにより、本問題での形状勾配関数が求められる。これを力法に適用することで最適形状を求めた。

### 3. 最適化計算結果

開発したシステムを用いて、ノッチ (切欠) を有する 3 次元ソリッド体の例題に適用し、応力分布が規定された連続体の形状最適化に対する本手法の有効性を検証した。

#### 3.1 単一材料からなる切欠構造問題

ノッチ部分  $\Omega_D$  を応力規定領域とし、その  $x$  方向の応力分布  $\sigma_x(x)$  を一様な目標応力(100MPa)へ近づけることを目標とした。なお、ノッチ形状を変更できる場合(Case1)とできない場合(Case2)について計算を行った。図 2(a)に応力解析時の境界条件、(b)に形状解析時の拘束条件を示す。両問題に対して体積一定の制約を与え、Case1 では上下面を設計境界とし、Case2 では下面のみを設計境界 (応力規定領域は固定) とした。得られた最適形状と計算履歴を図 3 と図 4 に示す。Case1 に関してはノッチ部分が平らになり目的汎関数も零になっていることが確認できる。Case2 は設計境界が波形の形状となり、目的汎関数は応力規定境界を拘束したことと体積制約のため約 60%の減少であるが、最小化されていることが確認できる。

#### 3.2 異種材料からなる切欠構造問題

3.1 節と同様、ノッチ部分  $\Omega_D$  を応力規定領域とし、その  $x$  方向の応力分布  $\sigma_x(x)$  を一様な目標応力(200MPa)へコントロールする場合について計算を行った。ただし、ソリッド体は図 5(a)に示すように 2 種類の材料  $\alpha$ ,  $\beta$  から構成され、 $\alpha$  のヤング率は 210GPa、 $\beta$  は 69GPa とした。なお、応力解析の問題設定は問題 3.1 と同様とし、体積、長さ、厚さ一定及び応力規定領域固定の制約条件を与え、材料境界面のみを設計境界 (変動可能) とした。得られた最適形状を図 5(b)に、計算履歴を図 6(a)に示す。目的汎関数は約 40%減少した。また、同条件で材料を上下入れ替えた場合の最適形状を図 6(b)に示す。材料を入れ替えた場合、目的汎関数は約 24%減少した。

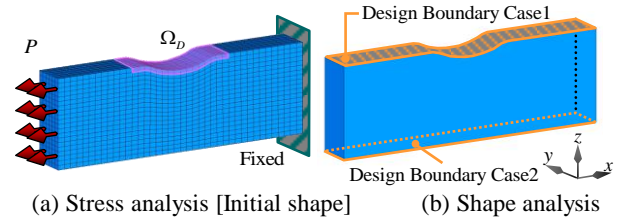


Fig.2 Boundary conditions of notched solid problem [1-material]

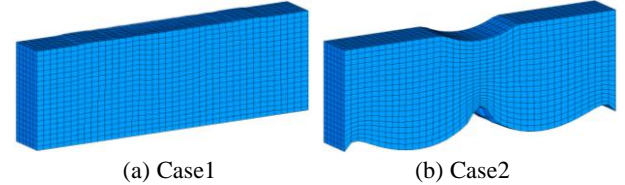


Fig.3 Optimal shapes of notched solid problem

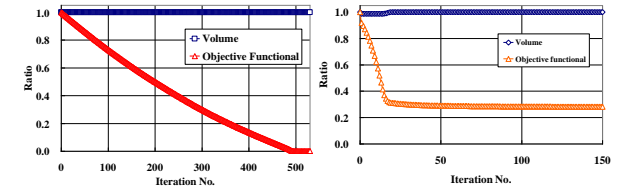


Fig.4 Iteration histories of notched solid problem

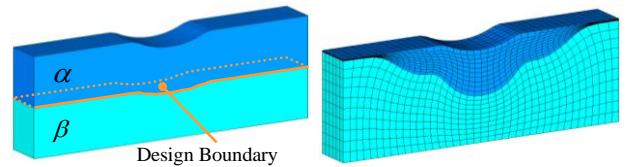


Fig.5 Interface problem of notched solid

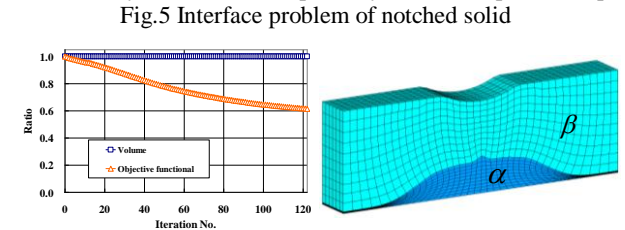


Fig.6 Iteration histories and optimal shape

### 4. おわりに

異種材料からなる 3 次元ソリッド体の応力のコントロールを目的に、材料境界面や荷重境界面を設計境界とする最適化問題の形状勾配関数と力法による計算結果を示した。

参考文献

[1] 下田, 畔上, 桜井, 機論, 62-604, A(1996), 2831-2837

[2]下田, 畔上, 桜井, 機論, 62-602, A(1996), 2393-2400

[3]畔上, 小山, 機講論, 2005-18, 331-332.