

シェル構造の外形状最適化のための一解法

A Solution to Configuration Optimization Problem of Shell Structure

正 下田 昌利 (湘南工科大) ○学 岩佐 恭平 (湘南工科大 (院))
正 畔上 秀幸 (名古屋大学)

Masatoshi SHIMODA, Shonan Institute of Technology, 1-1-25 Nishikaigan Tsujido Fujisawa
Kyohei IWASA, Graduate School, Shonan Institute of Technology
Hideyuki AZEGAMI, Nagoya University

This paper presents a numerical optimization method for optimal configuration design of shell structures. It is assumed that the shell surface is varied in the out-of-plane direction to optimize its configuration, and the thickness is constant. A solution to compliance minimization problem subject to a volume constraint is proposed to maximize the stiffness of shell structures. With this solution, the optimal configuration is obtained without any parameterization of the design variables. The problem is formulated as a non-parametric shape optimization problem. The shape gradient function is theoretically derived using the material derivative formulas, Lagrange multiplier method and the adjoint variable method. The traction method, which was proposed as a gradient method in Hilbert space, is applied to determine the smooth shell surface while minimizing the objective functional. In the design velocity analysis of the traction method, earth spring elements are added to shell surface to restrain a rigid-motion-like shape variation and to stabilize the convergence. The calculated results show the effectiveness of the proposed method for optimal configuration design of shell structures.

Key Words: Optimum Design, Shape optimization, Configuration Design, Shell, Traction Method, Structural Optimization, Material Derivative, Adjoint Variable

1. はじめに

シェル構造は曲率を有した薄板構造で、主として膜力により荷重を効率的に分担する点に特徴がある。目的に応じ、開断面（空間）や閉断面（空間）を構成でき、軽量化への寄与が極めて高い構造である。その用途は極めて広く、建築分野の空間構造、自動車や航空機などの骨組みや外板の構造には欠かせないものになっている。シェル構造の形状設計を行う場合、形状決定の変数として、面内 and/or 面外方向が考えられる。著者らはこれまでに、面内の形状変動を設計変数にした種々の最適設計問題について、その解法と検証結果を示してきた⁽¹⁾⁻⁽³⁾。また、面外方向に関しては、局所的な凹凸を設けるための直感的な手法⁽⁴⁾やベースペクトルを用いる方法⁽⁵⁾についても示してきた。その他のシェルや薄板の面外方向の形状最適化の研究において、Ramm ら⁽⁶⁾や Rao ら⁽⁷⁾はベジエ曲面のコントロールポイントを設計変数とするパラメトリックな手法により、ドームやベル等のシェルの自由曲面形状を求めている。Choi ら⁽⁸⁾は面内変動と剛体回転でシェルの変動を定義し、その感度の導出方法を示している。最適化ではないが、ノンパラメトリックな手法としては、Mattheck⁽⁹⁾は応力の大きさに応じて面外の法線方向に節点を移動させる方法を示している。

本報では、局所的な凹凸に限らず、設計領域の面外方向の変動を形状決定の変数としたシェルの外形状の最適設計問題を扱う。滑らかなシェルの表面形状を得ることを狙い、これまで連続体⁽¹⁰⁾やシェルの面内変動の形状最適化へ適用してきた力法⁽¹¹⁾をシェルの外形状設計へ適用することを試みた。最適設計問題としてはコンプライアンスを目的汎関数とした剛性設計問題を対象とした。設計変数のパラメータ化が不要な分布系の最適化問題として定式化し、面外の形状変動に対する形状勾配関数を導出し、力法に適用した。なお、力法の速度場解析において、形状勾

配関数による変動をその評価点近傍に限定するため、シェル表面にアースパネ要素を付加し、速度場解析時の FEM の剛性行列の対角成分を増大させた。例題を通して、力法に基づく本解法の検証を行ったので、その結果を示す。

2. 平面シェル要素の集合体の支配方程式 (変分形式)

シェル構造を図1のように有界な領域 $\Omega \subset \square^3$ を占める区分的に板状の線形弾性体の集合体と仮定する。領域 Ω は中央面 A と板厚方向の領域 $(-h/2, h/2)$ により、また、シェル端面 S は A の境界 ∂A により次式のように定義する。

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \square^3 \mid (x_1, x_2) \in A \subset \square^2, x_3 \in (-h/2, h/2)\} \quad (1)$$

$$\Omega = A \times \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right), \quad S = \partial A \times \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right) \quad (2)(3)$$

このシェル構造の応力やひずみの評価には簡単のため、膜要素と曲げ要素を組み合わせた平面シェル要素による有限要素解析を用いることとする。また、板曲げに関する理論については Mindlin-Reissner の理論を用い、膜力と曲げ力の連成も考慮しないこととする。また、板の中心面の位置を表す局所座標系 $(x_1, x_2, 0)$ から全体座標系 (X_1, X_2, X_3) への写像 $\phi: (x_1, x_2, 0) \in \square^2 \mapsto (X_1, X_2, X_3) \in \square^3$ は区分的に滑らかであるとする。局所座標で表した変位 $\mathbf{u} = \{u_i\}_{i=1,2,3}$ を

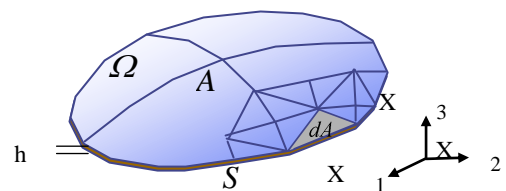


Fig. 1 Geometry of a shell as an assembly of flat elements

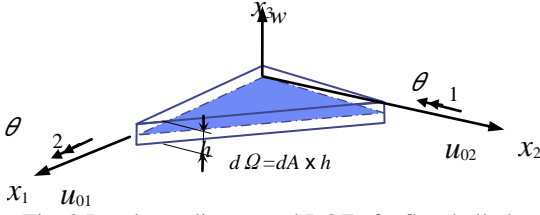


Fig. 2 Local coordinates and DOF of a flat shell element

次式のように、面内方向変位 $\{u_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ と面外方向変位 u_3 に分けて考える。

$$u_\alpha(x_1, x_2, x_3) \equiv u_{0\alpha}(x_1, x_2) - x_3 \theta_\alpha(x_1, x_2) \quad (4)$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) \equiv w(x_1, x_2) \quad (5)$$

ここで、 $\{u_{0\alpha}\}_{\alpha=1,2}$, w , $\{\theta_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ は図2に示すように、それぞれ板中心面の面内変位、面外変位と回転角を表す。なお、ギリシャ文字の下添字は $\alpha=1,2$ を表すこととし、テンソルの添字表記においては総和規約と空間座標に関する偏微分表記法 $\partial(\cdot)/\partial x_i = (\cdot)_{,i}$ を使用する。

平面シェル要素の集合体と仮定したシェル構造の $(\mathbf{u}_0, w, \boldsymbol{\theta}) \in U$ に関する平衡方程式（弱形式）は平面応力状態を仮定し、3次元弾性問題の弱形式に式(4)(5)の関係を代入し、板厚方向の積分（ $\int_\Omega (\square) d\Omega = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\square) dz dA$ ）を行うことにより、次式のように表される。なお、外力として領域 A に面外荷重 q 、各部分境界（ $\subset \partial A$ ）には単位長さ当たりの面内力 $\mathbf{N} = \{N_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ 、単位長さ当たりのせん断力 \mathbf{Q} 、単位長さ当たりの曲げモーメント $\mathbf{M} = \{M_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ が作用するとする。

$$a((\mathbf{u}_0, w, \boldsymbol{\theta}), (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{w}, \bar{\boldsymbol{\theta}})) = l((\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{w}, \bar{\boldsymbol{\theta}})), \quad \forall (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{w}, \bar{\boldsymbol{\theta}}) \in U. \quad (6)$$

ここで、双一次形式 $a(\cdot)$ と一次形式 $l(\cdot)$ はそれぞれ以下のように表される。また、 (\cdot) は変分を表す。 U は変位 $(\mathbf{u}_0, w, \boldsymbol{\theta})$ の拘束条件を満たす許容関数空間とする。

$$\begin{aligned} a((\mathbf{u}_0, w, \boldsymbol{\theta}), (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{w}, \bar{\boldsymbol{\theta}})) &= \int_\Omega \{C_{\alpha\beta\gamma\delta} (u_{0\alpha,\beta} - x_3 \theta_{\alpha,\beta})(\bar{u}_{0\gamma,\delta} - x_3 \bar{\theta}_{\gamma,\delta}) \\ &\quad + \int_\Omega \{C_{\alpha\beta}^S (w_{,\alpha} - \theta_\alpha)(\bar{w}_{,\beta} - \bar{\theta}_\beta)\} d\Omega \\ &= \int_A \{c_{\alpha\beta\gamma\delta}^B \theta_{\gamma,\delta} \bar{\theta}_{\alpha,\beta} + c_{\alpha\beta\gamma\delta}^M u_{0\gamma,\delta} \bar{u}_{0\alpha,\beta} + k c_{\alpha\beta}^S (w_{,\beta} - \theta_\beta)(\bar{w}_{,\alpha} - \bar{\theta}_\alpha) \\ &\quad + k c_{\alpha\beta}^S (w_{,\beta} - \theta_\beta)(\bar{w}_{,\alpha} - \bar{\theta}_\alpha)\} dA \quad (7) \end{aligned}$$

$$l((\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{w}, \bar{\boldsymbol{\theta}})) = \int_A q \bar{w} dA + \int_{\partial A} (N_\alpha \bar{u}_{0\alpha} ds - M_\alpha \bar{\theta}_\alpha + Q \bar{w}) ds \quad (8)$$

ここで、 $\{C_{\alpha\beta\gamma\delta}\}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1,2}$, $\{C_{\alpha\beta}^S\}_{\alpha,\beta=1,2}$ はそれぞれ膜力とせん断力に関する剛性テンソルを表す。また、 $\{c_{\alpha\beta\gamma\delta}^B\}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1,2}$, $\{c_{\alpha\beta}^S\}_{\alpha,\beta=1,2}$, $\{c_{\alpha\beta\gamma\delta}^M\}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1,2}$ はそれぞれ板厚方向の積分後の曲げ、せん断、膜力（平面応力）に関する剛性テンソルを表す。 k はせん断補正係数を表す。

3. シェル構造の外形状最適化問題

3.1 領域変動の仮定

図3のように初期領域 Ω 、中央面 A 、境界 ∂A 、端面 S の線形弾性体シェル構造が中央面の面外領域変動 \mathbf{V} によ

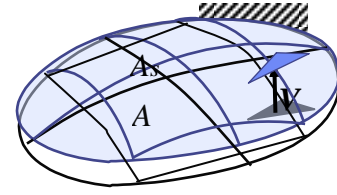


Fig. 3 Shape variation in the out-of-plane direction to a shell surface

り領域 Ω_s 、中央面 A_s 、境界 ∂A_s 、端面 S_s となるものと仮定する。また、領域は面内方向へは変動しないこと、及び板厚も変動しないことを仮定する。 s は領域の変動履歴を表す。設定された目的汎関数を最小化する \mathbf{V} を求めることが目的となる。

3.2 コンプライアンス最小化問題

体積および状態方程式(6)を制約条件とし、コンプライアンス（外力仕事）を目的関数（最小化）とすると、分布系の形状最適化問題は次のように表される。

$$\text{Given } A \quad (9)$$

$$\text{find } A_s \text{ (or } \mathbf{V}) \quad (10)$$

$$\text{that minimize } l(\mathbf{u}_0, w, \boldsymbol{\theta}) \quad (11)$$

$$\text{subject to Eq.(6),} \quad (12)$$

$$M (= \int_A h dA) \leq \hat{M} \quad (13)$$

ここで、 M , \hat{M} はそれぞれ体積とその制約値を表す。

この問題に対するラグランジュ汎関数 L は $(\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{w}, \bar{\boldsymbol{\theta}})$, A をそれぞれ状態方程式と体積制約に対するラグランジュ乗数として次のように表される。

$$\begin{aligned} L(\Omega, (\mathbf{u}_0, w, \boldsymbol{\theta}), (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{w}, \bar{\boldsymbol{\theta}}), A) \\ = l(\mathbf{u}_0, w, \boldsymbol{\theta}) + l(\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{w}, \bar{\boldsymbol{\theta}}) - a((\mathbf{u}_0, w, \boldsymbol{\theta}), (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{w}, \bar{\boldsymbol{\theta}})) + \Lambda(M - \hat{M}) \end{aligned} \quad (14)$$

簡単のため、零でない外力 \mathbf{N} , \mathbf{Q} , \mathbf{M} の作用する部分境界は変動しないこと（ $\mathbf{V}=0$ ）を仮定し、シェル表面に作用する荷重 q 及び、境界に作用する荷重は空間及び物質固定（ $q' = \dot{q} = N' = \dot{N} = Q' = \dot{Q} = M' = \dot{M} = 0$ ）を仮定すると、ラグランジュ汎関数の領域変動に対する導関数 \dot{L} は、領域変動に対する速度場 \mathbf{V} を用いて次式のように表される。なお、 $(\cdot)'$ は形状導関数、 (\cdot) は物質導関数を表す⁽⁶⁾。本問題に物質導関数の公式を適用する際、式(7)の Ω を積分範囲とする状態方程式を用い、シェル上面の外向き法線方向への変動を正とし、 $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}^{top} = -\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}^{btm}$ の関係を用いた。 \mathbf{n}^{top} , \mathbf{n}^{btm} はシェル上面と下面の外向きを正とする単位法線ベクトルを表し、中央面の単位法線ベクトルを $\mathbf{n}^{mid} (\equiv \mathbf{n}) = \mathbf{n}^{top} = -\mathbf{n}^{btm}$ とした。

$$\begin{aligned} \dot{L} &= l(\mathbf{u}'_0, w', \boldsymbol{\theta}') + l(\bar{\mathbf{u}}'_0, \bar{w}', \bar{\boldsymbol{\theta}}') - a((\mathbf{u}'_0, w', \boldsymbol{\theta}'), (\bar{\mathbf{u}}'_0, \bar{w}', \bar{\boldsymbol{\theta}}')) \\ &\quad - a((\mathbf{u}_0, w, \boldsymbol{\theta}), (\bar{\mathbf{u}}'_0, \bar{w}', \bar{\boldsymbol{\theta}}')) + \Lambda'(M - \hat{M}) + l_G(\mathbf{V}), \quad \mathbf{V} \in C_\Theta \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_G(\mathbf{V}) &\equiv \langle \mathbf{G}\mathbf{n}, \mathbf{V} \rangle = \int_A \mathbf{G}\mathbf{n} \cdot \mathbf{V} dA = \int_A \mathbf{G} \cdot \mathbf{V} dA \\ &= \int_A \left[-\{C_{\alpha\beta\gamma\delta} (u_{0\alpha,\beta} + \frac{h}{2} \theta_{\alpha,\beta})(\bar{u}_{0\gamma,\delta} + \frac{h}{2} \bar{\theta}_{\gamma,\delta}) \right. \\ &\quad \left. - C_{\alpha\beta\gamma\delta} (u_{0\alpha,\beta} - \frac{h}{2} \theta_{\alpha,\beta})(\bar{u}_{0\gamma,\delta} - \frac{h}{2} \bar{\theta}_{\gamma,\delta})\} + hH\Lambda \right. \\ &\quad \left. + \nabla \cdot [q(w + \bar{w})\mathbf{n} + Hq(w + \bar{w})\mathbf{n}] \mathbf{V} dA \quad (16) \end{aligned}$$

ここで、 C_Θ は領域変動の制約条件を満たす許容関数空間を表す。また、 H はシェル曲面の平均曲率の2倍を表す。

ラグランジュ汎関数 L の $(u_0, w, \theta), (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})$ および Λ に関する最適性条件は以下ようになる。

$$a((u_0, w, \theta), (\bar{u}_0', \bar{w}', \bar{\theta}')) = l((\bar{u}_0', \bar{w}', \bar{\theta}')), \quad \forall (\bar{u}_0', \bar{w}', \bar{\theta}')) \in U \quad (17)$$

$$a((u_0', w', \theta'), (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta})) = l((u_0', w', \theta')), \quad \forall (u_0', w', \theta') \in U \quad (18)$$

$$\Lambda(M - \hat{M}) = 0, \quad M - \hat{M} \leq 0, \quad \Lambda \geq 0 \quad (19)(20)(21)$$

式 (17) と式 (18) から得られる自己随伴関係 $((u_0, w, \theta) = (\bar{u}_0, \bar{w}, \bar{\theta}))$ を考慮すると、この問題の形状勾配密度関数 G は次式のように表される。式(22)の右辺第1項は上面と下面の膜成分と曲げ成分によるひずみエネルギー密度の差（垂直せん断成分は除く）、第2項は表面の曲率 H を含む体積変動に関する項、第3項は荷重 q の変動に関する項を表す。

$$G = -\left\{ C_{\alpha\beta\gamma\delta} \left(u_{0\alpha,\beta} + \frac{h}{2} \theta_{\alpha,\beta} \right) \left(u_{0\gamma,\delta} + \frac{h}{2} \theta_{\gamma,\delta} \right) - C_{\alpha\beta\gamma\delta} \left(u_{0\alpha,\beta} - \frac{h}{2} \theta_{\alpha,\beta} \right) \left(u_{0\gamma,\delta} - \frac{h}{2} \theta_{\gamma,\delta} \right) \right\} + hHA + 2\{\nabla(qw)\mathbf{n} + Hqw\} \quad (22)$$

形状勾配関数が導出されれば手法の適用が可能となるが、シェル構造へ適用する場合は工夫が必要となる。

4. 手法による形状変動の解析

手法はヒルベルト空間での勾配法による形状最適化手法として提案されている。詳細は文献^[9]に譲るが、 $-G$ に比例した法線方向荷重を次式に従い設計境界に与えることにより、目的汎関数を減少させる速度場（領域変動量） V が求められる。

$$a(V, \mathbf{y}) = -\langle G\mathbf{n}, \mathbf{y} \rangle \quad \forall \mathbf{y} \in C_0 \quad (23)$$

領域の更新は ΔsV を前の形状に重ね合わせることで行い、 Δs は十分小さな正の実数を表す。手法は形状勾配関数をノイマン条件として与えることにより、境界形状の滑らかさを保てる点にも特徴がある。この領域変動量の解析を速度場解析、もしくは領域変動解析と呼ぶ。速度場解析において、設計や製造上の制約がある場合はその拘束を設計境界や領域に与える。更に、手法の速度場解析において、形状勾配関数の影響をその評価点近傍に制限するため、すなわち、剛体的な変動やそれに近い形状全体に及ぶような変動を抑えるための拘束も与える。これを与えない場合、繰り返し計算での振動の発生等、収束に問題を生じる場合があった。逆に、拘束を与えることにより、要素の潰れや好ましくない変形を生じる場合もある。特に、アスペクト比の大きい2次元や3次元の連続体の場合や初期形状から収束形状までの形状変動の大きい問題の場合、この問題が生じ易い。これらの問題を改善するため、畔上らにより、バネ定数 α のアースバネを設計境界に付加することと等価な下式のようなロビン条件による手法（ロビン型と呼ぶ）が提案された^[12]。

$$a(V, \mathbf{y}) + \alpha \langle (V \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}, \mathbf{y} \rangle = -\langle G\mathbf{n}, \mathbf{y} \rangle \quad \forall \mathbf{y} \in C_0 \quad (24)$$

本報で扱うシェルや板構造の面外方向への変動による最適化の場合にも、形状勾配関数をノイマン条件として与える場合、剛体的な変動が生じるため、ロビン条件を適用

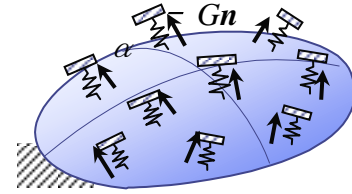


Fig. 4 Traction method using the Robin condition

することを試みた。図4のように、シェル表面にアースバネ要素を付加し、剛性行列の対角成分を増大させ、形状勾配関数の影響がその節点近傍に強く現れることを狙った。

5. 計算結果

式(22)をロビン型手法に適用し、2つのシェル問題の最適化計算を行った。なお、簡単のため、式(22)の右辺第2項の $H=1$ とし、第3項目についても無視できる問題設定とした。

5.1 板の振り問題

図5(a)のように、振りを受ける長方形板（サイズ 100×50 , $h=10$, ヤング率 200000）について最適化解析を行った。なお、速度場解析では図5(b)のように周囲を単純支持した。なお、体積制約は初期形状の 1.05 倍とし、アースバネのバネ定数 $\alpha = 6.2 \times 10^5$ とした。得られた最適形状を図6に、収束履歴を図7に示す。振り荷重に対して、体積制約を満たし、剛体的な変動による形状は回避され、アースバネの効果により、XX型の凸部が存在する最適なシェル形状が得られていることが確認できる。安定した収束で、コンプライアンスの減少率は約9%であった。減少率

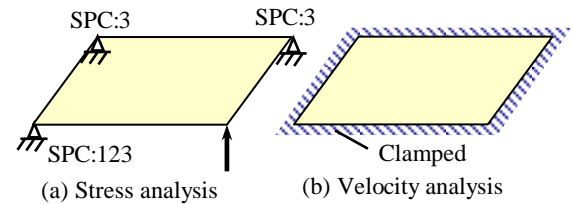


Fig. 5 Boundary conditions for torsion plate problem

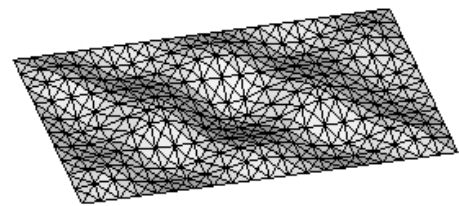


Fig. 6 Calculated results of torsion plate problem

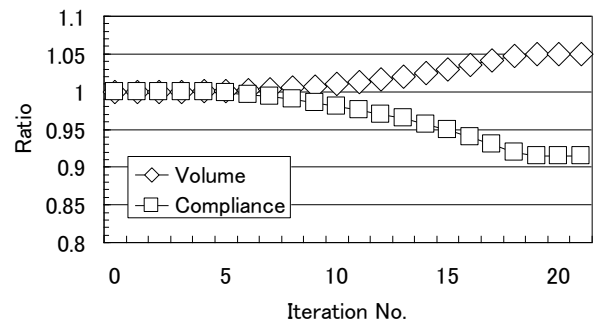


Fig. 7 Iteration histories of torsion plate problem

が9%と小さいのは板厚の設定ことに起因する。なお、バ

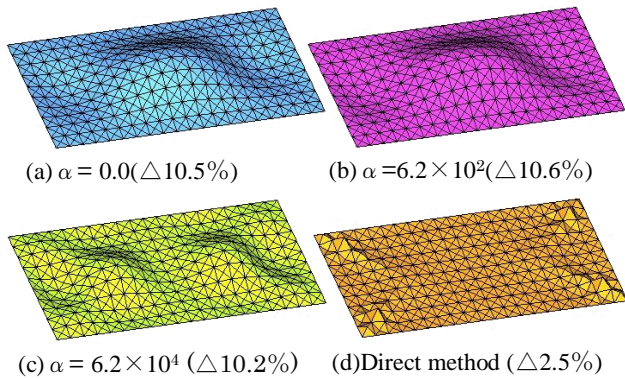


Fig. 8 Comparison of obtained configurations

ネ定数 $\alpha = 6.2 \times 10^6$ の場合も図 6 と同様の形状が得られた。

アースバネの効果とバネ定数の影響を調べるため、バネ定数を図 6 の場合より低く設定し、同様の最適化計算を行った。得られた結果を図 8 に示すが、()内はコンプライアンスの減少率を表す。いずれも制約条件をアクティブに満たしている。(a)は従来のアースバネを含まないノイマン型の力法による結果であり、(d)は比較のために行った形状勾配関数に比例して直接、節点を法線方向へ移動させた直接法による計算である。(a)(b)はバネの影響がなく(小さく)、剛体的な変動の外形になっており、同じ形状へ収束している。(c)は図 6 と類似の部分もあるが、別の局所形状の可能性が高い。(d)は四隅に突起部が生じ、やや滑らかさに欠けた最終形状であるが、部分的に図 8 (c)や図 6 と類似の形状になっている。コンプライアンスは(d)を除き、ほぼ同様の値に収束している。

5. 2 十字荷重を受ける正方形板問題

図 9 (a)のように、周辺を単純支持し、中央に十字荷重を受ける正方形板(サイズ 100×100 , $h=10$, ヤング率 200000)について最適化解析を行った。なお、速度場解析では周辺の節点に加え、図 9 (b)のように荷重を受ける節点も拘束した。なお、体積制約は初期形状の 1.05 倍とし、アースバネのバネ定数 $\alpha = 6.2 \times 10^6$ とした。得られた最適形状を図 10 に、収束履歴を図 11 に示す。安定した収束で制約を満たし、シェル形状が得られていることが確認できる。コンプライアンスの減少率は約 19%であった。

6. まとめ

シェル構造の面外方向の変動を形状決定の変数とした外形形状の最適化を目的に、滑らかなシェルの表面形状を得ることを狙った力法による解法を示した。コンプライアンスを目的関数とした剛性設計問題を、分布系の最適化問題として定式化し、面外の形状変動に対する形状勾配関数を導出した。得られた形状勾配関数をロビン型の力法に適用し、最適なシェルの外形形状の決定を試みた。狙い通り、形状勾配関数による変動をその評価点近傍に限定することができ、シェル表面に付加したアースバネ要素の効果が確認できた。例題を通して、力法に基づく本解法がシェルの外形形状の最適化に対して有効であることを示した。

今後、本解法を面外変動を考慮したシェル構造の種々の最適設計問題へ適用すると共に、面内変動と面外変動の組み合わせについても検討していく。

参考文献

[1]M.Shimoda, J. Tsuji and H. Azegami, *Transactions of the*

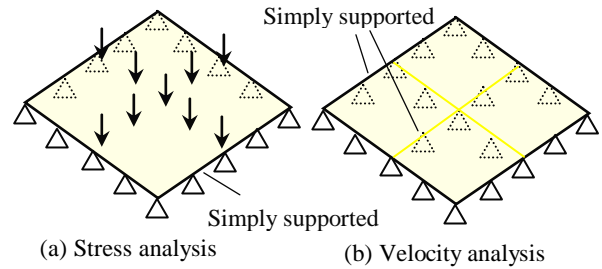


Fig. 9 Boundary conditions for square plate problem

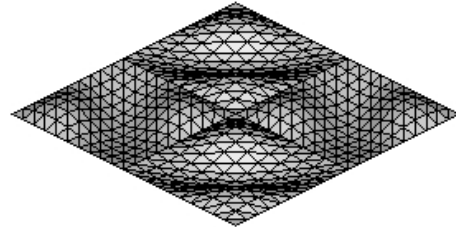


Fig. 10 Calculated results of square plate problem

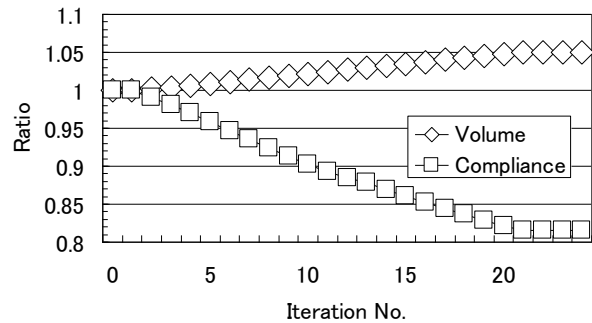


Fig. 11 Iteration histories of square plate problem

Wessex Institute on the Built Environment, Volume 80, (Computer Aided Optimum Design of Structures IX), S. Hernandez and C. A. Brebbia (eds.), WIT Press, Southampton, 147-156, (2005).

[2]M. Shimoda and J. Tsuji, SAE 2006 Transactions, Journal of Passenger Cars - Mechanical Systems, Paper No. 2006-01-0584, 483-492, (2006).
 [3]M. Shimoda, J. Tsuji and H. Azegami, Transactions of the Wessex Institute on the Built Environment, 91, (*Computer Aided Optimum Design of Structures X*), S. Hernandez and C. A. Brebbia (eds.), WIT Press, Southampton (2007), 179-188.
 [4]下田, 日本機械学会第 7 回最適化シンポジウム講演論文集, No.06-48, 15-20, (2006-12, 淡路).
 [5]下田, 齋藤, 日本設計工学会平成 18 年度秋季大会研究発表講演会講演論文集, 153-154, (2006-10, 仙台)
 [6] E. Ramm, K. U. Bletzinger, R. Reiteringer, IASS, Vol.32, No.112, 103-121 (1993).
 [7] N.V. Rao and E. Hinton, Structural Engineering Review, Vol. 5, No.1, 1-21, (1993).
 [8]K. K. Choi and N.H. Kim, *Structural Sensitivity Analysis and Optimization*, 1, Springer, New York (2005).
 [9] C. Mattheck, *Design in Nature*, Springer-Verlag (Berlin)(1998).
 [10]M. Shimoda, H. Azegami and T. Sakurai, Journal of Passenger Cars, Section 6, Vol. 106, 2355-2365, (1998).
 [11] 畔上, 機論, 60-574, A(1994).
 [12]竹内, 畔上, 日本機械学会 2001 年度年次大会講演論文集 V(01-1), 39-40, (2001).