楕円積分　巻一、二

理学部

Note Book

楕圓積分

巻一

Matsuya PATENT No14484. Tokyo.

楕圓積分

大正十四年四月十一日

楕圓積分

第一章　緒論

變數 z ノ有理整函數ヲ $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_n$ トスルトキ,

$$A_0 s^n + A_1 s^{n-1} + A_2 s^{n-2} + \cdots + A_n = 0, \qquad A_0 \neq 0, \quad n \text{ ハ自然數},$$

ナル如キ s ヲ z ノ代數函數トイヒ, n ノ値ガ $1, 2, 3, \cdots$ ナルニ從ツテ之ヲ一次, 二次, 三次, ……ノ代數函數ト稱ス。一次ノ代數函數ハ即チ有理函數ナリ。

s ガ z ノ代數函數ナルトキ, 積分

$$\int s\,dz$$

ノコトヲ一般ニ Abelian integral ト稱ス。然レドモ s ガ有理函數ナル場合ニハ此不定積分ハ初等函數ヲ以テ表示セラル, 即チ初等積分ナリ。

次ニ s ガ二次ノ代數函數ナル場合ヲ考フルニ,

$$A_0 s^2 + A_1 s + A_2 = 0,$$

$f(z) = c_0 z^k + \cdots$

$$s = \frac{1}{2A_0}\left(-A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}\right).$$

故ニ

$$\int s\,dz = \int R\overset{(R_1 + R_2\sqrt{f(z)})}{\left(z, \sqrt{f(z)}\right)}\,dz,$$

但シ R ハ有理函數, $f(z)$ ハ z ノ有理整函數 $\overbrace{}^{\text{二乘平方因數ヲ含マザルモノ}}$ トス。

若シ $f(z)$ ガ z ニツイテ一次又ハ二次ナルトキハ, $\int s\,dz$ ハ矢張初等積分ナリ。三次又ハ四次ナルトキハ 一般ニハ 所謂楕円積分ナリ。五次以上ナルトキハ一般ニ Hyperelliptic integral ト稱ス。

$f(z)$ ノ次數ヲ k トスレバ,

$$\text{Abelian integral}\begin{cases} n=1 \text{ ―― 初等積分} \\ n=2 \begin{cases} k=1,2 \text{ ― 初等積分} \\ k=3,4 \text{ ― Elliptic (一般ニハ)} \\ k \geq 5 \text{ ― Hyperelliptic} \end{cases} \\ n=3 \\ n=4 \\ \vdots \end{cases}$$

吾人ハ先ヅKノ値ヲ問ハズ，一般ニ $n=2$ ナル場合ヲ考ヘン。

$$\cancel{R(z,\sqrt{f(z)}) = \frac{A_1 + A_2\sqrt{f(z)}}{B_1 + B_2\sqrt{f(z)}} = \frac{C_1 + C_2\sqrt{f(z)}}{D}}$$

$$R_1 + R_2\sqrt{f(z)} = R_1 + \frac{R_3}{\sqrt{f(z)}},$$

Rハzノ有理函数ナリトス。

但シ ~~$A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D$ ハ z ノ有理整函数，R_1, R_2 ハ z ノ有理函数ナリ。~~

依ッテ

$$\overset{\int s\,dz}{\cancel{\int R(z,\sqrt{f(z)})dz}} = \int R_1 dz + \int \frac{R_3}{\sqrt{f(z)}} dz.$$

右辺ノ第一項ハ初等積分ナリ。故ニ問題ハ第二項ノ積分ニ帰ス。

$$R_3 = G(z) + \frac{H(z)}{g(z)},$$

G, H, g ハ有理整函数ニシテ，
H ハ g ヨリ低次，

ココニ

$$g(z) = C(z-a_1)^{\lambda_1}(z-a_2)^{\lambda_2}\cdots\cdots$$

トスレバ，

$$R_3 = G(z) + \sum_i\sum_j \frac{A_{\lambda_{ij}}}{(z-a_i)^{\lambda_{ij}}},$$

$\cancel{\lambda_{ij} = 1, 2, \cdots,}$
$i = 1, 2, \cdots,$
$j = 1, 2, \cdots, i.$ $\lambda_{ii} = \lambda_i$

故ニ

$$\int \frac{R_3}{\sqrt{f(z)}} dz = \int \frac{G(z)}{\sqrt{f(z)}} dz + \sum_i\sum_j A_{\lambda_{ij}} \int \frac{dz}{(z-a_i)^{\lambda_{ij}}\sqrt{f(z)}},$$

従ッテ考フベキ標準形トシテ次ノ二種ヲ得，

$$I_h = \int \frac{z^h}{\sqrt{f(z)}} dz, \qquad J_h = \int \frac{dz}{(z-a)^h \sqrt{f(z)}}.$$

次ニ I_h ヲ簡単ナル標準形ニ帰着スルコトヲ考ヘン。

$$\frac{d}{dz}\left[z^h\sqrt{f(z)}\right] = hz^{h-1}\sqrt{f(z)} + \frac{1}{2}\frac{f'(z)}{\sqrt{f(z)}}z^h = \frac{z^{h-1}}{2\sqrt{f(z)}}\left\{2hf(z) + zf'(z)\right\}.$$

若シ $\qquad f(z) = c_0 z^k + c_1 z^{k-1} + c_2 z^{k-2} + \cdots + c_k, \qquad c_0 \neq 0$

トスレバ、

$$\frac{d}{dz}\left[z^h\sqrt{f(z)}\right] = \frac{z^{h-1}}{2\sqrt{f(z)}}\Big\{(2h+k)c_0 z^k + (2h+k-1)c_1 z^{k-1} + (2h+k-2)c_2 z^{k-2}$$
$$+ \underbrace{\cdots + (2h)c_k}_{+(2h+1)c_{k-1}z}\Big\}.$$

故ニ $\qquad 2z^h\sqrt{f(z)} = (2h+k)c_0.\, I_{h+k-1} + (2h+k-1)c_1.\, I_{h+k-2} + \cdots$
$$\underbrace{\cdots + 2hc_k.\, I_{h-1}}_{+(2h+1)c_k.\, I_h}$$

ココニ於テ $h=0$ トオケバ、

$$2\sqrt{f(z)} = kc_0.\, I_{k-1} + (k-1)c_1.\, I_{k-2} + \cdots + c_{k-1}.\, I_0,$$

$h=1$ トオケバ、

$$2z\sqrt{f(z)} = (2+k)c_0.\, I_k + (k+1)c_1.\, I_{k-1} + \cdots + 3.c_{k-1}.\, I_1 + 2c_k I_0,$$

次第ニ斯クノ如クナルヲ以テ、一般ニ I_h $(h \geq k-1)$ ハスベテ

$$I_{k-2},\quad I_{k-3},\quad \cdots,\quad I_1,\quad I_0$$

ニヨリテ一次的ニ表サル。

次ニ J_h ヲ簡約スルコトヲ考フベシ。

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{\sqrt{f(z)}}{(z-a)^h}\right] = -\frac{h}{(z-a)^{h+1}}\sqrt{f(z)} + \frac{1}{2}\frac{f'(z)}{(z-a)^h\sqrt{f(z)}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{f(z)}(z-a)^{h+1}}\left\{-2hf(z) + (z-a)f'(z)\right\}.$$

$$\cancel{-2hf(z)+(z-a)f'(z)}\ \text{ヲ計算スレバ次ノ如シ。}$$

$$\cancel{f(z)=c_0z^k+c_1z^{k-1}+c_2z^{k-2}+\cdots+c_{k-1}z+c_k,}$$

$$\cancel{f'(z)=kc_0z^{k-1}+(k-1)c_1z^{k-2}+(k-2)c_2z^{k-3}+\cdots+c_{k-1},}$$

$$\cancel{(z-a)f'(z)=kc_0z^k+(k-1)c_1z^{k-1}+(k-2)c_2z^{k-2}+\cdots+c_{k-1}z}$$

$$\cancel{-kac_0z^{k-1}-(k-1)ac_1z^{k-2}-\cdots-2ac_{k-2}z-ac}$$

$$\cancel{=-kc_0z^k}$$

ココニ於テ $-2hf(z)+(z-a)f'(z)$ ヲ計算スルコト次ノ如シ。

$\varphi(z)=-2hf(z)+(z-a)f'(z)$ トオケバ

$$\varphi^{(\nu)}(z)=-2hf^{(\nu)}(z)+(z-a)f^{(\nu+1)}(z)+\nu f^{(\nu)}(z)$$

$$=(\nu-2h)f^{(\nu)}(z)+(z-a)f^{(\nu+1)}(z).$$

故ニ

$$\varphi(z)=\varphi(a)+\varphi'(a)(z-a)+\frac{1}{2}\varphi''(a)(z-a)^2+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{(k-1)!}\varphi^{(k-1)}(a)(z-a)^{k-1}+\frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(a)(z-a)^k$$

$$=-2hf(a)+(1-2h)f'(a).(z-a)+\frac{1}{2}(2-2h)f''(a).(z-a)^2$$

$$\cancel{+\{(1-2h)f'(a)\cdots+\frac{1}{(k-1)!}\varphi^{(k-1)}}$$

$$+\cdots+\frac{1}{(k-1)!}(k-1-2h)f^{(k-1)}(a)(z-a)^{k-1}+\frac{1}{k!}(k-2h)f^{(k)}(a)(z-a)^k.$$

故ニ

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{\sqrt{f(z)}}{(z-a)^h}\right]=\frac{1}{2\sqrt{f(z)}(z-a)^{h+1}}\Big\{-2hf(a)+(1-2h)f'(a).(z-a)+(1-h)f''(a)(z-a)^2$$

$$+\cdots+\frac{k-1-2h}{(k-1)!}f^{(k-1)}(a)(z-a)^{k-1}+\frac{k-2h}{k!}f^{(k)}(a)(z-a)^k\Big\}.$$

之ヲ積分スレバ

$$\frac{2\sqrt{f(z)}}{(z-a)^h}=-2hf(a).J_{h+1}+(1-2h)f'(a).J_h+(1-h)f''(a).J_{h-1}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{k-1-2h}{(k-1)!}f^{(k-1)}(a).J_{h-k+2}+\frac{k-2h}{k!}f^{(k)}(a).J_{h-k+1}.$$

ココニ $h=1$ ト置ケバ

$$\frac{2\sqrt{f(z)}}{z-a}=-2f(a).J_2-f'(a).J_1+\frac{1}{3!}f'''(a).J_{-1}+\cdots+\frac{k-3}{(k-1)!}f^{(k-1)}(a).J_{-(k-3)}$$

$$+\frac{k-2}{k!}f^{(k)}(a).J_{-(k-2)}.$$

モシ $f(a)\neq 0$ トスレバ 之ニヨリテ J_2 ハ $J_1, J_{-1}, J_{-2}, \cdots, J_{-(k-2)}$ ヲ用ヰテ表サル。然ルニ $J_{-1}, \cdots, J_{-(k-2)}$ ハ何レモ I_h ニヨリテ表サルルモノナルコト明カナレバ

$f(z)=c_0z^3+c_1z^2+c_2z+c_3$ ナラバ

$z=mt+n$ トオキテ

$$\left\{\begin{array}{l} c_0m^3=4 \\ 3c_0m^2n+c_1m^2=0 \end{array}\right. \quad \therefore \quad \left\{\begin{array}{l} m=\sqrt[3]{\dfrac{4}{c_0}} \\ n=-\dfrac{c_1}{3c_0} \end{array}\right.$$

$$\frac{dz}{\sqrt{f(z)}}=\frac{m\,dt}{\sqrt{4t^3-g_2t-g_3}}$$

Normal forms ハ $\quad \displaystyle\int\frac{dt}{\sqrt{\ }}, \quad \int\frac{t\,dt}{\sqrt{\ }}, \quad \int\frac{dt}{(t-a)\sqrt{\ }}.$

唯 J_1 ノミガ新シキモノナリ。又 J_h $(h>1)$ ハスベテ J_1 及ビ I ニヨリテ表サルルコトモ明カナリ。

$f(a)=0$ ナルトキハ，$f(z)$ ガ平方因数ヲ有セズトノ仮定ニヨリ $f'(a)\neq 0$. 故ニ J_1 ガ ~~[illegible]~~ I ニヨリテ表サレ，此場合ニハ新シキ J_1 ナル積分ヲ生ゼズ。

以上ノ研究ニヨリ，一般ナル積分

$$\int R(z, \sqrt{f(z)})\,dz$$

ハ次ノ $(k+1)$ 個ノモノニ帰着ス。

$$I_h=\int\frac{z^h}{\sqrt{f(z)}}dz, \qquad h=0,1,2,\dots,k-2,$$

$$J=\int\frac{dz}{(z-a)\sqrt{f(z)}}.$$

以上ハ一般ノ Hyperelliptic integral ニツイテ考ヘタルも; 之ヲ elliptic ~~モシ最初ヨリ elliptic トスレバ此手續ハ次ノ如ク簡単トナル。~~
ノ場合ニ適用スレバ;

$$I_h=\int\frac{z^h}{\sqrt{c_0z^4+c_1z^3+\dots+c_4}}dz, \qquad h=0,1,2,$$

$$J=\int\frac{dz}{(z-a)\sqrt{c_0z^4+\dots+c_4}}.$$

之ヲ更ニ簡約スルコト次ノ如シ。

$$f(z)=c_0(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta),$$

$$z=\frac{at+b}{ct+d}, \qquad dz=\frac{ad-bc}{(ct+d)^2},$$

$$z-\alpha=\frac{(a-c\alpha)t+(b-d\alpha)}{ct+d}.$$

$$\frac{dz}{\sqrt{f(z)}} = \frac{(ad-bc)\,dt}{\sqrt{A\prod\{(a-c\alpha)t+(b-d\alpha)\}}}.$$

$$\{(a-c\alpha)t+(b-d\alpha)\}\{(a-c\beta)t+(b-d\beta)\}$$

ニ於ケル t ノ係数ヲ 0 トオケバ

$$(a-c\alpha)(b-d\beta)+(a-c\beta)(b-d\alpha)=0,$$

$$2ab-(ad+bc)(\alpha+\beta)+2cd\alpha\beta=0,$$

$$2-\left(\frac{d}{b}+\frac{c}{a}\right)(\alpha+\beta)+2\frac{d}{b}\frac{c}{a}\alpha\beta=0.$$

同様ニ $$2-\left(\frac{d}{b}+\frac{c}{a}\right)(\gamma+\delta)+2\frac{d}{b}\frac{c}{a}\gamma\delta=0.$$

之ヨリ $\frac{d}{b}$, $\frac{c}{a}$ ヲ得。a, b, c, d ヲカクノ如クトレバ

$$\prod\{(a-c\alpha)t+(b-d\alpha)\} = (g_1t^2+g_2)(h_1t^2+h_2)$$
$$= g_2h_2(1-p^2t^2)(1-q^2t^2)$$
$$= g_2h_2(1-Z^2)(1-\kappa^2Z^2), \qquad \kappa^2=\frac{q^2}{p^2}.$$

$$\frac{dz}{\sqrt{f(z)}} = c\frac{dZ}{\sqrt{(1-Z^2)(1-\kappa^2Z^2)}}.$$

nor. for. $\int\frac{dz}{\sqrt{}}$, $\int\frac{z\,dz}{\sqrt{}}$, $\int\frac{z^2dz}{\sqrt{}}$, $\int\frac{dz}{(z-a)\sqrt{}}$.

integrable.

$$\int\frac{z^2dz}{\sqrt{}} = \int\frac{1-(1-\kappa^2z^2)}{\kappa^2\sqrt{}}dz = \frac{1}{\kappa^2}\int\frac{dz}{\sqrt{}} - \frac{1}{\kappa^2}\int\sqrt{\frac{1-\kappa^2z^2}{1-z^2}}\,dz.$$

0

8頁につづく

kノ値ハ $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ニヨリテ定マルベク，ソノ関係ハ前ノ計算ヲ追ヘバ算出シ得ベキモ，又別ニ次ノ如ク考フルモ可ナリ。

一般ニ一次置換ニヨリテ或ル四次式 $f(z)$ ガ他ノ四次式 $\varphi(z)$ ニ変化スルトキハ，

$$f(z)=A(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)$$

$$\varphi(z)=B(z-b_1)(z-b_2)(z-b_3)(z-b_4)$$

a 及ビ b ハ任意ナルコト能ハズ；ソノ間ニ一ノ条件アリ，何トナレバ

$$a_i=\frac{\alpha+\beta b_i}{\gamma+\delta b_i}, \quad \therefore \quad a_i-b_j=\frac{(\alpha+\beta b_i)(\gamma+\delta b_j)-(\alpha+\beta b_j)(\gamma+\delta b_i)}{(\gamma+\delta b_i)(\gamma+\delta b_j)}$$

$$=\frac{-(\alpha\delta-\beta\gamma)(b_i-b_j)}{(\gamma+\delta b_i)(\gamma+\delta b_j)}$$

故ニ

$$\frac{a_1-a_3}{a_2-a_3}=\frac{b_1-b_3}{(\gamma+\delta b_1)(\gamma+\delta b_3)}\cdot\frac{(\gamma+\delta b_2)(\gamma+\delta b_3)}{b_2-b_3}$$

$$\frac{a_1-a_4}{a_2-a_4}=\frac{b_1-b_4}{(\gamma+\delta b_1)(\gamma+\delta b_4)}\cdot\frac{(\gamma+\delta b_2)(\gamma+\delta b_4)}{b_2-b_4}$$

故ニ

$$\frac{a_1-a_3}{a_2-a_3}\frac{a_2-a_4}{a_1-a_4}=\frac{b_1-b_4 . b_2-b_4}{b_2-b_3 . b_1-b_4}.$$

即チ a's 及ビ b's ノ非調和比ガ相等シカラザル可カラズ。

サレバ今 $f(z)$ ガ $\mathrm{Const.}(1-Z^2)(1-k^2Z^2)$ トナレリトスレバ；

$$\frac{a_1-a_3}{a_2-a_3}\cdot\frac{a_2-a_4}{a_1-a_4}=\frac{-\frac{1}{k}-1}{-1-1}\cdot\frac{-1-\frac{1}{k}}{-\frac{1}{k}-\frac{1}{k}}=\frac{\frac{1+k}{k}}{2}\,\frac{\frac{1+k}{k}}{\frac{2}{k}}=\frac{(1+k)^2}{4k}$$

今 $\frac{a_1-a_3}{a_2-a_3}\cdot\frac{a_2-a_4}{a_1-a_4}=\lambda$ トスレバ；

$$\frac{(1-k)^2}{4k}=\lambda-1, \qquad \frac{(1+k)^2}{4k}=\lambda$$

$$\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2=\frac{\lambda-1}{\lambda}.$$

故ニ一ツノ λ ニ対シテ k ノ値ハ ~~←~~ 二ツヅツアリ，又 a ノ順序ヲ変ズレバ λ ノ値ハ

扨既ニ

$$\int\frac{dz}{\sqrt{f(z)}}=c\int\frac{dZ}{\sqrt{(1-Z^2)(1-k^2Z^2)}}$$

ナル如キ z, Z 間ノ一次関係ガ存在ストセバ；最初ヨリ之ヲ美麗ナル形ニ導クノ便アルベキナリ。次ニ之ヲ考究セントス。

$$f(z)=\cancel{\alpha}A(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4).$$

$$z=\frac{\alpha+\beta Z}{1-\mu Z}.$$

$$z=a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4$$

$$Z=-\frac{1}{k}, \quad -1, \quad 1, \quad \frac{1}{k}$$

$$z-a_1=\frac{\alpha+\beta Z}{1-\mu Z}-\frac{\alpha-\frac{\beta}{k}}{1+\frac{\mu}{k}}=\frac{\frac{\alpha\mu+\beta}{k}+(\alpha\mu+\beta)Z}{(1+\frac{\mu}{k})(1-\mu Z)}$$

$$=\frac{\frac{\alpha\mu+\beta}{k}(1+kZ)}{1+\frac{\mu}{k}(1-\mu Z)}$$

$$\lambda, \quad \frac{1}{\lambda}, \quad 1-\lambda, \quad \frac{1}{1-\lambda}, \quad \frac{\lambda}{\lambda-1}, \quad \frac{\lambda-1}{\lambda}$$

ノ六ツアリ。之ニ対シテ k ハ全体ニテ 12 通アリ。ソノ一ツヲ k トスレバ；

$$\pm k, \quad \pm\frac{1}{k}, \quad \pm\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2, \quad \pm\left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^2, \quad \pm\left(\frac{1-\sqrt{-k}}{1+\sqrt{-k}}\right)^2, \quad \pm\left(\frac{1+\sqrt{-k}}{1-\sqrt{-k}}\right)^2.$$

◎ 6頁ヨリツヾク

以上ノ説明ニテハ $f(z)$ ガ三次式ナルトキハ Weierstrass ノ標準形トナリ, 四次ナルトキハ Legendre-Jacobi ノ標準形トナルガ如ク見ユレドモ, 実ハ斯クノ如キ区別アル訳ニアラズ。之ヲ統一的ニ觀察スルタメニハ, 先ヅ三次式ト四次式トヲ同一視得ルコトニ注目スルヲ要ス。

(1) $$(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3) = -\lim_{\alpha_0\to\infty}\frac{1}{\alpha_0}(z-\alpha_0)(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3).$$

(2) $\sqrt{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)}$ ハ $z=\infty$ ヲ一ツノ分岐点トシテ有スルコト。

即チ三次式ハ四次式ノ特別ノ場合ニシテ, 一根ガ ∞ トナレル極限ナリト考フベシ。

サテ四次式 $f(z)$ ガ一次置換ニヨリテ他ノ四次式 $\varphi(\zeta)$ ニ変ズルトキハ, $f(z)=0$ ノ四根ノ anharmonic ratio ト $\varphi(\zeta)=0$ ノ四根ノソレトハ同一ナラザル可カラズ。

$$f(z) = A(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4),$$
$$\varphi(\zeta) = B(\zeta-b_1)(\zeta-b_2)(\zeta-b_3)(\zeta-b_4),$$

$$z = \frac{\alpha\zeta+\beta}{\gamma\zeta+\delta}$$ トスレバ; $$z_i = \frac{\alpha\zeta_i+\beta}{\gamma\zeta_i+\delta}.$$

之ニヨリテ $a_1, \dots$ ト $b_1, \dots$ トノ間ニハ一ノ必然ノ関係アリ。ソノ関係ガ満足セラルルトキハ z ト ζ トノ間ノ一次関係ハ唯一通ニ決定セラルベシ。

例ヘバ $$\left.\begin{array}{llll} z = a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \zeta = -\frac{1}{k} & -1 & 1 & \frac{1}{k} \end{array}\right\}$$ ナル對應ヲナサシムレバ;

$$\frac{a_1-a_3}{a_2-a_3}\,\frac{a_2-a_4}{a_1-a_4} = \frac{(1+k)^2}{4k} = \lambda$$ トオケバ;

$$\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 = \frac{\lambda-1}{\lambda}.$$

$$\frac{z-a_1}{z-a_2}\cdot\frac{a_3-a_2}{a_3-a_1} = \frac{\zeta+\frac{1}{k}}{\zeta+1}\,\frac{1+1}{1+\frac{1}{k}} = \frac{k\zeta+1}{\zeta+1}\,\frac{2}{k+1}.$$

a ノ中ノ何レカガ ∞ トナルモ k ノ決定, 一次置換ニ影響ナシ。

又例ヘバ

$$\left.\begin{array}{llll} z = a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ \zeta = \overset{e_1}{\cancel{\infty}}, & e_2, & e_3, & \infty \end{array}\right\} \text{トスレバ；}$$

（但シ $e_1+e_2+e_3=0$）

$$\cancel{z = \frac{\alpha\zeta+\beta}{\gamma\zeta+\delta}, \qquad a_4 = \frac{\alpha}{\gamma}.}$$

~~故ニ~~ $\cancel{z = \dfrac{a_4\zeta+\beta}{\zeta+\delta}, \qquad a_i = \dfrac{a_4 e_i+\beta}{\zeta+\delta}.}$

$$\cancel{\frac{z-a_1}{z-a_2}\,\frac{a_3-a_2}{a_3-a_1} = \frac{\zeta-e_1}{\zeta-e_2}\,\frac{e_3-e_2}{e_3-e_1}}$$

$$\frac{a_1-a_3}{a_2-a_3}\,\frac{a_2-a_4}{a_1-a_4} = \frac{e_1-e_3}{e_2-e_3}\,\frac{e_2-\infty}{e_1-\infty} = \frac{e_1-e_3}{e_2-e_3} = \lambda.$$

之ヨリ $\quad \dfrac{-3e_3}{e_2-e_3} = \lambda+1,$

$$e_2 = \frac{\lambda-2}{\lambda+1}e_3, \qquad e_1 = -\frac{\lambda-1}{\lambda+1}e_3 \quad \text{ヲ得。}$$

$$\frac{z-a_1}{z-a_2}\,\frac{a_3-a_2}{a_3-a_1} = \frac{\zeta-e_1}{\zeta-e_2}\,\frac{e_3-e_2}{e_3-e_1} = \frac{(\lambda+1)\zeta+(\lambda-1)e_3}{(\lambda+1)\zeta-(\lambda-2)e_3}\cdot\frac{3}{2\lambda}.$$

唯一根ヲ知リテ
~~根ヲ知ラズシテ~~ 行ヒ得ル一次置換ハ

$$z = a_4 + \frac{\frac{1}{4}f'}{\zeta-\frac{f''}{24}}. \qquad (f',\ f'' \text{ハソレゾレ } z=a_4 \text{ ヲ代入セルモノ})$$

（コノ證明ハ「モヂュル函数」ニアリ，ココニハ略ス。）

uヲ定義スル式ヲ $D(x,u)=0$ トス。
今 Rationalitätsbereich $R(x)$ ニ y ヲ adjoinシ $R(x,y)$ ニ於テ $D(x,u)$ ヲ decomposeシ（出来ルナラバ）, ソノ irreducible ナル factor ヲ

$$\varphi(x,y,u)=0$$

トス。

第二章　不能積分（其一）

数学ニ於ケル不能問題ハ方法ヲ制限スルヨリ生ズ; 作図不能ノ如キ, 代数的解法不能ノ如キ皆然リ。積分不能ト云フモ亦同様ニシテ, ソノ積分ヲ表スベキ函数ノ種類ヲ制限スルヨリ起ル問題ナリ。今本章ニ於テハ, 使用スル函数ヲ代数函数トシテ積分ノ能否ヲ論ゼントス。

yヲxノ代数函数トシ, 之ヲ定義スル式ヲ

$$F(x,y)=0 \quad F\text{ハ}x\text{ト}y\text{トノ有理整式} \tag{1}$$

トス。ソノ一ツノ解（代数函数ノ一分枝）ヲ y トシ, 不定積分ヲ

$$u=\int y\,dx$$

トスルトキ, 次ノ定理アルコトヲ證セントス。

定理。モシ u ガ x ノ代数函数ナラバ, 其ハ y ニツイテノ有理整函数ニシテ, 其係数ハ x ノ有理函数ナリ。換言スレバ, x ト y トノ有理函数ニシテ, 特ニ y ニツイテハ整函数ナリ。

（證明）今 x, y 及ビ u ノ間ニ

$$\varphi(x,y,u)=0 \tag{2}$$

ナル代数的関係アリトシ, コノ(2)ハ irreducible ナリトス。之ヲ微分スレバ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{du}{dx}=0,$$

即チ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}y=0. \tag{3}$$

一方ニ於テ (1) ヨリ

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0. \tag{4}$$

(3), (4) ヨリ $\frac{dy}{dx}$ ヲ消去スレバ;

$$\psi(x, y, u)=0 \qquad (5)$$

ナル形ノ関係式ヲ得。

然シテ(2)ハ irreducible ト仮定セルヲ以テ, (2)ヲ満足セシムルスベテノu

(代数函数ノスベテノ分枝)ガ(5)ヲ満足セシメザル可カラズ。 然ラバ今(2)

ニ於テ y ハ前ト同ジ y ヲ用ヰ, 前ノ u トハ別ノ一根 u_1 ヲトレバ;

$$\varphi(x, y, u_1)=0,$$

従ツテ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\frac{du_1}{dx}=0$$

ヲ得。 ~~コレト(4)~~ 而シテ u_1 ハ(5)ヲ満足スベキニヨリ, 従ツテ ((5)ハ(3)ト

(4)ヨリ出デ, 而シテ同ジ y ヲ用ヰルガ故ニ(4)ハ尚ホ成立スルガ故ニ)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\cancel{\frac{du_1}{dx}}\,y=0.$$

之ヲ比較スレバ

$$\frac{du_1}{dx}=y$$

ヲ得。 故ニ

$$u_1-u=\text{const.}$$

然ラバ(2)ハ irreducible ニアラズシテ其ノ次数ヲ一ツ減ジ得ベキコトトナル,

コレ不合理ナリ。 コノ不都合ヲ避ケント欲セバ, (2)ハ只一ツノ根 u ヲ有

ストセザル可カラズ; 即チ u ニツイテ一次ナラザル可カラズ。

故ニ u ハ x ト y トノ有理函数ナリ。 依ツテ

$$u=\frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)}$$

ト置キ, f_1, f_2 ハ x, y ノ有理整函数トス。

(1) ノ根ヲ $y_1, y_2, \cdots, y_n$ トシ, 上ニ y トシタルモノヲ y_1 トス。然ルトキハ

$$u=\frac{f_1(x,y_1)}{f_2(x,y_1)}=\frac{f_1(x,y_1)f_2(x,y_2)\cdots f_2(x,y_n)}{f_2(x,y_1)f_2(x,y_2)\cdots f_2(x,y_n)}.$$

此分母ハ $y_1, \cdots, y_n$ ノ対称函数ナルガ故ニ x ノ有理函数ナリ。又分子ニ於ケル $f_2(x,y_2)\cdots f_2(x,y_n)$ ハ方程式

$$\frac{F(x,y)}{y-y_1}=0$$

ノ根ノ対称函数ナルガ故ニ, x ト y_1 トノ有理~~整~~函数ニシテ特ニ y_1 ニツイテ整函数ナリ。依ツテ結局

$$u=P_0+P_1y_1+P_2y_1^2+\cdots+P_{n-1}y_1^{n-1}$$

トナル, ココニ $P_0, \cdots, P_{n-1}$ ハ x ノ有理函数ナリ。

以上ノ證明ニ於テハ u ノ式中ニ y ガ存在スルモノト考ヘタルガ, モシ u ガ x ノミニテ表示セラルルトキハ, 例ヘバ

$$F(x,y)=0, \qquad \varphi(u,x)=0$$

ヨリシテ y ヲ含マヌ x, y, u ノ関係式ヲ何程ニテモ作リ得ベク, 而シテソノ際 u ニツイテノ次数ヲ変ズルコトヲ要セザルガ故ニ, irreducible トイフ代リニ u ニツイテ最低ノ次数ヲ有スルコト ヲ代用スレバ可ナリ。

次ニ上ノ定理ノ應用ヲ示ス。

$$\int\frac{dx}{x}=\cancel{f(x)}\log x+c$$

ナルコト及ビ $\log x$ ノ性質ハ既ニヨク知ル所ナリ。然レドモ $\log x$ ガ ~~ナル否ヤニ関スル~~ ~~トスレバ, $f(x)$ ハ実ニ $\log x$ ナリ。然レドモ今之ヲ知ラズトシ~~, ~~$f(x)$ ガ~~ x ノ代数函数ニアラザルカ否カヲ未ダ之ヲ知ラズトシ, ココニ之ヲ研究セントス。此場合ニハ $y=\frac{1}{x}$ ナルガ故ニ, モシ $f(x)$ ガ代数函数ナラバ其ハ又ノ有理函数ナリ。

$$\log x = \frac{A(x)}{B(x)},\qquad A, B \text{ ハ有理整函数。}$$

$\log x$ ハ $x \to \infty$ ナルトキ ∞ トナル。故ニ $A(x)$ ハ $B(x)$ ヨリ少クモ一ツダケ次数ガ高キ筈ナリ。

然ラバ
$$\lim_{x\to\infty} \frac{A(x)}{xB(x)} \neq 0.$$

然ルニ一方ニ於テ
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

故ニ $\log x$ ハ x ノ代数函数ニアラズ。

第二ノ例トシテ
$$\int \sqrt[m]{X}\,dx \tag{1}$$

ヲ考フベシ、但シココニ X ハ x ノ有理函数, m ハ正ノ整数トス。

此場合ニハ
$$y^m = X, \quad \text{irreducible トス} \tag{2}$$

従ッテ若シ所題ノ積分ガ x ノ代数函数ナラバ

$$\int \sqrt[m]{X}\,dx = P_0 + P_1\sqrt[m]{X} + P_2\left(\sqrt[m]{X}\right)^2 + \cdots + P_{m-1}\left(\sqrt[m]{X}\right)^{m-1} \tag{3}$$

即チ
$$\int y\,dx = P_0 + P_1 y + P_2 y^2 + \cdots + P_{m-1} y^{m-1}$$

ナル形トナラザル可カラズ; 但シ P ハ x ノ有理函数ナリ。

然ルトキハ P_1 ノ他ハ実ハ皆 0 ナルコトヲ證明セントス。

(3) ヲ微分スレバ;

$$y = \frac{dP_0}{dx} + y\frac{dP_1}{dx} + y^2\frac{dP_2}{dx} + \cdots + y^{m-1}\frac{dP_{m-1}}{dx}$$
$$+ \frac{dy}{dx}\left\{P_1 + 2P_2 y + \cdots + (m-1)P_{m-1}y^{m-2}\right\}. \tag{4}$$

然ルニ
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{my^{m-1}}\frac{dX}{dx} \text{ — } x \text{ ノ有理式}$$

ニテ此右辺ハ x, y ノ有理函数ナリ。之ヲ (4) ニ代入スレバ, (4) ハ結局 x ト y

*
実ハ右辺ニ (+const) ガ附クベキナレドモ、不定積分ナレバ之ヲ問 ~~y=0 トオキテ~~
~~見レバ const=0 ナルコトヲ知ルベシ。~~

トノ間ノ有理関係トナル。 然ラバ此中ニ於テ y ノ代リニ之ニ 1 ノ m 乗根ヲ乗ジタル αy ヲ代入スルモ亦成立スベシ。而シテソレヲ更ニ積分スレバ *

$$\alpha\int y\,dx = P_0 + P_1\alpha y + P_2\alpha^2y^2 + \cdots + P_{m-1}\alpha^{m-1}y^{m-1}$$

ヲ得。両辺ニ α^{m-1} ヲ乗ズレバ;

$$\int y\,dx = P_0\alpha^{m-1} + P_1 y + P_2\alpha y^2 + P_3\alpha^2y^3 + \cdots + P_{m-1}\alpha^{m-2}y^{m-1}.$$

同様ニシテ

$$\int y\,dx = P_0\alpha^{2(m-1)} + P_1 y + P_2\alpha^2 y^2 + P_3\alpha^{2\cdot2}y^3 + \cdots + P_{m-1}\alpha^{2(m-2)}y^{m-1},$$

$$\int y\,dx = P_0\alpha^{3(m-1)} + P_1 y + P_2\alpha^3 y^2 + P_3\alpha^{3\cdot2}y^3 + \cdots + P_{m-1}\alpha^{3(m-2)}y^{m-1},$$

$$- - - - - - - - - - - -$$

$$\int y\,dx = P_0\alpha^{(m-1)(m-1)} + P_1 y + P_2\alpha^{m-1}y^2 + P_3{}^{(m-1)2}y^3 + \cdots + P_{m-1}\alpha^{(m-1)(m-2)}y^{m-1}.$$

(3) 及ビコレラノ式ヲ相加ヘ、且

$$1+\alpha^k+\alpha^{2k}+\cdots+\alpha^{(m-1)k} = 0, \qquad k\neq0$$

ナルコトヲ利用スレバ、次ノ結果ヲ得。

$$m\int y\,dx = mP_1 y,$$

即チ

$$\int y\,dx = P_1 y.$$

故ニ、 有理函数ノ m 乗根ノ積分ガ代数函数ナルトキハ、其ハモトノ被積分函数ト或ル有理函数トノ積ニ等シキコトヲ要ス。

Liouville ハ更ニ一歩ヲ進メテ次ノ研究ヲナセリ。

$$\int\sqrt[m]{X}\,dx = P_1\sqrt[m]{X}$$

ニ於テ、X, P_1 ヲ x ノ有理函数トス。今

$$X = \frac{M}{N}$$

ト置キ, M, N ハ x ノ多項式ナリトスレバ,

$$\sqrt[m]{X} = \sqrt[m]{\frac{M}{N}} = \frac{M}{\sqrt[m]{M^{m-1}N}} = \frac{M}{\sqrt[m]{T}},$$

T ハマタ x ノ多項式ナリ。同様ニシテ

$$P_1 \sqrt[m]{X} = \frac{\theta}{\sqrt[m]{T}},$$

θ ~~モ亦 x ノ多項~~ ハ x ノ有理式ナリ。ココニ於テ原積分ハ

$$\int \frac{M\,dx}{\sqrt[m]{T}} = \frac{\theta}{\sqrt[m]{T}}$$

トナル。M, T ハ既知ニシテ, θ ハ未知ナリ。

之ヲ微分スレバ

$$\frac{M}{\sqrt[m]{T}} = \frac{1}{\sqrt[m]{T}}\frac{d\theta}{dx} - \frac{1}{m}\frac{1}{\sqrt[m]{T^{m+1}}}\theta\frac{dT}{dx},$$

分母ヲ拂ヘバ;

$$MT = T\frac{d\theta}{dx} - \frac{1}{m}\theta\frac{dT}{dx}. \qquad (1)$$

今 θ ハ x ノ有理式ナル筈ナレバ, 之ヲ

$$\theta = \frac{U}{V}$$

ト置キ, U, V ハ x ノ多項式ニシテ互ニ素ナリトス。

吾人ハ V ガ実ハ const. ナルコトヲ證明セントス。ソレガタメニハ V ガ $(x+a)$ ナル形ノ因数ヲ含マザルコトヲ示セバヨシ。今仮リニ

$$V = W(x+a)^{\alpha}$$

ナリトシ, W ハ $(x+a)$ ニテ割リ切レザル多項式トス。然ルトキハ

$$\theta = \frac{U}{W(x+a)^{\alpha}},$$

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{\alpha U}{W(x+a)^{\alpha+1}} + \frac{WU' - UW'}{W^2(x+a)^{\alpha}}.$$

之ヲ(1)ニ代入スレバ

* 此所 Bertrand ノ Calcul ニハ誤アリ, Liouville ノ原文ハ研究室ニナシ, 依ツテ余ノ考案ヲ以テ之ヲ補フ。

$$W^2MT(x+a)^\alpha = -\frac{\alpha TUW}{x+a} + (WU' - UW')T - \frac{1}{m}UW\frac{dT}{dx}. \qquad (2)$$

之ニヨリテ見レバ TUW ハ $(x+a)$ ニヨリテ割リ切レザル可カラズ。従ツテ T ガ $(x+a)$ ニテ割リ切レザル可カラズ。依ツテ

$$T = (x+a)^p R$$

ト置キ, R ハ $(x+a)$ ト互ニ素ナリトス。然ルトキハ

$$\frac{dT}{dx} = (x+a)^p\frac{dR}{dx} + pR(x+a)^{p-1}.$$

之ヲ(2)ニ代入シ, $(x+a)^p$ ニテ割レバ

$$W^2MR(x+a)^\alpha = +R(WU' - UW') - \frac{UW}{m}\frac{dR}{dx} - \left(\alpha + \frac{p}{m}\right)\frac{UWR}{x+a}.$$

之ニヨレバ UWR ハ $(x+a)$ ニテ割リ切レザル可カラズ; 然レドモ是ハ上記ノ仮定ニヨリ不可能ナリ。

故ニ Θ ハ x ノ多項式ナラザル可カラズ。

定理。 M, T ガ x ノ多項式ナルトキ, 積分

$$\int \frac{M}{\sqrt[m]{T}}dx$$

ガ若シ x ノ代数函数ナラバ; 其ハ $\dfrac{\Theta}{\sqrt[m]{T}}$ ナル形ナラザル可カラズ; 但シココニ Θ ハ x ノ多項式ナリ。

然ラバ Θ ハ如何ナル多項式ナルカ, 下ニ之ヲ研究セントス。*

先ヅ

$$\int \frac{M}{\sqrt[m]{T}}dx = \frac{\Theta}{\sqrt[m]{T}}$$

トシ, 両辺ヲ微分スレバ;

$$\frac{M}{\sqrt[m]{T}} = \frac{\Theta'}{\sqrt[m]{T}} - \frac{1}{m}\frac{\Theta T'}{\sqrt[m]{T^{m+1}}}.$$

$$\begin{cases} \tau \not\equiv 0 \pmod{m}, \text{ナラバ } \delta=\mu+1 \\ \tau \equiv 0 \pmod{m}, \begin{cases} \frac{\tau}{m}>\mu+1 \text{ ナラバ } \delta=\frac{\tau}{m} \text{ or } \mu+1 \\ \frac{\tau}{m}<\mu+1 \text{ ナラバ } \delta=\mu+1 \\ \frac{\tau}{m}=\mu+1 \text{ ナラバ impossible} \end{cases} \end{cases}$$

故ニ $\cancel{MT=\theta' T-\frac{1}{m}}$

$$M=\theta'-\frac{1}{m}\cdot\frac{\theta T'}{T}. \qquad (3)$$

依ッテ $\theta T'$ ハ T ニテ整除セラレザル可カラズ; 即チ T, T' ノ最大公約数ヲ D トシ, $T=DS$ トスレバ; θ ハ S ノ倍数ナリ。

(i) θ ハ T ヲ T, T' ノ最大公約数ニテ割リタル商ノ倍数ナリ。

次ニ M ノ次数ヲ μ, θ ノ次数ヲ δ トスレバ; (3) ニヨリ明カニ

$$\mu \leqq \delta-1.$$

即チ

$$\delta \geqq \mu+1.$$

然ルニ又 (3) ヨリ

$$\frac{M}{\theta}=\frac{\theta'}{\theta}-\frac{1}{m}\frac{T'}{T},$$

之ヲ積分スレバ

$$\int\frac{M}{\theta}dx=\log\theta-\frac{1}{m}\log T=\log\frac{\theta}{\sqrt[m]{T}}. \qquad (4)$$

サテ今 θ, T ノスベテノ零点ヲ超越シタル先キノ方ニ上下限ヲトリテ (4) ノ ~~両辺ヲ~~ 積分ヲ行ヒ, 上限ヲ ∞ ニ増スト考フレバ, 次ノ結果ヲ得。

~~$\delta=\mu+1$ トスレバ 左辺ハ ∞, 故ニ 右辺モ ∞ ナラザル可カラズ; 右辺ガ~~

左辺ハ $\delta=\mu+1$ ナルトキ $\pm\infty$, $\delta>\mu+1$ ナルトキ有限確定,

右辺ハ $\delta=\frac{\tau}{m}$ (τ ハ T ノ次数) ナルトキ有限確定, ソノ他ハ $\pm\infty$.

故ニ $\delta=\mu+1$ ナルトキハ, ~~$\delta\neq\frac{\tau}{m}$ ナルガ又ハ~~ ~~$\delta\neq\frac{\tau}{m}$~~ $\tau\not\equiv 0 \pmod{m}$ ナルカ又ハ $\frac{\tau}{m}\neq\delta$ ナラザル可カラズ; 即チ $\frac{\tau}{m}\geqq\mu+1$

$\delta>\mu+1$ ナルトキハ, $\delta=\frac{\tau}{m}$ ナラザル可カラズ。 即チ $\frac{\tau}{m}>\mu+1$

即チ換言スレバ;

(ii) $\tau\not\equiv 0 \pmod{m}$ ナルトキハ, $\delta=\mu+1$.

$\tau\equiv 0 \pmod{m}$ ナルトキハ, $\frac{\tau}{m}>\mu+1$ ナラバ ~~ナルトキニ限リ~~ $\delta=\frac{\tau}{m}$,

$\frac{\tau}{m}$ ~~$<\mu+1$ ナラバ θ ハ存在シ得ズ。~~ $<\mu+1$ ナラバ $\delta=\mu+1$

$\frac{\tau}{m}=\mu+1$ ナラバ. 不可. (θ ハ存在セズ。)

之ニヨリテ δ ガ定マル。

斯クノ如キ次数ヲ有スル未定係数ノ θ ヲ仮定シ, ~~未定係数ニヨリテ~~ 両辺ヲ比較スルコトニヨリテ, 与ヘラレタル $\int y\,dx$ ガ代数的ニ積分セラルルヤ否ヤ, モシ可能ナラバソノ積分如何等ノ問題ヲ解決シ得ベシ。

例1. $$\int \frac{x^3}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx.$$

$M=x^3,\quad T=a^2+x^2,\qquad \mu=3,\quad \tau=2,\quad m=2.$

故ニ $\tau\equiv 0\ (\mathrm{mod.}\ m)$ ニシテ $\frac{\tau}{m}=1<\mu+1$, 故ニ $\delta=3+1=4.$

又 $T=a^2+x^2,\quad T'=2x,\qquad D=1.$

故ニ θ ハ (a^2+x^2) ノ倍数ナリ。

依リテ $\theta=(x^2+a^2)(Ax^2+Bx+C)$ ト置ク。

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx=\frac{(x^2+a^2)(Ax^2+Bx+C)}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$=\sqrt{a^2+x^2}\,(Ax^2+Bx+C).$$

$$\frac{x^3}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}(Ax^2+Bx+C)+\sqrt{a^2+x^2}\,(2Ax+B).$$

$$x^3=x(Ax^2+Bx+C)+(a^2+x^2)(2Ax+B).$$

係数ヲ比較シテ,

$$3A=1,\qquad 2B=0,\qquad C+2a^2A=0,\qquad a^2B=0.$$

故ニ $A=\frac{1}{3},\quad B=0,\quad C=-\frac{2}{3}a^2.$

故ニ $$\int \frac{x^3}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx=\sqrt{a^2+x^2}\;\frac{x^2-2a^2}{3}.$$

例2. $\displaystyle\int \frac{1+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}}\,dx.$ pseudo-elliptic.

$M = 1+x^2;\quad T = (1-x^2)^2(1+x^4),\quad \mu = 2,\quad \tau = 8,\quad m = 2.$

$\frac{\tau}{m} = \cancel{3 = \mu+1}\ 4 > \mu+1.$ 故ニ $\delta = 3$ 又ハ $4.$ 然ルニ此場合ニハ $D = 1-x^2;\ S = (1-x^2)(1+x^4)$ ニシテ6次ナリ。

故ニ代数的ニハ積分不能。

実ハ答 $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{1+x^4}+\sqrt{2}x}{1-x^2}$

例3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}\,dx = \int \frac{x^2-a^2}{\sqrt{x^8(x^2-a^2)}}.$

$M = x^2-a^2;\quad T = x^8(x^2-a^2),\quad \mu = 2,\quad \tau = 10,\quad m = 2$

$\frac{\tau}{m} = 5 > \mu+1.$ 故ニ $\delta = \frac{\tau}{m} = 5$ 又ハ $\mu+1 = 3.$

又 $T' = 10x^9 - 8a^2x^7 = 2x^7(5x^2-4a^2).$

$D = x^7.\qquad S = x(x^2-a^2).$

故ニ $\theta = Cx(x^2-a^2)$ 又ハ $x(x^2-a^2)(Ax^2+Bx+C).$

前者トスレバ

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}\,dx = \frac{Cx(x^2-a^2)}{\sqrt{x^8(x^2-a^2)}} = \frac{C\sqrt{x^2-a^2}}{x^3},\ \text{不可。}$$

後者トスレバ

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}\,dx = \frac{x(x^2-a^2)(Ax^2+Bx+C)}{\sqrt{x^8(x^2-a^2)}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}\,(Ax^2+Bx+C)}{x^3}.$$

故ニ $\displaystyle\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4} = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3} + \sqrt{x^2-a^2}\left(-\frac{A}{x^2}-\frac{2B}{x^3}-\frac{3C}{x^4}\right)$

$$x^2-a^2 = x^2(Ax^2+Bx+C) - (x^2-a^2)(Ax^2+2Bx+3C).$$

$A-A=0,\quad B-2B=0,\quad C+a^2A-3C=1,\quad 2B=0,\quad 3a^2C=-a^2.$

之ヨリ $A=\frac{1}{3a^2},\quad B=0,\quad C=-\frac{1}{3}$ ヲ得。

故ニ

$$\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx=\frac{x(x^2-a^2)\frac{1}{3a^2}(x^2-a^2)}{\sqrt{x^8(x^2-a^2)}}$$

$$=\frac{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}{3a^2x^3}.$$

例 4. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$!!! $k^2\neq 0,\ \neq 1.$

$T=(1-x^2)(1-k^2x^2),\quad M=1,\quad \mu=0,\quad \tau=4,\quad m=2.$

$\frac{\tau}{m}=2>\mu+1.\qquad \delta=\frac{\tau}{m}=2,$ 又ハ $=\mu+1=1.$

$T'=-2x(1-k^2x^2)-2k^2x(1-x^2),$ $k^2\neq 1$ ナラバ $D=1.$

故ニ θ ハ T ニテ割リ切レザル可ナラズ;

然レドモ $\delta=2$ 又ハ1 ニテハ 四次式 T ニテ割リ切レルコトナシ。

故ニ 代数的ニハ積分不能ナリ。

例 5. $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}dx.$!!!

$M=x^2,\quad \mu=2.$

$\frac{\tau}{m}=2<\mu+1.$ 故ニ $\delta=\mu+1=3.$ 矢張不能。

例 6. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$!!!

$T=(x-a)^2(1-x^2)(1-k^2x^2),\quad \tau=6,$

$\frac{\tau}{m}=3>\mu+1,$ 故ニ $\delta=3$ 又ハ $1.$

外ハaガ± 1, $\pm\frac{1}{k}$ノ何レニ等シクトモ Dハ二次, 従ッテ Sハ四次。
故ニ矢張不能ナリ。

注意。snuガ doubly periodic ナルコトヲ既知トスレバ; $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$
ハソレノ inverse function ガ doubly periodic ナル故ニ algebraic ニ
アラザルコトモ結論セラル。