第三章　不能積分　(其二)

次ニ吾人ハ一歩ヲ進メテ, 代数函数ノ積分ガ ~~初等~~ 代数函数ニアラズトモトニカク初等函数ニテ表サルルヤ否ヤノ問題ヲ講究セントス。

初等函数トハ代数函数及ビ初等超越函数ノ有限ナル代数的結合ヲ指ス。

例ヘバ—

$$\tan\left[e^{z^2}-\log_z(1+\sqrt{2})\right]+\left(z^2+\log\arcsin z\right)^{\frac{1}{2}}$$

ノ如シ。

特ニ $u, v, \dots$ ヲ x ノ代数函数トシ, f ヲ以テ代数的結合(代数函数ヲ含ム)ヲ表ストキ,

$$f(x, e^u, e^v, \log w)$$

(三角, 逆三角ノ両函数ハ指数, 対数ノ中ニ含ム)

ノ如キモノヲ総シテ第一種ノ超越函数トイフ。

又 $u_1, v_1, \dots$ ガ 代数函数又ハ 第一種ナルトキ

$$f(x, e^{u_1}, e^{v_1}, \log w_1)$$

$$f(x, e^{u_1}, e^{u_2}, \dots, \log v_1, \log v_2, \dots)$$

ノ如キモノヲ第二種トイフ, 以下之ニ準ズ。

例ヘバ　$x^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}\log x}$　ハ第二種ナリ。

又上ニ挙ゲタル例モ第二種ナリ。

Liouville ハ次ノ定理ヲ證明セリ。

y ガ x ノ代数函数ナルトキ, モシ y ノ積分ガ初等函数ニテ表サルルナラバ, 必ズヤ次ノ形ヲ有セザル可カラズ;

$$\int y\,dx = t + A\log u + B\log v + \cdots + C\log w,$$

ココニ $t, u, v, \dots, w$ ハ x ノ代数函数, $A, B, \dots, C$ ハ常数ナリトス。

次ニ $\int y\,dx$ ガ第一種ノ超越函数トナルモノト仮定シテ之ヲ證明スベシ。

今 $$\int y\,dx = f(\underline{x}, e^u, e^v, \dots, \log w, \dots\dots), \qquad (1)$$

トシ，$u, v, \dots, w, \dots$ ハ x ノ代数函数トス。而シテココニ超越函数 e^u, $\log w$ 等ノ数ハ出来ルダケ少クシタルモノトス。然ルトキハ (1) ニ用ヰラレタル e^u, $\log w$ 等ノ間ニ代数的関係 (xニ関スル恒等式) ガ存在スルコトハ有リ得ベカラズ；何トナレバ若シ

$$F(x, e^u, e^v, \dots, \log w, \dots) = 0 \qquad (2)$$

ナルコトアリトセバ，(1),(2) ノ間ニ例ヘバ e^u ヲ消去スルコトヲ得，然ラバ (1) ハ最小数ノ超越函数ヲ以テ表シタリトノ仮定ニ反ス。

サレバ若シ (2) ナル関係アリトセバ其ハ必ズヤ恒等式 ($x, e^u, e^v, \dots$ ヲ変数トシテノ恒等式) ナリ。即チソノ中ノ $e^u, e^v, \dots$ 等ニ任意ノ一文字ヲ代入シテモ矢張成立スベキモノナラザル可カラズ。コノ注意ハ本定理ノ證明ノ骨子ナリ。

今 (1) ニ於テソノ指数函数例ヘバ e^u ニノミ注目シ，$e^u = \theta$ トシ，

$$\int y\,dx = \varphi(x, \theta) \qquad (3)$$

此 x ハ (1) ノ下線アル x トハ異リ，e^v, $\log w$ 等ノ中ノ x ヲモ含ム。

ト考フベシ。之ヲ x ニツイテ微分スレバ

$$y = \varphi_x(x,\theta) + \varphi_\theta(x,\theta)\frac{d\theta}{dx}$$
$$= \varphi_x(x,\theta) + \varphi_\theta(x,\theta)\theta.\frac{du}{dx}.$$

此関係ハ $x, e^u, e^v, \dots$ 等ノ代数的関係ナリ。サレバ上述ノ理ニヨリ，ソノ中ノ θ ノ代リニ $\mu\theta$ ヲ代入スルモ真ナラザル可カラズ；但シ μ ハ任意ノ常数トス。即チ

$$\varphi_x(x, \mu\theta) + \varphi_{\mu\theta}(x,\mu\theta)\mu\theta.\frac{du}{dx} = \varphi_x(x,\theta) + \varphi_\theta(x,\theta)\theta\frac{du}{dx}.$$

之ヲ (xニ関シ) 積分スレバ

$$\varphi(x, \mu\theta) = \varphi(x,\theta) + C,$$

C ハ x ニ無関係ナレドモ，μ ニハ関係スベシ，依ッテ

$$\varphi(x, \mu\theta) = \varphi(x, \theta) + \psi(\mu)$$

ト書ク。

更ニ $\varphi(x,\theta)$ ヲ θ ニノミ注目シテ $F(\theta)$ ト書クコトトスレバ，

$$F(\mu\theta) = F(\theta) + \psi(\mu).$$

特ニ $\theta = 1$ ト置ケバ

$$F(\mu) = F(1) + \psi(\mu),$$

従ッテ
$$F(\mu\theta) = F(\mu) + F(\theta) - F(1).$$

之ヲ μ 及ビ θ ニツイテ微分スレバ，

$$\theta F'(\mu\theta) = F'(\mu),$$

$$\mu F'(\mu\theta) = F'(\theta).$$

故ニ
$$\mu F'(\mu) = \theta F'(\theta).$$

故ニ
$$\theta F'(\theta) = c,$$

従ッテ
$$F(\theta) = c\log\theta + c'.$$

即チ $\varphi(x,\theta)$ ハ θ ヲ $c\log\theta$ ナル形ニテ含ムコトトナル，従ッテ其ハ実ハ cu ニシテ指数函数ハ消滅スルコトトナルベシ。

故ニ $\int y\,dx$ ハ e^u ヲ含マズ。

同様ニシテ $e^v, \cdots$ ヲスベテ含マズ。

次ニ $\log w$ ヲ如何ナル形ニ含ムカヲ考フルタメニ，$\theta = \log w$ トシ，

$$\int y\,dx = \varphi(x, \theta) \qquad (4)$$

ト置クベシ。之ヲ微分スレバ

$$y = \varphi_x(x,\theta) + \varphi_\theta(x,\theta)\frac{1}{w}\frac{dw}{dx}.$$

前ノ如クθニ他ノモノヲ代入スルモ可ナルニヨリ, $\theta+\mu$ ヲ入ルレバ

$$\varphi_x(x,\theta+\mu)+\varphi_{\theta+\mu}(x,\theta+\mu)\frac{1}{w}\frac{dw}{dx}=\varphi_x(x,\theta)+\varphi_\theta(x,\theta)\frac{1}{w}\frac{dw}{dx}.$$

之ヲ積分シテ

$$\varphi(x,\theta+\mu)=\varphi(x,\theta)+\psi(\mu)$$

ヲ得。更ニ $\varphi(x,\theta)=F(\theta)$ ト置ケバ

$$F(\theta+\mu)=F(\theta)+\psi(\mu).$$

$\theta=0$ ト置ケバ

$$F(\mu)=F(0)+\psi(\mu),$$

従ッテ

$$F(\theta+\mu)=F(\mu)+F(\theta)-F(0).$$

之ヲ微分スレバ

$$F'(\theta+\mu)=F'(\theta),$$

$$F'(\theta+\mu)=F'(\mu).$$

依ッテ

$$F'(\theta)=F'(\mu).$$

故ニ $F'(\theta)=c$, 従ッテ

$$F(\theta)=c\theta+c'.$$

即チ $\varphi(x,\theta)$ ハ θ ヲ一次ニ含ムモノナリ。 (c, c' ハ x ノ函数ナルカモ知レズ)

依ッテ今

$$\int y\,dx=\theta F_1(x)+F_2(x)$$

トシ, θ ノ代リニ $\theta+\mu$ ヲ代入スレバ

$$\int y\,dx=(\theta+\mu)F_1(x)+F_2(x).$$

一方ニ於テ之ハ $\theta F_1(x)+F_2(x)+\psi(\mu)$ ニ等シカラザル可カラズ。 然ラバ $F_1(x)$ ハ x ニ無関係ナルベキナリ。

故ニ

$$\int y\,dx=A\log w+F_2(x).$$

之ニヨリテ，$\int y\,dx$ ガ第一種ノ超越函数ニテ表ナルルナラバ必ズヤ

$$\int y\,dx = t + A\log u + B\log v + \cdots + C\log w$$

ナルコトヲ知レリ。

次ニハ一歩進メテ，$\int y\,dx$ ガ第二種ノ超越函数トナルモノトセバ，如何ナル形ヲ呈スベキカヲ考ヘン。

前ト全ク同様ノ推理ニヨリ，$\int y\,dx$ ヲ成ル可ク少数ノ e^{u_1}，$\log w_1$ 等ニテ表シタリトスレバ，ソノ結果ハ

$$\int y\,dx = t_1 + A\log u_1 + B\log v_1 + \cdots + C\log w_1$$

ナラザル可カラズ。但シココニ $t_1, u_1, \cdots, w_1, \cdots$ ハ代数函数又ハ第一種ノ超越函数，$A, B, \cdots, C$ ハ常数ナリトス。然レドモコレラノ $t_1, \cdots$ ノ中ニハ実ハ e^u，$\log w$ 等ノ一モ含マレズ，単ナル代数函数ニ過ギザルコトハ上ト殆ンド同様ノ推理ニヨリテ証明セラル。

即チ　$\theta = e^u$ トシテ，

$$t_1 = f(x,\theta),\quad u_1 = F(x,\theta),\quad v_1 = \varphi(x,\theta),\quad \cdots,\quad w_1 = \psi(x,\theta)$$

ト置ケバ，

$$\int y\,dx = f(x,\theta) + A\log F(x,\theta) + \cdots + C\log\psi(x,\theta). = \pi(\theta)$$

之ヲ微分スレバ

$$y = f_x(x,\theta) + f_\theta(x,\theta)\,\theta.u' + A\,\frac{F_x(x,\theta) + F_\theta(x,\theta)\,\theta.u'}{F(x,\theta)} + \cdots.$$

ココニ於テ θ ニ $\mu\theta$ ヲ代ヘ，両辺ヲ積分スレバ

$$\pi(\mu\theta) = \pi(\theta) + \text{Const.}$$

従ッテ

$$\pi(\mu\theta) = \pi(\mu) + \pi(\theta) - \pi(1).$$

之ヨリ前ノ如キ理論ニヨリ，θ ハ $\log\theta$ ノ形ニナリテ入ルコトヲ知ル。従ッテ e^u ハ入ラズ，実ハ u ノミ入ルナリ。

例. $R(\sqrt{2}, i) = R(\sqrt{2}+i)$

∵ $\sqrt{2}+i = \alpha$ トスレバ

$$\begin{cases} \sqrt{2} = \dfrac{\alpha^2+3}{2\alpha} \\ i = \dfrac{\alpha^2-3}{2\alpha} \end{cases}$$

同様ニ $\log w$ ハ $c\log w + c'$ ノ形ニテ入ル。

之ニヨリテ $\int y\,dx$ ハ第二種ノ超越函数ニテ積分可能ナリト考ヘテモ, 其ハ実ハ第一種ノモノニテ表サルルモノナラザル可カラズ。

以下同様ノ論法ヲ繰リ返ス。結局 $\int y\,dx$ ガ初等函数ニテ積分可能ナラバ常ニ

$$\int y\,dx = t + A\log u + B\log v + \cdots + C\log w \qquad (5)$$

ナル形トナルモノナリ。

注意。ココニ $\log$ ノ数ヲナルベク少クスレバ $A, B, \ldots$ 等ハ有理数ノ比ヲ有スルコトナシ。何トナレバ若シ $A = Br$ (r ハ有理数) ナリトスレバ

$$A\log u + B\log v = B\log(u^r v)$$

トナレバナリ。~~同様ニシテ~~ 理ニヨリ, ナホ一般ニ, $a, b, \ldots, c$ ガ有理数ニシテ

$$Aa + Bb + \cdots + Cc = 0$$

ナル如キ関係ハ成立セズ。蓋シ

$$A = -\frac{Bb}{a} - \cdots - \frac{Cc}{a}$$

ナレバ,

$$\int y\,dx = t + B\log\left(vu^{-\frac{b}{a}}\right) + \cdots + C\log\left(wu^{-\frac{c}{a}}\right)$$

トナレバナリ。

サテ (5) ニ於テ $t, u, \ldots$ ハ単ニ x ノ代数函数ナリトイフノミ; Abel ハ更ニ進ミテ, ソレラハ x ト y トノ有理函数ナルコトヲ証明セリ。ソノ証明下ノ如シ。

今 x ノ有理函数ノ Körper ニ y ヲ adjoin シテ得タル Körper ニ於テ, 一ツノ代数函数 λ ナルモノヲ作リ, $t, u, \ldots$ ハ λ ニテ有理的ニ表サルルモノトスベシ。換言スレバ, λ ハ $t, u, \ldots$ ノ Körper ノ primitive func

ヲ入トス。而シテ x, y ノ有理函数ヲ係数トモチ, λ ヲ define スル eq. ヲ

$$V(\lambda, x, y) = 0 \tag{6}$$

トシ, ソノ出来ルダケ低キ次数ヲ μ トス。

今 $t, u, v, \cdots$ ヲスベテ x, y, λ ニテ表シタリトシ, (5) ヲ λニテ微分スレバ;

$$y - t' - A\frac{u'}{u} - B\frac{v'}{v} - \cdots - C\frac{w'}{w} = 0. \tag{7}$$

コレマタ x, y, λ ノ間ノ有理関係ナリ。(y', λ' ハ x, y, λ ニテ有理ニアラハサル。)

然ラバ (6) ノ他ノ根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ ヲ入レテモ (7) ハ成立スベシ, 従ッテ之ヲ積分スレバ

$$\int y\,dx = t_1 + A\log u_1 + B\log v_1 + \cdots$$

$$\int y\,dx = t_2 + A\log u_2 + B\log v_2 + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

ヲ得。(t_1 ハ λ ニ λ_1 ヲ入レタルモノ, t_2 ハ λ_2 ヲ入レタルモノ, 其他準之。)

コレラヲ相加フレバ

$$\mu\int y\,dx = (t + t_1 + t_2 + \cdots) + A\log(uu_1u_2\cdots) + B\log(vv_1v_2\cdots) + \cdots.$$

然ルニ $t + t_1 + t_2 + \cdots$, $uu_1u_2\cdots$, $\cdots$ ハ x, y ノ有理函数ナリ。従ッテ證明シ得タリ。

吾人ノ一般的研究ハ此ニ止ムベシ。更ニ進ミテ t, u, v, 等ノ性質ヲ精査スルコト, 又 log ノ terms ハ幾個生ズルカ等ノ問題, 又モシ使用函数ノ範囲ヲ擴張シテ sn 等ヲモ許サバ如何, 等ノ研究ハナホ将来攻究ノ価値ナシトセズ。

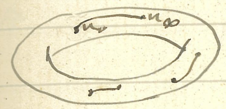
扨ココニ於テ第一種ノ楕円積分ガ初等函数ニテ積分セラルヽ事ヲ考フベシ。若シ積分可能ナラバ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = t + A\log u + \cdots + C\log w.$$

(但シ $u, \dots w$ モ亦リトニテ一價)

今 $\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$ ヲ一價ナラシムル Riemann 面ヲ作リ，之ヲ便宜上 torus ノ形ニ画キタリトス。

然ルトキハ積分ハ此面上ニテ infinitely many-valued ナリ。



$u, \dots, w$ ノ zero-pts 及ビ poles ヲ面上ニ記シ，之ヲ夫レ結ビ付ケタリトスレバ，之ヲ横切ラザル限リハ $\log u, \dots, \log w$ ハ一價ナリ。然ルニコレラヲ横切ラズトモ積分ハ多價ナリ。故ニ上ノ等式ハ成立スルヲ得ズ。

其他ノ積分ニツイテモ同様ナリ。

$$\sin\{f(x)+f(y)\} = \sin f(x)\cos f(y) + \sin f(y)\cos f(y)$$
$$= x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$$
$$f(x)+f(y) = f\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right),$$

第四章　加法定理

楕円積分ハ初等函数ニアラズ。サレバ吾人ハ之ヲ新タナル函数トシテ研究セザル可カラズ。

先ヅ第一種ノモノニツイテ研究スベシ。

其値ヲ計算スルニハ Landen ノ transformation 等ヲ用ヰルベシ。コノコトハ略ス。

今
$$F(x)=\int_0^x \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

ト置キ，$F(x)+F(y)$ ガ x, y ノ如何ナル函数ナルカ，特ニソレガマタ F ニテ表シ得ザルカ，等ヲ研究セントス。　$F(x)+F(y)=F\{\varphi(x,y)\}$. i.e. $\int^x+\int^y=\int^{\varphi(x,y)}$

コノ問題ハ重要ナル意味ヲ有ス。例ヘバ
$$F(x)=\int_0^x \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$
トスレバ；　$F(x)=\sin^{-1}x$ ナリ。故ニ公式
$$\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right) \qquad (1)$$
ニヨリ，
$$F(x)+F(y)=F\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right), \qquad (2)$$

~~故ニ~~ $$\cancel{\int_0^x \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}+\int_0^y \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\int_0^{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \qquad (2)}$$

モシ(2)ヲ知レバ；之ヨリ(1)ヲ得，従テ sin トイフ函数ノ加法定理ヲ得ベシ。

一般ニ
$$\int_0^x \frac{dz}{\sqrt{f(z)}}+\int_0^y \frac{dz}{\sqrt{f(z)}}=\int_0^{\varphi(x,y)} \frac{dz}{\sqrt{f(z)}} \qquad (3)$$

ナリトセバ；今 x, y ガ $\varphi(x,y)=\text{const.}$ ナル様ニ変リトセバ；(3)ノ右辺ハ const. ナリ。故ニ両辺ヲ微分スレバ
$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}+\frac{dy}{\sqrt{f(y)}}=0. \qquad (4)$$

(4) ナル微分方程式ノ解ヲ $\psi(x,y)=c$ ~~ナミ, ……~~ トスレバ一階微分方程式ハ唯一種ノ解ヲ有スベキニヨリ, $\varphi(x,y)=G\{\psi(x,y)\}$ ナラザルベカラズ。試ミニ $x=0$ トオキ G ~~(…)~~ ヲ定ムレバ φ ヲ得。$\varphi(x,y)$ ヲ得レバ直チニ(3)ガ出来, 從ッテ $F(x)$ ノ逆函数(即チ sn)ノ加法定理ガ出来ルベシ。

次ニ微分方程式

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}+\frac{dy}{\sqrt{f(y)}}=0, \qquad f(x)=Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$$

ノ一般解ヲ求ムル Euler ノ方法ヲ挙グ。

先ヅ x,y ノ四次式

$$\cancel{(\alpha y^2+\beta y+\gamma)x^2+(}$$

$$\overset{亜}{G}(x,y)=(a_0x^2+2a_1x+a_2)y^2+2(b_0x^2+2b_1x+b_2)y+(c_0x^2+2c_1x+c_2)=\overset{0}{\cancel{\text{const.}}} \qquad (1)$$

ヲ考ヘ, 之ヲ略記シテ

$$\overset{亜}{G}=ay^2+2by+c=\overset{0}{\cancel{\text{const.}}} \qquad (2)$$

トス。項ヲ並べカヘテ x ノ降冪トシタルモノヲ

$$\overset{亜}{G}=a'x^2+2b'x+c'=\overset{0}{\cancel{\text{const.}}} \qquad (3)$$

トス, ココニ $a'=a_0y^2+2b_0y+c_0$, etc. トス。

(1)ヲ ~~(2)~~ 全微分スレバ

$$\overset{亜}{G}_x\,dx+\overset{亜}{G}_y\,dy=0,$$

$$(a'x+b')\,dx+(ay+b)\,dy=0,$$

$$\frac{dx}{ay+b}+\frac{dy}{a'x+b'}=0.$$

然ルニ (2) ヨリ, $y=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$.

從ッテ $ay+b=\pm\sqrt{b^2-ac}.$

同様ニ $a'x+b'=\pm\sqrt{b'^2-a'c'}.$

故ニ $\Phi = \overset{0}{\cancel{\text{const.}}}$ ハ微分方程式

$$\frac{dx}{\sqrt{b^2-ac}} + \frac{dy}{\sqrt{b'^2-a'c'}} = 0$$

ノ解ナリ。サレバ b^2-ac, $b'^2-a'c'$ ヲシテ丁度 $f(x)$, $f(y)$ ニ等シクスル様ニ $a_0, \cdots$ 等ノ係数ヲ選ベバ (1)ガ 吾人ノ求ムル解トナルベシ。

サテ
$$\begin{aligned}
b^2-ac &= (b_0x^2+2b_1x+b_2)^2-(a_0x^2+2a_1x+a_2)(c_0x^2+2c_1x+c_2)\\
&= (b_0^2-a_0c_0)x^4+(4b_0b_1-2a_0c_1-2a_1c_0)x^3\\
&\quad +(2b_0b_2+4b_1^2-a_0c_2-4a_1c_1-a_2c_0)x^2\\
&\quad +(4b_1b_2-2a_1c_2-2a_2c_1)x+(b_2^2-a_2c_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b'^2-a'c' &= (a_1y^2+2b_1y+c_1)^2-(a_0y^2+2b_0y+c_0)(a_2y^2+2b_2y+c_2)\\
&= (a_1^2-a_0a_2)y^4+(4a_1b_1-2a_0b_2-2a_2b_0)y^3\\
&\quad +(2a_1c_1+4b_1^2-a_0c_2-4b_0b_2-a_2c_0)y^2\\
&\quad +(4b_1c_1-2b_0c_2-2b_2c_0)y+(c_1^2-c_0c_2).
\end{aligned}$$

~~$a_0, \cdots, c_2$ ハ九ツアリ, 之ニ對スル條件ノ数ハ上ノ五ツノ係数ヲ夫々相等シク~~

今試ミニ $a_1=b_0$, $a_2=c_0$, $b_2=c_1$ トスレバ x^4 及ビ y^4 ノ係数, 常数項ハ夫々相等シクナル。且同時ニ他ノ係数モ夫々相等シクナル。

サレバ此上ニツレテ夫々 A, B, C, D, E ニ比例セシムレバ可ナリ。便宜上

$$a_0=\alpha, \quad b_0=a_1=\beta, \quad c_0=a_2=\gamma, \quad 2b_1=\delta,$$
$$c_1=b_2=\varepsilon, \quad c_2=\zeta$$

ト置ケバ, 結局問題ハ次ノ五ツノ方程式ヲ満足セシムル様ニ $\alpha, \cdots, \zeta$ ヲ定ムルコトトナル。

$$\begin{cases} \beta^2-\alpha\gamma = Am & \text{(i)} \\ \beta\delta-\beta\gamma-\alpha\varepsilon = Bm & \text{(ii)} \\ \delta^2-\gamma^2-2\beta\varepsilon-\alpha\zeta = Cm & \text{(iii)} \\ \varepsilon\delta-\gamma\varepsilon-\beta\zeta = Dm & \text{(iv)} \\ \varepsilon^2-\zeta\gamma = Em & \text{(v)} \end{cases}$$

之ヲ解クコト次ノ如シ。

$$\cancel{(-\zeta)(i)+\varepsilon(iii)-\beta(iv)+\alpha.(v),}$$

$$\cancel{E\alpha-D\beta+\alpha\gamma+B\varepsilon-A\zeta=0.} \qquad \cancel{\text{(vi)}}$$

(ii) 及ビ (iv) ヨリ

$$\begin{aligned} \beta(\delta-\gamma)-\alpha\varepsilon &= Bm \\ \varepsilon(\delta-\gamma)-\beta\zeta &= Dm \end{aligned} \quad \left| \begin{matrix} \zeta \\ \delta-\gamma \end{matrix} \right| \quad \begin{matrix} \delta-\gamma \\ \alpha \end{matrix}$$

$$\varepsilon\{(\delta-\gamma)^2-\alpha\zeta\} = \{D(\delta-\gamma)+B\zeta\}m,$$

$$\beta\{(\delta-\gamma)^2-\alpha\zeta\} = \{D\alpha+B(\delta-\gamma)\}m.$$

ココニ於テ $(\delta-\gamma)^2-\alpha\zeta = Mm$ ト置ク。 (vi)

$$M\varepsilon = D(\delta-\gamma)+B\zeta, \qquad \text{(vii)}$$

$$M\beta = D\alpha+B(\delta-\gamma). \qquad \text{(viii)}$$

(i), (v) ヨリ γ ヲ消去スレバ

$$\varepsilon^2\alpha-\beta^2\zeta = (E\alpha-A\zeta)m \qquad \text{(ix)}$$

之ニ ε, β ノ上記ノ値ヲ代入スレバ $\longrightarrow (D^2\alpha-B^2\zeta)\frac{m}{M} = (E\alpha-A\zeta)m$

$$(E\alpha-A\zeta)\{\overset{Mm}{\cancel{(\delta-\gamma)^2-\alpha\zeta}}\} = \cancel{m}(D^2\alpha-B^2\zeta),$$

即チ $(ME-D^2)\alpha = (AM-B^2)\zeta.$

ココニ於テ

$$\frac{\alpha}{AM-B^2} = \frac{\zeta}{EM-D^2} = k \qquad \text{(x)}$$

ト置ク。

(vii), (viii), (x) ヨリ

$$B\varepsilon - D\beta = k\,(EB^2 - AD^2) \qquad \text{(xi)}$$

又 (i), (v) ヨリ

$$\gamma = \frac{A\varepsilon^2 - E\beta^2}{A\zeta - E\alpha}, \qquad \text{(xii)}$$

(ii), (iv) ヨリ

$$\delta - \gamma = \frac{B\beta\zeta - D\alpha\varepsilon}{B\varepsilon - D\beta}. \qquad \text{(xiii)}$$

故ニ

$$\gamma(\delta - \gamma) = \frac{(A\varepsilon^2 - E\beta^2)(B\beta\zeta - D\alpha\varepsilon)}{(A\zeta - E\alpha)(B\varepsilon - D\beta)}. \qquad \text{(xiv)}$$

(iii), (vi) ヨリ

$$-\gamma(\delta - \gamma) + \beta\varepsilon = \frac{1}{2}(M - C)m. \qquad \text{(xv)}$$

(xiv), (xv)
最後ノ二式ヲ比較シテ

$$\beta\varepsilon - \frac{(A\varepsilon^2 - E\beta^2)(B\beta\zeta - D\alpha\varepsilon)}{(A\zeta - E\alpha)(B\varepsilon - D\beta)} = \frac{1}{2}(M - C)m,$$

$$(AD\varepsilon - BE\beta)(\alpha\varepsilon^2 - \beta^2\zeta) = \frac{1}{2}(M - C)(A\zeta - E\alpha)(B\varepsilon - D\beta)m. \qquad \text{(xvi)}$$

(xvi)
(ix), (xi) ヲ用キテ

$$\frac{\varepsilon}{BE + \frac{1}{2}D(M - C)} = \frac{\beta}{AD + \frac{1}{2}B(M - C)} = k.$$

(xii), (xiii) ニヨリ

$$\gamma = k\left\{AE - \frac{1}{4}(M - C)^2\right\},$$

$$\delta = k\left\{AE + BD + \frac{1}{4}(M^2 - C^2)\right\}.$$

扨此結果ヲ sn ノ場合ニアテハメテ見レバ次ノ如シ。

$$(1-z^2)(1-k^2z^2) = k^2z^4-(1+k^2)z^2+1.$$

故ニ $A=k^2,\quad B=0,\quad C=-(1+k^2),\quad D=0,\quad E=1.$

依ッテ

$$\begin{array}{lll|l}
a_0 & & & \alpha = k^2M \\
a_1 & b_0 & & \beta = 0 \\
a_2 & & c_0 & \gamma = k^2-\frac{1}{4}\{M+(1+k^2)\}^2 = -\frac{1}{4}\{M+(1+k)^2\}\{M+(1-k)^2\} \\
 & 2b_1 & & \delta = k^2+\frac{1}{4}\{M^2-(1+k^2)^2\} = \frac{1}{4}\{M+(1-k^2)\}\{M-(1-k^2)\} \\
 & b_2 & c_1 & \varepsilon = 0 \\
 & & e_2 & \zeta = M
\end{array}$$

依ッテ (1) ハ次ノ形トナル，

$$\alpha x^2y^2+\gamma(x^2+y^2)+\delta.2xy+\zeta=0.$$

之ヲ M (arbitrary const.) ノ冪ニ從ッテ排列スレバ；

M^2 ノ係數ハ $\qquad -\frac{1}{4}(x^2+y^2)+\frac{1}{2}xy = -\frac{1}{4}(x-y)^2,$

M ノ係數ハ $\qquad k^2x^2y^2-\frac{1+k^2}{2}(x^2+y^2)+1,$

常數項ハ $\qquad -\frac{(1-k^2)^2}{4}(x^2+y^2)-\frac{(1-k^2)^2}{4}2xy = -\frac{(1-k^2)^2}{4}(x+y)^2.$

此方程式ヲ M ニツイテ解クヨリモ，$\sqrt{M}$ ニツイテ解ク方ガ都合ヨシ。一般ニ

$$ax^2+bx+c=0$$

ナルトキハ

$$\sqrt{x} = \sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} = \sqrt{\frac{b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{-2a}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-2a}}\left(\sqrt{\frac{b\mp2\sqrt{ac}}{2}}\mp\sqrt{\frac{b+2\sqrt{ac}}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-a}}\left(\sqrt{b\mp2\sqrt{ac}}\mp\sqrt{b+2\sqrt{ac}}\right).$$

今ノ場合ニハ $$b = k^2x^2y^2 - \frac{(1+k^2)x^2 + (1+k^2)y^2}{2} + 1,$$

$$2\sqrt{ac} = 2 \cdot \frac{(x^2-y^2)(1-k^2)}{4} = \frac{(1-k^2)x^2 - (1-k^2)y^2}{2}.$$

故ニ $$\sqrt{M} = \frac{1}{x-y}\left(\sqrt{k^2x^2y^2 - k^2y^2 - x^2 + 1} \pm \sqrt{k^2x^2y^2 - y^2 - k^2x^2 + 1}\right)$$

$$= \pm\frac{\sqrt{(1-k^2y^2)(1-x^2)} \pm \sqrt{(1-y^2)(1-k^2x^2)}}{x-y}.$$

依ツテ $$\int_0^x + \int_0^y = \int_0^{\varphi(x,y)}$$

ト考フレバ; $$\cancel{\varphi(x,y) = f\left(\pm\frac{\sqrt{(1-k^2x^2)(1-y^2)} \pm \sqrt{(1-x^2)(1-k^2y^2)}}{x-y}\right)}.$$

~~然ルニ $\varphi(0,y)=y$, $\varphi(x,0)=x$ ナラザル可カラザルニヨリ, ココニイフ f ナルモノハ~~

$$\cancel{f\left(\pm\frac{\sqrt{1-k^2\zeta^2} - \sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) = \zeta}$$

$$\sqrt{1-\zeta^2} - \sqrt{1-k^2\zeta^2}$$

~~ニシテ, $\varphi(x,y) = f\left(\pm\frac{\sqrt{(1-k^2x^2)(1-y^2)} - \sqrt{(1-x^2)(1-k^2y^2)}}{x-y}\right)$~~

~~ナラザル可カラズ。~~

$$\frac{\pm\sqrt{(1-k^2x^2)(1-y^2)} \mp \sqrt{(1-x^2)(1-k^2y^2)}}{x-y} = f\{\varphi(x,y)\}.$$

f ハ未知ノ函数ナリ。然レドモ $y=0$ トオキテ見レバ

$$\frac{\pm\sqrt{1-k^2x^2} \mp \sqrt{1-x^2}}{x} = f\{\varphi(x,0)\}_* = f(x)$$

又 $x=0$ トオキ y ヲ x トカキ直セバ

$$\frac{\pm\sqrt{1-x^2} \mp \sqrt{1-k^2x^2}}{-x} = f\{\varphi(0,x)\} = \begin{cases} \cancel{f\{\varphi(x,0)\}}, & \cancel{(\varphi\text{ハ symmetric})}. \\ f(x), \end{cases}$$

之ニヨリテ直チニ次ノ式ヲ得。

$$\frac{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2y^2)}-\sqrt{(1-y^2)(1-k^2x^2)}}{x-y}=\frac{\sqrt{1-\varphi(x,y)^2}-\sqrt{1-k^2\varphi(x,y)^2}}{\varphi(x,y)}.$$

既ニ知ラレル如ク $u=\int_0^x$ ナルトキ $x=\mathrm{sn}\,u$ ト定義シ,

$\mathrm{cn}^2=1-\mathrm{sn}^2$, $\mathrm{dn}^2=1-k^2\mathrm{sn}^2$, 等ヲ用ヰレバ

$$\frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,v-\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u-\mathrm{sn}\,v}=\frac{\mathrm{cn}(u+v)-\mathrm{dn}(u+v)}{\mathrm{sn}(u+v)}.$$

vノ代リニ $v+2K$ ヲ入レレバ

$$\frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,v+\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u+\mathrm{sn}\,v}=\frac{\mathrm{cn}(u+v)+\mathrm{dn}(u+v)}{\mathrm{sn}(u+v)}.$$

相加ヘテ $$\frac{\mathrm{cn}(u+v)}{\mathrm{sn}(u+v)}=\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,v-\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2v}.$$

之ヨリ $$\mathrm{sn}^2(u+v)=\frac{(\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2v)^2}{(\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2v)^2+(\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,v-\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,u)^2}$$

$$=\frac{(\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2v)^2}{(\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v-\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)^2}$$ ヲ得。

Weierstrass ℘-func. ノ加法定理ヲ出スコトハ問題トシテ残ス。

次ニハ同ジ問題ニ対スル Lagrange ノ direct process ヲ述ベン。

与ヘラレタル微分方程式ヲ
$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}+\frac{dy}{\sqrt{f(y)}}=0,$$
$$f(x)=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4,\qquad f(y)=\cdots$$
トス。　今x, yヲ共ニuノ函数ト見レバ
$$\frac{dx}{du}=\sqrt{f(x)},\qquad \frac{dy}{du}=-\sqrt{f(y)}$$
ト置クコトヲ得。　之ヨリ
$$\frac{d^2x}{du^2}=\frac{1}{2}\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\frac{dx}{du}=\frac{1}{2}f'(x),$$
即チ
$$2\frac{d^2x}{du^2}=b+2cx+3dx^2+4ex^3.$$
同様ニシテ
$$2\frac{d^2y}{du^2}=b+2cy+3dy^2+4ey^3.$$
ココニ於テ更ニ
$$x+y=p,\qquad x-y=q$$
ト置ケバ，
$$\frac{d^2p}{du^2}=\frac{d^2x}{du^2}+\frac{d^2y}{du^2}=b+cp+\frac{3}{4}d(p^2+q^2)+\frac{1}{2}e(p^3+3pq^2),$$
$$\frac{dp}{du}\frac{dq}{du}=\left(\frac{dx}{du}\right)^2-\left(\frac{dy}{du}\right)^2=f(x)-f(y)$$
$$=bq+cpq+\frac{1}{4}d(3p^2q+q^3)+\frac{1}{2}e(p^3q+pq^3).$$

之ヨリ直チニ次式ヲ得。
$$q\frac{d^2p}{du^2}-\frac{dp}{du}\frac{dq}{du}=\frac{1}{2}dq^3+epq^3,$$
故ニ
$$\frac{2}{q^2}\frac{d^2p}{du^2}\frac{dp}{du}-\frac{2}{q^3}\left(\frac{dp}{du}\right)^2\frac{dq}{du}=(d+2ep)\frac{dp}{du}.$$
之ヲ積分スレバ
$$\frac{1}{q^2}\left(\frac{dp}{du}\right)^2=C+dp+ep^2,\qquad C\text{ハ積分常数ナリ。}$$

$$\frac{2+\wp'(u)v^3+\cdots}{-v(+1-\wp(u)v^2+\cdots)}=\frac{1}{-v}\{+2+2\wp(u)v^2\cdots\}$$

Euler's equation ノ sol. ニ関スル参考.

Richelot, Crelle 44 (p. 277)

Stieltjes, Bull. des Scien. Math. Ser II. t. XII (p. 222)

Fujisawa, Tokyo Sug. But. Kizi, Ser I. Vol. V. (明治26年) 1893.

p, q ヲモトニ戻セバ

$$\left(\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(y)}}{x-y}\right)^2=C+d(x+y)+e(x+y)^2.$$

之ヨリ $\wp$-函数ノ加法定理ヲ導クコトハ容易ナリ。即チ

$$a=-g_3,\quad b=-g_2,\quad c=0,\quad d=4,\quad e=0$$

ト置ケバ, 上ノ integral ハ

$$\left(\frac{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}-\sqrt{4y^3-g_2y-g_3}}{x-y}\right)^2-4(x+y)=C$$

トナル。故ニ

$$\int_\infty^x\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}=u,\qquad x=\wp(u)$$

ト定義スレバ;

$$\left\{\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right\}^2-4\{\wp(u)+\wp(v)\}=F\{\wp(u+v)\}.$$

~~$\varphi(u+v)$.~~
~~然ルニコレハ$(u+v)$ノ periodic funct.ニシテ且 even ナリ~~
故ニ ~~$\Phi\{\wp(u+v)\}$~~

左辺ヲ v ノ冪ニ展開スレバ;

$$\left\{\frac{\wp'(u)+\frac{2}{v^3}+\cdots}{\wp(u)-\frac{1}{v^2}+\cdots}\right\}^2-4\wp(u)-\frac{4}{v^2}+\cdots$$

$$=\left\{\frac{\wp'(u)\cdot v^3+2+\cdots}{v\{\wp(u)\cdot v^2-1+\cdots\}}\right\}^2-4\wp(u)-\frac{4}{v^2}+\cdots$$

$$=\frac{4}{v^2}+8\wp(u)+\cdots-4\wp(u)-\frac{4}{v^2}+\cdots$$

故ニ $v=0$ トオキテ比較スレバ

$$4\wp(u)=F\{\wp(u)\}.$$

故ニ

$$\frac{1}{4}\left\{\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right\}^2-\wp(u)-\wp(v)=\wp(u+v).$$

第五章　楕円積分ノ変換 (Transformation)

楕円積分 $\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$ ニ於テ $x=\frac{a+by}{a_1+b_1y}$ ナル一次変換ヲ行ヘバ其結果ハ矢張モトノ如キ楕円積分ナリ, 而シテ a, b, a_1, b_1 ヲ適宜ニ選ブコトニヨリテ変換後ノ $f_1(y)$ ノ根ヲシテ三ツマデハ $f(x)$ ノ根ト一致セシメ得, 然ルトキハ残リノ一根ハ必然的ニ定マルベシ。特ニ $f(x)=(1-x^2)(1-k^2x^2)$ ナルトキハ $f_1(y)=(1-y^2)(1-k_1^2y^2)$ ナラシメ得, 但シ k_1 ハ k ニヨリテ当然定マルモノナリ。

例。 $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ ニ於テ $x=\frac{a+by}{1+cy}$ ト置キ,

之ヲ $\int \frac{m\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-h^2y^2)}}$ ナル形ニ直シタリトシ, m, h ヲ求ム。

斯クノ如キ置換ヲ行ヘバ, 与ヘラレタル積分ハ次ノ形トナル。

$$\int \frac{(b-ca)\,dy}{\sqrt{\{(1-a)+(c-b)y\}\{(1+a)+(c+b)y\}\{(1-ka)+(c-kb)y\}\{(1+ka)+(c+kb)y\}}}. \qquad (1)$$

之ヲ原形ト相似ナル ~~自乗~~ $\qquad (2)$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(1-y)(1+y)(1-hy)(1+hy)}}$$

~~ト比較スルニ~~ ナラシメンニハ, 若シソノマヽノ順ニテ各因数ヲ対応セシムレバ

$$\frac{1-a}{1}=\frac{c-b}{-1}, \qquad \frac{1+a}{1}=\frac{c+b}{1},$$

$$\frac{1-ka}{1}=\frac{c-kb}{-h}, \qquad \frac{1+ka}{1}=\frac{c+kb}{h}.$$

始メノ二式ヨリ　$b=1,\quad a=c,$

後ノ二式ヨリ　$hka=c,\quad h=kb$　ヲ得。

依ツテ $h=k=\pm1$ 又ハ $a=c=0$.

然ルニ $k^2\neq 1$ ト考フルニヨリ, $a=c=0$ ナラザル可カラズ。

従ツテ　$x=y$　トナル。

カレバ此場合ハ別ニ興味ナシ。依ッテ次ニハ(1)ノ第一,第二,第三,第四ノ因数ガ夫々(2)ノ第一,第三,第二,第四ノ因数ニ対応スト考フベシ。

$$\frac{1-a}{1}=\frac{c-b}{-1},\qquad \frac{1+a}{1}=\frac{c+b}{-h},$$

$$\frac{1-ka}{1}=\frac{c-kb}{1},\qquad \frac{1+ka}{1}=\frac{c+kb}{h}.$$

之ヲ整頓スレバ

$$a+b-c=1, \qquad \text{(i)}$$

$$ha+b+c=-h, \qquad \text{(ii)}$$

$$ka-kb+c=1, \qquad \text{(iii)}$$

$$hka-kb-c=-h. \qquad \text{(iv)}$$

a, b, c ヲ消去スレバ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ h & 1 & 1 & -h \\ k & -k & 1 & 1 \\ hk & -k & -1 & -h \end{vmatrix}=0.$$

即チ

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1+h & 2 & 1 & 1-h \\ 1+k & 1-k & 1 & 2 \\ hk-1 & -(1+k) & -1 & -(1+h) \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} 1+h & 2 & 1-h \\ 1+k & 1-k & 2 \\ +(1-hk) & +(1+k) & +(1+h) \end{vmatrix}=0.$$

$$+(1+h)^2(1-k)+4(1-hk)+(1-h)(1+k)^2-(1-h)(1-k)(1-hk)$$

$$-4(1+k)(1+h)\cancel{\mp 2(1+h)(1+k)}=0.$$

之ヲhノ冪ニ整頓スレバ

$$(1-k)^2h^2-2(1+6k+k^2)h+(1-k)^2=0. \qquad (3)$$

コレ即チ k ヨリ h ヲ決定スル方程式ナリ。(3) ヲ解ケバ

$$h=\frac{1+6k+k^2\pm\sqrt{(1+6k+k^2)^2-(1-k)^4}}{(1-k)^2}$$

$$=\frac{1+6k+k^2\pm4\sqrt{k}(1+k)}{(1-k)^2}=\frac{(1\pm\sqrt{k})^4}{(1-k)^2}.$$

故ニ $h=\left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^2$ 又ハ $\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2.$ （第7頁参照）

更ニ elegant ナル解ハ次ノ如シ。

(i), (ii) ヨリ c 及ビ b ヲ消去スレバ;

$$(1+h)a+2b=1-h, \qquad \text{(v)}$$

$$(1-h)a-2c=1+h. \qquad \text{(vi)}$$

(iii), (iv) ヨリ c 及ビ b ヲ消去スレバ;

$$(1+h)ka-2kb=1-h, \qquad \text{(vii)}$$

$$(1-h)ka+2c=1+h. \qquad \text{(viii)}$$

(v), (vii) ヨリ

$$2k(1+h)a=(1+k)(1-h),$$

$$4kb=-(1-k)(1-h).$$

即チ

$$a=\frac{(1+k)(1-h)}{2k(1+h)}, \qquad b=-\frac{(1-k)(1-h)}{4k}.$$

(vi), (viii) ヨリ

$$(1+k)(1-h)a=2(1+h),$$

$$2(1+k)c=(1-k)(1+h).$$

即チ

$$a=\frac{2(1+h)}{(1+k)(1-h)}, \qquad c=\frac{(1-k)(1+h)}{2(1+k)}.$$

両方ノ a ヲ比較スレバ

$$4k(1+h)^2=(1+k)^2(1-h)^2. \qquad (4)$$

h, kノ関係ニヨリテ a, b, c ヲ簡約スレバ

$$a=\frac{(1+k)(1-h)}{2k(1+h)}=\frac{1+k}{2k}\cdot\frac{2\sqrt{k}}{1+k}=\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

$$b=-\frac{(1-k)(1-h)}{4k}=-\frac{1-k}{4k}\,\frac{4\sqrt{k}}{(1+\sqrt{k})^2}=-\frac{1-\sqrt{k}}{\sqrt{k}(1+\sqrt{k})},\qquad \left[1-h=\frac{4\sqrt{k}}{(1+\sqrt{k})^2}\right]$$

$$c=\frac{(1-k)(1+h)}{2(1+k)}=\frac{1-k}{2}\,\frac{1}{2\sqrt{k}}\,\frac{4\sqrt{k}}{(1+\sqrt{k})^2}=\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}.$$

従ッテ

$$x=\frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{1-\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}y}{1+\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}y}.$$

$$\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}y=\frac{1-\sqrt{k}x}{1+\sqrt{k}x}.$$

即チ

$$\sqrt{h}\,y=\frac{1-\sqrt{k}x}{1+\sqrt{k}x}.$$

之ヨリ

$$\left(\frac{1-h}{1+h}\right)^2=\frac{4k}{(1+k)^2},$$

即チ再ビ

$$h=\left(\frac{1\mp\sqrt{k}}{1\pm\sqrt{k}}\right)^2$$

ヲ得。

$\sqrt{h}=\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}$. (0<h<1 ナル故)

此方法ニヨレバ a, b, c モ同時ニ定マル。

更ニ m ヲ考フレニ,

$$m=\frac{b-ca}{\sqrt{(1-a)(1+a)(1-ka)(1+ka)}}.$$

前頁ノ a, b, c ノ値及ビ (4) ヲ利用スレバ;

$$(1-a)(1+a)=-\frac{1-k}{k},\qquad 1-k^2a^2=1-k,$$

$$b-ca=-\frac{(1-k)(1-h)}{2k}.$$

故ニ

$$m^2=-\frac{(1-h)^2}{4k}. \tag{5}$$

若シ上記ノ如キ一次置換ニ代フルニ更ニ一般ナル p 次ノ置換, 即チ

$$x=\frac{U(y)}{V(y)}$$

ヲ行ハバ如何, 但シ U, V ハ y ニツイテノ p 次ノ多項式トス。コレ吾人ガ次ニ考ヘントスル問題ナリ。(然レドモ便宜上 U, V ノ一方ハ p-1 次ナルコトヲモ許容セントス。)

楕円積分ニカクノ如キ置換ヲ行ヒテ其結果ヲ矢張楕円積分ナラシムルコトヲ得ベキカ否カヲ先ヅ考究スベシ。

$$\frac{dx}{\sqrt{\cancel{f(x)}\,X}}, \qquad X\ \cancel{f(x)} = \left\{\begin{matrix} a_0+a_1x+\cdots+a_4x^4 \\ \cancel{a_0x^4+a_1x^3+\cdots+a_4} \end{matrix}\right\} = (1,x)^4$$ ト略記ス。

之ニ置換ヲ行ヘバ

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{(U'V-UV')\,dy}{\sqrt{(V,U)^4}}, \tag{6}$$

$(V,U)^4$ ハ y ニ関シテ $4p$ 次ノ式，又 $U'V-UV'$ ハ一見 $(2p-1)$ 次ノ如クナレドモ実ハ最高冪ノ項ガ消失スルタメ $(2p-2)$ 次ナリ。

(6) ガ楕円積分ノ形トナルタメニハ $(V,U)^4$ ヨリ $\frac{1}{2}(4p-4)=2p-2$ 個ノ ~~平方~~ 一次因数ガ根号ノ外ニ出デザル可カラズ；即チ $(V,U)^4$ ガソレダケノ平方因数ヲ有セザル可カラズ。ソレガタメニハ係数ノ間ニ $2p-2$ 個ノ或ル條件ヲ満足セザル可カラズ。然ルニ U, V ノ係数ノ總数ハ $2p+2$ 又ハ $2p+1$ ニシテ，ソノ比ダケヲ考フルトスルモ $2p+1$ 又ハ $2p$ ナリ，サレバ $2p-2$ ノ條件ヲ満タスモナホ後ニ 3 又ハ 2 ノ自由度アリ。

サテカクノ如ク $(V,U)^4$ ガ平方因数ヲ有スルモノトスレバ，ソノ因数ハ必ズ (6) ノ分子ト約セラルルモノナリ。ソノ證明次ノ如シ。今

$$X = c(1-\alpha x)(1-\beta x)(1-\gamma x)(1-\delta x)$$

トスレバ；

$$(V,U)^4 = c(V-\alpha U)(V-\beta U)(V-\gamma U)(V-\delta U).$$

モシ $(V,U)^4$ ガ $(a-y)^2$ ナル平方因数ヲ有ストスレバ；次ノ二ツノ場合アリ。

(I) 二ツノ相異ル因数，例ヘバ $V-\alpha U$ ト $V-\beta U$ トガ夫々 $a-y$ ナル因数ヲ有スル場合。ソノトキハ V 及ビ U ガ共ニ $a-y$ ニテ割リ切ル，従ツテ $U'V-UV'$ モ亦 $a-y$ ニテ割リ切ル。

(II) 一ツノ因数，例ヘバ $V-\alpha U$ ガ $(a-y)^2$ ニテ割リ切ルル場合。ソノトキハ $V'-\alpha U'$ ガ $a-y$ ニテ割リ切ルベシ。従ツテ

$$U'V-UV' = U'(V-\alpha U) - U(V'-\alpha U')$$

モ亦 $a-y$ ニテ割リ切ルベシ。

サレバ結局

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{m\,dy}{\sqrt{Y}} \qquad (Y \text{ ハ } y \text{ ノ四次式})$$

ナル形トナリ, ココニ m ハ常数トナルベシ。或ハ書キ直セバ

$$\frac{M\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}, \qquad M = \frac{1}{m}$$

カクスルコトヲ称シテ Transformation トイフ。
トナル。~~M ノコトヲ此 Transformation ノ Multiplicator トイフ。~~

特ニ $X = (1-x^2)(1-k^2x^2)$ ナル場合ニ之ヲ行ヒテ

$$\frac{M\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-h^2y^2)}}$$

トスレバ; h ハ k ト或関係ヲ有スベク, ソノ間ノ方程式ヲ modular eq. トイヒ, 又 M ヲ multiplier トイフ。

前ニ挙ゲタル例ハ一次ノ変換ニシテ (3), (4) ハ即チ modular eq. ナリ。

例。 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ ニ就テ二次ノ変換ヲ行フベシ;

$$x = \frac{a+by+cy^2}{1+b'y+c'y^2}.$$

X ニ於ケル四ツノ因数ト, Y ニ於ケル之ニ對應スル因数トヲ記セバ次ノ如シ。

$$1-x: \quad (1-a)+(b'-b)y+(c'-c)y^2 \qquad (1)$$

$$1+x: \quad (1+a)+(b'+b)y+(c'+c)y^2 \qquad (2)$$

$$1-kx: \quad (1-ka)+(b'-kb)y+(c'-kc)y^2 \qquad (3)$$

$$1+kx: \quad (1+ka)+(b'+kb)y+(c'+kc)y^2 \qquad (4)$$

変換ノ式ヲ既約分数トスレバ (1)‥(4) ノ何レカ二ツヲ完全平方トセザル可カラズ。

今仮リニ (3), (4) ヲ然リトスレバ

$$(b'-kb)^2 = 4(1-ka)(c'-kc)$$

$$(b'+kb)^2 = 4(1+ka)(c'+kc)$$

即チ

$$b'^2+k^2b^2 = 4(c'+k^2ac) \qquad (i)$$

$$bb' = 2(ac'+c) \qquad (ii)$$

次ニ (1), (2) ガ $(1-y)(1+y)(1-hy)(1+hy)$ ナル形トナルベキ筈ナルガ；モシ (1) ガ $(1-y)(1+y)$, (2) ガ $(1-hy)(1+hy)$ トナルモノトスレバ；

$$b'-b=0, \qquad 1-a=\frac{c'-c}{-1},$$

$$b'+b=0, \qquad 1+a=\frac{c'+c}{-h^2}.$$

之ヨリ $b=b'=0$ ヲ得。従ッテ (i) (ii) ヨリ (或ハソノ前ノ二式ヨリ)

$$\left(\begin{array}{l} a=\frac{1}{k} \\ c'=-kc \end{array}\right. \quad 又ハ \quad \left(\begin{array}{l} a=-\frac{1}{k} \\ c'=kc. \end{array}\right.$$

第一ノ組ヲトレバ

$$\left.\begin{array}{l} 1-\frac{1}{k}=c(k+1) \\ 1+\frac{1}{k}=\frac{c}{h^2}(k-1) \end{array}\right\} \quad 故ニ \quad \begin{array}{l} \frac{k-1}{k}=c(k+1) \\ \frac{k+1}{k}=\frac{c}{h^2}(k-1) \end{array}$$

従ッテ

$$\frac{k-1}{k+1}=h^2\,\frac{k+1}{k-1}, \qquad h^2=\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2,$$

$$h=\frac{1-k}{1+k}, \qquad (\text{mod. eq.})$$

此場合ニハ

$$a=\frac{1}{k}, \quad b=b'=0, \quad c=\frac{k-1}{k(1+k)}, \quad c'=\frac{1-k}{1+k}.$$

ニシテ結局

$$x=\frac{(1+k)-(1-k)y^2}{k(1+k)+k(1-k)y^2}=\frac{1}{k}\,\frac{1-hy^2}{1+hy^2} \quad トナル。$$

第二ノ組ヲトルモ同様ナリ。

試ミニ上ノ変換ヲ行ヘバ;

$$dx = -\frac{4hy}{(1+hy^2)^2}dy,$$

$$1-x = \frac{(k-1)(1-y^2)}{k(1+hy^2)}, \qquad 1+x = \frac{(k+1)(1-h^2y^2)}{k(1+hy^2)},$$

$$1-kx = \frac{2hy^2}{1+hy^2}, \qquad 1+kx = \frac{2}{1+hy^2}.$$

故ニ $$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int\frac{-2k\,dy}{\sqrt{(k^2-1)(1-y^2)(1-h^2y^2)}}.$$

従ツテ $$m = \frac{-2k}{\sqrt{k^2-1}}.$$