TRADE MARK

RECIS TERED

5 2

Note Book

楕圓積分

巻二

Matsuya PATENT No14484. Tokyo.

楕圓積分

大正十四年六月四日

次ニハ (1) ヲ $(1-y)(1-hy)=$，(2) ヲ $(1+y)(1+hy)=$ ナラシムルトスレバ；

$$\frac{1-a}{1}=\frac{b'-b}{-(1+h)}=\frac{c'-c}{h}\cdots\cdots=\frac{b'-b+c'-c}{-1}$$

$$\frac{1+a}{1}=\frac{b'+b}{1+h}=\frac{c'+c}{h}\cdots\cdots=\frac{b'+b-c'-c}{1}$$

之ヨリ

$$1=\frac{c'}{h}=b-c' \qquad \text{(iii)}$$

$$a=\frac{c}{h}=b'-c \qquad \text{(iv)}$$

ヲ得。(i) 乃至 (iv) ヨリ a, b, c, b', c', h ヲ決定スレバヨシ。

先ヅ (iii), (iv) ヨリ，

$$a=\frac{c}{h},\quad b=1+h,$$

$$c'=h,\quad b'=c+\frac{c}{h}.$$

之ヲ (ii) ニ入ルレバ

$$\frac{c}{h}(1+h)^2=2(c+c).$$

之ヨリ　$c=0$ 又ハ $h=1$ ヲ得。後者ハ不可。

故ニ $c=0$ ナリ，従ッテ $a=0,\ b=1+h,\ c'=h,\ b'=0.$

之ヲ (i) ニ入ルレバ

$$k^2(1+h)^2=4h,\qquad k=\frac{2\sqrt{h}}{1+h}.$$

h ニツイテ解ケバ　$h=\left(\frac{1\pm k'}{k}\right)^2=\frac{1\pm k'}{1\mp k'},\qquad k'=\sqrt{1-k^2}.$

求ムル変換式ハ

$$x=\frac{(1+h)y}{1+hy^2}.$$

試ミニコノ変換ヲ行ヘバ；

$$dx=\frac{(1+h)(1-hy^2)\,dy}{(1+hy^2)^2},$$

$$1-x=\frac{(1-y)(1-hy)}{1+hy^2},\qquad 1+x=\frac{(1+y)(1+hy)}{1+hy^2},$$

$$1-kx=\frac{(1-\sqrt{h}y)^2}{1+hy^2},\qquad 1+kx=\frac{(1+\sqrt{h}y)^2}{1+hy^2}.$$

従ッテ
$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\int\frac{(1+h)\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-h^2y^2)}},\qquad m=1+h.$$

扨斯クノ如クナレバ一般ノ次数ノ変換式ヲ作ルガ如キハ容易ナラザル問題ナレドモ，トニカク一種ダケノ変換式ヲ作ルコトハ不可能ニアラズ。次ニ之ヲ論ゼントス。

之ニ際シテ吾人ハ次数ヲ素数ニ限定セントス，何トナレバ素数次ノ変換式

$$x=\frac{U_1(y)}{V_1(y)},\qquad y=\frac{U_2(z)}{V_2(z)},\quad \cdots\cdots$$

等ヲ組合スレバ任意ノ合成数ノ次数ノ場合ノモノヲ得レバナリ。而シテ $p=2$ ノ場合ハ既ニ論ジタルニヨリ，次ニハ p ヲ odd prime トシテ論ズベシ。

今 $x=\frac{U(y)}{V(y)}$ ヲ代入スレバ，根号ノ中ハ

$$(V-U)(V+U)(V-kU)(V+kU)$$

トナル。コノ第一及ビ第二ノ因数ヨリ各 $\frac{p-1}{2}$ 個ノ平方因数ヲ出シテ，残リヲ $(1-y)(1+y)$ ナラシムルニハ

$$V-U=R^2\cdot(1-y),\qquad V+U=S^2\cdot(1+y),$$

従ッテ
$$\frac{1-x}{1+x}=\left(\frac{R}{S}\right)^2\frac{1-y}{1+y}$$

ナラシムレバヨシ。ココニ R, S ハ各 y ニ関スル $\frac{p-1}{2}$ 次式ナリ。

R, S ノ構造ハコレダケニテハ任意ナレドモ，x, y トノ関係上 $R(-y)=S(y)$ ナル様ニスルモ可ナリ。依ッテ

$$R=P-Q\cdot y,\qquad S=P+Q\cdot y$$

ト置クベシ，ココニ P, Q ハ y^2 ノ有理整函数ニシテ，ソノ次数ハ（y ニツイテ）

$\frac{p-1}{2}$ ガ偶数ナラバ，　P ハ $\frac{p-1}{2}$，　Q ハ $\frac{p-5}{2}$，

〃 奇数 〃　　〃 $\frac{p-3}{2}$，　〃 $\frac{p-3}{2}$.

故ニP, Qノ中ニ含マルル係数ノ数ハ,

前者ノ場合ニハ $\left(\frac{p-1}{4}+1\right)+\left(\frac{p-5}{4}+1\right)=\frac{p+1}{2}$,

後者ノ場合ニハ $\left(\frac{p-3}{4}+1\right)+\left(\frac{p-3}{4}+1\right)=\frac{p+1}{2}$.

何レニシテモ同一ナリ。

ココニ於テ
$$\frac{1-x}{1+x}=\frac{(P-Qy)^2}{(P+Qy)^2}\frac{1-y}{1+y} \qquad (1)$$

ヲxニ関シテ解ケバ;
$$x=\frac{y(P^2+2PQ+Q^2y^2)}{P^2+2PQy^2+Q^2y^2}.$$

即チ形式ダケヲ考フレバ
$$x=\frac{yN(1,y^2)}{D(1,y^2)} \qquad (2)$$

トスルコトヲ得。ココニN, Dハy^2ニ関シテ$\frac{p-1}{2}$次ナリ。

次ニ,残レル二ツノ因数 $(V-kU)(V+kU)$ ヲ処分セザル可カラズ。ソレガタメニハ(1)ニ於テ $x=kx$ ヲ代入シタルトキ, yヲhyニ代ヘテ之ガ成立スレバヨシ。然レドモ其ハ(2)ニヨリテ見レバ不可能ナリ。依ツテ更ニxヲ$\frac{1}{kx}$ニ, yヲ$\frac{1}{hy}$ニ代ヘテ成立スル様ニセントス。即チ(2)ニツイテイヘバ

$$\frac{1}{kx}=\frac{N\left(1,\frac{1}{h^2y^2}\right)}{hy\cdot D\left(1,\frac{1}{h^2y^2}\right)} \qquad \cancel{kx=\frac{hyN(1,h^2y^2)}{D(1,h^2y^2)}}.$$

即チ
$$x=\frac{hyD\left(1,\frac{1}{h^2y^2}\right)}{kN\left(1,\frac{1}{h^2y^2}\right)}=\frac{h}{k}\frac{yD(h^2y^2,1)}{N(h^2y^2,1)} \qquad (3)$$

之ト(2)トヲ比較スレバ,
$$\frac{h}{k}D(h^2y^2,1)=\Omega\cdot N(1,y^2),$$
$$N(h^2y^2,1)=\Omega\cdot D(1,y^2).$$
Ωハyニ無関係ナル常数トス。

コノ各式ハD, Nノ係数ノ間ニ成立スベキ$\frac{p-1}{2}$個ノ方程式ヲ与フ。而シテΩヲ次ノ如クトレバ両式ハ同一ノ内容ニ帰ス。即チ先ヅ下式ニ於テ yニ$\frac{1}{hy}$ヲ代入スレバ
$$N\left(\frac{1}{y^2},1\right)=\Omega\cdot D\left(1,\frac{1}{h^2y^2}\right).$$

両辺ニ $(hy)^{p-1}$ ヲ乗ズレバ

$$h^{p-1}.\ N(1, y^2) = \Omega.\ D(h^2y^2, 1).$$

ココニ第一式ヲ代入スレバ $\qquad = \Omega^2.\ \frac{k}{h}\ N(1, y^2).$

故ニ

$$\Omega^2 = \frac{h^p}{k}.$$

之ニテ P, Q ノ係数モ h モ総テ定マル。

以上ノ手続ヲ $p=3, 5$ ノ場合ニ適用セントス。

[$p=3$]

$$\frac{1-x}{1+x} = \left(\frac{1-\alpha y}{1+\alpha y}\right)^2 \frac{1-y}{1+y},$$

$$x = \frac{y\{(2\alpha+1)+\alpha^2y^2\}}{1+\alpha(\alpha+2)y^2}.$$

故ニ $N(h^2y^2, 1) = \Omega.\ D(1, y^2)$ ヲ作レバ

$$\{(2\alpha+1)h^2y^2+\alpha^2\} = \Omega.\ \{1+\alpha(\alpha+2)y^2\}.$$

従ッテ $\qquad \alpha^2 = \Omega, \qquad h^2(2\alpha+1) = \Omega.\ \alpha(\alpha+2), \qquad \Omega^2 = \frac{h^3}{k}.$

之ニテ α, Ω, h ガ定マル筈ナリ。

α ヲ求ムルニハ四次方程式ノ解法ヲ要スルニヨリ, 吾人ハ α ノミニテ之ヲ parameter ニ用ヰベシ。

$$h^2 = \frac{\alpha^3(\alpha+2)}{2\alpha+1}, \qquad k^2 = \alpha\left(\frac{\alpha+2}{2\alpha+1}\right)^3.$$

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{(2\alpha+1)\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-h^2y^2)}}. \qquad M = \frac{1}{2\alpha+1}.$$

又 $\quad \alpha = \frac{\sqrt[4]{h^3}}{\sqrt[4]{k}}$, 故ニ $\sqrt[4]{h} = u$, $\sqrt[4]{k} = v$ ト置ケバ

$$\frac{u^3}{v} = \alpha, \qquad u^2v^2 = \frac{\alpha(\alpha+2)}{2\alpha+1}.$$

之ヨリ $\qquad u^4 - v^4 + 2uv(1-u^2v^2) = 0. \qquad$ *modular equation.*

[p=5] $$\frac{1-x}{1+x}=\left(\frac{1-\alpha y+\beta y^2}{1+\alpha y+\beta y^2}\right)^2\frac{1-y}{1+y},$$

$$x=\frac{y\{(2\alpha+1)+(2\alpha\beta+2\beta+\alpha^2)y^2+\beta^2y^4\}}{1+(2\beta+2\alpha+\alpha^2)y^2+(\beta^2+2\alpha\beta)y^4}.$$

之ヨリ
$$\begin{cases}\beta^2=\Omega & \text{(i)}\\ h^2(2\alpha\beta+2\beta+\alpha^2)=\Omega(2\alpha+2\beta+\alpha^2) & \text{(ii)}\\ h^4(2\alpha+1)=\Omega(\beta^2+2\alpha\beta) & \text{(iii)}\\ \Omega^2=\dfrac{h^5}{k} & \text{(iv)}\end{cases}$$

之ヨリ α, β, Ω, h ヲ決定スレバヨシ。

(i), (iv) ヨリ $$\beta=\frac{\sqrt[4]{h^5}}{\sqrt[4]{k}}.$$

前ノ如ク $\sqrt[4]{h}=u,\quad \sqrt[4]{k}=v$ ト置ケバ;
$$\beta=\frac{u^5}{v}.$$

之ヲ (iii) ニ代入シテ α ヲ求ムレバ;
$$2\alpha=\frac{u(u^4-v^4)}{v(uv^3-1)}.$$

コレラヲ (ii) ニ代入スレバ次ノ如キ modular equation ヲ得。先ヅ (ii) ヨリ
$$(h^2-\Omega)(2\beta+\alpha^2)=(\Omega-h^2\beta)2\alpha$$

ヲ出シ, 之ヨリ
$$\left(u^8-\frac{u^{10}}{v^2}\right)\left(\frac{2u^5}{v}+\alpha^2\right)=\left(\frac{u^{10}}{v^2}-u^8\frac{u^5}{v}\right)\frac{u(u^4-v^4)}{v(uv^3-1)}.$$

$$(v^2-u^2)(2u^5+v\alpha^2)=\cancel{u^3(1-u^3v)(u^4-v^4)\frac{1}{uv^3-1}}$$
$$=u^3(1-u^3v)\frac{u^4-v^4}{uv^3-1}$$

$$2u^5+v\cdot\alpha^2=u^3\frac{(u^3v-1)(u^2+v^2)}{uv^3-1}.$$

$$\alpha^2=\frac{u^3}{v}\left\{\frac{(u^3v-1)(u^2+v^2)}{uv^3-1}-2u^2\right\}=\frac{u^3}{v}\frac{(u^2-v^2)(u^3v+1)}{uv^3-1}.$$

之ト前ニ得タルαトヲ比較スレバ

$$\frac{u^3}{v}\frac{(u^2-v^2)(u^3v+1)}{uv^3-1}=\frac{u^2(u^4-v^4)^2}{4v^2(uv^3-1)^2}.$$

$$4uv(u^3v+1)(uv^3-1)=(u^2+v^2)^2(u^2-v^2).$$

$$u^6-v^6+5u^2v^2(u^2-v^2)+4uv(1-u^4v^4)=0.$$

モシu,vヲ用ヰテα,βヲ表ニシタル変換ノ式ヲ作レバ次ノ如シ。

$$x=\frac{\{v(v-u^5)+u^3(v^2+u^2)(v-u^5)y^2+u^{10}(1-uv^3)y^4\}y}{v^2(1-uv^3)+uv^2(v^2+u^2)(v-u^5)y^2+v^3u^6(v-u^5)y^4}.$$

之ヲ実際ニ代入シテ結果ヲ出スコトハ容易ナラザレドモ、mノ値ヲ考フレバ次ノ如クスレバヨシ。

$$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\int_0^y\frac{m\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k'^2y^2)}}.$$

故ニ $x=0$ ナルトキ $y=0$ ニシテ、 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{m}$ ナリ。然ルニ

$$x=\frac{y\{(2\alpha+1)+\cdots\}}{1+\cdots}$$

故ニ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{dx}{dy}=2\alpha+1=m.$

依ツテ $m=\dfrac{u(u^4-v^4)}{v(uv^3-1)}+1.=\dfrac{u^5-v}{v(uv^3-1)}.$

以上論ジ来レル所ハTransformationノ代数的方面ナリ。之ヨリ転ジテ函数論的(超越的)方面ヲ論ゼントスルニ際シ、暫ク之ヲ中断シ、以上ノ理論ノ一応用トシテLandenノtransformationヲ出シ、之ニ因リテ第一種積分ノ計算法ヲ考究セントス。

第六章　第一種楕円積分ノ計算

前章ニ於テ吾人ハ

$$x=\frac{(1+h)y}{1+hy^2},\qquad h=\frac{1-k'}{1+k'},\qquad k'=\sqrt{1-k^2}$$

ナル変換式ニヨリテ

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\frac{2}{1+k'}\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-h^2y^2)}}$$

トナルコトヲ見タリ。以下便宜上 y, h ノ代リニ x_1, k_1 ナル記号ヲ用ヰルベシ。

即チ

$$x=\frac{(1+k_1)x_1}{1+k_1x_1^2}\qquad(1)$$

ニヨリテ

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\frac{2}{1+k'}\frac{dx_1}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-k_1^2x_1^2)}}\qquad(2)$$

トナルナリ。

ココニ於テ

$$x=\frac{i\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}},\qquad x_1=\frac{i\zeta_1}{\sqrt{1-\zeta_1^2}}$$

ナル置換ヲ行フベシ、之ヲ Jacobi ノ imaginary transformation トイフ。

然ルトキハ

$$dx=\frac{i\,d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)^3}},\qquad 1-x^2=\frac{1}{1-\zeta^2},\qquad 1-k^2x^2=\frac{1-k'^2\zeta^2}{1-\zeta^2},$$

故ニ

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k'^2\zeta^2)}}$$

トナル、(2) ノ右辺ニツイテモ之ニ準ズ。依ッテ (2) ハ

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k_1^2\zeta^2)}}=\frac{2}{1+k'}\frac{d\zeta_1}{\sqrt{(1-\zeta_1^2)(1-k_1'^2\zeta_1^2)}}$$

トナル。

又 (1) ヲ書キ直セバ

$$\frac{i\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{(1+k_1)\dfrac{i\zeta_1}{\sqrt{1-\zeta_1^2}}}{1-k_1\dfrac{\zeta_1^2}{1-\zeta_1^2}} = \frac{i(1+k_1)\zeta_1\sqrt{1-\zeta_1^2}}{1-(1+k_1)\zeta_1^2},$$

之ヨリ

$$\zeta^2 = \frac{(1+k_1)^2\zeta_1^2(1-\zeta_1^2)}{1-2(1+k_1)\zeta_1^2+(1+k_1)^2\zeta_1^4+(1+k_1)^2\zeta_1^2-(1+k_1)^2\zeta_1^4}$$

$$= \frac{(1+k_1)^2\zeta_1^2(1-\zeta_1^2)}{1-k_1'^2\zeta_1^2},$$

即チ

$$\zeta = \frac{(1+k_1)\zeta_1\sqrt{1-\zeta_1^2}}{\sqrt{1-k_1'^2\zeta_1^2}} \qquad (3)$$

トナル。

更ニ便宜上 k', k_1' ノコトヲ夫々 k, k_1 ト書クコトト~~スレバ~~；(之又、ζ, ζ_1 ヲ x, x_1 ニ直セバ) (3), (2) ハ次ノ如クニナル。

$$x = \frac{(1+k_1')x_1\sqrt{1-x_1^2}}{\sqrt{1-k_1^2x_1^2}}, \qquad (4)$$

$$\frac{1+k}{2}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{dx_1}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-k_1^2x_1^2)}}. \qquad (5)$$

k ト k_1 トノ関係ハ之ノ $h=\frac{1-k'}{1+k'}$ ニヨレバ；

$$k_1' = \frac{1-k}{1+k}.$$

即チ

$$k_1^2 = 1-\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 = \frac{4k}{(1+k)^2},$$

$$\left(\frac{k_1}{k}\right)^2 = \frac{4}{k+2k^2+k^3} > 1.$$

故ニ (5) ノ右辺ガ与ヘラレタリトスレバ；之ヨリ (4) ニヨリテ更ニ小ナル modulus ノ左辺ヲ得ルコトトナル。

之ヲ Landenノ transformation トイフ。

実用トシテハ　$x=\sin\phi,\quad x_1=\sin\phi_1$　ト置キテ (4) ヲ書キ直シ

$$\tan(\phi_1-\phi)=k'\tan\phi$$

トシテ用ヰルベシ。

Landenノ transformation ニテハ結果ハ何時マデモ楕円積分ノ形トシテ残ル、コレ一ノ欠点ナリ。且又 k^2 ガ0ト1トノ間ノ実数ナルヲ要スル不便モアリ。次ニハ最モ一般ナル場合ノ計算法ヲ考ヘントス。

$$\int_{z_0}^{z_1}=\int_{\alpha}^{z_1}-\int_{\alpha}^{z_0}=\int_{z_0}^{\alpha}-\int_{z_1}^{\alpha}$$

ナルヲ以テ吾人ハ上下端ノ何レカ一方ハ常ニ α ト定メテヨシ。依ッテ先ヅ

$$u=\int_x^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

ノ計算法ヲ論ズベシ。但シココニ　$|k|<1$　トシ、且　$|x|\leqq\frac{1}{\sqrt{|k|}}$　ナルモノト仮定ス。然ラザル場合モ之ニ帰セシメラルルコトハ後ニ論ズ。

サテ　$\frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}}$　ハ　$|k^2x^2|<1$　ナルトキ、即チ　$|x|<\frac{1}{|k|}$　ナルトキ収斂級数ニ展開セラル。従ッテ　$|x|\leqq\frac{1}{\sqrt{|k|}}<\frac{1}{|k|}$　ナルトキニハ勿論ソノ級数ハ一様ニ収斂ス。

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}}=1+\frac{1}{2}k^2x^2+\frac{1.3}{2.4}k^4x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}k^6x^6+\cdots\cdots.$$

之ヲ上ノ積分ニ代入シ項別積分ヲ行ヘバ

$$u=\int_x^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}k^2\int_x^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1.3}{2.4}k^4\int_x^1\frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^4}}+\cdots\cdots.$$

然ルニ
$$\int_x^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2},$$

$$\int_x^1 \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3}{2.4}\int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4}\left(x^2+\frac{3}{2}\right),$$

$$- - - - - - - -$$

一般ニ
$$\int_x^1 \frac{x^{2\nu}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5.\cdots(2\nu-1)}{2.4.6.\cdots 2\nu}\int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2\nu}\left\{x^{2\nu-2}+\frac{2\nu-1}{2\nu-2}x^{2\nu-4}+\frac{(2\nu-1)(2\nu-3)}{(2\nu-2)(2\nu-4)}x^{2\nu-6}+\cdots\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\frac{(2\nu-1)(2\nu-3)\cdots 5.3}{2\nu(2\nu-2)\cdots 4.2}\right\},$$

又
$$\int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{i}\log\left(x+i\sqrt{1-x^2}\right).$$

コレラヲスベテ代入スレバ
$$u = \frac{1}{i}L_0\log\left(x+i\sqrt{1-x^2}\right)+\sqrt{1-x^2}\left(L_1 x+\frac{2}{3}L_3 x^3+\frac{2.4}{3.5}L_5 x^5+\cdots\right),$$

ココニ
$$L_0 = 1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2k^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2k^6+\cdots\cdots,$$
$$L_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2k^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2k^6+\cdots\cdots,$$
$$L_3 = \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2k^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2k^6+\cdots\cdots,$$
$$L_5 = \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2k^6+\cdots\cdots,$$
$$- - - - - - - - - - - -.$$

$|k|$ガ十分小ナラバ L ハ容易ニ計算セラル。従ッテ u ヲ計算スルコト左程困難ナラズ。

依ッテ次ニハ一般ノ楕円積分(第一種)ヲ常ニ $|k|<1$, $|x|\leqq\frac{1}{\sqrt{|k|}}$ ナル場合ニ直スコトヲ考ヘベシ。

之ニ對スル準備トシテ，第一章ニ論セシコトヲ再ビ精考スルヲ要ス。

任意ノ第一種積分 $\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$ ハ一次置換ニヨリテ $c\int \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}$ ナル形トナル，c ハ常數ニシテ $\varphi(x)$ ハ矢張四次式ナリ。置換ノ係數ヲ調節スレバ $\varphi(x)$ ノ根ハ種々ニ變ズレドモ $f(x)$ ノ四根ト $\varphi(x)$ ノ四根トノ非調和比ハ常ニ相等シ。

今 $f(x)$ ノ四根ヲ $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ トシ，

$$\cancel{\frac{\alpha_3-\alpha_1}{\alpha_3-\alpha_0} : \frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_0} = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_0\ \alpha_3)}$$

$$\frac{\alpha_3-\alpha_0}{\alpha_3-\alpha_2} : \frac{\alpha_1-\alpha_0}{\alpha_1-\alpha_2} = (\alpha_0\ \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$$

ナル記号ヲ用ヰルコトトス。然ルトキハ

$$(0,1,\infty,z) = \frac{z-0}{z-\infty} : \frac{1-0}{1-\infty} = z.$$

今 $\overset{\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_0}{\cancel{\alpha_0\ \alpha_1\ \alpha_2}}$ ヲ夫々 $0, 1, \infty$ ニ變換スル如キ一次置換ヲ求ムレバ;

$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_0\ x) = (0\ 1\ \infty\ z),$$

即チ

$$\begin{cases} z = \dfrac{x-\alpha_1}{x-\alpha_0} ; \dfrac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_0}, \\[2ex] x = \dfrac{(\alpha_2-\alpha_0)\alpha_1 - (\alpha_2-\alpha_1)\alpha_0 . z}{(\alpha_2-\alpha_0) - (\alpha_2-\alpha_1) . z}. \end{cases}$$

之ニヨリテ次ノ関係ヲ得。

$$\int \frac{dx}{\sqrt{c(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c(\alpha_2-\alpha_0)(\alpha_3-\alpha_1)}} \int \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\lambda z)}},$$ (Riemann's normal form)

但シ $$\lambda = \frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_0} : \frac{\alpha_3-\alpha_1}{\alpha_3-\alpha_0} = (\alpha_1\ \alpha_3\ \alpha_0\ \alpha_2).$$

λ	$\frac{1}{\lambda}$	$1-\lambda$	$\frac{1}{1-\lambda}$	$\frac{\lambda}{\lambda-1}$	$\frac{\lambda-1}{\lambda}$
φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5

φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
φ_1	φ_0	φ_3	φ_2	φ_5	φ_4
φ_2	φ_5	φ_0	φ_4	φ_3	φ_4
φ_3	φ_4	φ_1	φ_5	φ_2	φ_0
φ_4	φ_3	φ_5	φ_1	φ_0	φ_2
φ_5	φ_2	φ_4	φ_0	φ_1	φ_3

$\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ ト $0\ 1\ \infty$ トノ對應ヲ種々ニ變ズレバ 24 通ノトリ方アリ，之ニ對スル λノ値ヲ調ブレバ次ノ如シ；

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_0\ x)=(0\ 1\ \infty\ z)\\(\alpha_2\ \alpha_1\ \alpha_3\ x)\\(\alpha_3\ \alpha_0\ \alpha_2\ x)\\(\alpha_0\ \alpha_3\ \alpha_1\ x)\end{array}\right\}\text{ノトキハ}\quad \lambda=(\alpha_1\ \alpha_3\ \alpha_0\ \alpha_2).$$

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha_1\ \alpha_3\ \alpha_0\ x)\\(\alpha_2\ \alpha_0\ \alpha_3\ x)\\(\alpha_3\ \alpha_1\ \alpha_2\ x)\\(\alpha_0\ \alpha_2\ \alpha_1\ x)\end{array}\right\}\frac{1}{\lambda},\qquad \left.\begin{array}{l}(\alpha_1\ \alpha_0\ \alpha_2\ x)\\(\alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_1\ x)\\(\alpha_3\ \alpha_2\ \alpha_0\ x)\\(\alpha_0\ \alpha_1\ \alpha_3\ x)\end{array}\right\}1-\lambda,$$

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha_1\ \alpha_3\ \alpha_2\ x)\\(\alpha_2\ \alpha_0\ \alpha_1\ x)\\(\alpha_3\ \alpha_1\ \alpha_0\ x)\\(\alpha_0\ \alpha_2\ \alpha_3\ x)\end{array}\right\}\frac{1}{1-\lambda},\qquad \left.\begin{array}{l}(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ x)\\(\alpha_2\ \alpha_1\ \alpha_0\ x)\\(\alpha_3\ \alpha_0\ \alpha_1\ x)\\(\alpha_0\ \alpha_3\ \alpha_2\ x)\end{array}\right\}\frac{\lambda}{\lambda-1},\qquad \left.\begin{array}{l}(\alpha_1\ \alpha_0\ \alpha_3\ x)\\(\alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_0\ x)\\(\alpha_3\ \alpha_2\ \alpha_1\ x)\\(\alpha_0\ \alpha_1\ \alpha_2\ x)\end{array}\right\}\frac{\lambda-1}{\lambda}.$$

(注意) 同シ(四ツノ)群ニ屬スルモノハ，(1,2)(3,0) ナル substitution ヲナセルモノ及ビ番号ヲスベテ 2 ダケ増セルモノ，ナリ。

(10)(32)
(20)(13)
(30)(12)

之ニヨリテ吾人ハ x ヨリ z ニ移ル一次置換ヲ適當ニトレバ；新シキ modulus λトシテ上記ノ六ツノ中ノ任意ノ一ツニスルコトヲ得ベシ。

λハ一般ニハ complex ナリ。而シテ六ツノ一次函数

$$\lambda,\quad \frac{1}{\lambda},\quad 1-\lambda,\quad \frac{1}{1-\lambda},\quad \frac{\lambda}{\lambda-1},\quad \frac{\lambda-1}{\lambda}$$

ハ一ツノ群ヲ作ル。

群ヲ作ルガ故ニ，平面ヲ六ツノ部分ニ分チ，上記ノ六ツノ各ノ値ガソレゾレソノ一区分内ニ

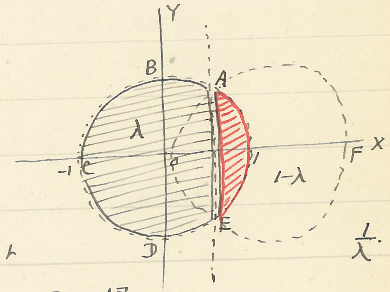
（斯クノ如キ区分線ヲ決定スル一般ナル方法如何。）

駐マル様ニスルコトノ可能性ガ想像セラルベシ　（例ヘバ；ω, $\frac{1}{\omega}$ ノ如シ。）

然ラバ其区分如何？

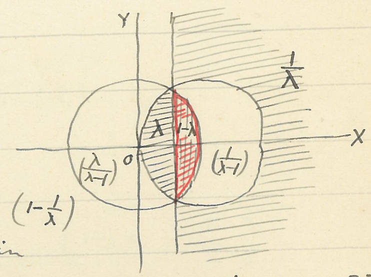
先ヅ λ, $\frac{1}{\lambda}$ ノ二ツニツイテ考フレバ其ハ明カニ単位円ニヨリテ分タルル区分ナリ。

又 λ, $1-\lambda$ ノ二ツニツイテ考フレバ其ハ $x=\frac{1}{2}$ ナル直線ニヨリテ分タルルモノナリ。



故ニ λガ ABCDE 内ニアルトキハ、1-λハ AFB 内ニ、又 $\frac{1}{\lambda}$ハ ABCDEF 外ニアルベシ。然レドモ λ, $\frac{1}{\lambda}$, 1-λ ハ群ヲ作ラズ。故ニカクノ如キ区分ハ未ダ吾人ノ要求スル性質ヲ具備セズ；試ミニ λガ AFE 内ニ入リタリトセヨ、1-λハ如何ニモ ACE 内ニ入レドモ、$\frac{1}{\lambda}$ハ円周ヲ侵シテ ACE 内ニ入ルコトアルベシ。然レドモ λガ単位円ヲ越エザレバ $\frac{1}{\lambda}$ハ単位円内ニ入ルコトナシ。故ニ区分ヲ厳守セシメンニハ更ニ A1E ナル弧ヲ考ヘ入ルベシ。

依ツテ次ニハ 1-λヲ A1E ナル弓形ニ制限ス。從ツテ λハ AOE ニ制限セラレ、$\frac{1}{\lambda}$ハ AFE ノ外ニ限ラルベシ。



然ルトキハ恰度残レル三ツノ面分ハ夫々図ノ如ク $1-\frac{1}{\lambda}=\frac{\lambda-1}{\lambda}$, $\frac{\lambda}{\lambda-1}$, $\frac{1}{\lambda-1}$ ニ對応スベシ。

特ニ A1E ノ弓形ヲ称シテ principal domain ト呼ベシ。然ルトキハ吾人ハ linear transformation ヲ適當ニ選ブコトニヨリテ

$$\int\frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\lambda z)}}$$

ノ modulus λヲシテ常ニ principal domain ニ入ラシムルコトヲ得。

サテ斯クノ如ク λ ヲ取リタリトシ, 次ニ $z=x^2$ ナル置換ヲ行フベシ。

$$\int\frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\lambda z)}}=\int\frac{2x\,dx}{\sqrt{x^2(1-x^2)(1-\lambda x^2)}}=2\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda x^2)}}.$$

z ノ一ツノ價ニ x ノ正負二ツノ値ガ對應ス, 依ッテ吾人ハソノ中ニテ

$$\Re(x\sqrt[4]{\lambda})\geq 0$$

（$\sqrt[4]{\lambda}$ ハ ~~[illegible]~~ (最小正角ヲ偏角トスルコトニ) 先ヅ定ム。）

ナルモノヲ採ルコトトス。

更ニ第五章（巻一, 42頁）ノ所論ヲ回顧スレバ,

$$x=\frac{a+by}{1+cy},\qquad a=\frac{(1+k)(1-h)}{2k(1+h)},\quad b=-\frac{(1-k)(1-h)}{4k},\quad c=\frac{(1-k)(1+h)}{2(1+k)},$$

ナル置換ニヨリテ,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=m\int\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-h^2y^2)}}$$

トナルコトヲ知レリ。而シテココニ

$$4k(1+h)^2=(1+k)^2(1-h)^2\qquad \text{又ハ}\qquad h=\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2$$

今 $\lambda=k^2$ トシテ之ヲ吾人ノ考フル積分ニ適用スレバ

$$k=\sqrt{\lambda},\qquad \sqrt{k}=\sqrt[4]{\lambda},\qquad h=\left(\frac{1-\sqrt[4]{\lambda}}{1+\sqrt[4]{\lambda}}\right)^2.$$

$$a=\frac{(1+k)(1-h)}{2k(1+h)}=\frac{1+k}{2k}\cdot\frac{2\sqrt{k}}{1+k}=\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

$$b=-\frac{(1-k)(1-h)}{4k}=-\frac{1-k}{4k}\,\frac{4\sqrt{k}}{(1+\sqrt{k})^2}.\qquad \left[1-h=\frac{4\sqrt{k}}{(1+\sqrt{k})^2}\right]$$

$$c=\frac{(1-k)(1+h)}{2(1+k)}=\frac{1-k}{2}\,\frac{1}{2\sqrt{k}}\,\frac{4\sqrt{k}}{(1+\sqrt{k})^2}=\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}.$$

~~即チ $a=\frac{1}{\sqrt[4]{\lambda}}$, $b=$~~

故ニ $\quad x=\dfrac{1}{\sqrt{k}}\,\dfrac{1-\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}y}{1+\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}y},\qquad \dfrac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}y=\dfrac{1-\sqrt{k}x}{1+\sqrt{k}x}.$

即チ $\quad \sqrt{h}\,y=\dfrac{1-\sqrt{k}x}{1+\sqrt{k}x}.$

ココニ於テ $\quad k=\sqrt{\lambda} \quad \cancel{h=\sqrt{k}}$ トスレバ;

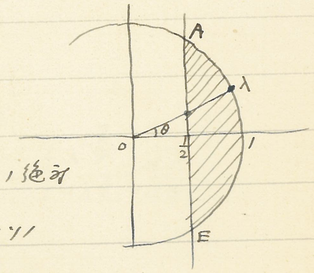
$$\sqrt{h}\,y=\frac{1-\sqrt[4]{\lambda}\,x}{1+\sqrt[4]{\lambda}\,x}.$$

此置換ニヨリテ今考フル積分ハ（常数因数ヲ度外視スレバ）

$$\int\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-h^2y^2)}}$$ トナル。

之ニツイテ $|h|<1$, $\quad |\sqrt{h}\,y|\leqq 1$ ナルコトガ證明セラレレバヨイ。

先ヅ h ニツイテ考フルニ $\quad \sqrt{h}=\dfrac{1-\sqrt[4]{\lambda}}{1+\sqrt[4]{\lambda}}$



ニテ，λハ principal domain 内ニアリ。然ルニ函數論ニヨリ，正則函數ハ或ル面分ノ周圍ニ於テ最大値ノ絶對値ヲトル筈ナルニヨリ，$|h|$ ハ弧 AE 又ハ弦 AE 上ニ於テソノ最大値（面分内ノ値ニ比シテ）ヲトルベキナリ。今弧上ノ点ニツイテ考フレバ; $\quad \lambda=\cos\theta+i\sin\theta.\quad \sqrt[4]{\lambda}=\cos\frac{\theta}{4}+i\sin\frac{\theta}{4}.$

$$\sqrt{h}=\frac{1-\cos\frac{\theta}{4}-i\sin\frac{\theta}{4}}{1+\cos\frac{\theta}{4}+i\sin\frac{\theta}{4}}.$$

故ニ $\quad |h|=\dfrac{\sqrt{(1-\cos\frac{\theta}{4})^2+\sin^2\frac{\theta}{4}}}{\sqrt{(1+\cos\frac{\theta}{4})^2+\sin^2\frac{\theta}{4}}}=\dfrac{\sqrt{2-2\cos\frac{\theta}{4}}}{\sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{4}}}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\frac{\theta}{4}}{1+\cos\frac{\theta}{4}}}=\left|\tan\frac{\theta}{8}\right|.$

ココニ $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$. 故ニ $\tan\frac{\theta}{8}$ ノ最大値ハ $\tan\frac{\pi}{24}=\tan 7^\circ 30'=0.13165\cdots$

次ニハ $x=\frac{1}{2}$ ナル直線上ニツイテ考フベシ。 $\lambda=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\tan\theta$.

θ ノ符号ヲ変ズレバ λ ハ conjugate トナル、従ツテ h モ亦 conjugate トナル。故ニ絶對値ダケヲ考フルナラバ $\theta>0$ トシテヨシ。若シココニ $|h|$ ガ θ ト伴ヒテ増大スルコトヲ知レバ $\theta=\frac{\pi}{3}$ ナルトキ $|h|$ ガ最大ナルコトヲ知ルベシ。

抑一般ニ或ル複素数 z ノ絶対値ナルモノハ次ノ如ク考ヘラル：

$$\log z=\log|z|+(\text{imag. part}),$$

故ニ $\qquad \Re(\log z)=\log|z|.\qquad$ 故ニ $\qquad |z|=e^{\Re(\log z)}.$

此理ニヨレバ

$$|h|=e^{\Re(\log h)}.$$

故ニ $|h|$ ガ θ ト共ニ増スコトヲイフニハ $\qquad \frac{d}{d\theta}\Re(\log h)>0,$

即チ $\qquad \Re\left(\frac{d}{d\theta}\log h\right)>0$ ナルコトヲ示セバヨシ。

$$\log h=\log(1-\lambda^{\frac{1}{4}})-\log(1+\lambda^{\frac{1}{4}}).$$

故ニ

$$\frac{d}{d\theta}\log h=\left(\frac{-\frac{1}{4}\lambda^{-\frac{3}{4}}}{1-\lambda^{\frac{1}{4}}}-\frac{\frac{1}{4}\lambda^{-\frac{3}{4}}}{1+\lambda^{\frac{1}{4}}}\right)\frac{d\lambda}{d\theta}=\frac{-\frac{1}{2}\lambda^{-\frac{3}{4}}}{1-\lambda^{\frac{1}{2}}}\frac{d\lambda}{d\theta}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\lambda^{-\frac{1}{4}}+\lambda^{-\frac{3}{4}}}{1-\lambda}\frac{d\lambda}{d\theta}.$$

而シテ

$$\frac{d\lambda}{d\theta}=\cancel{\sin\theta+i\cos\theta}\ \frac{i}{2}\sec^2\theta=\frac{i}{2}(1+\tan^2\theta)$$

$$=\frac{i}{2}\left\{1+\left(\frac{2\lambda-1}{i}\right)^2\right\}=\frac{i}{2}(4\lambda-4\lambda^2)=2i\lambda(1-\lambda).$$

故ニ

$$\frac{d}{d\theta}\log h=\frac{-1}{2}\frac{\lambda^{-\frac{1}{4}}+\lambda^{-\frac{3}{4}}}{1-\lambda}2i\lambda(1-\lambda)=-i\lambda\left(\lambda^{-\frac{1}{4}}+\lambda^{-\frac{3}{4}}\right)$$

$$=-i\left(\lambda^{\frac{3}{4}}+\lambda^{\frac{1}{4}}\right).$$

今 $\lambda=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\tan\theta=\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{2\cos\theta}$, 故ニ

$$\lambda^{\frac{1}{4}}=\frac{\cos\frac{\theta}{4}+i\sin\frac{\theta}{4}}{\sqrt[4]{2\cos\theta}},\qquad \lambda^{\frac{3}{4}}=\frac{\cos\frac{3\theta}{4}+i\sin\frac{3\theta}{4}}{\sqrt[4]{(2\cos\theta)^3}}.$$

$$\mathcal{R}\left(\frac{d}{d\theta}\log h\right) = \frac{\sin\frac{\theta}{4}}{\sqrt[4]{2\cos\theta}} + \frac{\sin\frac{3\theta}{4}}{\sqrt[4]{(2\cos\theta)^3}} \begin{cases} \geqq 0, & 0 \leq \theta \leqq \frac{\pi}{3}. \\ = \cancel{\dfrac{\sin\frac{\theta}{4}\sqrt{2\cos\theta} + \sin\frac{3\theta}{4}}{\sqrt[4]{(2\cos\theta)^3}} < 0.} \end{cases}$$

~~何トナレバ~~ $\cancel{\sin\frac{\theta}{4}\sqrt{2\cos\theta} < 3\sin\frac{\theta}{4} - 4\sin^3\frac{\theta}{4},}$

$$\cancel{\sqrt{2\cos\theta} < 3 - 4\sin^2\frac{\theta}{4} = 1 + 2\cos\frac{\theta}{2},}$$

$$\cancel{2\cos\theta < 1 + 4\cos\frac{\theta}{2} + 4\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\cancel{4\cos^2\frac{\theta}{2} - 2 < 1 + 4\cos\frac{\theta}{2} + 4\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

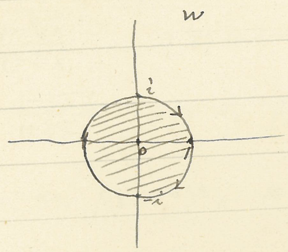
$$\cancel{-3 < 4\cos\frac{\theta}{2}.}$$

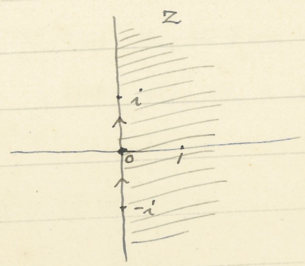
故ニ矢張リ $\theta = \frac{\pi}{3}$ ノトキニ max.ナリ。

故ニ結局 $\underline{|h| < 0.132 < 1.}$

次ニ $|\sqrt{h}y| \leqq 1$ ヲ證明セントス。

一般ニ $w = \frac{1-z}{1+z}$ ナル linear transformation ヲ行ヘバ; z ノ右半面ハ w ノ単位円内ニ対応ス。





z	w
0	1
1	0
∞	-1
i	$-i$
-1	∞
$-i$	i

然ルニ今吾人ハ $\mathcal{R}(x\sqrt[4]{\lambda}) \geqq 0$ ト仮定セリ。従ッテ $|\sqrt{h}y| = \left|\frac{1-\sqrt[4]{\lambda}x}{1+\sqrt[4]{\lambda}x}\right| \leqq 1.$

之ニヨリテ問題ハ完全ニ解決セラレタリ。

実算ニ要スル手続ヲ纏メテ述ブレバ次ノ如シ。

$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$ ガ与ヘラレタルトキ，先ヅ $f(x)=0$ ノ四根ヲ求メ，之ヲ $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ トス。

適当ナル三根ヲ適当ナル順序ニトリ，　$z=(\alpha_i\,\alpha_j\,\alpha_k\,x)$

ナル一次置換ヲ行ヒ，

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\lambda z)}},$$

ココニ λ ガ principal domain 内ニ在ル様ニス。

次ニ　$z=x^2$ ト置キ，　$\mathcal{R}(x\sqrt[4]{\lambda})\geq 0$ ナル如キ x ヲトル。

$$\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda x^2)}}=\cancel{\int_{\alpha_2}^{1}-\int_{\beta_2}^{1}}$$

更ニ　$h=\frac{1-\sqrt[4]{\lambda}}{1+\sqrt[4]{\lambda}}$，　$\sqrt{h}\,y=\frac{1-\sqrt[4]{\lambda}\,x}{1+\sqrt[4]{\lambda}\,x}$　ト置ケバ

$$\int_{\alpha_3}^{\beta_3}\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-h^2y^2)}}=\int_{\alpha_3}^{1}-\int_{\beta_3}^{1}.$$

(i)　$f(x)=0$ ヲ解クコト。

(ii)　ソノ四根ノ中ヨリ principal domain 内ニアル如キ $(\underset{p}{\alpha_i}\,\underset{q}{\alpha_j}\,\underset{r}{\alpha_k}\,\underset{s}{\alpha_l})=\lambda$ ヲ 及ビ $\sqrt[4]{\lambda}$ ~~求ムルコト~~ 作ルコト。

(iii)　之ニ相当スル α_1, β_1 ヲ計算スルコト。

(iv)　$\sqrt{\alpha_1}$，$\sqrt{\beta_1}$ ヲ $\mathcal{R}(x\sqrt[4]{\lambda})\geq 0$ ナル様ニ求ムルコト。（コレ即チ α_2, β_2）.

$z=(\alpha_p\,\alpha_s\,\alpha_q\,x)$

~~(iii)~~ (v)　$h=\frac{1-\sqrt[4]{\lambda}}{1+\sqrt[4]{\lambda}}$　ヲ計算スルコト。

(vi)　$\sqrt{h}\,y=\frac{1-\sqrt[4]{\lambda}\,x}{1+\sqrt[4]{\lambda}\,x}$ ニヨリテ α_3, β_3 ヲ計算スルコト

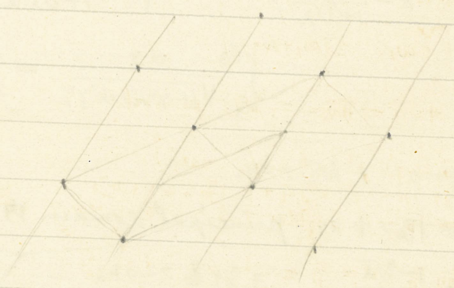
(vii)　h 及ビ α_3, β_3 ニヨリテ，10 頁ノ公式ヲ使用スルコト。

格子 (ω_1, ω_3) トソノ大格子 (Ω_1, Ω_3) トノ関係ヲ精査セントス.

$$\begin{cases} \Omega_1 = a\omega_1 + b\omega_3 \\ \Omega_3 = c\omega_1 + d\omega_3 \end{cases} \qquad ad - bc = n \geqq 1.$$

$n>0$ トスル理由ハ $\Im\left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right) > 0$ $\Im\left(\frac{\Omega_3}{\Omega_1}\right) > 0$ ヨリ出ヅ.

サテ $n=1$ ナラバ (ω) ト (Ω) トハ equivalent ナリ. 両者ノ平行四辺形ハ等積ナリ. 一般ニ Ω ノ平行四辺形ハ ω ノソレノ n倍ノ area ヲ有ス. 与ヘラレタル n ナル一ツノ大格子ヲ作ルハ容易ナリ. ソハ一辺ヲ n倍スレバヨシ. スベテノ大格子ハ皆コノ方法ニテ得ラル.



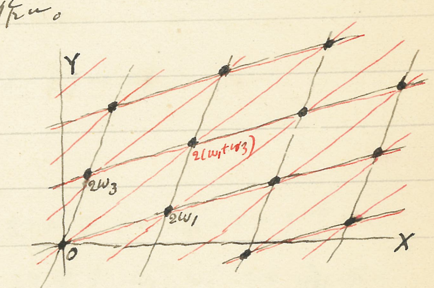
第七章　変換ノ理論

前章ニ第一種積分ノ計算法ヲ述ベタルハ変換ノ一応用ヲ示ス意味ヲモ含メルモノナリ。サレバ吾人ハ之ニツイデ直チニ第二種第三種ノ積分ノ計算法ニ移ルコトナク，ムシロ翻ッテ更ニ変換ノ理論ヲ内面的ニ考察セント欲ス。

今楕円函数ノ一対ノ primitive* period ヲ $(2\omega_1, 2\omega_3)$ トスレバ，ソノスベテノ periods ハ

$$2h_1\omega_1 + 2h_3\omega_3 \qquad (h_1, h_3 = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$$

ニヨリテ与ヘラル。コレハ Gauss 面上ニテ一組ノ Gitter ヲ作ル。



然レドモ此同ジ Gitter ヲ生ズルモトノ primitive periods ハ必シモ $(2\omega_1, 2\omega_3)$ ニハ限ラズ，例ヘバ

$$(2\omega_1,\ 2(\omega_1+\omega_3))$$

トシテモ可ナリ。然レドモ $(2(\omega_1+\omega_3),\ 2(\omega_1-\omega_3))$ ニテハ不可ナリ。サレバ一般ニ二組ノ periods

$$(2\omega_1, 2\omega_3), \qquad (2\omega_1', 2\omega_3')$$

ヲモトトシテ Gitter ヲ作ルトキ，如何ナル場合ニソレガ ~~ガ如何ナル~~ 同一ノ Gitter ヲ与フルモノナルカヲ研究スル必要アリ。

今後者ガ前者ノ中ニ含マルルタメニハ

$$\begin{cases} \omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_3 \\ \omega_3' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_3 \end{cases}$$

ナル $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (整数) ガ存在セザル可カラズ。之ヨリ

$$\begin{cases} D\omega_1 = \delta\omega_1' - \beta\omega_3' \\ D\omega_3 = -\gamma\omega_1' + \alpha\omega_3' \end{cases} \qquad D = \alpha\delta - \beta\gamma$$

ヲ得。$D \neq 0$ ナリ，何トナレバ若シ $D=0$ ナラバ ω_1', ω_3' ガ原点ヨリ同一ノ方向ニアルコトトナレバナリ。

サテ又逆ニ ω_1, ω_3 ガ ω_1', ω_3' ノ中ニ含マルルタメニハ ω ガ ω' ニ整係数ヲ付シタル一次式トシテ表サルルヲ要スルニヨリ，上式ヨリ見テ $\delta, \beta, \gamma, \alpha$ ガスベテ

* スベテノ periods ガ $2h_1\omega_1 + 2h_3\omega_3$ ノ形ニテ表サルルトキ，$(2\omega_1, 2\omega_3)$ ヲ primitive periods トイフ。