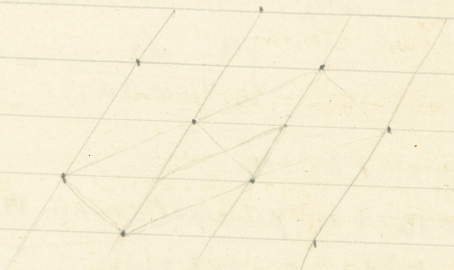
格子(ω_1, ω_3)ヨリ大格子(Ω_1, Ω_3)トノ関係ヲ精査セントス。

$$\begin{cases} \Omega_1 = a\omega_1 + b\omega_3 \\ \Omega_3 = c\omega_1 + d\omega_3 \end{cases} \qquad ad - bc = n \geqq 1.$$

$n>0$トスル理由ハ $\Im\left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)>0$ $\Im\left(\frac{\Omega_3}{\Omega_1}\right)>0$ ヨリ出ヅ。

サテ$n=1$ナラバ(ω)ト(Ω)トハequivalentナリ。両者ノ平行四辺形ハ等積ナリ。
一般ニΩノ平行四辺形ハωノソレノn倍ノareaヲ有ス。
与ヘラレタルnナル一ツノ大格子ヲ作ルハ容易ナリ。ソハ一辺ヲn倍スレバヨシ。
スベテノ大格子ハ皆コノ方法ニテ得ラル。



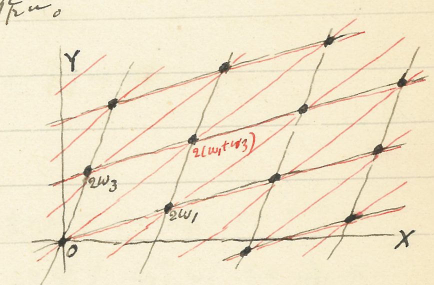
第七章　変換ノ理論

前章ニ第一種積分ノ計算法ヲ述ベタルハ変換ノ一応用ヲ示ス意味ヲモ含メルモノナリ。サレバ吾人ハ之ニツヅイテ直チニ第二種第三種ノ積分ノ計算法ニ移ルコトナク、ムシロ翻ッテ更ニ変換ノ理論ヲ内面的ニ考察セント欲ス。

今楕円函数ノ一対ノ primitive* period ヲ$(2\omega_1, 2\omega_3)$トスレバ、ソノスベテノperiodsハ

$$2h_1\omega_1 + 2h_3\omega_3 \qquad (k_1, k_3 = 0, \pm1, \pm2, \dots\dots)$$

ニヨリテ与ヘラル。コレハGauss面上ニテ一組ノGitterヲ作ル。



然レドモ此同ジGitterヲ生ズルモトノ primitive periodsハ必シモ$(2\omega_1, 2\omega_3)$ニハ限ラズ、例ヘバ

$$\left(2\omega_1,\ 2(\omega_1+\omega_3)\right)$$

トシテモ可ナリ。然レドモ$(2(\omega_1+\omega_3), 2(\omega_1-\omega_3))$トシテハ不可ナリ。サレバ一般ニ二組ノperiods

$$(2\omega_1, 2\omega_3), \qquad (2\omega_1', 2\omega_3')$$

ヲモトトシテGitterヲ作ルトキ、如何ナル場合ニソレガ ~~ガ如何ナルトキ~~ 同一ノGitterヲ与フルモノナルカヲ研究スル必要アリ。

今後者ガ前者ノ中ニ含マルルタメニハ

$$\begin{cases} \omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_3 \\ \omega_3' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_3 \end{cases}$$

ナル$\alpha, \beta, \gamma, \delta$（整数）ガ存在セザル可カラズ。之ヨリ

$$\begin{cases} D\omega_1 = \delta\omega_1' - \beta\omega_3' \\ D\omega_3 = -\gamma\omega_1' + \alpha\omega_3' \end{cases} \qquad D = \alpha\delta - \beta\gamma$$

ヲ得。$D \neq 0$ナリ、何トナレバ若シ$D=0$ナラバω_1', ω_3'ガ原点ヨリ同一ノ方向ニアルコトトナレバナリ。

サテ又逆ニω_1, ω_3ガω_1', ω_3'ノ中ニ含マルルタメニハωガω'ニ整係数ヲ付シタル一次式トシテ表サルルヲ要スルニヨリ、上式ヨリ見テ$\delta, \beta, \gamma, \alpha$ガスベテ

* スベテノperiodsガ$2h_1\omega_1+2h_3\omega_3$ノ形ニテ表サルルトキ、$(2\omega_1, 2\omega_3)$ヲprimitive periodsトイフ。

Dニテ整除セラレザル可カラズ。従ッテ

$$\alpha\delta-\beta\gamma=D\equiv 0 \pmod{D^2}.$$

而シテ $D\neq 0$ ナルヲ以テ，　$1\equiv 0 \pmod{D}$.

故ニ $D=\pm 1$ ナリ。

逆ニ $D=\pm 1$ ナラバ ω, ω' ハ相互ニ他ヲ含ムニヨリ，Gitter ハ全ク一致ス。故ニ

定理。二組ノ primitive periods $(2\omega_1, 2\omega_3)$, $(2\omega_1', 2\omega_3')$ ガ同一ノ Gitter ヲ生ズル為メニ必要ニシテ且十分ナル条件ハ

$$\begin{cases} \omega_1'=\alpha\omega_1+\beta\omega_3 \\ \omega_3'=\gamma\omega_1+\delta\omega_3 \end{cases} \qquad \alpha\delta-\beta\gamma=\pm 1$$

ナル如キ整数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ガ存在スルコトナリ。

此場合ニ $(2\omega_1, 2\omega_3)$ ト $(2\omega_1', 2\omega_3')$ トハ equivalent ナリトイフ。

サテ通常 ω_1, ω_3 ノ添字ノ付ケ方ハ $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ ノ虚部ガ正ナル様ニスルヲ常トス。即チ $\frac{\omega_3}{\omega_1}=x+iy$ トスレバ $y>0$ ナリ。コノ約束ヲ ω_1', ω_3' ニモ適用スレバ

$$\frac{\omega_3'}{\omega_1'}=\frac{\gamma+\delta(x+iy)}{\alpha+\beta(x+iy)}=\frac{(\alpha+\beta x)(\gamma+\delta x)+\beta\delta y^2+iDy}{(\alpha+\beta x)^2+\beta^2y^2}.$$

依ッテ $D>0$ ナラザル可カラズ。故ニ此約束ノ下ニテハ上記ノ定理ノ条件ハ

$$\alpha\delta-\beta\gamma=1$$

トスベキナリ。

サテ解析幾何学ニヨレバ，直交軸ニ関シテ原点 $(0,0)$ 及ビ二点 (a,b), (c,d) ヲ頂点トスル三角形ノ面積ハ $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ニヨリテ与ヘラル。((a,b) ノ方ガ (c,d) ヨリモ小ナル偏角ヲ有スルトシテ)。

今 $2\omega_1=a+bi$,　$2\omega_3=c+di$ トスレバ；$(2\omega_1, 2\omega_3)$ ノ periodenparallelogram ノ面積ハ

$$S=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

又 $(2\omega_1', 2\omega_3')$ ノハ

$$S'=\begin{vmatrix} \alpha a+\beta c & \alpha b+\beta d \\ \gamma a+\delta c & \gamma b+\delta d \end{vmatrix}.$$

依ッテ

$$S'=\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=DS=S.$$

故ニ前ノ定理ヲ幾何学的ニイヘバ次ノ如クニナル。

定理。~~二組ノGitterハ~~ 与ヘラレタル Gitter ノ中ノ四点ヲ頂点トスル一ツノ平行四辺形ヲトリ，之ヲ基トシテ作リタル Gitter ガ最初ノモノト全ク一致スルタメニ必要ニシテ且十分ナル條件ハ，ソノ平行四辺形ノ面積ガモトノ Gitter ノ一ツノ平行四辺形ト等積ナルコトナリ。

$D=1$ ナル條件ノ下ニ ω ヲ ω' ニ直スコトヲ称シテ linear (unimodular) transformation トイフ。之ヲ考フルトキニハ或ハ ω_1, ω_3 ノ代リニ

$$\frac{\omega_3}{\omega_1}=\tau$$

トオキ，

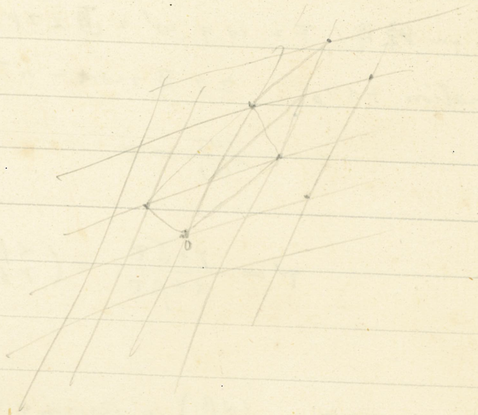
$$\tau'=\frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau}=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\tau$$

トモ書ク。

Modulsubstitution $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ ハ group ヲ作ルコト，又スベテノ modulsubstitution ハ $S=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ニヨリテ組立テラルルコト，等ハ一切略ス。

次ニハ Gitterteilung ニツキテ考フベシ。

今一般ニ二組ノ periods $(2\omega_1, 2\omega_3)$, $(2\Omega_1, 2\Omega_3)$ ノ間ニ



$$\begin{cases} \Omega_1 = a\omega_1 + b\omega_3 \\ \Omega_3 = c\omega_1 + d\omega_3 \end{cases} \qquad ad-bc = n \geq 1$$

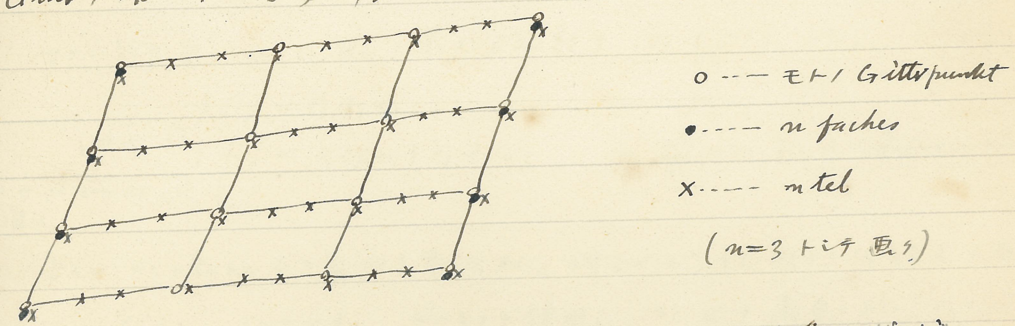
ナル関係アリトス。但シ a, b, c, d ハ整数ナリトス。然ルトキハ

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{d}{n}\Omega_1 - \frac{b}{n}\Omega_3 \\ \omega_3 = -\frac{c}{n}\Omega_1 + \frac{a}{n}\Omega_3 \end{cases}$$

ω ノ Gitter ヲ G_2, Ω ノ Gitter ヲ G_1 トスレバ; G_1 ヲ G_2 ノ n faches Übergitter, G_2 ヲ G_1 ノ n tel Untergitter トイフ。

Übergitter ノ点ハ モトノ Gitter ノ点ノ中ニ含マル。而シテ n faches Übergitter ノ一ツノ平行四辺形ハ モトノ平行四辺形ノ n 倍ノ面積ヲ有ス。

一ツノ Gitter ガ与ヘラレルトキ, ソノ n faches Über— 又ハ n tel Unter— ナル Gitter ヲ作ルコトハ容易ナリ。次ノ図ヲ見テ知ルベシ。



(n=3 トシテ画ク)

定理。 スベテノ Über 及ビ Unter Gitter ハ上記ノ方法 (各辺ヲ代リ代リ倍加又ハ等分スル方法) ヲ組合シテ作ルコトヲ得ルモノナリ。

(證明)
$$\begin{cases} \Omega_1 = a\omega_1 + b\omega_3 \\ \Omega_3 = c\omega_1 + d\omega_3 \end{cases} \qquad ad-bc = n$$

ニ於テ, b ト d トノ最大公約数ヲ σ トシ,

$$\begin{cases}\bar{\omega}_1 = \omega_1 \\ \bar{\omega}_3 = -k\omega_1 + \omega_3\end{cases}$$

$\bar{\omega}_1 = \omega_1$
$\bar{\omega}_3 = -k\omega_1 + \omega_3$

$$b = b_1\sigma, \qquad d = d_1\sigma$$

ト置キ，Diophantine equation

$$a_1 d_1 - b_1 c_1 = 1$$

ヨリシテ一組ノ a_1, c_1 ヲ定ム。然ルトキハ Ω_1, Ω_3 ト equivalent ナル次ノ periods ヲ得。

$$\begin{cases}\Omega_1' = d_1\Omega_1 - b_1\Omega_3 \\ \Omega_3' = -c_1\Omega_1 + a_1\Omega_3\end{cases}$$

而シテ之ト元ノ ω トノ関係ハ

$$\begin{cases}\Omega_1' = d_1(a\omega_1 + b\omega_3) - b_1(c\omega_1 + d\omega_3) = (ad_1 - b_1 c)\omega_1, \\ \Omega_3' = -c_1(a\omega_1 + b\omega_3) + a_1(c\omega_1 + d\omega_3) = (-ac_1 + a_1 c)\omega_1 + (-bc_1 + a_1 d)\omega_3.\end{cases}$$

之ヲ略記シテ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\Omega_1' = a_2\omega_1 \\ \Omega_3' = c_2\omega_1 + \overset{\sigma}{d_2}\omega_3\end{cases}$$

トス。　ココニ於テ更ニ a_2, c_2, d_2 ノ最大公約数ヲ $\sigma_1\ (\geqq 1)$ トシ，

$$\begin{cases}\Omega_1' = \sigma_1 a_3\omega_1 & = \sigma_1 a_3\omega_1 \\ \Omega_3' = \sigma_1 c_3\omega_1 + \sigma_1 d_3\omega_3 & = \sigma_1(c_3 + kd_3)\omega_1 + \sigma_1 d_3(-k\omega_1 + \omega_3)\end{cases}$$

ト書キ直ス。

ココニ吾人ハ a_3 ト c_3 トハ互ニ素ナリト考ヘテヨシ。何トナレバ，モシ仮リニ公約数ヲ有ストセバ，c_3 ノ代リニ c_3+kd_3 ナルモノヲ使用シ，コノ k ヲ適当ニトレバ c_3+kd_3 ヲシテ a_3 ト互ニ素ナラシムルコトヲ得，且 $\overset{(c_3=)}{c_3+kd_3}$ ヲ代用スルハツマリ ω_1, ω_3 ト equivalent ナルモノヲ代用スルニ過ギザレバナリ。

（ c_3+kd_3 ヲ a_3 ト互ニ素ナラシメ得ル證ハ次ノ如シ。先ヅ c_3 ト d_3 トノ最大公約数ヲ σ_2 トシ，　$c_3 = \sigma_2 c_4$，　$d_3 = \sigma_2 d_4$　ト置ケバ，σ_2 ト a_3 トハ互ニ素ナリ，何トナレバ a_3，c_3 ~~ヲ~~ d_3 ノ三者ニハ共通因数ナケレバナリ。

a_3

ココニ於テ $\quad c_3+kd_3=\sigma_2(c_4+kd_4)\quad$ ニ於テ,

~~a_3 ガ c_4 ニ含マレザルトキハ,~~ ~~ト共通因数ヲ有スル~~ a_3 ノ素因数ニシテ c_4 ニ含マレザル ~~最大~~ ノモノヲ スベテ K トシ,

(モシ a_3 ト c_4 トガ全部ノ素因数ヲ共有スルトキハ) ~~a_3 ガ c_4 ニ含マレルトキハ,~~ $K=1$ トスベシ。

然ルトキハ c_3+Kd_3 ト a_3 トハ タシカニ互ニ素ナリ。)

注意。Dirichlet ノ定理ニヨレバ; c_4+kd_4, $(k=1,2,\cdots)$ ナル級数ノ中ニハ無数ニ多クノ素数アリ。之ニヨレバ上ノ證明ハ遥カニ簡約セラル。

サテ a_3, c_3 ヲ互ニ素ナリトスレバ;

$$a_3d_4-c_3b_4=1$$

ナル d_4, b_4 アリ。ココニ於テ更ニ Ω' ト equivalent ナル

$$\begin{cases}\Omega_1''=c_3\Omega_1'-a_3\Omega_3'\\ \Omega_3''=d_4\Omega_1'-b_4\Omega_3'\end{cases}$$

ヲ考フレバ;

$$\begin{cases}\Omega_1''=c_3\sigma_1a_3w_1-a_3(\sigma_1c_3w_1+\sigma_1d_3w_3)=-a_3d_3\sigma_1w_3\\ \Omega_3''=d_4\sigma_1a_3w_1-b_4(\sigma_1c_3w_1+\sigma_1d_3w_3)=\sigma_1w_1-\sigma_1b_4d_3w_3\end{cases}$$

更ニ w_1, w_3 ノ代リニソレト equivalent ナル

$$\begin{cases}w_1'=\quad -w_3\\ w_3'=w_1-b_4d_3w_3\end{cases}$$

ヲ用ヰレバ;

$$\begin{cases}\Omega_1''=a_3d_3\sigma_1\cdot w_1'\\ \Omega_3''=\quad \sigma_1\cdot w_3'\end{cases}$$

コレ即チ w_1, w_3 ノ Gitter ト Ω_1, Ω_3 ノ Gitter トガ, parallelogram ノ net ヲ適當ニ張レバ, 上記ノ定理ニイフ如キ関係ヲ有スルコトヲ示スモノナリ。

ココニ $\quad a_3d_3\sigma_1^2=n\quad$ ナルベキコトハ容易ニ推定セラル。又実際

$$\Omega_1' = na\omega_1 + nb\omega_3 = na(\omega_1 + x\omega_3) + (b-ax)n\omega_3$$
$$\Omega_3' = c\omega_1 + d\omega_3 = c(\omega_1 + x\omega_3) + (d-cx)\omega_3$$
$$= c(\omega_1 + x\omega_3) + yn\omega_3$$

$$(\Omega_1', \Omega_3') = \begin{pmatrix} na & b-ax \\ c & y \end{pmatrix}(\omega_1 + x\omega_3,\ n\omega_3)$$

与ヘラレタル (ω) ニ対スル一ツノ n 倍大格子ハ $\overset{\Omega_1\quad\Omega_3}{(n\omega_1,\ \omega_3)}$ ニヨリテ与ヘラル。

ソノ他ノ一ツヲ
$$\begin{cases} \Omega_1' = n(a\omega_1 + b\omega_3) \\ \Omega_3' = c\omega_1 + d\omega_3 \end{cases}$$
トス。 Ω ト Ω' トガ equivalent ナルカ否カヲ見ル.

$$\cancel{na\omega_1 + nb\omega_3 = An\omega_1 + B\omega_3}$$
$$\cancel{c\omega_1 + d\omega_3 = Cn\omega_1 + D\omega_3} \qquad \cancel{AD-BC=1.}$$

$$\begin{cases} \Omega_1' = a\Omega_1 + nb\Omega_3 \\ \Omega_3' = \frac{c}{n}\Omega_1 + d\Omega_3 \end{cases} \qquad ad - \frac{c}{n}nb = 1.$$

$\therefore$ $c \equiv 0 \pmod{n}$ ナラバ実際 equivalent ナリ.

$c \not\equiv 0 \pmod{n}$ ナラバ (今 n ヲ prime ト考フ)

$xc + yn = d$ ナル x, y アリ.

$$\begin{cases} \Omega_1' = na\left(\frac{1}{n}\Omega_1 + x\Omega_3\right) + (b-ax)n\Omega_3 \\ \Omega_3' = c\left(\frac{1}{n}\Omega_1 + x\Omega_3\right) + yn\Omega_3 \end{cases}$$

トスレバ $na.y - c(b-ax) = ad - bc = 1.$

$\therefore$ Ω' ト $\left(\frac{1}{n}\Omega_1 + x\Omega_3,\ n\Omega_3\right)$ トハ equivalent ナリ.

x ノトル値ハ $0, 1, 2, \dots n-1$ ノ n 通リアリナラン. 故ニ互ニ in-equivalent ナル

大格子ハ $(n\omega_1, \omega_3)$ ト $(\omega_1 + x\omega_3,\ n\omega_3)$ ノ $(n+1)$ 通リナリ.

$(\omega_1 + x\omega_3, n\omega_3)$ ト $(\omega_1 + x'\omega_3\ \ n\omega_3)$ トガ in-equivalent ナルハ次ノ如ク

$$\begin{cases} \omega_1 + x'\omega_3 = \alpha(\omega_1 + x\omega_3) + \beta n\omega_3 \\ n\omega_3 = \gamma(\omega_1 + x\omega_3) + \delta n\omega_3 \end{cases} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

$$\therefore \quad \begin{matrix} 1 = \alpha & x' = \alpha x + \beta n \\ \gamma = 0 & n = \gamma x + \delta n \end{matrix} \quad \Bigg| \quad \therefore\ \delta = 1.\quad x' = x + \beta n.$$

ニ計算スレバ

$$(a_3\sigma_1)(d_3\sigma_1) = a_2 d_2 = (ad_1 - b_1c)(-bc_1 + a_1d)$$
$$= (ad_1\sigma - b_1\sigma c)\frac{1}{\sigma}(-b_1\sigma c_1 + a_1d_1\sigma)$$
$$= (ad - bc)(a_1d_1 - b_1c_1) = n.$$

サテ一般ニ mn-teilung ヲナスニハ, 先ヅ m-teilung ヲナシ次ニ n-teilung ヲナセバヨシ。故ニ吾人ハ n ヲ素数ト限リテ n-teilung ヲ論ズレバ足レリ。

上ノ理論ニヨリ, スベテノ n-teilung ハ

$$\begin{cases} \Omega_1 = n\omega_1 \\ \Omega_3 = \omega_3 \end{cases} \tag{1}$$

ナル形ニ表スコトヲ得。然レドモ一組ノ与ヘラレタル Gitterspunkt ニ対シテ Ω_1, Ω_3 ノトリ方ハ無数ニ多クアリ, 従ツテソレノ $n$tel Untergitter (ω_1, ω_3 ニヨリテ定メラルル) モ亦無数ニ多キカトイフ疑問アリ。吾人ハ先ヅコレヲ闡明セント欲ス。

Ω_1, Ω_3 ト equivalent ナル一組ノ periods ヲ

$$\begin{cases} \Omega_1' = \alpha\Omega_1 + \beta\Omega_3 \\ \Omega_3' = \gamma\Omega_1 + \delta\Omega_3 \end{cases} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \tag{2}$$

トシ, ソレヨリ作リタル n-teilung ノ periods ヲ ω_1', ω_3' トス, 即チ

$$\begin{cases} \Omega_1' = n\omega_1' \\ \Omega_3' = \omega_3' \end{cases} \tag{3}$$

(1), (2), (3) ヨリ ω_1, ω_3 ト ω_1', ω_3' トノ関係ヲ求ムレバ;

$$\begin{cases} n\omega_1' = \alpha n\omega_1 + \beta\omega_3 \\ \omega_3' = \gamma n\omega_1 + \delta\omega_3 \end{cases}$$

即チ

$$\begin{cases} \omega_1' = \alpha\omega_1 + \frac{\beta}{n}\omega_3 \\ \omega_3' = n\gamma\omega_1 + \delta\omega_3 \end{cases} \tag{4}$$

n 倍ノトキハ
$$\begin{cases} n(a\omega_1+b\omega_3) = A(\omega_1+x\omega_3)+B\,n\omega_3 \\ c\omega_1+d\omega_3 = C(\qquad)+D\,n\omega_3. \end{cases}$$

∴ n分ノ一ノトキ，両辺ニ n 倍シテ
$$\begin{cases} a\omega_1+b\omega_3 = \cdots\cdots \\ n(c\omega_1+d\omega_3) = \cdots\cdots \end{cases}$$

之ヲ
$$\begin{cases} n(c\omega_1+d\omega_3) = \text{——} \\ a\omega_1+b\omega_3 = \text{——} \end{cases}$$
トシテ ω_1, ω_3 ヲ交換スレバ

$$\begin{cases} n(d\omega_3+c\omega_1) = \bar{A}(\omega_3+x\omega_1)+\bar{B}\,n\omega_1 \\ b\omega_3+a\omega_1 = \bar{C}(\qquad)+\bar{D}\,n\omega_1 \end{cases} \qquad \bar{A}\bar{D}-\bar{B}\bar{C}=1$$

$$\therefore \begin{cases} b\omega_3+a\omega_1 = \bar{C}(\qquad)-\bar{D}(-n\omega_1) \\ n(d\omega_3+c\omega_1) = \bar{A}(\qquad)-\bar{B}(-n\omega_1). \end{cases}$$

$$\text{od.}\begin{cases} \Omega_1 = \frac{\omega_1}{n}, & \Omega_3=\omega_3 \\ \Omega_1 = \omega_1, & \Omega_3 = \frac{x\omega_1+\omega_3}{n} \end{cases}$$

$$\text{od.}\begin{cases} \cancel{\frac{\Omega_1}{n}} & \Omega_3 \\ \cancel{\frac{\alpha_1\Omega_1+\Omega_3}{n}}, & \cancel{-\Omega_1} \end{cases}$$

$1 \quad 0$

$\frac{x}{n} \quad \frac{1}{n}$

故ニ ω_1, ω_3 ト ω_1', ω_3' トハ一般ニ equivalent ナラズ; equivalent ナルタメニハ
$$\beta\equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\ n)$$
ナルコトガ必要ニシテ且十分ナリ。

然ラバ $\beta\not\equiv 0$ ナルトキハ如何。

此場合ニハ β, n ハ互ニ素ナルガ故ニ
$$\alpha_1\beta+kn=\alpha$$
ナル如キ整数 α_1 及ビ k アリ。之ヲ用キレバ (4) ハ次ノ如クナル，
$$\begin{cases} \omega_1' = (\alpha_1\beta+kn)\,\omega_1+\frac{\beta}{n}\omega_3 = \beta\left(\alpha_1\omega_1+\frac{\omega_3}{n}\right)-k(-n\omega_1) \\ \omega_3' = n\gamma\omega_1+\delta\omega_3 \qquad\quad = n\delta\left(\alpha_1\omega_1+\frac{\omega_3}{n}\right)+(\alpha_1\delta-\gamma)(-n\omega_1) \end{cases}$$

ココニ
$$\begin{vmatrix} \beta & -k \\ n\delta & \alpha_1\delta-\gamma \end{vmatrix} = (\alpha_1\beta+kn)\delta-\beta\gamma = \alpha\delta-\beta\gamma=1.$$

故ニ ω_1', ω_3' ト $\alpha_1\omega_1+\frac{\omega_3}{n}$, $-n\omega_1$ トハ equivalent ナリ。

而シテココニ α_1 ハ $0, 1, 2, \cdots, n-1$ ノ n 個ノ異ナル値ヲトルニスギズ。故ニ

与ヘラレタル一組ノ Ω_1, Ω_3 ヨリ n-teilung ニヨリテ生ズル ω_1, ω_3 ハ多クトモ次ノ $(n+1)$ 種ニスギズ；即チ
$$\omega_1=\frac{\Omega_1}{n}, \quad \omega_3=\Omega_3 \qquad \frac{x\Omega_1+\Omega_3}{n},\ -\Omega_1$$
及ビ
$$\alpha_1\omega_1+\frac{\omega_3}{n}, \quad -n\omega_1 \qquad (\alpha_1=0,1,2,\cdots,n-1).$$

コレラノ $(n+1)$ 種ガ実際ニ相異ルコトハ次ノ如クシテ證明セラル。

今若シ α_1 ノ代リニ例ヘバ α_2 ヲ用キタルトキ
$$\begin{cases} \alpha_2\omega_1+\frac{\omega_3}{n} = A\left(\alpha_1\omega_1+\frac{\omega_3}{n}\right)+B(-n\omega_1) \\ -n\omega_1 = \Gamma\left(\alpha_1\omega_1+\frac{\omega_3}{n}\right)+\Delta(-n\omega_1) \end{cases} \qquad A\Delta-B\Gamma=1$$
ナル関係アリトスレバ；

$\frac{x}{n} \quad \frac{1}{n}$

$-1 \quad 0$

$$\omega_1' = \frac{a\omega_1 + b\omega_3}{n} = a\frac{\omega_1}{n} + \frac{b}{n}\omega_3 \qquad ad - \frac{b}{n}nc = 1,$$

$$\omega_3' \qquad = nc\frac{\omega_1}{n} + d\omega_3$$

If $\quad b \equiv 0 \ (n) \qquad bx + ny = a$

$$\omega_1' = b\frac{x\omega_1 + \omega_3}{n} - \frac{bx}{n}\omega_1 \ \cancel{- \omega_3} + \frac{a\omega_1}{n}$$

$$= b\frac{x\omega_1 + \omega_3}{n} - \frac{bx - a}{n}\omega_1$$

$$+ y_1\omega_1$$

$$\omega_3' = dn\left(\frac{x\omega_1 + \omega_3}{n}\right) \quad -dx\omega_1 + c\omega_1 + \cancel{d\omega_3}$$

$$b(c - dx) - dny$$

$$\frac{x\omega_1 + \omega_3}{n} \quad -ny$$

両辺ニ於テ ω_1, ω_3 ノ係数ヲ比較シテ

$$\alpha_2 = A\alpha_1 - Bn, \qquad \frac{1}{n} = \frac{A}{n},$$

$$-n = \Gamma\alpha_1 - \Delta n, \qquad 0 = \frac{\Gamma}{n}.$$

之ヨリ $\quad A = 1, \quad B = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{n}, \quad \Gamma = 0, \quad \Delta = 1 \quad$ ヲ得。

ココニ B ハ整数ナラズ。 故ニ α_1 ノトキト α_2 ノトキトハ equivalent ナラズ。

モトノ Ω_1, Ω_3 ヲ用ヰテ上ノ $(n+1)$ 種ノ ω_1, ω_3 ヲ表セバ

$$\frac{\Omega_1}{n}, \quad \Omega_3, \tag{5}$$

及ビ $\quad \frac{\alpha_1}{n}\Omega_1 + \frac{1}{n}\Omega_3, \quad -\Omega_1.$

ココニ於テ $\quad \frac{\Omega_3}{\Omega_1} = \tau, \quad \frac{\omega_3}{\omega_1} = \tau' \quad$ トスレバ

$$\tau' = n\tau$$

及ビ $\quad \tau' = \frac{-1}{\frac{\alpha_1}{n} + \frac{1}{n}\tau} = -\frac{n}{\alpha_1 + \tau}.$

$\tau' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ヲ施シテ, 通常次ノ如クナル。

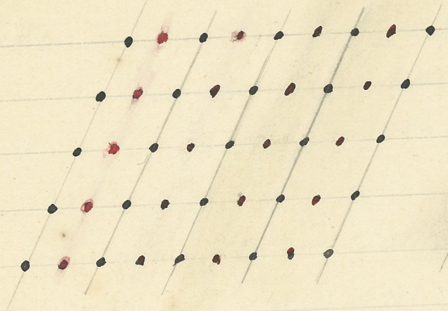
$$\tau_1 = n\tau, \quad \tau_2 = \frac{\tau}{n}, \quad \tau_3 = \frac{1+\tau}{n}, \quad \cdots, \quad \tau_{n+1} = \frac{n-1+\tau}{n}.$$

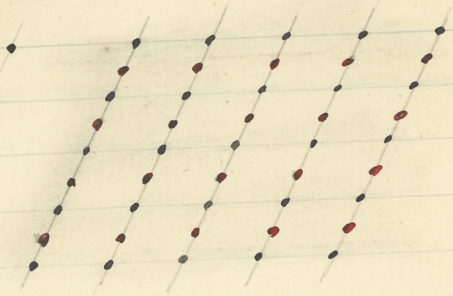
以上 n-teilung ト考ヘタレドモ, τ ニスレバ上ハ Ω, ω 自身ノ大サハ関係セザルガ故ニ, τ ノ式ハ n-multiplikation ニテモ通用ス。

---

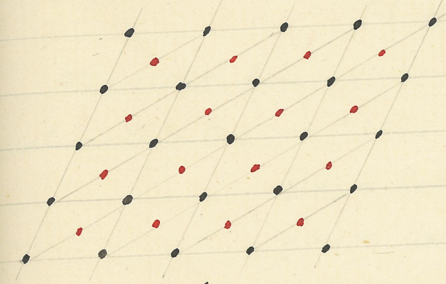
(5) ヲ用ヰテ, $n = 2, 3$ ナル場合ノ図ヲ画クコト次ノ如シ。

$n=2$



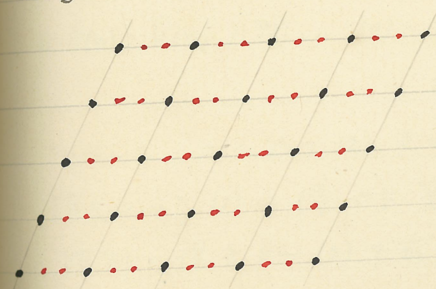


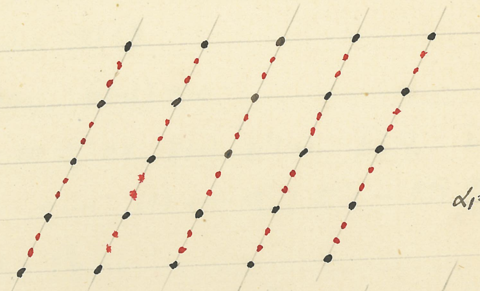
$\alpha_1=0$



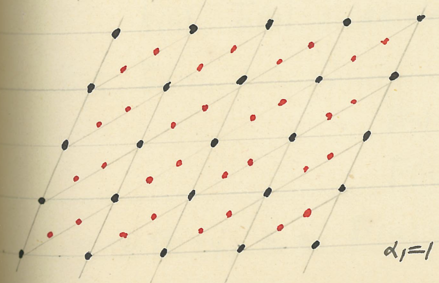
$\alpha_1=1$

$n=3$

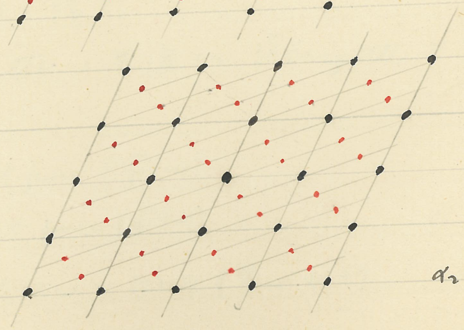




$\alpha_1=0$



$\alpha_1=1$



$\alpha_2=2$

二ツノ Gitter $G_1(2\omega_1, 2\omega_3)$ 及ビ $G_2(2\bar{\omega}_1, 2\bar{\omega}_3)$ ガ共通ナル Übergitter ヲ有スルトキハ, G_1, G_2 ハ commensurable ナリトイフ。特ニソノ Übergitter ガ G_1 ノ m-fach, G_2 ノ n-fach ナルトキハ, G_1 ト G_2 トハ $n:m$ ノ比ニ commensurable ナリトイフ。

互ニ commensurable ナル Gitterpunkt ヲ periods トスル二ツノ ellipt. functions ノ間ニハ常ニ代数的関係アリ。

$$F(\varphi(u), \bar{\varphi}(u)) = 0. \tag{1}$$

一般ニ ellipt. func. $\varphi(u)$ ハソレト同ジ periods ヲ有スル $\wp(u)$, $\wp'(u)$ ニテ rationally ニ表サルルモノナリ。即チ

$$\varphi(u) = \text{Rat. func.}(\wp(u), \wp'(u))$$
$$\bar{\varphi}(u) = \text{Rat. func.}(\bar{\wp}(u), \bar{\wp}'(u))$$
$$\wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3$$
$$\bar{\wp}'(u)^2 = 4\bar{\wp}(u)^3 - \bar{g}_2\bar{\wp}(u) - \bar{g}_3$$

又 $\wp(u)$, $\bar{\wp}(u)$ ノ間ニハ (1) ニ相当スベキ関係

$$F_1(\wp(u), \bar{\wp}(u)) = 0 \tag{2}$$

アルベシ。ココニ於テ (2) 及ビ上ノ四式ヨリ $\wp(u)$, $\wp'(u)$, $\bar{\wp}(u)$, $\bar{\wp}'(u)$ ヲ消去スレバ, (1) ヲ得ベキ筈ナリ。サレバ (1) ナル式ヲ求ムル問題ハソノ特別ノ場合タル (2) ヲ求ムルコトニ帰ス。

$\wp(u)$, $\bar{\wp}(u)$ ノ periodengitter ノ共通ナル Übergitter ニ属スル $\wp$ 函数ヲ $\bar{\bar{\wp}}(u)$ トスレバ,

$$\wp(u) = \text{Rat. func.}(\bar{\bar{\wp}}(u)) \tag{3}$$
$$\bar{\wp}(u) = \text{Rat. func.}(\bar{\bar{\wp}}(u))$$

ナル関係アリ, 之ヨリ $\bar{\bar{\wp}}(u)$ ヲ消去スレバ (2) ヲ得ベキナリ。サレバ又問

* (4) ト (4') トノ Rat. func. ハ同一ニハアラズ。何トナレバ (4) ノ係数中ニハ ω ニ関係スルモノヲモ含ム可ケレバナリ。(u ヲ置換スルナラバ何トシテモ同ジ Rat. func. ニテ差支ナシ)

題ハ (3) ニ簡約セラル。而シテ特ニソノ übergitter ヲ n (素数) 倍ノモノト考フレバ結局吾人ノ問題ハ,

$$\bar\omega_1 = n\omega_1, \qquad \bar\omega_3 = \omega_3$$

ナルトキ, $(2\omega_1, 2\omega_3)$ ヲ periods トスル $\wp(u)$ ト, $(2\bar\omega_1, 2\bar\omega_3)$ ヲ period トスル $\bar\wp(u)$ トノ間ニ存在スベキ関係

$$\wp(u) = \text{Rat. func.}\,(\bar\wp(u)) \qquad (4)$$

ヲ考フルコト, トナル。

此場合ニ $\wp(u)$ ハ $\bar\wp(u)$ ヨリ n^{ter} Ordnung ノ Transformation ニヨリテ生ズト称ス。

$\wp, \bar\wp$ ハ periods ニ linear transformation ヲ施スモ invariant ナリ, 故ニ (4) ニ於テ $\bar\wp(u)$ ノ代リニ $(2\alpha\bar\omega_1+2\beta\bar\omega_3,\ 2\gamma\bar\omega_1+2\delta\bar\omega_3)$ ヲ periods トスル $\bar\wp(u)$ ヲ用ヰ, 之ニ対シテソノ第一ノ period ヲ n 等分シタルモノヲ ω_1, 第二ノ period ヲ ω_3 トシタル function ヲ $\wp(u)$ トスレバ, 矢張

$$\wp(u) = \text{Rat. func.}^{*}\,(\bar\wp(u)) \qquad (4')$$

ナル関係アルベシ。(4) ト (4') トノ右辺ノ $\bar\wp$ ハ同一ナレドモ, 左辺ノ $\wp$ ハ同一ニハアラズ。同一ノ $\bar\wp$ ニ対シテ $n+1$ 個ノ相異ル $\wp$ アリ。

故ニ,

同一ノ $\bar\wp(u)$ ~~ニ対シテ~~ ヨリ ~~■■~~ n^{ter} Ordnung ノ変換 ~~ヲ行ヘバ~~ ニヨリテ, $n+1$ 個ノ相異ル $\wp(u)$ ヲ得。

然ラバ同一ノ $\wp(u)$ ヲ与フル $\bar\wp(u)$ ハ幾ツアルカ。吾人ハ次ノ定理ヲ證明セントス。

(4) ノ右辺ハ $\bar\wp(u)$ ニ関シテ n 次式ナリ。*

何トナレバ; (4) ニ於テ u ノ代リニ

* (4) ノ右辺ハ必シモ有理整式ニアラズ; ココニ次数トイフハ分母分子ノ中ノ高キ方ノ次数ヲイフナリ。

$$u+2h_1\omega_1+2h_3\omega_3 = u+2h_1\frac{\overline{\omega}_1}{n}+2h_3\overline{\omega}_3$$

ヲ入ルルトキハ，左辺ハ不変ナレドモ，右辺ハ必シモ然ラズ。h_1 ガ n ニテ割リ切ルルトキヲ除クノ他ハ $\overline{\wp}(u)$ ガ

$$\overline{\wp}\left(u+\frac{2k\overline{\omega}_1}{n}\right), \qquad k=1,2,\cdots,n-1$$

ニ変ズベシ。サレバ(4)ヲ $\overline{\wp}$ ニ関スル方程式ト見レバ，ソノ根トシテ少クモ $\overline{\wp}(u)$, $\overline{\wp}\left(u+\frac{2k\overline{\omega}_1}{n}\right)$ ノ n 個ヲ有スベキナリ。故ニ(4)ノ右辺ノ次数ハ n ヨリ小ナラズ。

又一方ニ於テ n 個ノ $\overline{\wp}\left(u+\frac{2k\overline{\omega}_1}{n}\right)$, $k=0,1,2,\cdots,n-1$ ノ symmetric functions ヲ考フルニ，ソレラハ u ヲ $u+2h_1\omega_1+2h_3\omega_3$ ニテ代フルモ不変ニシテ，又 u ヲ $-u$ ニテ代フルモ不変ナリ。故ニ其ハ $\wp(u)$ ノ rational function ナリ。依ッテソレラノ n 個ノ $\overline{\wp}$ ヲ根トスル方程式ヲ作レバ，ソノ係数ハ $\wp$ ノ rational func. ニシテ，即チ

$$\varphi(\overset{n}{\overline{\wp}}, \wp)=0$$

ナル形ヲ有スベキナリ。而シテ φ ハ irreducible ナリ。何トナレバ u ニ適当ナル $u+2h_1\omega_1+2h_3\omega_3$ ヲ入ルルコトニヨリテ $\wp$ ヲ変ヘズシテ $\overline{\wp}$ ヲソノスベテノ n 個ノ値ニ変ジ得レバナリ。サレバ今若シ(4)ノ右辺ガ n 次ヨリ高ケレバ

$$\wp - \text{Rat. func}(\overline{\wp}) \qquad (5)$$

ノ中ヨリ $\varphi(\overline{\wp},\wp)$ ナル因数ガ生ゼザル可カラズ。然レドモ(5)ハ $\wp$ ニツイテ一次式ナルヲ以テ，(5)自身ガ $\varphi(\overline{\wp},\wp)$ ナラザレバコノコトハ不可能ナリ。

故ニ(4)ノ右辺ノ次数ハ丁度 n ナラザル可カラズ。

注意。n ガ素数ナラザルモ此定理ハ真ナリ。何トナレバ n ヲ素因数ニ分解シテ $n=p_1p_2\cdots$ トスレバ $p_1, p_2, \cdots$ ノ各ニツイテハ R. ハ夫夫 $p_1, p_2, \cdots$ 次ニシテ，コレラヲ順次ニ重ヌレバ丁度 $(p_1p_2\cdots)$ 次トナレバナリ。

実際ニ $\wp$ ヲ $\overline{\wp}$ ニテ表ス有理式ノ形ヲ求ムルコトハ後ニ譲リ，ココニ吾人ハ以上ノ

理論ト第五章ノ所論トノ関係ヲ考ヘントス。

$\wp(u)=z$, $\bar{\wp}(u)=\bar{z}$ ト置キ, (4)ノ関係ヲ $z=R(\bar{z})$ トス。

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2=4z^3-g_2z-g_3, \qquad \left(\frac{d\bar{z}}{du}\right)^2=4\bar{z}^3-\bar{g}_2\bar{z}-\bar{g}_3.$$

ヨリ次ノ微分方程式ヲ得。

$$\frac{dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}=\frac{d\bar{z}}{\sqrt{4\bar{z}^3-\bar{g}_2\bar{z}-\bar{g}_3}}. \qquad (6)$$

(6)ノ解ハ即チ $z=R(\bar{z})$ ナリ。而シテ又ココニ $u=0$ ナルトキ; $z=\infty$, $\bar{z}=\infty$ ナルコトニ注目スレバ, 次ノ定理ヲ得。

(6)ヲ満足シ, 且 $z=\infty$ ナルトキ $\bar{z}=\infty$ ナル条件ヲ満足スル解ハ, (6)ノ右辺ノ定ムル Gitter ガ左辺ノ定ムル Gitter ノ n faches Übergitter ナルトキハ, $z=R(\bar{z})$ ナル ($\bar{z}$ ニ関シテ) n 次ノ有理式ナリ。

更ニマタ逆ニ

(6)ノ右辺ノ Gitter ガ左辺ノ Gitter ノ n faches Übergitter ナルトキニ限リ, (6)ヲ満足シ且 $z=\infty$ ナルトキ $\bar{z}=\infty$ ナル如キ解ハ $z=R(\bar{z})$ ナル形ヲ有ス。

何トナレバ; (6)ノ各辺ヲ u ト置ケバ トニカク ($z=\infty$ ナルトキ $\bar{z}=\infty$ トスレバ)

$$z=\wp(u), \qquad \bar{z}=\bar{\wp}(u)$$

ト置クコトヲ得。而シテ若シ z ガ $\bar{z}$ ノ有理函数ナラバ; $\bar{\wp}$ ノ periods ハ $\wp$ ノ period ト同一ナルカ又ハソノ multiple ナリ。依ッテ本定理ヲ得。

故ニ, 以上ヲ綜合スレバ; (6) ナル式ニ於テ g_2, g_3, $\bar{g}_2$, $\bar{g}_3$ ノ関係ガ丁度右辺ノ Gitter ガ左辺ノ Gitter ノ n 倍ナル如キ関係ニアルトキニ限リ, $z=R(\bar{z})$ ナル置換ヲ以テ, 左辺ヨリ右辺ヲ誘導シ得ベシ。

公式

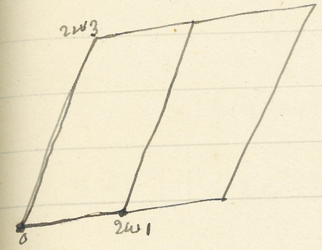
$$f(u) = C + \sum \left\{ A_1 \zeta(u-a) + A_2 \wp(u-a) - \frac{A_3}{2!} \wp'(u-a) + \frac{A_4}{3!} \wp''(u-a) - \cdots \right\}.$$

$n=2$ ナル場合ニツイテ $z = R(\bar{z})$ ヲ実際ニ作ルコトヲ例示スベシ。

$$z = \wp(u \mid 2\omega_1, 2\omega_3), \qquad \bar{z} = \bar{\wp}(u \mid 2\omega_1', 2\omega_3), \qquad \omega_1' = 2\omega_1.$$

$\wp(\omega_i) = e_i$ ト置クコトハ通常ノ通リ, 又之ニ倣ヒテ

$$\bar{\wp}(\bar{\omega}_i) = \bar{\wp}(2\omega_i) = \bar{e}_i$$ ト置クベシ。



今 $\wp(u)$ ヲ $4\omega_1, 2\omega_3$ ナル periods ヲ有スル elliptic func. ト考フレバ, ソノ parallelogram 中ニハ二ツノ 2nd order ノ poles アリ。

故ニ

$$\wp(u) = \bar{\wp}(u) + \bar{\wp}(u-2\omega_1) + C.$$

$u=0$ ノ近所ニテ展開スレバ

$$\frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20}u^2 + \cdots = \frac{1}{u^2} + \frac{\bar{g}_2}{20}u^2 + \cdots + \bar{\wp}(2\omega_1) + \frac{1}{2}\bar{\wp}''(2\omega_1)u^2 + \cdots + C.$$

故ニ $C = -\bar{\wp}(2\omega_1) = -\bar{e}_1.$

依ッテ
$$\wp(u) = \bar{\wp}(u) + \bar{\wp}(u-2\omega_1) - \bar{e}_1. \tag{7}$$

次ニ $\bar{\wp}(u-2\omega_1)$ ヲ書キ直スタメニ, $\wp$ ノ加法定理

$$\wp(u+v) = \frac{2\{\wp(u)\wp(v) - \frac{1}{4}g_2\}\{\wp(u)+\wp(v)\} - g_3 - \wp'(u)\wp'(v)}{2\{\wp(u)-\wp(v)\}^2}$$

ニ於テ $v = -\omega_1$ ト置キテ見ルベシ。

$$\wp(u-\omega_1) = \frac{2\{e_1\wp(u) - \frac{1}{4}g_2\}\{\wp(u)+e_1\} - g_3}{2\{\wp(u)-e_1\}^2}$$

$$= \frac{2e_1\wp(u)^2 + 2(e_1^2 - \frac{1}{4}g_2)\wp(u) - \frac{1}{2}g_2 e_1 - g_3}{2\{\wp(u)-e_1\}^2}.$$

然ルニ
$$e_1^2 - \frac{1}{4}g_2 = e_1^2 + e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 = e_2e_3,$$
$$-\frac{1}{2}g_2e_1 - g_3 = 2e_1(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1) - 4e_1e_2e_3$$
$$= 2e_1(e_1e_2 + e_3e_1 - e_2e_3) = -2e_1(e_1^2 + e_2e_3).$$

$$g_2 = 60 \sum{}' \frac{1}{w^4}$$

$$g_3 = 140 \sum{}' \frac{1}{w^6}$$

故ニ
$$\wp(u-\omega_1) = \frac{2e_1\wp(u)^2 + 2e_2e_3\wp(u) - 2e_1(e_1^2+e_2e_3)}{2\{\wp(u)-e_1\}^2}$$
$$= \frac{2e_1\{\wp(u)^2 - e_1^2\} + 2e_2e_3\{\wp(u)-e_1\}}{2\{\wp(u)-e_1\}^2}$$
$$= \frac{\cancel{2}e_1\{\wp(u)+e_1\} + \cancel{2}e_2e_3}{\wp(u)-e_1}$$

従ッテ
$$\wp(u-\omega_1) - e_1 = \frac{2e_1^2+e_2e_3}{\wp(u)-e_1}.$$

然ルニ
$$2e_1^2+e_2e_3 = e_1^2 - e_1(e_2+e_3) + e_2e_3 = (e_1-e_2)(e_1-e_3).$$

故ニ
$$\wp(u-\omega_1) - e_1 = \frac{(e_2-e_1)(e_3-e_1)}{\wp(u)-e_1}.$$

ココニ於テ $\omega_1 = 2\omega_1$ ヲ $\wp = \bar{\wp}$ ヲ代フレバ，(1) ヲ次ノ如クニ書キ直サバ，
$$\wp(u) = \bar{\wp}(u) + \frac{(\bar{e}_2-\bar{e}_1)(\bar{e}_3-\bar{e}_1)}{\bar{\wp}(u)-\bar{e}_1}$$
$$= \frac{\bar{\wp}(u)^2 - \bar{e}_1\bar{\wp}(u) + (\bar{e}_2-\bar{e}_1)(\bar{e}_3-\bar{e}_1)}{\bar{\wp}(u)-\bar{e}_1}. \qquad (2)$$

コレ即チ $z = R(\bar{z})$ ナリ。此ノ他ニ二ツ同様ノ関係アル筈ナルガ，ソレハ Gitter ノ結ビ方ヲ変ヘテ二分スルコトニ当ルヲ以テ，ツマリ $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ ノ順ヲカヘルコトニ当ル。

(1) ニ於テ $u = \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3$ ト置ケバ
$$e_1 = 2\bar{\wp}(\omega_1) - \bar{e}_1,$$
$$e_2 = \bar{\wp}(\omega_2) + \bar{\wp}(\omega_2 - 2\omega_1) - \bar{e}_1$$
$$= \bar{\wp}(-\omega_1-\omega_3) + \bar{\wp}(-3\omega_1-\omega_3) - \bar{e}_1$$
$$= 2\bar{\wp}(\omega_1-\omega_3) - \bar{e}_1,$$

$$e_3 = \bar{\wp}(\omega_3) + \bar{\wp}(\omega_3 - 2\omega_1) - \bar{e}_1$$
$$= \bar{e}_3 + \bar{e}_2 - \bar{e}_1. = -2\bar{e}_1.$$

コレニヨリテ e_1, e_2, e_3 ト $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ トノ関係ガ分ル。然レドモ

$\bar{\wp}(\omega_1)$, $\bar{\wp}(\omega_1 - \omega_3)$ 等ガ有リテ不便ナリ，之ヲ除クニハ次ノ如クス。

e_1, e_2, e_3 トハツマリ $\wp'(u)=0$ ナルトキノ $\wp(u)$ ノ値ナリ。従ッテ次ノ如ク考フ。

(2) ヨリ微分ニヨリ

$$\wp'(u) = \bar{\wp}'(u) - \frac{(\bar{e}_2 - \bar{e}_1)(\bar{e}_3 - \bar{e}_1)}{\{\bar{\wp}(u) - \bar{e}_1\}^2}\bar{\wp}'(u)$$

$$= \bar{\wp}'(u)\left\{1 - \frac{(\bar{e}_2 - \bar{e}_1)(\bar{e}_3 - \bar{e}_1)}{(\bar{\wp}(u) - \bar{e}_1)^2}\right\}. \qquad (3)$$

故ニ $\wp'(u) = 0$ ト置ケバ；

$\bar{\wp}'(u) = 0$ 又ハ $(\bar{\wp}(u) - \bar{e}_1)^2 = (\bar{e}_2 - \bar{e}_1)(\bar{e}_3 - \bar{e}_1)$ ヲ得。

前者ヨリ $u = \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3$ ヲ得。然レドモ $u = \bar{\omega}_1$ ノトキニハ (3)

ノ右辺ノ括弧内ノ式ガ 2nd order ノ ∞ トナルニヨリ，結局 $\wp'(u) = 0$ トハ

ナラズ。次ニ $u = \bar{\omega}_2 = -2\omega_1 - \omega_3 \equiv 2\omega_1 + \omega_3$ トスルト

$u = \bar{\omega}_3 = \omega_3$ トスルトハ

同一ノ $\wp(u)$ ヲ与フ。即チ

$$\wp(\omega_3) = e_3 = \bar{e}_3 + \bar{e}_2 - \bar{e}_1 = -2\bar{e}_1 \quad \text{コレナリ。}$$

次ニ後者ヨリ

$$\bar{\wp}(u) = \bar{e}_1 \pm \sqrt{(\bar{e}_2 - \bar{e}_1)(\bar{e}_3 - \bar{e}_1)}$$

ヲ得。之ヲ (2) ニ入レレバ

$$\wp(u) = \bar{e}_1 \pm 2\sqrt{(\bar{e}_2 - \bar{e}_1)(\bar{e}_3 - \bar{e}_1)}$$

ヲ得。コレ即チ e_1, e_2 ナルベキモノナリ。何レガ e_1，何レガ e_2 ナルカハ periods ノトリ方ニ関係スルモノナレバ一般ニハ決セラレズ。

又ハ

$$z-e_3=\frac{(\bar z-\bar e_2)(\bar z-\bar e_3)}{\bar z-\bar e_1} \qquad (4')$$

トモ書ケル。

蓋シ(4)ノ両辺ヨリ $-e_3=2\bar e_1$ ヲ引ケバ

$$z-e_3=\bar z+2\bar e_1+\frac{16(\bar e_2-\bar e_1)(\bar e_3-\bar e_1)}{16\bar z-16\bar e_1}$$

$$=\frac{\bar z^2+\bar e_1\bar z-2\bar e_1^2+(\bar e_2-\bar e_1)(\bar e_3-\bar e_1)}{\bar z-\bar e_1}$$

$$=\frac{(\bar z-\bar e_2)(\bar z-\bar e_3)}{\bar z-\bar e_1}.$$

併シ何レニシテモ トニカク

$$\bar e_1=-\frac{e_3}{2},$$

$$(\bar e_2-\bar e_1)(\bar e_3-\bar e_1)=-(e_1-\bar e_1)(e_2-\bar e_1)\frac{1}{4}$$

$$=-\frac{\left(e_1+\frac{e_3}{2}\right)\left(e_2+\frac{e_3}{2}\right)}{4}$$

$$=-\frac{1}{4}\,\frac{e_1-e_2}{2}\,\frac{e_2-e_1}{2}$$

$$=\left(\frac{e_1-e_2}{4}\right)^2.$$

之ヲ(2)ニ入ルレバ

$$\wp(u)=\bar\wp(u)+\frac{\left(\frac{e_1-e_2}{4}\right)^2}{\bar\wp(u)+\frac{e_3}{2}}=\bar\wp(u)+\frac{(e_1-e_2)^2}{16\bar\wp(u)+8e_3},$$

即チ

$$z=\bar z+\frac{(e_1-e_2)^2}{16\bar z+8e_3}. \qquad (4)$$

コノ transformation ニヨリテ

$$\int_\infty^z\frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}=\int_\infty^{\bar z}\frac{d\bar z}{\sqrt{4(\bar z-\bar e_1)(\bar z-\bar e_2)(\bar z-\bar e_3)}}$$

トナルベシ。

(4)ハ既ニヨク知レル Landen's transformation ニ他ナラズ。次ニ之ヲ示サン。

今

$$\int_\infty^z\frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}$$

ニ於テ

$$\frac{z-e_3}{e_1-e_3}=\frac{1}{\sin^2\varphi},\qquad \frac{dz}{e_1-e_3}=\frac{-2\cos\varphi\,d\varphi}{\sin^3\varphi},$$

$$\frac{z-e_1}{e_1-e_3}=\cot^2\varphi,\qquad \frac{z-e_2}{e_1-e_3}=\frac{1-k^2\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi},$$

$$k=\sqrt{\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}}$$

* 之ヲ證スルニハ

$$\sqrt{\frac{e_1-e_3}{\bar{e}_1-\bar{e}_3}} = 1+\sqrt{\frac{\bar{e}_1-\bar{e}_2}{\bar{e}_1-\bar{e}_3}}$$

ヲ證スレバヨシ。

即チ

$$e_1-e_3 = \left(\sqrt{\bar{e}_1-\bar{e}_3}+\sqrt{\bar{e}_1-\bar{e}_2}\right)^2$$

$$= 3\bar{e}_1 + \frac{e_1-e_2}{2}$$

$$= -\frac{3e_3}{2} + \frac{e_1-e_2}{2} = e_1-e_3.$$

ト置クトキハ,

$$\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

トナル。同様ニシテ

$$\frac{\bar{z}-\bar{e}_3}{\bar{e}_1-\bar{e}_3} = \frac{1}{\sin^2\psi}, \qquad \bar{k} = \sqrt{\frac{\bar{e}_2-\bar{e}_3}{\bar{e}_1-\bar{e}_3}}$$

ト置ケバ,

$$\int_{\infty}^{\bar{z}}\frac{d\bar{z}}{\sqrt{4(\bar{z}-\bar{e}_1)(\bar{z}-\bar{e}_2)(\bar{z}-\bar{e}_3)}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{e}_1-\bar{e}_3}}\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\bar{k}^2\sin^2\psi}}$$

トナル。

サテ(4)ヲφトψトノ関係ニ書キ直セバ

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} = \frac{\bar{e}_1-\bar{e}_3}{e_1-e_3}\,\frac{1-\bar{k}^2\sin^2\psi}{\sin^2\psi\cos^2\psi} \tag{5}$$

ヲ得。是即チ

$$\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{e}_1-\bar{e}_3}}\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\bar{k}^2\sin^2\psi}}$$

ナル transformation ヲナサシムル関係ナリ。

(5)ヲカキ直セバ,

$$\sin\varphi = (1+\bar{k}_1)\frac{\sin\psi\cos\psi}{\sqrt{1-\bar{k}^2\sin^2\psi}}, \quad {}^{*}\ \bar{k}_1 = \sqrt{1-\bar{k}^2} = \sqrt{\frac{\bar{e}_1-\bar{e}_2}{\bar{e}_1-\bar{e}_3}}$$

従ッテ

$$\cos^2\varphi = \frac{1-\bar{k}^2\sin^2\psi-(1+\bar{k}_1)^2\sin^2\psi\cos^2\psi}{1-\bar{k}^2\sin^2\psi},$$

之ノ分子ハ

$$1-\bar{k}^2\sin^2\psi-(1+\bar{k}_1)^2\sin^2\psi+(1+\bar{k}_1)^2\sin^4\psi$$

$$=1-\{\bar{k}^2+(1+\bar{k}_1)^2\}\sin^2\psi+(1+\bar{k}_1)^2\sin^4\psi$$

$$=1-2(1+\bar{k}_1)\sin^2\psi+(1+\bar{k}_1)^2\sin^4\psi$$

$$=\{1-(1+\bar{k}_1)\sin^2\psi\}^2.$$

依ッテ (5) ハ次ノ如クニモ書カル。

$$\tan\varphi = \frac{(1+\bar{k}_1)\sin\psi\cos\psi}{1-(1+\bar{k}_1)\sin^2\psi} = \frac{(1+\bar{k}_1)\tan\psi}{1-\bar{k}_1\tan^2\psi},$$

之ヨリ

$$\tan(\varphi-\psi) = \frac{(1+\bar{k}_1)\tan\psi-(1-\bar{k}_1\tan^2\psi)\tan\psi}{1-\bar{k}_1\tan^2\psi+(1+\bar{k}_1)\tan^2\psi}$$

$$= \frac{\bar{k}_1(1+\tan^2\psi)\tan\psi}{1+\cancel{(1+\bar{k}_1)}\tan^2\psi} = \bar{k}_1\tan\psi.$$

コレ即チ Landen's transformation ナリ。

第八章　第二種及ビ第三種楕円積分

先ヅ其計算法ヲ考フベシ。

Jacobiノ normal form ニテハ

2nd kind ハ　　$\int\sqrt{\dfrac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\,dz = I_2,$

3rd kind ハ　　$\int\dfrac{dz}{(z^2-a^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = I_3.$

何レニ於テモ　　$\int\dfrac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = u\,, \qquad z = \operatorname{sn} u$

トオキ，uヲ変数トスレバ

$$I_2 = \int \operatorname{dn}^2 u\, du\,,$$

$$I_3 = \int \frac{du}{\operatorname{sn}^2 u - a^2}.$$

コレラハスベテ Theta 函数ヲ以テ表シ得ルモノナルコト「函数論」(中期ッ) ニ述ベタリ。次ニソノ結果ダケヲ挙グ。

$$E(u) = \int_0^u \operatorname{dn}^2 u\, du. \qquad E(K) = E.$$

$$Z(u) = E(u) - \frac{E}{K}u.$$

$$\int_0^w k^2 \operatorname{sn}^2 w\, dw = \frac{1}{\pi\vartheta_3^2}\left\{\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}v - \frac{\vartheta_0'(v)}{\vartheta_0(v)}\right\}, \qquad w = \pi\vartheta_3^2\cdot v$$

* $a=e_1$ ナルトキハ, コノ積分ヲ第一種及ビ第二種ニ帰着セシメ得ル。
何トナレバ;

$$\frac{d}{dz}\frac{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}{z-e_1} = \frac{1}{2(z-e_1)}\frac{12z^2-g_2}{\sqrt{}} - \frac{\sqrt{}}{(z-e_1)^2}$$

$$= \frac{1}{2(z-e_1)\sqrt{}}\left\{12z^2-g_2-\frac{2(4z^3-g_2z-g_3)}{z-e_1}\right\}$$

$$= \quad '' \quad \left\{12z^2-g_2-8(z-e_2)(z-e_3)\right\}$$

$$= \quad '' \quad \left\{4z^2-g_2-8e_1z-8e_2e_3\right\}$$

$$= \quad '' \quad \left\{4(z-e_1)^2-g_2-4e_1^2-8e_2e_3\right\}$$

ココニ $-g_2-4e_1^2-8e_2e_3$ ヲ変形スレバ;

一般ニ $e_2e_3 = -\frac{g_2}{4}-e_1e_2-e_1e_3$

$\therefore \quad -8e_2e_3 = 2g_2+8e_1(e_2+e_3) = 2g_2-8e_1^2.$

$\therefore \quad -g_2-4e_1^2-8e_2e_3 = g_2-12e_1^2$

依ッテ $$2\frac{d}{dz}\frac{\sqrt{}}{z-e_1} = \frac{4(z-e_1)}{\sqrt{}} + \frac{g_2-12e_1^2}{(z-e_1)\sqrt{}}.$$

之ヲ積分シテ

$$\frac{2\sqrt{}}{z-e_1} = 4\int\frac{(z-e_1)dz}{\sqrt{}} + (g_2-12e_1^2)\int\frac{dz}{(z-e_1)\sqrt{}}.$$

$$\int\frac{du}{1+n\,\mathrm{sn}^2u} - u = \int\frac{-n\,\mathrm{sn}^2u}{1+n\,\mathrm{sn}^2u}du$$

$n=-k^2\mathrm{sn}^2a$ トオキ, 且常数ヲ乗ジテ,

$$\Pi(u,a) = \int\frac{k^2\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}^2u}{1-k^2\mathrm{sn}^2a\cdot\mathrm{sn}^2u}du.$$

$$= \frac{\vartheta_0'(\alpha)}{\vartheta_0(\alpha)}\mu + \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta_0(\mu-\alpha)}{\vartheta_0(\mu+\alpha)}, \qquad u=\pi\vartheta_3^2\mu. \quad a=\pi\vartheta_3^2\alpha.$$

又 Weierstrass ノ normal form ニテハ

$$I_2 = \int\frac{z\,dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}, \qquad I_3 = \int\frac{dz}{(z-a)\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}.$$

故ニ $z=\wp(u)$ トオケバ

$$I_2 = \int\wp(u)du = -\zeta(u).$$

$$I_3 = \int\frac{du}{\wp(u)-a}.$$

但シコノ a ハ e_1, e_2, e_3 ニハ等シカラズトス* (第一章, 5頁)

サレバ今 $\wp(u)=a$ ナル u ヲ $u=\pm\alpha$ トスレバ

$u=\pm\alpha$ ニテ $\frac{1}{\wp(u)-a}$ ハ 1st order ノ pole ヲ有ス, 蓋シ

$$\lim_{u\to\alpha}\frac{u-\alpha}{\wp(u)-a} = \lim_{u\to\alpha}\frac{1}{\wp'(u)} = \frac{1}{\wp'(\alpha)}.$$

故ニ residue ハ $\pm\frac{1}{\wp'(\alpha)}$。

故ニ $$\frac{1}{\wp(u)-a} = \left\{\begin{array}{l}\cancel{\zeta(u-\alpha)+\zeta(u+\alpha)+C}.\\ \frac{1}{\wp'(\alpha)}\left\{\zeta(u-\alpha)-\zeta(u+\alpha)\right\}+C.\end{array}\right.$$

$u=0$ ニ於テハ, $$0 = -\frac{2\zeta(\alpha)}{\wp'(\alpha)} + C.$$

故ニ $$\frac{1}{\wp(u)-a} = \frac{1}{\wp'(u)}\left\{\zeta(u-\alpha) - \zeta(u+\alpha)\right\} + \frac{2\zeta(\alpha)}{\wp'(\alpha)}.$$

従ッテ $$I_3 = \frac{1}{\wp'(u)}\left\{\log\sigma(u-\alpha) - \log\sigma(u+\alpha)\right\} + \frac{2\zeta(\alpha)}{\wp'(\alpha)}u.$$

$\log\sigma$, ζ, $\wp$, $\wp'$ 等ハ何レモ ϑ ヲ以テ表スコトヲ得。（函数論）

$$\zeta(u) = \frac{d}{du}\log\sigma(u) = \frac{1}{2\omega_1}\left\{4\eta_1\omega_1 + \frac{d}{dv}\log\vartheta_1(v)\right\}, \quad \frac{u}{2\omega_1} = v$$

$$= \frac{1}{2\omega_1}\left\{4\eta_1\omega_1 v + \pi\cot\pi v + 4\pi\sum_1^\infty \frac{h^{2m}}{1-h^{2m}}\sin 2m\pi v\right\} \quad h = e^{+\tau\pi i}$$

$$\log\sigma(u) = \log 2\omega_1 + 2\eta_1\omega_1 v^2 + \log\vartheta_1(v) - \log\vartheta_1'(0).$$

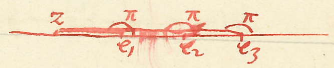
$$\wp(u) = \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2\left\{-4\eta_1\omega_1 + \frac{\pi^2}{\sin^2\pi v} - 8\pi^2\sum\frac{mh^{2m}}{1-h^{2m}}\cos 2m\pi v\right\}$$

積分数値ノ計算ハカクノ如シ。次ニハソノ積分ノ値ヲ各種ニ従テ夫夫 u, v, w トスルトキ, z 面ト u, v, w 面トノ対応ヲ論ズベシ。

先ヅ $$u = \int_{-m}^{z}\frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}$$

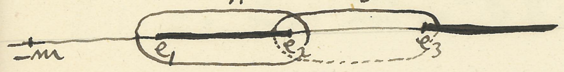
ニ於テ, z 面ト u 面トノ對應ヲ考フベシ。但シ簡單ノタメ e_1, e_2, e_3 ヲスベテ実数トシ, $e_1<e_2<e_3$ トシ, 又 $-m$ ハ絶対値ノ大ナル負数トス。

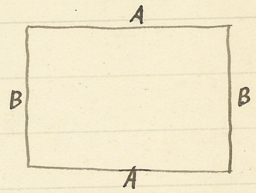
$\sqrt{}$ ノ値ヲ判然ト定ムルコトガ必要ナリ。
各因数ニツイテソノ偏角ヲ考フルニ



因数	$\frac{1}{\sqrt{z-e_1}}$	$\frac{1}{\sqrt{z-e_2}}$	$\frac{1}{\sqrt{z-e_3}}$
偏角	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$

コノ被積分函数ハ F 面ニ於テ一價ナレドモ，積分 u ハ無限多價ナリ。之ヲ一價ナラシムルニハ A，B ナル切断線ヲ入レテ F' 面ヲ作リ，之ヲ z ノ領域トスレバヨシ。





今コノ simply connected ナル（矩形ト同性質ナル）F' 面ノ u 面上ニ於ケル写像ヲ考ヘルトス。

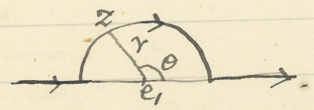
先ヅ z ガ実軸ニ沿ヒテ $-\infty$ ヨリ e_1 マデ行クトキハ，

故ニ全体ノ偏角ハ $-\frac{3\pi}{2}$ ナリ

$$\frac{\overset{+}{dz}}{\sqrt{4\underset{-\frac{\pi}{2}}{(z-e_1)}\underset{-\frac{\pi}{2}}{(z-e_2)}\underset{-\frac{\pi}{2}}{(z-e_3)}}} \cancel{= \frac{1}{\underset{-\frac{3\pi}{2}}{\sqrt{-1}}}(\cdots) = -i(\cdots)}$$

故ニ z 点ニ対スル u 点ハ原点ヨリ虚軸ニ沿ヒテ ~~降~~ 昇ル。

z 点ガ e_1 ノ周リヲ図ノ如ク半円ヲ画イテ避クルトキハ



$$z-e_1 = re^{i\theta}, \quad \sqrt{z-e_1} = \sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}},$$
$$dz = ire^{i\theta}d\theta.$$

故ニ
$$\frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}} \fallingdotseq \frac{\sqrt{r}\,i\,e^{i\frac{\theta}{2}}d\theta}{2\sqrt{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}}. \quad (r \fallingdotseq 0)$$

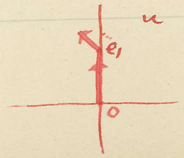
偏角 $-\frac{\pi}{4}$

故ニコノ半円上ノ積分ハ
$$\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}}\left[e^{i\frac{\theta}{2}}\right]_{\pi}^{0} = \frac{\sqrt{r}\,(1-i)}{\sqrt{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}}.$$

分母ノ偏角 $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}$

分数全体ノ偏角 $-\pi-\frac{\pi}{4}$

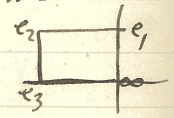
即チ（r ガ小ナルトキハ）従来ノ方向ニ対シテ 45° ダケ僅カニ左方ニ生ヅベシ。



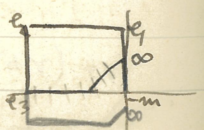
$-m \to -\infty$ トスレバ

(∞) ト $(-m)$ トノ差ガ一

致シ



トナル。然ラザレバ

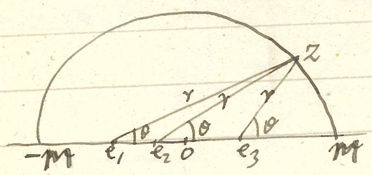


zガ e_1 ヲ越エテ e_1, e_2 ノ間ニアルトキハ

$$\frac{\overset{+}{dz}}{\sqrt{4\underset{0}{(z-e_1)}\underset{\frac{\pi}{2}}{(z-e_2)}\underset{\frac{\pi}{2}}{(z-e_3)}}} = \underset{-\pi}{\cancel{+}}(\cdots\cdots).$$

zガ e_2 ヲ回ルトキハ e_1 ヲ越エシトキニナラフ。

最後ニzガ M ヨリ $-M$ マデ原点ヲ中心トシテ回レバ;



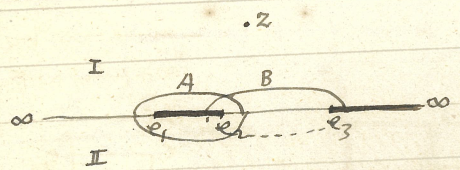
$$\frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}} \doteqdot \frac{ire^{i\theta}d\theta}{2r^{\frac{3}{2}}e^{i\frac{3\theta}{2}}}$$

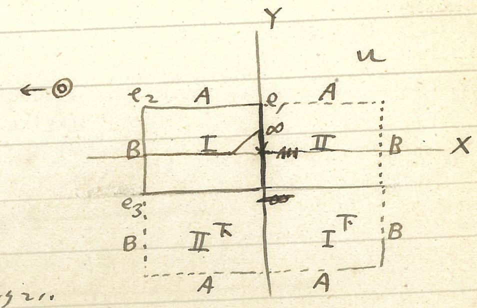
$$= \frac{i}{2\sqrt{r}}e^{-i\frac{\theta}{2}}d\theta.$$

$$\int_0^{\pi}\frac{i}{2\sqrt{r}}e^{-i\frac{\theta}{2}}d\theta = -\frac{1}{\sqrt{r}}\left[e^{-i\frac{\theta}{2}}\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{r}}(-i-1) = \frac{1+i}{\sqrt{r}}$$

以上ノ研究ニ於テ e_1, e_2, e_3 ノ回リノ半円ノ半径ヲ0ニシ、最後ノ大半円ノ半径ヲ∞ニスレバ; u面上ニ次ノ如キ矩形ヲ得。





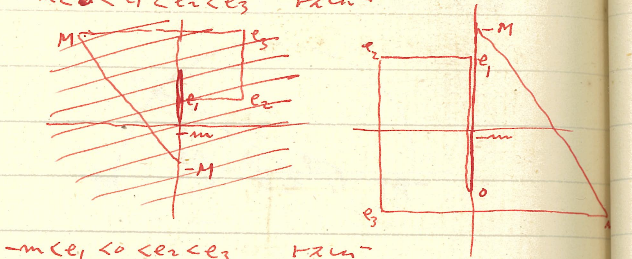
zヨリA, Bヲ横切ラヌ様ニ下半面ニ行クニハ

∴ (e_1, ∞) ヲ過ラザル可カラズ。故ニ下半面ノ写像ハIIノ如シ。

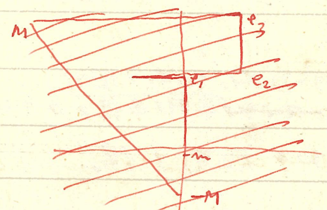
zヨリ更ニ $(e_3\infty)$ ヲ越ユレバ下葉ノIニユキ、又 (e_1, ∞) ヲコユレバ下ノIIニユク。

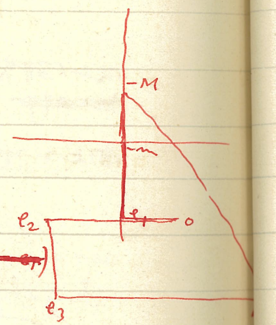
若シzガA, Bヲ横切リテ自由ニ動ケバ uハ上記ノ矩形ヲ上下左右ニ並ベタル如キモノヲ画クベシ。

被積分函数ノ分子ニ z アルタメ, z ガ 0 ヲ通過スルトキ
微分ノ符号ヲ変ズ。
例ヘバ　$-m < 0 < e_1 < e_2 < e_3$　トスレバ

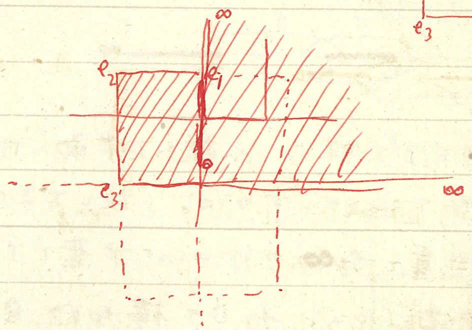


$-m < e_1 < 0 < e_2 < e_3$　トスレバ





例ニ上図トスレバ; $M \to \infty$ ナルトキ



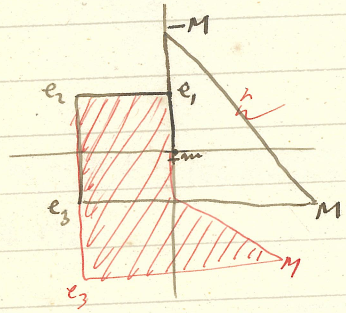
次ニ　$$v = \int_{-m}^{z} \frac{z\,dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}$$　ヲ論ズベシ。

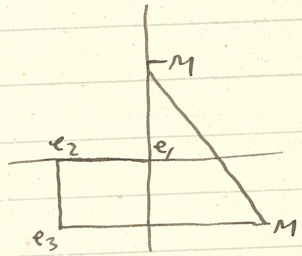
被積分函数ノ偏角ノ研究ハ u ノ場合ト同ジ。タダ最後ニ $(M, -M)$ ノ
半円ヲ画クトキノ積分ガ

Falsch!
$$\int_0^{\pi} \frac{i r^2 e^{i2\theta} d\theta}{2 r^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{3\theta}{2}}} = \sqrt{r}\,(i-1)$$

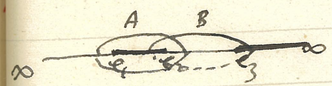
トナルノ相違アルノミ。

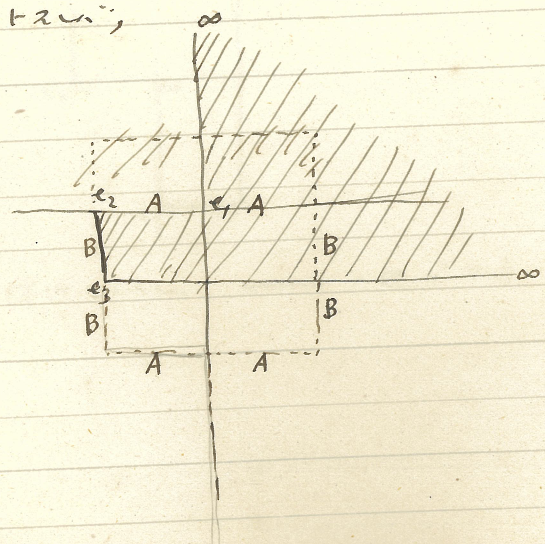
便宜上　$-m = e_1$　トスレバ





コレニ於テ　$M \to \infty$　トスレバ,





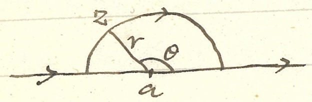
A, B ニテ囲マレル $\boxed{}$ ノ
中ハ二重ニ, ソノ他ハ
一重ニ蔽ハル。

最後ニ $$w=\int_{-\infty}^{z}\frac{dz}{(z-a)\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}},$$

$-\infty<a<e_1<e_2<e_3$ トス。

zガ$-\infty$ヨリaニ向フトキハ $z-a<0$ ナルヲ以テ、被積分函数ノ符号ハ第一種ノ場合ト相反シ、虚軸ヲ降ルベシ。

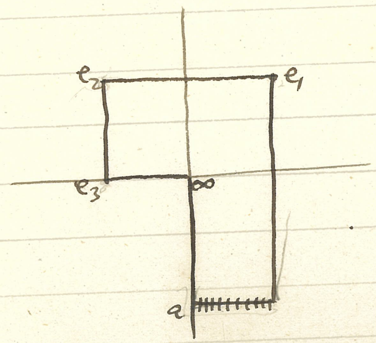
zガaノ手前ニ止マリ、ソノ周リヲ回レバ



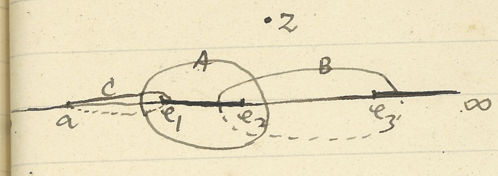
$$\frac{dz}{z-a}=i\,d\theta.$$

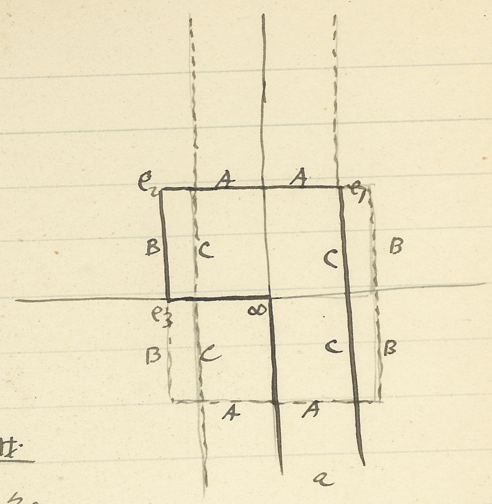
故ニソノ間ノ積分ハ $-\pi i\dfrac{1}{\sqrt{4(a-e_1)(a-e_2)(a-e_3)}}>0$

即チwハ水平ニ $\dfrac{\pi}{\left|\sqrt{4(a-e_1)(a-e_2)(a-e_3)}\right|}$ ダケ進ム。ソノ後ハuニ於ケルト zガ$-\infty$ヨリ出デタルトキ 同様ナリ。



モシzヲaニ限リナク接近セシムレバ、ノ辺ガ下方ノ無限遠ニ赴ク。





zハ A, B, C ノ何レヲ越エテモ
wハ多價性ヲ呈ス。A, B ヲ越
ユルトキハ 矩形ヲ連ネタル部分ニ
移リ，C ヲ越ユルトキハ 縦ノ帯状ニ
於テ隣ニウツル。

TRADE MARK

RECIS TERED