

2020 年度 学位論文

AdS/CFT 対応を用いた  
exactly marginal 演算子の相関関数の解析

名古屋大学大学院 理学研究科  
前海 真志

2021 年 2 月 8 日

## 概要

本論文では、exactly marginal 演算子の相関関数と共形多様体の構造に対して AdS/CFT 対応を用いた解析を行った。exactly marginal 演算子の相関関数に現れるコンタクト項の係数は、共形多様体上での幾何学的情報を持っている。そして共形場理論に関する先行研究からコンタクト項の関数形が知られている。共形場理論の詳細に立ち入らず、exactly marginal 演算子の相関関数の解析に AdS/CFT 対応を応用することが本論文の目的である。解析のセットアップとして、ホログラフィックに繰り込み群を議論した。exactly marginal coupling のベータ関数が恒等的にゼロになるという条件を要請し exactly marginal 演算子に双対な重力理論の作用を決定した。このセットアップのもとで作用の運動方程式を摂動的に解き、摂動の各次数における on-shell 作用を求めた。それらに GKP-Witten の処方箋を用いることで 3 点関数並びに 4 点関数を求め、共形場理論で期待される結果と一致することを示した。さらにその応用として、4 点関数に対応する Witten ダイアグラムを解析した。解析の結果、exactly marginal 演算子とその 2 重トレース演算子の間の OPE 係数や 2 重トレース演算子の異常次元が、共形多様体上の幾何学的情報を持つテンソル量で表されることを示した。

## 目次

1	主論文の要点	5
2	研究背景と動機	6
2.1	繰り込み群の流れと理論の空間	6
2.2	exactly marginal 演算子と共形多様体	8
2.3	共形多様体の幾何学的情報とコンタクト項	9
3	共形場理論	11
3.1	共形場理論の概要	11
3.2	演算子積展開 (OPE)	17
3.3	double OPE 極限で見た物理	18
3.4	共形摂動論と exactly marginal 演算子	19
4	AdS/CFT 対応	21
4.1	AdS/CFT 対応の概念	21
4.2	AdS 時空	23
4.3	AdS/CFT 対応をつかった計算手法	24
4.4	GKP-Witten 関係式を用いた相関関数の計算例	27
5	AdS/CFT 対応を用いた exactly marginal 演算子の相関関数	28
5.1	Setup	28
5.2	作用の $\alpha$ 展開と運動方程式	30
5.3	修正された AdS 時空の伝播関数	31
5.4	on-shell 作用 $I_2[J]$ と 2 点関数	33
5.5	3 点関数	35
5.6	4 点関数	36
5.7	4 点関数の Double OPE 極限	39
6	結論	43
付録 A	繰り込み群のホログラフィックな議論	45
A.1	ADM 分解	45
A.2	微分展開とフロー方程式	49
付録 B	伝播関数に関する計算	51
B.1	バルク-境界伝播関数 (5.21) の導出	51
B.2	(5.36) の導出	53
B.3	の $\nu \sim d/2$ での解析接続	53
B.4	$\nu \rightarrow d/2$ における非局所的な寄与	55

付録 C	2 点関数の座標表示のフーリエ変換	56
C.1	微分正則化	56
C.2	正則化された座標表示のフーリエ変換	57
C.3	2 点関数の運動量表示と Zamolodochikov 計量	59
付録 D	3 次の on-shell 作用 $I_3[J]$ (5.48) の導出	60
付録 E	4 点関数に関する計算	61
E.1	on-shell 作用 $I_4[J]$ の導出	61
E.2	関数 $\mathcal{F}$ (5.59) の導出	63
E.3	作用 $I_{\text{ex}}$ の分離 ((5.60) の導出)	64
E.4	関数 $\mathcal{F}$ (5.59) から現れる非局所的な寄与	65
E.5	$I_\Gamma$ からの非局所的な寄与	68
E.6	$I_4[J]$ からの寄与	70
付録 F	Witten ダイアグラムに関する計算	70
F.1	$D$ 関数の Feynman 積分	70
F.2	$W_k^\Delta(a, b)$ の導出	75
F.3	$W_k^\Delta(a, b)$ と $D_{\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4}$ の関係式 (付録 F.24) の導出	80
F.4	4 点関数の double OPE 極限	81

## 表記法

本論文で用いる数式の表記法を以下に示す。

バルク (AdS 時空) 上の座標	$X^\mu = (z, \vec{x}) \in \text{AdS}_{d+1} \quad (\mu := 1, 2, \dots, d+1)$
バルクの動径座標	$z$
境界方向の座標	$\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ または $x^i \quad (i = 1, 2, \dots, d)$ (3 章のみ境界方向の座標にギリシャ文字を使用する)
位置ベクトルの差	$x_{ij} :=  \vec{x}_i - \vec{x}_j $
バルクの計量 (ポアンカレ計量)	$ds^2 := g_{\mu\nu}(X)dX^\mu dX^\nu = \frac{dz^2 + d\vec{x}^2}{z^2}$
偏微分	$\partial_\mu := \partial/\partial X^\mu$
ラプラシアン (バルク)	$\square_X := g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu \equiv \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu(\sqrt{g}g^{\mu\nu}\partial_\nu)$
ラプラシアン (境界)	$\square := \delta^{ij}\partial_i\partial_j$
平坦な境界上のフーリエ変換 $\mathcal{F}$	$\tilde{f}(\vec{k}) = \mathcal{F}[f(\vec{x})] = \int d^d x \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} f(\vec{x})$
逆フーリエ変換 $\mathcal{F}^{-1}$	$f(\vec{x}) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{f}(\vec{k})] = (2\pi)^{-d} \int d^d k e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{f}(\vec{k})$
exactly marginal 演算子	$O_I(\vec{x})$
exactly marginal coupling	$\varphi^I$
Zamolodochikov 計量	$g_{IJ}(\varphi)$
$\varphi^I$ に双対なバルク上のスカラー場	$\phi^I(X)$
$\phi^I$ についての微分	$\partial_I := \partial/\partial\phi^I$

特に断らない限り、同じ添え字が二つ現れた場合にはその添え字について和をとるものとする ( $M^a N_a \equiv \sum_a M^a N_a$ )。

# 1 主論文の要点

共形場理論において exactly marginal 演算子という特殊な演算子が存在する場合がある。そして exactly marginal 演算子に付随する結合定数を exactly marginal coupling という。後に述べる様に exactly marginal coupling は任意定数であるため、exactly marginal coupling が存在することは、その共形場理論が連続パラメータで特徴付けられていることになる。この連続パラメータが構成する多様体を共形多様体という。exactly marginal 演算子の具体例としては、4 次元  $\mathcal{N} = 4$ <sup>\*1</sup>の超対称ゲージ理論における演算子  $\text{tr}FF$ ,  $\text{tr}F\tilde{F}$ <sup>\*2</sup>が挙げられる。これらに結合する exactly marginal coupling はそれぞれゲージ結合定数  $g_{\text{YM}}$  と  $\theta$  角である。[\[12\]\[16\]](#)。AdS/CFT 対応<sup>\*3</sup>において、これらの exactly marginal 演算子に双対な 5 次元の AdS 重力理論ではディラトン場とアキシオン場が存在する系で記述される。

本論文の動機は、AdS/CFT 対応において exactly marginal 演算子の相関関数の性質や共形多様体の構造を調べることである。特に共形場理論が定義される空間の次元や作用の具体形に立ち入らず、双対な AdS 重力理論から一般的に言及できる性質に興味を持ち解析を行った。解析では、AdS/CFT 対応を応用し、exactly marginal 演算子の相関関数に現れるコンタクト項を AdS 重力理論から具体的に解析しその結果を示した。また exactly marginal 演算子の 4 点関数に着目し対応する Witten ダイアグラム<sup>\*4</sup>を計算することで、相関関数と共形多様体の構造に関して新たな知見を得ることを試みた。本論文は副論文 [\[1\]](#) の内容を基に、その周辺も含めて解説したものである。

AdS/CFT 対応を用いて共形場理論の相関関数を得る方法は、S.S. Gubser, I.R. Klebanov, A.M. Polyakov や E. Witten 等の先行研究 [\[19\]\[20\]](#) によって確立されており GKP-Witten 関係式として定式化されている。また exactly marginal 演算子の重力双対に当たる場合は、自明なポテンシャル項を持つ零質量スカラー場によって記述される。このことは、ホログラフィックな繰り込み群の議論で導くことができ、exactly marginal coupling の繰り込み群のベータ関数が恒等的にゼロになることと対応している。ベータ関数が恒等的にゼロになることは共形場理論の具体形に依存しない exactly marginal 演算子の最低限の条件である。この様な一般的なセットアップで重力理論を構成し、AdS/CFT 対応の分野でよく知られた手法を用いて相関関数の解析を行った。

今回の解析の具体的な目標は GKP-Witten 関係式を用い、N. Seiberg[\[2\]](#) や D. Kutasov[\[3\]](#) によって場の理

<sup>\*1</sup>  $\mathcal{N}$  とは理論に存在する超対称性の数を表す。超対称性とはボース粒子とフェルミ粒子の入れ替え (超対称変換) についての対称性である。 $\mathcal{N} = 4$  は超対称変換の生成子である “超電荷” が 4 種類あることを意味している。 $\mathcal{N} = 1$  の超対称性の基礎については [\[34\]](#) などを参照されたい。

<sup>\*2</sup> ゲージ場を  $A_\mu^a(\vec{x})$  を定義した。その上で、 $F \equiv F_{\mu\nu}^a t^a$ ,  $F_{\mu\nu}^a(\vec{x}) \equiv \partial_\mu A_\nu^a(\vec{x}) - \partial_\nu A_\mu^a(\vec{x}) + f^{abc} A_\mu^b(\vec{x}) A_\nu^c(\vec{x})$  をゲージ場の強さという (小文字のアルファベットはゲージ群の随伴表現の脚)。  $f_{abc}$  はゲージ群  $SU(N)$  の構造定数という量でありゲージ変換の生成子  $t^a$  が成す代数の構造を決定している量である。構造定数は交換関係を用いて以下の様に定義される。

$$[t^a, t^b] \equiv t^a t^b - t^b t^a = f^{abc} t^c$$

この  $\mu, \nu$  に関しての反対称テンソルに対して、レビ・チビタの反対称テンソル  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  を用いて定義される双対テンソルが  $\tilde{F} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} t^a$  である。 $\mathcal{N} = 4$  の超対称ゲージ理論の作用のゲージばの部分

$$S_{\text{YM}} = \int d^4x \left[ -\frac{1}{2g_{\text{YM}}^2} \text{tr}FF + \frac{\theta}{32\pi^2} \text{tr}F\tilde{F} + \dots \right]$$

の様に表される。(ゲージ理論の基礎事項に関しては [\[42\], \[39\]](#) などを参照されたい。)

<sup>\*3</sup> AdS/CFT 対応 [\[7\]](#) とは、 $d$  次元の共形場理論 (CFT) と  $d+1$  次元の AdS 重力理論の物理的な等価性を主張する予想であり、超弦理論の解析から提唱された。[4.1](#) 章で扱うが、詳しくは AdS/CFT 対応のレビューを [\[4\]](#) などを参照されたい。

<sup>\*4</sup> Witten ダイアグラムは、AdS 重力理論において、AdS 時空 (バルク) 中の粒子の散乱振幅を摂動的計算するために用いられる。

論側から示されているコンタクト項の数学的構造を AdS 重力理論の計算から再現することである。さらに、共形場理論の解析の結果と照らし合わせることで、共形多様体の幾何学的構造と exactly marginal 演算子の 2 重トレース演算子のスケーリング則に現れる異常次元 (異常スケーリング次元)<sup>\*5</sup> に対して新たな知見を得ることである。

### \*\*\* 解析と結果の概要 \*\*\*

先行研究 [2],[3] により導かれたコンタクト項を AdS 重力理論から導出するセットアップとして、本論文では上述の様にホログラフィックに繰り込み群を議論し重力理論の作用汎関数の形を決定した。その上で作用を変分し、運動方程式の解並びに on-shell 作用を求め、GKP-Witten 関係式により相関関数の具体形を求めた。その結果、[3] で示されている結果を、一般の偶数次元共形場理論に対して、AdS 重力理論から再現することができた。

本論文の 5.7 章の最後では、共形多様体に対する考察を行うために、exactly marginal 演算子の 4 点関数に対し double OPE 極限をとり物理的な意味を議論した。double OPE 極限とは 4 点関数の 4 つの exactly marginal 演算子に対して 2 つ OPE<sup>\*6</sup> 極限を同時に取り取る操作を意味する。AdS 重力理論からの解析として、連結な 4 点関数に対応する Witten ダイアグラムのうち最も簡単な相互作用を持つものの寄与を計算した。そしてその  $t$  チャンネル極限をとることで、共形多様体上の幾何学的情報を持つ 2 つのテンソル ( $\mathcal{A}_{IJKL}, \mathcal{B}_{IJKL}$ ) を用いて表した。一方で、共形場理論の議論から導かれる double OPE 極限を、exactly marginal 演算子  $O_I$  と、その 2 重トレース演算子  $O_a$ <sup>\*7</sup> の間の OPE 係数  $C_{IJ}^a$  を用いて表した。

$$O_I(\vec{x}_1)O_J(\vec{x}_2) \sim \frac{g_{IJ}}{x_{12}^{2\Delta}} + \sum_a \frac{C_{IJ}^a}{x_{12}^{-\gamma_a}} O_a(\vec{x}_1) + \cdots \quad (\gamma_a \text{ は異常次元}) \quad (1.1)$$

AdS/CFT 対応が成り立つ前提でこれらの結果を比較することで、AdS 重力理論から導かれた共形多様体上の幾何学量  $\mathcal{A}_{IJKL}, \mathcal{B}_{IJKL}$  と OPE 係数  $C_{IJ}^a$  や異常次元  $\gamma_a$  を結びつけるいくつかの関係式を得た。

## 2 研究背景と動機

### 2.1 繰り込み群の流れと理論の空間

ここでは共形多様体の背景知識となる繰り込み群の流れと理論の空間について述べておく。K. Wilson の繰り込み群<sup>\*8</sup>の提唱以前は、繰り込みは場の理論の解析で現れる発散に対する処方箋としての意味合いが強かった。K. Wilson の繰り込み群の提唱後、繰り込みはより広く物理をたらえるために重要な概念となった。繰り込み群の考え方が重要な一つの理由は異なる理論同士を有限個のパラメータ (結合定数) の振る舞いによって分類できるためである。繰り込み群変換によって結合定数は少しずつ変化し、結合定数で張られる「理論の空間」を移動する。この様子を繰り込み群の流れと表現する。繰り込み群の流れに沿って低エネルギー側に動くことは、粗視化によって系を見る解像度を下げていく操作に対応する。系の粗視化しても、なお系に影響を与

<sup>\*5</sup> 異常スケーリング次元 (anomalous dimension) は相関関数の座標依存性に現れる冪 (スケーリング) のずれを表す量である。異常次元が存在しない場合、相関関数のスケーリングは相関関数を構成する演算子の次元で決まる。しかし異常次元が発生する場合、通常のスケーリングの勘定が通用しなくなる。これは系に複数の長さスケールが存在する場合に起きると考えられている [41]。

<sup>\*6</sup> OPE とは、2 つの演算子の挿入点を限りなく近づけることで、それらを単一の演算子としての振る舞いで近似する方法である。詳細に関しては 3.2 を参照されたい。

<sup>\*7</sup> ゲージ理論の作用に含まれる演算子はゲージ不変性の要請により、ゲージ変換で変換する行列の脚の依存性をトレースを取ることで消している。この様な演算子をシングルトレース演算子という。例えば  $\text{tr}FF$  などはその一例である。2 重トレース演算子はそれらの 2 つの積で構成される演算子である。例えば  $(\text{tr}FF)(\text{tr}FF)$  など。

<sup>\*8</sup> [5] などを参照されたい。12 章には理論の空間を分類する議論がなされているので参考にされたい。

えつつけている結合定数は有限個に留まり、それらは他の結合定数よりも重要で普遍的な情報を担っていると考えられる。そこにある普遍性を調べるのが繰り込み群を考える一つの動機である [40]。

理論の空間の中で特に重要なのは固定点である<sup>\*9</sup>。固定点が重要なのは、その周りの繰り込み群の流れを調べることで、理論の空間の大域的な構造を予測できる (その固定点に吸引される領域に属する結合定数とそうでない結合定数がわかる) からである。固定点はその名の通り、繰り込み群の流れが止まってそれ以上先に進まない最終地点を固定点 ( $g = g^*$ ) である。固定点では結合定数が変化しないため、繰り込み群変換による結合定数の変化率であるベータ関数がゼロになる点を固定点と言うこともできる ( $\beta(g^*) = 0$ )。

場の理論に含まれる結合定数  $g$  についての繰り込み群のベータ関数を書き下すと以下の様になる<sup>\*10</sup>[6]。

$$\beta^I(g) \equiv \frac{d}{d \log \Lambda} g^I = (\Delta - d)g^I + c_{IJK}g^Jg^K + O(g^3) \quad (2.1)$$

$\beta(g)$  を調べることによって、その結合定数が理論の空間の中での振る舞いがわかる。特に次元解析により  $d$  次元時空上に定義される場の理論において、結合定数の次元によつての振る舞いを大まかな分類が可能であることがわかる。例えば場の理論の作用  $S$  に含まれる以下の様な (相互作用) 項を考えるとする。

$$g \int d^d x O(\vec{x}) \quad (2.2)$$

演算子の (質量) 次元が  $\Delta$  である ( $\dim.[O] = \Delta$ ) ならば、(作用は自然単位系で無次元なので、) 結合定数  $g$  の次元は  $\dim.[g] = d - \Delta$  となる<sup>\*11</sup>。結合定数の次元は (2.1) の右辺の一次の項に現れていることがわかる。故に、理論に含まれる結合定数  $g$  の振る舞いは、その質量次元によって大きく 3 つに分類することができる<sup>\*12</sup>。

$$g = \begin{cases} \text{(i) 有意な結合定数 (relevant)} g_1 & : \dim.[g_1] > 0 \\ \text{(ii) 有意でない結合定数 (irrelevant)} g_2 & : \dim.[g_2] < 0 \\ \text{(iii) 中性な結合定数 (marginal)} g_3 \equiv \varphi & : \dim.[\varphi] = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

(i) は繰り込み群変換をしていくごとに結合定数が成長していき、変化後の低エネルギー有効理論で記述する現象に支配的になる。逆に (iii) は繰り込み群変換に対して結合定数が減衰していき、低エネルギーの有効理論の現象に影響を及ぼさない。結合定数 (i)、(iii) の繰り込み群変換に対する振る舞いを図示した (図 1)。(i) のタイプは、固定点から僅かに離れた点で繰り込み群変換をスタートすると固定点からどんどん離れていく様に値を変えていく。逆に (ii) のタイプは、繰り込み群変換によって固定点上の値  $g^*$  に近づいていく。(iii) のタイプは marginal 演算子に結合する結合定数である。marginal 演算子とは  $d$  次元時空上の共形場理論において次元  $\Delta = d$  である様なスカラー演算子である。このタイプの結合定数は、量子効果を考えることで、繰り込み群変換に対する振る舞いが決まる。今回の議論の対象となるものは、(ii) の中でも厳密に中性な結合定数 (exactly marginal coupling) であり量子効果を含めても繰り込み群変換に対して全く変換しないという性質を持つものである。

(ii) に属する結合定数<sup>\*13</sup>について繰り込み群のベータ関数の観点からもう少し詳しく見ることにする。ここで  $\varphi^I$  を marginal 演算子に結合する結合定数 (marginal coupling) を表すとする。この場合 (2.1) におい

<sup>\*9</sup> 臨界面も重要である。臨界面は固定点を通り、それを境にして繰り込み群の流れの向きが変わる様な貴境界面である。系が何らかの変化により臨界面を越えるとき相転移が起きる。

<sup>\*10</sup>  $\Lambda$  は繰り込み点であり系を見ているエネルギースケールを表している。全く同じものではないが、K. Wilson の繰り込み群におけるパラメータと対応している。また添字  $I, J, K, \dots$  は同じ分類に属する結合定数が複数あり場合を想定している。

<sup>\*11</sup> 積分則度の次元は  $\dim.[d^d x] = d$  である

<sup>\*12</sup> 教化書としては [39], [41] などにその議論がなされている。

<sup>\*13</sup> (ii) の中でも繰り込み群変換に対して結合定数が (i) の様に成長するものを marginally relevant、(iii) の様に減衰するものを marginally irrelevant という。



て  $c_{IJK}$  は marginal 演算子の 3 点関数に現れる OPE 係数という量である<sup>\*14</sup>。一般の marginal coupling では、 $c_{IJK} \neq 0$  となる可能性があるためベータ関数は 0 にならない ( $\beta^I(\varphi) \neq 0$ )。ベータ関数は結合定数の繰り込み群変換に対しての変化率を表しているので、一般の marginal coupling では繰り込み群による変換が起きることがわかる。

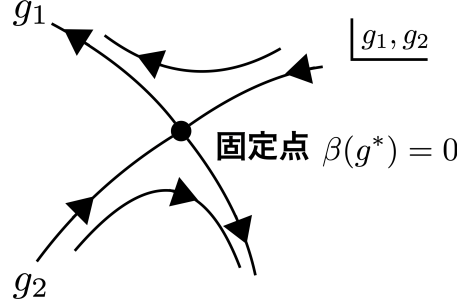


図 1 固定点とその周辺の繰り込み群の流れ。固定点は繰り込み群の流れが止まる点であり、ベータ関数のゼロ点になっている ( $\beta(g^*) = 0$ )。固定点では共形場理論が実現していると考えられている。左図は固定点の周辺の、有意 (relevant) な結合定数  $g_1$  と有意でない (irrelevant) 結合定数  $g_2$  の流れを表した例である。

## 2.2 exactly marginal 演算子と共形多様体

固定点はベータ関数のゼロ点であることを先に述べた。固定点では共形場理論が実現している。ここで共形場理論に変形を加えることを考える。

$$S' = S_{\text{CFT}} + \int d^d x \varphi^I O_I(\vec{x}) \quad (2.4)$$

一般の演算子  $O_I$  による変形に対しては、それに付随する結合定数の振る舞い (2.3) からベータ関数がゼロにならない。これは繰り込み群の流れによって共形場理論の存在する固定点から移動することを意味し、変形後の理論  $S'$  は一般的に共形対称性を持たないと言える。

次にベータ関数 (2.1) の値が厳密に 0 に保たれる様な理論の変形を考えてみる。ベータ関数が 0 に保たれるため、理論は固定点から移動せず元の共形対称性は保たれる。つまり変形後の理論  $S'$  も同じ共形場理論である様な変形を考える。そのためには、 $\Delta = d$  だけでなく  $\varphi$  の 2 次以上の項の係数についても 0 となることを要請する必要がある ( $c_{IJK} = 0$  など)。この様な要請は結合定数  $\varphi^I$  が exactly marginal coupling である場合に限り可能であり、この変形は exactly marginal 演算子を用いて実現される。この様に共形対称性を保つ変形を exactly marginal 変形という ( $S'_{\text{CFT}} = S_{\text{CFT}} + \int d^d x \varphi^I O_I(\vec{x})$ ,  $O_I$  は exactly marginal 演算子)。

exactly marginal 変形によって生成される共形場理論  $S'_{\text{CFT}}$  は変形前の元の共形場理論と対称性は同じであるが、exactly marginal coupling  $\varphi^I$  の値が異なる。つまり exactly marginal 変形を任意の回数繰り返して値の異なる exactly marginal coupling を持つ共形場理論が得られることになる。この様に一連の exactly marginal coupling の集合で特徴付けられる共形場理論は、結合定数で張られる理論の空間で連続的な領域  $\mathcal{M}$  の上に存在している (図 2 左)。この領域は繰り込み群の変換の元で変換されない領域であり、もはや固定

<sup>\*14</sup> OPE 係数に関しては F.1.3 章を参照されたい。

点の様な“点”ではなく、広がりを持っているの。そのため“固定面”と表現できる。この様に一連の exactly marginal coupling 集合で特徴付けられる固定面を共形多様体という。

先述の様に、ある共形場理論に exactly marginal 演算子が存在すれば、その共形場理論は連続パラメータ  $\varphi^I$  によって特徴づけられる。共形多様体上の共形場理論の作用  $S_{\text{CFT}}$  に exactly marginal 変形を行うことによって、理論に含まれる exactly marginal coupling の値を連続的に変化させることができる。そして値の変化の仕方は、加える exactly marginal 演算子  $O_I$  の取り方や exactly marginal coupling  $\varphi^I$  の大きさによって調節が可能である。ゆえに、exactly marginal 変形による exactly marginal coupling の値の変化を共形多様体上の 2 点間の移動として解釈することができる (図 2 右)。exactly marginal 演算子は共形多様体上の移動を生成し exactly marginal coupling は移動の大きさを調節しているため、exactly marginal 演算子と exactly marginal coupling はそれぞれ共形多様体上の移動の生成子と共形多様体上の座標としての意味もっている。

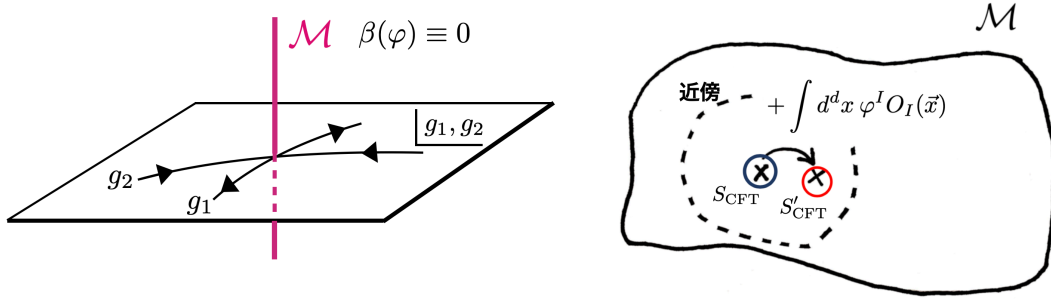


図 2 理論の空間上の共形多様体  $\mathcal{M}$ (左) と  $\mathcal{M}$  上の exactly marginal 変形の様子(右)。左図は、図 1 の固定点上の共形場理論が exactly marginal coupling を持っていた場合の共形多様体  $\mathcal{M}$  の位置を示す (図では 1 次元で表されているが、一般には 2 次元以上の多様体になり得る)。共形多様体  $\mathcal{M}$  は結合定数で張られる理論の空間において、繰り込み群で変換されない領域 (固定面) を構成している。右図は共形多様体上で exactly marginal 変形の様子を表したものである。共形多様体上では共形場理論が連続パラメータ  $\varphi^I$  によって特徴づけられている。そのため exactly marginal 演算子は変形前の共形場理論  $S_{\text{CFT}}$  から変形後の共形場理論  $S'_{\text{CFT}}$  への移動の生成子となる。

## 2.3 共形多様体の幾何学的情報とコンタクト項

exactly marginal 演算子の特徴として相関関数に特別な構造を持った物理的<sup>\*15</sup>なコンタクト項<sup>\*16</sup>が現れることが挙げられる。特別な構造とはコンタクト項の係数のテンソル構造が、共形多様体における幾何学的情報と関連していることである。

このテンソル構造の幾何学的な意味は [2][3] によって示されている。例えば、exactly marginal 演算子の 2 点関数の係数  $g_{IJ}(\varphi)$  は共形多様体上で計量としての役割を持つ 2 階のテンソルである。

$$\langle O_I(\vec{x}_1) O_J(\vec{x}_2) \rangle_\varphi = \frac{g_{IJ}(\varphi)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^{2d}} \quad (2.5)$$

<sup>\*15</sup> 局所相殺項によって消えないことを意味する。局所相殺項は局所関数のみで表される項であり、正則化の際に現れる物理量の発散を取り除くために理論に加える項である。この項で取り除かれる発散は物理的な意味を持たない。

<sup>\*16</sup> 演算子の挿入点が重なるところでしか値を持たない様な項。コンタクト項はデルタ関数に比例する。例えば [2] の式 (1.4)、または [3] の式 (2)。

一般に exactly marginal coupling は任意定数であるため、共形多様体はリーマン多様体<sup>\*17</sup>になりうる。そのため共形多様体上での計量を考えることができ、演算子間の相関を表す 2 点関数を用いて自然な計量を定義することができるのである [6]。(2.5) の係数テンソル  $g_{IJ}(\varphi)$  は Zamolodchikov 計量といわれ、これから本論文で相関関数を議論する際に最も基本的な役割を持つ量である。ここで期待値の添字  $\varphi$  は共形多様体上の点  $\varphi$  において計算した量であることを示している。

同様に、exactly marginal 演算子の 3 点関数の係数は (Zamolodchikov 計量を用いて定義される) 共形多様体上のレヴィ・チビタ接続と、4 点関数の係数は共形多様体上のリーマン曲率テンソルとそれぞれ関係している。文献 [2] によると、exactly marginal の 3 点関数は以下の様な非自明なコンタクト項を持つことが知られている。

$$\langle O_I(\vec{x}_i) O_J(\vec{x}_j) O_K(\vec{x}_k) \rangle_\varphi = \frac{1}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|^{2d}} \mathbf{\Gamma}_{K,IJ}(\varphi) \delta^d(\vec{x}_j - \vec{x}_k) + (\text{cyclic permutations in } I, J, K) \quad (2.6)$$

ここで  $\mathbf{\Gamma}_{K,IJ}(\varphi)$  は計量 (2.5) を用いて定義される共形多様体上のクリストフェル記号<sup>\*18</sup>である。

これを解析する方法として共形多様体上の基準点  $\varphi_0$  からの摂動を考える。これを exactly marginal 演算子を用いた共形摂動論という (3.4 節)。 $\varphi_0$  から微小量  $\delta\varphi$  だけ離れた点を  $\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi$  とすると、 $\varphi$  で計算した Zamolodchikov 計量  $g_{IJ}(\varphi)$  は  $\varphi_0$  を用いて以下の様に表される。

$$g_{IJ}(\varphi) = g_{IJ}(\varphi_0 + \delta\varphi) = \left\langle O_I(1) O_J(0) \exp \left( -\delta\varphi^K \int d^d x O_K(\vec{x}) \right) \right\rangle_{\varphi_0} \quad (2.7)$$

$\delta\varphi$  の摂動の 1 次の項を見ると、

$$\partial_K g_{IJ}(\varphi_0) = -\langle O_I(1) O_J(0) \int d^d x O_K(\vec{x}) \rangle_{\varphi_0} \quad (2.8)$$

となり (2.6) と整合する。つまり exactly marginal 演算子の 3 点関数が (2.6) の様な非自明なコンタクト項になることを、共形多様体上の摂動  $\delta\varphi$  を考えることで示すことができる。

さらに高次の相関関数と共形多様体上の幾何学量との関連は [3] によって調べられている。例えば 2 回積分された exactly marginal 演算子の 4 点関数は以下の様になることが知られている。

$$\partial_K \partial_L g_{AB}(\varphi_0) = \langle O_I(1) O_J(0) \int d^d x O_K(\vec{x}) \int d^d y O_L(\vec{y}) \rangle_{\varphi_0} \quad (2.9)$$

2 点関数の摂動の 2 次が 2 回積分された 4 点関数であることがわかる。3 点関数のときと同様に、これは exactly marginal 演算子の 4 点関数が非自明なコンタクト項を持つことによる結果である。 $\partial_K g_{AB}(\varphi)$  や  $\partial_K \partial_L g_{AB}(\varphi)$  は共形多様体の曲率の情報と関係しているため、3 点関数や 4 点関数のコンタクト項を計算することは共形多様体の幾何学的情報を探ることにつながる。

<sup>\*17</sup> リーマン多様体とは、滑らかな多様体のうち各点で次の条件を満たす計量  $g_{ij}$  が多様体の各点で定義されているもののことである [38]。(i) 任意のベクトル  $u^i, v^j$ , に対して、内積が可換 ( $g_{ij} u^i v^j = g_{ji} u^j v^i$ )。(ii) 任意のベクトル  $u^i$  に対して  $g_{ij} u^i u^j \geq 0$  を満たし、かつ等号成立は  $u^i = 0$  の時のみ。

<sup>\*18</sup> リーマン多様体が曲がっているとき、計量  $g_{IJ}$  に対して、 $\Gamma_{K,IJ} \equiv \frac{1}{2}(\partial_I \gamma_{JK} + \partial_J \gamma_{KI} - \partial_K \gamma_{IJ})$  と定義される量である。空間の曲がり具合についての情報を含んでおり、空間が平坦ならば  $\Gamma_{K,IJ} = 0$  である。

### 3 共形場理論

ここでは共形場理論の基本事項と後に使う演算子積展開 (OPE) などの概念について述べておく。共形場理論はこの固定点上で実現していると考えられている場の理論である。この固定点上では場の理論の対称性が、多くの理論が有するポアンカレ対称性から格上げされ共形対称性を有していると考えられている。固定点上ではポアンカレ対称性<sup>\*19</sup>に特殊共形変換に対する不変性が追加された、共形対称性が実現している。[\[31\]](#)などを発端として、共形場理論は物理量の臨界性を議論する際に重要な役割を果たしてきた。

#### 3.1 共形場理論の概要

次に  $d(> 2)$  次元<sup>\*20</sup>ミンコフスキー時空上の共形場理論におけるスカラープライマリー場の性質について触れておく<sup>\*21\*22</sup>。

まず一般的に共形場理論は、時空の計量  $\gamma_{\mu\nu}(\vec{x})$ <sup>\*23</sup>をワイル変換<sup>\*24</sup>させるような微分同相写像<sup>\*25</sup>によって不変な場の理論である。このような変換を共形変換といい、時空上の各点  $\vec{x}$  でベクトル間の角度を局所的に保存する等角写像である。

$$\gamma_{\mu\nu}(\vec{x}) \rightarrow \gamma'_{\mu\nu}(\vec{x}') = \Omega(\vec{x})\gamma_{\mu\nu}(\vec{x}) \quad (3.1)$$

(3.1) で与えられる変換で移り変わる理論を同一視できる理論が共形場理論である。通常の場合の理論ではローレンツ対称性に並進対称性を加えたポアンカレ対称性を課することが多いが、さらに線素のスケール変換を含んだ対称性が共形対称性である<sup>\*26</sup>。(3.1) の左辺を書き換えると、

$$\gamma_{\mu\nu}(\vec{x}) \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} = \Omega(\vec{x})\gamma_{\alpha\beta}(\vec{x}) \quad (3.2)$$

と表すことができる (例えば [\[31\]](#), [\[35\]](#) などを参照されたい)。

<sup>\*19</sup> ポアンカレ対称性はローレンツ対称性と並進対称性を合わせた対称性である。特殊相対論が適用される様な相対論的な場の理論に対して、ローレンツ変換  $SO(1, d-1)$  (ローレンツブーストの自由度  $d-1$  個、空間回転の自由度  $(d-1)(d-2)/2$  個) に対する不変性を要請することが多い。これに加え、通常は並進変換に対する不変性を理論に課す。

<sup>\*20</sup> 共形場理論は定義される時空の次元  $d$  によって性質が大きく異なる。 $d=2$  の場合は理論が持つ共形対称性の代数が無限次元のリー代数 (ピラソロ代数) となること [\[44\]](#) や、2次元特有の解析上の性質により対称性から決定できることが  $d>2$  の場合よりも多い。ここでは本論文の解析の対象となる  $d \geq 2$  の場合を想定して、時空の次元が  $d>2$  でも成り立つ様な共形場理論の性質をまとめた。

<sup>\*21</sup> 表記法の都合上、この節だけ例外的に  $d$  次元の境界方向の添字にギリシャ文字を使うことにする ( $x^\mu, x^\nu, \dots \in \mathbb{R}^d$ )。またユークリッド化された共形場理論については [\[45\]](#) を参照されたい。ユークリッド化された共形場理論の基本的な性質はミンコフスキー時空での結果を解析接続して得られるものとする。

<sup>\*22</sup> 共形場理論の基本事項については [\[31\]](#), [\[35\]](#)、和書としては [\[44\]](#) などを参照されたい。

<sup>\*23</sup> ミンコフスキー時空の場合、計量は時空の点によらず

$$\gamma_{\mu\nu}(\vec{x}) = \eta_{\mu\nu} = \text{diag.}(-1, +1, +1, \dots, +1)$$

となる。 $\text{diag.}(\dots)$  は対角成分のみ値を持つことを意味する。今の場合対角成分には  $+1$  が  $d-1$  個並ぶ。

<sup>\*24</sup> ワイル変換とは計量  $\gamma_{\mu\nu}$  を時空の各点でスケールさせる変換のことである。任意関数  $\sigma(\vec{x})$  を用いて  $\gamma_{\mu\nu}(\vec{x}) \rightarrow \gamma'_{\mu\nu}(\vec{x}') = e^{\sigma(\vec{x})}\gamma_{\mu\nu}(\vec{x})$  と表される [\[44\]](#)。

<sup>\*25</sup> 2つの多様体  $\mathcal{M}$  と  $\mathcal{N}$  の間の写像  $f$  が存在するとする。そして写像で  $\mathcal{M}$  上の点  $p$  が  $\mathcal{N}$  上の点  $f(p)$  に移される。点  $P$  と点  $f(p)$  のそれぞれの近傍に対応する局所的な座標表示  $X(p) \in \mathbb{R}^m, Y(f(p)) \in \mathbb{R}^n$  が定義できる場合、 $X(p)$  から  $Y(f(p))$  への写像は  $Y \circ f \circ X^{-1}$  と表される。写像  $Y \circ f \circ X^{-1}$  が無限回微分可能 ( $C^\infty$  級) であり、かつその逆写像も無限回微分可能であれば、多様体間の写像  $f$  は微分同相写像という [\[38\]](#)。

<sup>\*26</sup> isometry (等長変換) は線素を不変にする変換である。故に一般相対性理論で扱われる一般座標変換は等長変換である。共形対称性はその意味で一般座標変換よりも大きい対称性といえる。

一般座標変換を生成する生成子は、計量のリー微分<sup>\*27</sup>が0であるという要請から導かれたキリング方程式の解(キリングベクトル)によって与えられる。共形変換はその拡張として定義される。一般座標変換の場合と異なる点は共形変換の場合はリー微分が0でないことである。共形変換の生成子は以下の様な共形キリング方程式の解である共形キリングベクトル  $\xi_\mu(\vec{x})$  によって与えられる<sup>\*28</sup>。

$$\nabla_\mu \xi_\nu(x) + \nabla_\nu \xi_\mu(x) = \frac{2}{d} \gamma_{\mu\nu} \nabla_\rho \xi^\rho \quad (3.3)$$

ミンコフスキー時空  $\gamma_{\mu\nu}(\vec{x}) = \eta_{\mu\nu}$  の場合にこの方程式を解き、共形キリングベクトルを求めると共形変換群の生成子を得る<sup>\*29</sup>[35]。

$$\text{並進: } P_\mu = \partial_\mu \quad (3.4)$$

$$\text{ローレンツ変換: } M_{\mu\nu} = x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu \quad (3.5)$$

$$\text{スケール変換 (dilatations): } D = x^\mu \partial_\mu \quad (3.6)$$

$$\text{特殊共形変換: } K_\mu = x_\nu x^\nu \partial_\mu - 2x_\mu x^\nu \partial_\nu \quad (3.7)$$

そしてこれらの生成子は以下の共形代数を満たす<sup>\*30</sup>。

$$\begin{aligned} [D, P_\mu] &= -iP_\mu, \quad [D, K_\mu] = iK_\mu, \quad [K_\mu, P_\nu] = 2i(\eta_{\mu\nu}D + M_{\mu\nu}), \\ [K_\rho, M_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu}K_\nu - \eta_{\rho\nu}K_\mu), \quad [P_\rho, M_{\mu\nu}] = i(\eta_{\rho\mu}P_\nu - \eta_{\rho\nu}P_\mu), \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= -i(\eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} + \eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$d$ 次元共形場理論の場合(3.4)~(3.6)を合わせ1つの行列として表した共形変換群は、(3.4)~(3.8)をリー代数<sup>\*31</sup>を満たす生成子として、 $SO(2, d)$ と表現される。因みにローレンツ変換の生成子  $M_{\mu\nu}$  はそのうちの部分代数を成しており、群としては  $SO(1, d-1)$ と表される。

次に共形変換に対して性質良く変換するプライマリー場について述べる。プライマリー場は共形変換に対す

<sup>\*27</sup> 多様体上に1つのパラメータ  $t$  特徴付けられる曲線  $f^\mu(t)$  があるとする。ベクトル場  $A_\mu(\vec{x})$  のリー微分は、その1パラメータ曲線に沿った移動 ( $x'^\mu = x^\mu + \epsilon \xi^\mu(\vec{x})$ ) によって生じる変化量  $A_\mu(\vec{x}')dx'^\mu - A_\mu(\vec{x})dx^\mu$  を表す量として定義される。ここで  $\xi^\mu(\vec{x}) \equiv \partial f^\mu / \partial t$  は曲線の接ベクトルである。これより  $\epsilon$  の1次の変化量は  $\mathcal{L}_\xi A_\mu = \partial_\nu A_\mu \xi^\nu + \partial_\mu \xi^\nu A_\nu$  と表される。この1パラメータ曲線が、時空の持つ対称性の方向に存在するとする。一般相対論では等長変換を対称性を持つ多様体を扱うので、計量はこの1パラメータ曲線に沿って変化しない。つまり計量のリー微分は0でなければならない。 $\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0$ 。これを満たすベクトル場  $\xi_\mu$  をキリングベクトルという[46]。キリングベクトルは時空の対称性についてのリー代数を構成する。共形対称性がある系は等長変換よりも大きな対称性を有しているので、計量  $\gamma_{\mu\nu}$  のリー微分は0でなくても良い。

<sup>\*28</sup>  $\nabla^\mu$  は計量  $\gamma_{\mu\nu}$  における共変微分である。曲がった時空において、時空の脚を持った量(ベクトル場やテンソル場)に作用する微分を正しく扱うには接続という量を導入し、微分演算子を定義する。ベクトル場  $a_\mu(\vec{x})$  の共変微分は以下の様になる;  
 $\nabla_\mu a_\nu(\vec{x}) = \partial_\mu a_\nu(\vec{x}) - \Gamma_{\mu\nu}^\rho a_\rho(\vec{x})$ 。ここで  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \gamma^{\rho\sigma} \Gamma_{\sigma,\mu\nu}$ ,  $\Gamma_{\sigma,\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(\partial_\mu \gamma_{\nu\sigma} + \partial_\nu \gamma_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \gamma_{\mu\nu})$  は計量  $\gamma_{\mu\nu}$  に対する接続(クリストフェル記号)である。当然ミンコフスキー時空  $\gamma_{\mu\nu}(\vec{x}) = \eta_{\mu\nu}$  の場合は時空が曲がっていないので  $\Gamma_{\sigma,\mu\nu} = 0$  である。

<sup>\*29</sup> 特殊共形変換とは反転変換とスケール変換を合成して得られる変換。有限の大きさの変換則は並進パラメータ  $b^\mu(x'^\mu = x^\mu + b^\mu)$  を用いて次の様に表される。

$$x'^\mu = \frac{x^\mu + b^\mu x^2}{1 + 2\vec{b} \cdot \vec{x} + b^2 x^2}$$

<sup>\*30</sup>  $[A, B] = AB - BA$  交換関係であり、反対称積を意味する。

<sup>\*31</sup> ある群  $G$  の元がパラメータ  $\alpha$  によって  $U(\alpha) = e^{i\alpha\theta_a t^a} \in G$  と与えられているとする。 $t^a$  は群  $G$  が生成する無限小変換の生成子である。群の定義より2つの元の積もまた  $G$  の元でなければならないため、 $U(\alpha_1) \circ U(\alpha_2) \in G$  である必要がある。このとき生成子に要請される代数関係  $[t^a, t^b] = f^{abc} t^c$  をリー代数という[43]。また生成子の定数倍や和もリー代数を満たさねばならない。

る変換則によって定義される<sup>\*32</sup>。プライマリー場は、スカラー場  $O(\vec{x})$  の場合、任意の共形変換に対して次のように振る舞う場と定義される。

$$O(\vec{x}) \rightarrow O'(x') = \Omega(\vec{x})^{\frac{\Delta}{2}} O(\vec{x}) \quad (3.9)$$

$\Delta$  は共形次元と呼ばれるもので演算子  $O(\vec{x})$  の共形変換を特徴づける量である<sup>\*33</sup>。 $dx^\mu$  の共形次元は 1 である。またプライマリー場が  $n$  階のテンソル場のときは、 $O_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(\vec{x})dx^{\mu_1}dx^{\mu_2}\cdots dx^{\mu_n}$  が一つのスカラー量としてふるまうことと通常のテンソルの変換測を考慮して、

$$O_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(\vec{x}) \rightarrow O'_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(\vec{x}') = \Omega(\vec{x})^{\frac{\Delta-n}{2}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\mu_1}} \frac{\partial x^{\nu_2}}{\partial x'^{\mu_2}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_n}}{\partial x'^{\mu_n}} O_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(\vec{x}) \quad (3.10)$$

と変換する。これらのことからプライマリー場の  $m$  点相関関数の変換測がわかる。スカラー場の場合と  $n_i$  階テンソル場の場合でそれぞれ、

$$\langle O_{(1)}(\vec{x}'_1) O_{(2)}(\vec{x}'_2) \cdots O_{(k)}(\vec{x}'_m) \rangle = \prod_{i=1}^m \Omega(\vec{x})^{\frac{\Delta_i}{2}} \langle O_{(1)}(\vec{x}_1) O_{(2)}(\vec{x}_2) \cdots O_{(k)}(\vec{x}_m) \rangle \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \langle O_{(1)\mu_1\cdots\mu_{n(1)}}(\vec{x}'_1) \cdots O_{(m)\mu_1\cdots\mu_{n(m)}}(\vec{x}'_m) \rangle \\ = \prod_{i=1}^m \Omega(\vec{x})^{\frac{\Delta_i - m}{2}} (\vec{x}_i) \Lambda_{\mu_1\cdots\mu_{n_i}}^{\nu_1\cdots\nu_{n_i}} \langle O_{(1)\nu_1\cdots\nu_{n(1)}}(\vec{x}_1) \cdots O_{(m)\nu_1\cdots\nu_{n(m)}}(\vec{x}_m) \rangle \\ \Lambda_{\mu_1\cdots\mu_{n_i}}^{\nu_1\cdots\nu_{n_i}}(\vec{x}_i) \equiv \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\mu_1}} \frac{\partial x^{\nu_2}}{\partial x'^{\mu_2}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_{n_i}}}{\partial x'^{\mu_{n_i}}} \end{aligned} \quad (3.12)$$

と共変的にふるまうことが分かる。

次にプライマリー場の相関関数について述べておく。プライマリー場の場合は理論の持つ共形対称性により相関関数の形が決定される。スカラー場のプライマリー場について、1 点関数、2 点関数、3 点関数がそれぞれ対称性からどの様に決定されるかを見ていく。ここで期待値を計算する際の真空  $|0\rangle$  は共形不変性を持つとする。

### 1 点関数

まず 1 点関数についてはスケール変換  $S$ ;  $x^\mu \xrightarrow{S} x'^\mu = x^\mu/b$  ( $b \neq 1$ ) を行ってみる。変換前にゼロでない真空期待値が  $\langle O(\vec{x}) \rangle = \mu \neq 0$  が存在したと仮定したとき、真空期待値  $\mu$  は

$$\langle O(\vec{x}) \rangle = \mu \xrightarrow{S} b\mu \quad (3.13)$$

<sup>\*32</sup>  $SO$  は特殊直交群を表す。直交群は、回転変換に代表される様な直交変換が成す群である。“特殊”は変換の群の元を行列表示したとき行列式が 1 となることを意味する。同時に生成子の行列のトレースが 0 になることを意味する。例えば特殊直交群  $SO(d)$  は、 $d$  次元空間の半径一定面

$$\sum_{i=1}^d x_i^2 = R^2$$

の上を変換で移り変わる ( $d$  次元空間中の  $d-1$  次元球面上を移り変わる) 変換と言える。同様にして、特殊直交群  $SO(2, d)$  とは  $d+2$  次元空間のうち、2 つの方向の符号を反転させて定義する半径一定面

$$\sum_{i=1}^d x_i^2 - x_{d+1}^2 - x_{d+2}^2 = R^2$$

の上を移り変わる変換と言える。

<sup>\*33</sup> 共形次元はスケール次元とも呼ばれる。 $\Delta$  は見ている系をスケール変換した場合、演算子  $O$  のスケールの仕方を表している。



と変換する<sup>\*34</sup>。一方で (3.9) より、先に演算子をスケール変換すると  $\Omega(\vec{x}) = b^2$  と明らかなので、

$$O'(\vec{x}') = (b^2)^{\Delta/2} O(\vec{x}) = b^\Delta O(\vec{x}) \quad (3.14)$$

と変換する。つまり真空期待値としては、

$$\langle O(\vec{x}) \rangle \xrightarrow{S} \langle O'(\vec{x}') \rangle = b^\Delta \mu \neq b\mu \quad (3.15)$$

となる。結果はスケール変換と期待値を計算する順番に依存しないはずだから、 $\mu \neq 0$  では (3.13) と (3.15) の結果は矛盾する。すなわち両者が等しくなるのは  $\mu = 0$  のときであり、平坦な時空において物理的なスケールが存在しない時である。よってプライマリー場の 1 点関数は 0 であることが導かれる。

## 2 点関数

次に 2 点関数について見ていく。ここでは二つのスカラープライマリー場が同じ共形次元  $\Delta$  を持つ場合について考える。2 点関数は平坦時空の場合、次元解析と並進対称性から  $\langle O(x_1)O(x_2) \rangle \propto 1/(x_1 - x_2)^{2\Delta}$  という形が予想される。実際にこれを確かめたい。2 点関数は特殊共形変換の特別な場合である反転変換  $R$  を用いることで対称性のみから決定される。反転変換が 2 回行くと恒等変換になることから反転変換はその自体の逆変換と等価である ( $R = R^{-1}$ )。平坦な時空の場合で示す。反転変換は

$$x^\mu \xrightarrow{R} x'^\mu = \frac{x^\mu}{x^2}, \quad (3.16)$$

で与えられる。このことから反転変換は半径 1 の単位超球面  $x^2 = 1$  の内側の点を外側の点に移動させる写像である。これをプライマリー場の 2 点関数に作用すると変換則 (3.10) より、

$$\langle O(\vec{x}_1)O(\vec{x}_2) \rangle \xrightarrow{R} \langle O'(\vec{x}'_1)O'(\vec{x}'_2) \rangle = (x_1^2 x_2^2)^\Delta \langle O(\vec{x}_1)O(\vec{x}_2) \rangle \quad (3.17)$$

となる。ここで場の関数形は変換せず引数  $x$  だけ反転変換した 2 点関数  $\langle O(\vec{x}'_1)O(\vec{x}'_2) \rangle$  は真空の共形不変性から、

$$\langle O'(\vec{x}'_1)O'(\vec{x}'_2) \rangle = \langle O(\vec{x}'_1)O(\vec{x}'_2) \rangle \quad (3.18)$$

を満たすことより、変換後の 2 点関数 (3.17) の左辺は、

$$\langle O_1(\vec{x}'_1)O_2(\vec{x}'_2) \rangle = (x_1^2 x_2^2)^\Delta \langle O(\vec{x}_1)O(\vec{x}_2) \rangle \quad (3.19)$$

という変換則を得る。2 点関数のうち関数形ではなく座標のみを変換したときに (3.19) の変換則をみたすものを探せば良い。ここで平坦な時空での 2 点間の距離の 2 乗の逆数  $1/(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2$  は反転変換の下で、

$$\frac{1}{(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2} \xrightarrow{R} \frac{1}{(\vec{x}'_1 - \vec{x}'_2)^2} = \frac{x_1^2 x_2^2}{(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2}, \quad (3.20)$$

となることと (3.19) の両辺を見比べると、結局変換後の 2 点関数は、

$$\langle O(\vec{x}_1)O(\vec{x}_2) \rangle = \frac{c_\Delta}{(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^{2\Delta}}, \quad (3.21)$$

<sup>\*34</sup> スケール変換  $x^\mu \xrightarrow{S} x'^\mu = x^\mu/b$  は、系の長さを測る目盛りが小さくなることを意味する。この変換のもとでは、系の持つ物理的なスケール  $\mu$  は  $b$  倍だけ大きく見える。

という関数形に決まることになる。これは初めに次元解析と並進対称性の議論から予想した形と一致する。<sup>\*35</sup>

### 3 点関数

同様に 3 点関数に反転変換を行う。

$$\langle O'_{\Delta_1}(\vec{x}'_1) O'_{\Delta_2}(\vec{x}'_2) O'_{\Delta_3}(\vec{x}'_3) \rangle = (x_1)^{2\Delta_1} (x_2)^{2\Delta_2} (x_3)^{3\Delta_3} \langle O_{\Delta_1}(\vec{x}_1) O_{\Delta_2}(\vec{x}_2) O_{\Delta_3}(\vec{x}_3) \rangle \quad (3.22)$$

変換則 (3.20) を用い 3 点関数の関数形を求める。3 点関数が演算子の挿入点の座標の差の関数として表されることを期待すると以下の様な関数が反転変換されていると考えられる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{x}'_1 - \vec{x}'_2|^{2a}} \frac{1}{|\vec{x}'_2 - \vec{x}'_3|^{2b}} \frac{1}{|\vec{x}'_3 - \vec{x}'_1|^{2c}} &= \frac{(x_1)^{2a} (x_2)^{2a} (x_2)^{2b} (x_3)^{2b} (x_3)^{2c} (x_1)^{2c}}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^{2a} |\vec{x}_2 - \vec{x}_3|^{2b} |\vec{x}_3 - \vec{x}_1|^{2c}} \\ &= \frac{(x_1)^{2(a+c)} (x_2)^{2(a+b)} (x_3)^{2(b+c)}}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^{2a} |\vec{x}_2 - \vec{x}_3|^{2b} |\vec{x}_3 - \vec{x}_1|^{2c}} \end{aligned} \quad (3.23)$$

これが変換 (3.22) を満たすことを要請して定数  $a, b, c$  を決定すると、

$$\begin{aligned} 2a &= \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 \\ 2b &= \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1 \\ 2c &= \Delta_3 + \Delta_1 - \Delta_2 \end{aligned} \quad (3.24)$$

となることが分かる。故に 3 点関数が得られる。

$$\langle O_{\Delta_1}(\vec{x}_1) O_{\Delta_2}(\vec{x}_2) O_{\Delta_3}(\vec{x}_3) \rangle = \frac{c_{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3}}{x_{12}^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3} x_{23}^{\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1} x_{31}^{\Delta_3 + \Delta_1 - \Delta_2}} \quad (3.25)$$

### 4 点関数

4 点関数は後の解析でも現れる共形不変量  $s, t$  の関数  $F(s, t)$  を用いて以下の様に表される [14]。

$$\begin{aligned} \langle O_{\Delta_1}(\vec{x}_1) O_{\Delta_2}(\vec{x}_2) O_{\Delta_3}(\vec{x}_3) O_{\Delta_4}(\vec{x}_4) \rangle &= \frac{1}{x_{13}^{\Delta_1 + \Delta_3} x_{24}^{\Delta_2 + \Delta_4}} F(s, t) \\ s &= \frac{1}{2} \frac{x_{13}^2 x_{24}^2}{x_{12}^2 x_{34}^2 + x_{14}^2 x_{23}^2}, \quad t = \frac{x_{12}^2 x_{34}^2 - x_{14}^2 x_{23}^2}{x_{12}^2 x_{34}^2 + x_{14}^2 x_{23}^2} \end{aligned} \quad (3.26)$$

---

<sup>\*35</sup> (3.20) を確認してみる。実際に変換すると、

$$\frac{1}{(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2} \xrightarrow{R} \frac{1}{(\vec{x}'_1 - \vec{x}'_2)^2} = \frac{1}{\left( \frac{\vec{x}_1}{(\vec{x}_1)^2} - \frac{\vec{x}_2}{(\vec{x}_2)^2} \right)^2} = \frac{(\vec{x}_1)^4}{\left( \vec{x}_1 - \frac{(\vec{x}_1)^2}{(\vec{x}_2)^2} \vec{x}_2 \right)^2}$$

となる。ここで分母について余弦定理  $(\vec{x} - \vec{y})^2 = (\vec{x})^2 + (\vec{y})^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{y}$  より、

$$\begin{aligned} \left( \vec{x}_1 - \frac{(\vec{x}_1)^2}{(\vec{x}_2)^2} \vec{x}_2 \right)^2 &= (\vec{x}_1)^2 + \left( \frac{(\vec{x}_1)^2}{(\vec{x}_2)^2} \right)^2 (\vec{x}_2)^2 - 2\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 \frac{(\vec{x}_1)^2}{(\vec{x}_2)^2} = \frac{(\vec{x}_1)^2}{(\vec{x}_2)^2} ((\vec{x}_1)^2 + (\vec{x}_2)^2 - 2\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2) \\ &= \frac{(\vec{x}_1)^2}{(\vec{x}_2)^2} (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2 \end{aligned}$$

となる (内積は  $\vec{x} \cdot \vec{y} = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$  の意)。ゆえに以下の変換を得る。

$$\frac{1}{(\vec{x}'_1 - \vec{x}'_2)^2} = \frac{(\vec{x}_1)^4}{\left( \vec{x}_1 - \frac{(\vec{x}_1)^2}{(\vec{x}_2)^2} \vec{x}_2 \right)^2} = \frac{(\vec{x}_1)^4}{\frac{(\vec{x}_1)^2}{(\vec{x}_2)^2} (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2} = \frac{(\vec{x}_1)^2 (\vec{x}_2)^2}{(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2}$$



次にストレストンソル  $T^{\mu\nu}$ <sup>\*36</sup>について考える。ストレストンソルの定義は作用  $S$  の計量に関する変分で与えられる。

$$T^{\mu\nu}(\vec{x}) \equiv \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta S}{\delta \gamma_{\mu\nu}(\vec{x})} \quad (3.27)$$

つまり、計量に関する作用の変分  $\delta S$  が、

$$\delta S = \int d^d x \sqrt{-\gamma} T^{\mu\nu} \delta \gamma_{\mu\nu} \quad (3.28)$$

と書けることを意味する<sup>\*37</sup>。この計量の変分が共形変換によって生じたものとする。共形場理論では共形変換に対して作用が不変であることから (3.28) は 0 となることを要請する ( $\delta S = 0$ )。 (3.1) において任意関数  $\Omega(\vec{x})$  を別の任意関数  $\sigma(\vec{x})$  で  $\Omega(\vec{x}) = e^{\sigma(\vec{x})}$  と表すと、計量の変分は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \gamma'_{\mu\nu}(\vec{x}') &= \gamma_{\mu\nu}(\vec{x}) + \delta \gamma_{\mu\nu}(\vec{x}) \simeq (1 + \sigma(\vec{x})) \gamma_{\mu\nu}(\vec{x}) \\ \Leftrightarrow \delta \gamma_{\mu\nu}(\vec{x}) &= \sigma(\vec{x}) \gamma_{\mu\nu}(\vec{x}), \end{aligned} \quad (3.29)$$

よってこれを (3.28) に代入すると、

$$0 = \delta S = \frac{2}{d} \int d^d x \sqrt{-\gamma} T^{\mu\nu} \sigma(x) \gamma_{\mu\nu}(x) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = T^\mu_\mu \quad (3.30)$$

となる。つまり共形場理論では (少なくとも古典論の範囲で) ストレストンソルのトレースがゼロになる必要がある<sup>\*38</sup>。さらに共形変換による計量の変分は共形キリング方程式を満たすため、

$$\delta \gamma_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu \quad (3.31)$$

となる。これを (3.28) に代入するとストレストンソルは時空の脚  $(\mu, \nu)$  の入れ替えについて対称だから、

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= 2 \int d^d x \sqrt{-\gamma} T^{\mu\nu} \nabla_\mu \xi_\nu \\ &= 2 \int d^d x \sqrt{-\gamma} [\nabla_\mu (T^{\mu\nu} \xi_\nu) - (\nabla_\mu T^{\mu\nu}) \xi_\nu], \end{aligned} \quad (3.32)$$

となる。3つ目の等号で部分積分をした。最右辺  $[\cdot]$  内第1項はガウスの発散定理より無限遠における表面積分に帰着し、通常の場の理論でよくあるように無限遠で場の値が0に落ちることを仮定するとこの表面積分はゼロになる。第2項のみが残り、ゼロでない共形キリングベクトルに対して等式が成り立つためにはストレストンソルの発散が0になることが必要である。すなわち、共形対称性を持つ理論は

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (3.33)$$

を満たさねばならない (ネーターカレントの保存則)。

<sup>\*36</sup> ストレストンソルはエネルギー運動量テンソルともいわれる。系の力学変数が連続対称性を持つとき、保存カレント (ネーターカレント) が存在する (ネーターの定理 [42])。共形対称性に対するネーターカレントがストレストンソルである。

<sup>\*37</sup> ここで  $d^d x \sqrt{-\gamma}$  は時空の 不変体積要素であり、 $\gamma \equiv \det(\gamma_{\mu\nu})$  は計量の行列式を意味する。根号の中の符号は時間の成分が負符号であることからその行列式を正の値にするためにつけられている。

<sup>\*38</sup> 量子論を考えるとストレストンソルのトレースの一点関数が0でなくなることがある。これを共形アノマリー という [44]。

### ワード-高橋恒等式

次にワード-高橋恒等式について触れておく。ワード-高橋恒等式は理論が持つ対称性を相関関数の関係式として表したものである。平坦な時空上の共形場理論において一般に演算子  $O(\vec{x})$  の相関関数は経路積分において以下のように与えられる<sup>\*39</sup>。

$$\left\langle O_1(\vec{x}_1) \cdots O_n(\vec{x}_n) \right\rangle \equiv \int \mathcal{D}\phi \ O_1(\vec{x}_1) \cdots O_n(\vec{x}_n) e^{iS[\phi]} \quad (3.34)$$

共形変換により引き起こされた演算子の変化が、連続パラメータ  $\epsilon(\vec{x})$  を用いて  $O(\vec{x}) \rightarrow O(\vec{x}') = O(\vec{x}) + \epsilon(\vec{x})\delta O(\vec{x})$  と表されたとする。この変換に対する積分測度の不変性を仮定する。理論が共形対称性を持つならばこの変換に対して相関関数は不変でなければならない。つまり相関関数の変分の1次はゼロである必要がある。

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\phi \ O_1(\vec{x}_1) \cdots O_n(\vec{x}_n) e^{iS} &= \sum_i \int \mathcal{D}\phi O_1(\vec{x}_1) \cdots [O_i(\vec{x}_i) + \epsilon(\vec{x}_i)\delta O_i(\vec{x}_i)] \cdots O_n(\vec{x}_n) e^{i(S+\delta S)} \\ \Leftrightarrow 0 &= \int \mathcal{D}\phi \ O_1(\vec{x}_1) \cdots O_n(\vec{x}_n) (i\delta S) e^{iS} + \sum_i \int \mathcal{D}\phi \ O_1(\vec{x}_1) \cdots \epsilon(\vec{x}_i) \delta O_i(\vec{x}_i) \cdots O_n(\vec{x}_n) e^{iS} \end{aligned} \quad (3.35)$$

ここで  $\delta S$  はこの変換に対するネーターカレント  $j^\mu(\vec{x})$  を用いて、 $\delta S = \int d^d x \ \epsilon(\vec{x}) \partial_\mu j^\mu(\vec{x})$  と書ける。このことから (3.35) は、

$$\int \mathcal{D}\phi \left( \int d^d x \ \epsilon(\vec{x}) \partial_\mu j^\mu(\vec{x}) \right) O_1(\vec{x}_1) \cdots O_n(\vec{x}_n) e^{iS} = \sum_i \int \mathcal{D}\phi \ O_1(\vec{x}_1) \cdots \left( \epsilon(\vec{x}_i) \delta O_i(\vec{x}_i) \right) \cdots O_n(\vec{x}_n) e^{iS} \quad (3.36)$$

と表せる。この右辺に  $\int d^d x \ \delta^d(\vec{x} - \vec{x}_i) = 1$  を挿入すると微小パラメータ  $\epsilon$  を除去できて、

$$\begin{aligned} i \int \mathcal{D}\phi \left( \int d^d x \ \epsilon(\vec{x}) \partial_\mu j^\mu(\vec{x}) \right) O_1(\vec{x}_1) \cdots O_n(\vec{x}_n) e^{iS} \\ = \sum_i \int \mathcal{D}\phi \int d^d x \ \delta^d(\vec{x} - \vec{x}_i) O_1(\vec{x}_1) \cdots \left( \epsilon(\vec{x}) \delta O_i(\vec{x}_i) \right) \cdots O_n(\vec{x}_n) e^{iS} \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\Leftrightarrow \partial_\mu \left\langle j^\mu(\vec{x}) O_1(\vec{x}_1) \cdots O_n(\vec{x}_n) \right\rangle = -i \sum_i \delta^d(\vec{x} - \vec{x}_i) \left\langle O_1(\vec{x}_1) \cdots \delta O_i(\vec{x}_i) \cdots O_n(\vec{x}_n) \right\rangle \quad (3.38)$$

を得る。これが Ward-高橋恒等式である。対称性についてのカレントがストレストensorの場合、共形場理論の対称性を相関関数の形に反映した共形ワード・高橋恒等式となる。本論文の解析では用いないが、この恒等式は、共形対称性から相関関数の具体形を制限することができるため、具体的な共形場理論の解析において強力な道具となる。

## 3.2 演算子積展開 (OPE)

共形場理論において相関関数を求める際に演算子積展開 (OPE)[8] が重要な概念となる。2つの演算子間の距離が非常に近い極限では、それらが混合して一つの演算子の様に振る舞うことが考えられる。その混ざり方を決めるのが演算子積展開である。

<sup>\*39</sup>  $\phi(\vec{x})$  を基本的な場として、 $O(\vec{x})$  は  $\phi(\vec{x})$  で構成される複合演算子とする。

今、ある演算子  $O(\vec{x})$  が、演算子の基底となる演算子  $\Phi_i(\vec{x})$  の線形結合でかけるとする。この基底をスケーリング演算子という。スケール変換  $\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \vec{x}/b$  に対して  $\Phi'_i(\vec{x}') = b^{\Delta_i} \Phi_i(\vec{x})$  と振る舞い、その相関関数は

$$\langle \Phi_i(\vec{x}) \Phi_j(\vec{y}) \rangle = \frac{c_{ij}}{|\vec{x} - \vec{y}|^{\Delta_i + \Delta_j}} \quad (3.39)$$

となる様な演算子である。

$$O(\vec{x}) = \sum_i c_i \Phi_i(\vec{x}) \quad (3.40)$$

これより  $\vec{x} \sim \vec{y}$  の場合も、スケーリング演算子の非局所的な積  $\Phi_i(\vec{x}) \Phi_j(\vec{y})$  が基底であるスケーリング演算子で展開できるので、

$$\Phi_i(\vec{x}) \Phi_j(\vec{y}) \sim \sum_k c_{ijk}(\vec{x}, \vec{y}) \Phi_k(\vec{x}) \quad (3.41)$$

と表される。(3.39) の振る舞いは  $\Phi_i(\vec{x})$  のスケール変換によって決定される。(3.41) の右辺が左辺と同じ振る舞いをするためには、展開係数  $c_{ijk}(\vec{x}, \vec{y})$  が

$$c_{ijk}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{c_{ijk}}{|\vec{x} - \vec{y}|^{\Delta_i + \Delta_j - \Delta_k}} \quad (3.42)$$

という形をとることが必要である。これを用いると、 $\vec{x} \sim \vec{y}$  に対してスケーリング演算子の非局所的な積が以下の式で表される。

$$\Phi_i(\vec{x}) \Phi_j(\vec{y}) \sim \sum_k \frac{c_{ijk}}{|\vec{x} - \vec{y}|^{\Delta_i + \Delta_j - \Delta_k}} \Phi_k(\vec{y}) \quad (3.43)$$

ここで  $c_{ijk}$  を OPE 係数という。これは 3 点関数 (3.25) に現れた係数  $c_{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3}$  と等価である。演算子積展開 (3.43) を用いることで、 $c_{ijk}$  を知っていれば  $n$  点関数が  $n-1$  点関数で展開できる。演算子積展開の利点はより計算しやすい相関関数に帰着できることである。

### 3.3 double OPE 極限で見たい物理

本論文のもう一つ目標は共形多様体の幾何学的情報と、exactly marginal 演算子とその 2 重トレース演算子の間の OPE 係数や 2 重トレース演算子の異常次元を理論の詳細に立ち入らず一般的な議論によって関係づけることである。ここでは本論文の解析で用いる exactly marginal 演算子の double OPE 極限とそこから見たい物理について述べる。

一般に共形次元  $\Delta$  の演算子  $O_\Delta(\vec{x})$  の OPE を考えると複雑な演算子の混合の結果、その右辺には様々な演算子が現れると考えられる。その中には演算子  $O_\Delta$  の 2 重トレース演算子も含まれる。

$$O_\Delta(\vec{x}) O_\Delta(\vec{y}) \sim \frac{c_\Delta}{(\vec{x} - \vec{y})^{2\Delta}} + \frac{c_{\Delta\Delta\Delta}}{(\vec{x} - \vec{y})^\Delta} O_\Delta(\vec{x}) + \sum_a \frac{c_{a\Delta\Delta}}{(\vec{x} - \vec{y})^{2\Delta - \Delta_a}} O_a + \dots \quad (3.44)$$

3.4 節で述べる様に exactly marginal 演算子同士の OPE はゼロになる。しかし、exactly marginal 演算子と、その複合演算子である 2 重トレース演算子との間にも OPE が存在する。2 重トレース演算子  $O_a$  の共形次元  $\Delta_a$  はそれを構成する演算子の共形次元の和で近似できるが、厳密には等しくなく異常次元  $\gamma_a$  の分だけ異なる。

$$\Delta_a = \sum_i \Delta_i + \gamma_a \quad (3.45)$$

1 章の冒頭で、4 次元  $\mathcal{N} = 4$  超対称ゲージ理論では、 $\text{tr}FF$ ,  $\text{tr}F\tilde{F}$  が exactly marginal 演算子であることを紹介した。これらをそれぞれの演算子を  $O_D = \text{tr}FF$ ,  $O_A = \text{tr}F\tilde{F}$  と表すことにする<sup>\*40</sup>。またそれらの 2 重トレース演算子との OPE 係数を  $C_{DA:DA}$  と表すことにする<sup>\*41</sup>。

$$O_D(\vec{x})O_A(\vec{y}) \sim \frac{C_{DA:DA}}{(\vec{x} - \vec{y})^{2\Delta - \Delta_{DA}}} O_{DA:DA} \quad (3.46)$$

ここで  $O_D$  と  $O_A$  の相関を測る 4 点関数について double OPE 極限を取ることを考える。その結果、4 点関数には  $O_D$ ,  $O_A$  と  $O_{DA:DA}$  との OPE 係数が 2 つ現れる<sup>\*42</sup>。

$$\langle O_D O_A O_D O_A \rangle \sim \frac{C_{DA:DA}}{x_{12}^{-\gamma}} \frac{1}{x_{13}^{16+2\gamma}} \frac{C_{DA:DA}}{x_{34}^{-\gamma}}, \quad (3.47)$$

となる。特にこの系のゲージ群  $SU(N)$  の大きさ  $N$  が十分大きい時、OPE 係数は  $C_{DA:DA} = 1 + O(1/N^2)$  であり、異常次元は  $1/N^2$  のオーダーを持っていることが知られてる [14],[25]。

$$C_{DA:DA} = 1 + \frac{q}{N^2}, \quad \gamma = \frac{\delta}{N^2} \quad (3.48)$$

これより、4 点関数の double OPE 極限は、

$$\langle O_D O_A O_D O_A \rangle \sim \frac{1}{x_{13}^{16}} \left[ 1 + \frac{\delta}{N^2} \log \frac{x_{12}x_{34}}{(x_{13})^2} + \frac{q}{N^2} \right] \quad (3.49)$$

となる。 $q$  と  $\delta$  は未定乗数である。異常次元の具体的な値  $\delta$  を知るためには、強結合領域での計算が必要となる。4.1 章でも少し触れるが、AdS/CFT 対応が成り立っているのは共形場理論が強結合領域の場合である。つまり双対な重力理論において 4 点関数を  $1/N^2$  のオーダーの寄与まで解析することで、2 重トレース演算子の異常次元の強結合領域での情報が得られると期待される。実際 [25] では、 $\delta = -16$  という結果を得ており、共形場理論の非摂動論的結果を重力理論から導くことに成功している。本論文の 5.7 章では、この様な異常次元の非摂動論的な結果を、理論の詳細に依存しない形で求めている。

### 3.4 共形摂動論と exactly marginal 演算子

ここでは marginal 演算子の相関関数に含まれるコンタクト項を計算する手法 (共形摂動論) について述べる。共形摂動論とは、共形場理論の作用に摂動的に局所演算子  $O(\vec{x})$  の項を加え、その応答を調べる方法である [27],[28],[29]。

$$S_{\text{CFT}} \rightarrow S_{\text{CFT}} + \varphi \int d^d x O(\vec{x}) \quad (3.50)$$

加える演算子によっては共形対称性を破る。

ここで 2 次元の共形場理論を例にとり、marginal 演算子が exactly marginal 演算子であるための条件を共形摂動論を用いて見ていく。共形場理論の作用に演算子  $O$  によって生成される摂動  $\delta\varphi \int dz d\bar{z} O(z, \bar{z})$  を加えて作用を変形することを考える [9]。結合定数  $\varphi$  の摂動に対する、ある演算子  $\mathcal{O}$  の応答を見てみると、 $\delta\langle \mathcal{O} \rangle = \delta\varphi \langle \mathcal{O} \int dz d\bar{z} O(z, \bar{z}) \rangle$  と表される。ここで  $O(z, \bar{z})$  は共形ウェイト<sup>\*43</sup>  $(h, \bar{h}) = (1, 1)$  の marginal 演

<sup>\*40</sup> 双対な重力理論でデイルトン (dilaton) 場とアクシオン (axion) 場の相互作用する系に相当する。

<sup>\*41</sup> 演算子  $O_{DA:DA}$  は、演算子  $O_D$  と  $O_A$  の OPE をとった結果に現れる 2 重トレース演算子を意味するものとする。

<sup>\*42</sup>  $x_{ij} \equiv |\vec{x}_i - \vec{x}_j|$  とした。この表記は 5.7 章でも使用する。

<sup>\*43</sup> 2 次元の共形場理論においてスカラープライマリー場  $O$  の変換則は、

$$O'(z', \bar{z}') = \left( \frac{dz}{dz'} \right)^h \left( \frac{d\bar{z}}{d\bar{z}'} \right)^{\bar{h}} O(z, \bar{z})$$

算子であるとする、結合定数  $\varphi$  は marginal coupling である。marginal 演算子の 2 点関数は以下の様に振る舞う。

$$\langle O(z_1, \bar{z}_1) O(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \frac{1}{(z_1 - z_2)^2 (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^2} \quad (3.51)$$

次のこの marginal 演算子の 2 点関数に対して、それ自身によって生成される摂動を加える。このとき共形ウェイトがどの様に変化するかを調べる。marginal 演算子  $O$  の間の OPE を、

$$O(z, \bar{z}) O(w, \bar{w}) \sim \frac{C_{ooo}}{(z - w)(\bar{z} - \bar{w})} O(z, \bar{z}) \quad (3.52)$$

と表すと、2 点関数の marginal coupling についての 1 次の摂動を行うと以下の様になる [9]。

$$\begin{aligned} \delta \langle O(z, \bar{z}) O(w, \bar{w}) \rangle &= \delta \varphi \langle O(z, \bar{z}) O(w, \bar{w}) \int dz' d\bar{z}' O(z', \bar{z}') \rangle \\ &= \frac{2\pi C_{ooo} \delta \varphi}{(z - w)^2 (\bar{z} - \bar{w})^2} \log |z - w|^2 \end{aligned} \quad (3.53)$$

このことは演算子  $O$  の共形ウェイトが摂動によって  $(h, \bar{h}) = (1 - \pi C_{ooo} \delta \varphi, 1 - \pi C_{ooo} \delta \varphi)$  に変化したことを意味する<sup>\*44</sup>。このことはもはや演算子  $O$  が marginal 演算子ではなくなっていることを意味し、1 つのパラメータに属する共形場理論を生成する演算子ではなくなっている。摂動の 1 次において marginal 演算子の共形ウェイトが保たれる条件は、2 点関数の摂動 (3.53) が消えることであり、それはつまり  $C_{ooo} = 0$  が成り立つことである。そしてその場合に限り、連続パラメータで特徴付けられる様な共形場理論が存在する。

演算子  $O$  が exactly marginal 演算子である場合、共形ウェイト  $(h, \bar{h}) = (1, 1)$  が保たれてることが条件となる。これは  $O$  の 2 点関数の摂動が全ての次数でゼロになることを要請する。そのため一般的に以下の条件が導かれる。

$$(\delta \varphi)^n \langle O(z, \bar{z}) O(w, \bar{w}) \prod_i \int dz'_i d\bar{z}'_i O(z'_i, \bar{z}'_i) \rangle = 0 \quad (3.55)$$

ただし演算子の挿入点  $z'_i, \bar{z}'_i$  が  $(z, \bar{z})$  や  $(w, \bar{w})$  と重なるところでのみ存在する非自明なコンタクト項のみ許される。これが本論文で共形摂動論を用いて AdS 重力理論から示したいコンタクト項である。

この様に、共形摂動論を使い exactly marginal 演算子の相関関数の形を制限できることがわかった。

---

である (例えば [31] の式 (1.16) を参照されたい)。スケール変換  $z \rightarrow z/\lambda, \bar{z} \rightarrow \bar{z}/\lambda$  に対して次の様に振る舞う。

$$O'(z', \bar{z}') = \lambda^{h+\bar{h}} O(z, \bar{z})$$

故に 2 次元共形場理論場の演算子の共形次元  $\Delta$  は正則部分と反正則部分の共形ウェイトの和で与えられる ( $\Delta = h + \bar{h}$ )。共形ウェイト  $(h, \bar{h}) = (1, 1)$  を持つ演算子は、 $\Delta = 2$  より marginal 演算子である。

<sup>\*44</sup> 摂動後の 2 点関数の冪の振る舞いを見ると、

$$\langle OO \rangle_{\delta \varphi} = \frac{1}{(z_1 - z_2)^2 (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^2} (1 + 2\pi C_{ooo} \delta \varphi \log |z_1 - z_2|^2 + \dots) \sim \frac{1}{(z_1 - z_2)^{2(1-\pi C_{ooo} \delta \varphi)} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{2(1-\pi C_{ooo} \delta \varphi)}} \quad (3.54)$$

となっている。変形によって共形ウェイト  $h$  が 1 から変化していることがわかる。

## 4 AdS/CFT 対応

### 4.1 AdS/CFT 対応の概念

ここでは AdS/CFT 対応に関する基本事項をまとめる。AdS/CFT 対応は、 $d$  次元共形場理論が存在する時空が  $d+1$  次元時空の AdS(anti de-Sitter) 時空 (重力理論) の無限遠の境界に存在するとき (図 3)、両者の分配関数は等しいと主張する予想であり、以下の様に分配関数の等式として表される。

$$Z_{\text{CFT}_d} = Z_{\text{AdS}_{d+1}} \quad (4.1)$$

本論文でも共形場理論が存在する  $d$  次元の境界に対して、双対な AdS 重力理論が存在する  $d+1$  次元空間をバルクと表現することがある。また、AdS/CFT 対応はゲージ・重力対応ともいわれ、平坦な共形場理論とそれに双対な AdS 重力理論との対応関係をを超えて、物性系と重力理論の対応関係の研究などに応用されている。

この対応は J. Maldacena[7] によって、超弦理論の解析から提唱された理論予想である。元々は 4 次元  $\mathcal{N} = 4$  の  $SU(N)$  超対称ゲージ理論<sup>\*45</sup>がそのラージ  $N$  極限 ( $\lambda \gg 1, N \rightarrow \infty$ ) で、 $\text{AdS} \times S^5$  上の重力理論であるタイプ IIB 超重力理論 (古典論) に物理的に等価であることが提唱された。4 次元  $\mathcal{N} = 4$  の超対称ゲージ理論は  $N$  枚の D3 ブレーン上に存在する開弦で記述される理論であり、そこでは共形対称性が保たれていることが知られている。またタイプ IIB 超弦理論は閉弦で記述される弦理論であり AdS 時空を記述する。これらのことより AdS/CFT 対応は開弦-閉弦双対性とも呼ばれる。

D ブレーンとは、弦理論に現れ、開弦の端点の運動を拘束している高次元の物体である。開弦は D ブレーン上を運動している。D ブレーンの広がっている方向を  $p$  次元空間 + 時間だとすると、その D ブレーンは  $Dp$ -ブレーンといわれる。開弦は物質の自由度に対応するので、 $Dp$ -ブレーン上では  $p+1$  次元の場の理論が形成されている。特に  $N$  枚 D ブレーンを背景時空の同じ位置に配置することで、 $SU(N)$  ゲージ理論を構成することができる。ゲージ群の自由度は、開弦の 2 つの端点を  $N$  枚の D ブレーン中で付け替える自由度と解釈される。 $\mathcal{N} = 4$  の超対称ゲージ理論は弦理論において  $N$  枚の D3 ブレーンを配置して構成される。また D ブレーンは質量を持っており、その影響で周りの時空が曲がり、重力理論で記述される系と見ることもできる。

この様に AdS/CFT 対応は 1 つの系の対して物理的に 2 通りの見方 (理論) が存在することを示しており、これは超弦理論が物質場と重力場の統一理論であることの結果である。

ここで AdS/CFT 対応の正当性を示す基本的な根拠を述べる。AdS/CFT 対応が成り立つ理論的な証拠はいくつかある。

#### 根拠 1 : 対称性

AdS/CFT 対応の根拠としてそれぞれの理論が持つ対称性の成す群が同じであるということがあげられる。具体的には  $d$  次元共形場理論が持つ対称性 (共形変換群)  $SO(2, d)$  が AdS 時空の等長変換群 (isometry)  $SO(2, d)$  一致する。

$$d \text{ 次元共形場理論の共形対称性 } SO(2, d) \Leftrightarrow d+1 \text{ 次元 AdS 時空の等長変換群 } SO(2, d) \quad (4.2)$$

#### 根拠 2 : 結合定数の関係

---

<sup>\*45</sup>  $SU(N)$  非可換ゲージ理論 ( $N \geq 2$ ) はヤン・ミルズ (Yang-Mills) 理論とも言われる。4 次元  $\mathcal{N} = 4$  の  $SU(N)$  超対称ゲージ理論はベータ関数がゼロとなり、共形場理論であることが知られている。

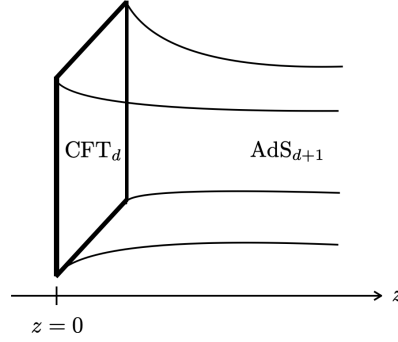


図3 AdS 時空と共形場理論の定義される境界面の関係

4 次元  $\mathcal{N} = 4$  の超対称ゲージ理論とタイプ IIB  $\text{AdS} \times S^5$  重力理論のそれぞれの理論に存在するパラメータが次のような対応関係にあることが知られている<sup>\*46</sup>。

$$g_{\text{YM}}^2 = 4\pi g_s, \quad (4.3)$$

$$\lambda (\equiv g_{\text{YM}}^2 N) = L^4 / \alpha'^2, \quad (4.4)$$

$$\frac{\pi^4}{2N^2} = G_N / L^8 \quad (4.5)$$

ここで、 $g_{\text{YM}}$  は  $\mathcal{N} = 4$  の超対称ゲージ理論のゲージ結合定数、 $g_s$  は  $\text{AdS}_5 \times S^5$  弦理論の弦の相互作用における結合定数である。 $\lambda$  はトホーフト結合定数<sup>\*47</sup>、 $N$  はゲージ群の大きさ、 $L$  は  $\text{AdS}_5 \times S^5$  重力理論の典型的な大きさ (AdS 半径)、 $\alpha'$  は弦の張力の大きさである。また、 $G_N$  は  $\text{AdS}_5 \times S^5$  重力理論におけるニュートン定数である。

理論に含まれるトホーフト結合定数  $\lambda$  の大きさを調整することで、D ブレーンが周囲に作る曲がった時空の曲率の大きさを変えることができる。(4.4) より D3 ブレーンが周囲に作る曲率の大きさは

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} \sim \frac{1}{L^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\lambda}\alpha'}$$

なので、ゲージ理論の摂動計算が信頼できる弱結合の領域  $\lambda \ll 1$  では曲率が大きくなる [14][47]。一方、IIB 超弦理論が AdS 超重力理論でよく近似されるためには、弦の相互作用が小さく無視できる領域 ( $g_s \ll 1$ ) かつ曲率が小さい領域 ( $\lambda \gg 1$ ) となる必要がある。この様なことから AdS/CFT 対応において、共形場理論が摂動計算でカバーできる範囲と、AdS(古典) 重力理論の計算でカバーできる範囲が異なることがわかる。これを利用して、共形場理論の強結合 ( $\lambda \gg 1$ ) の領域を AdS 重力理論で解析し、 $\lambda$  について非摂動的な結果を得られるとされている。

以上のような対応があるため AdS/CFT 対応という双対性の存在が予想されている。その他にも提唱されてから今に至るまで、AdS/CFT 対応を傍証する様々な結果が発見され続けている。

<sup>\*46</sup> 例えば [4] の 3.1 章、6.1.3 章、[14] の 8 章などを参照されたい。

<sup>\*47</sup> ゲージ理論の有効結合定数である。この結合定数が大きいときゲージ理論 (共形場理論が) は強結合である。



## 4.2 AdS 時空

AdS 時空 (anti de-Sitter space) は最大対称空間に分類されるもののうち負の定曲率を持っている時空間である [46]。これは、時空のリーマン曲率テンソル<sup>\*48</sup>が、時空を特徴付ける曲率パラメータ  $\mathcal{K}$  ( $< 0$ ) を用いて  $R_{\mu\nu\rho\sigma} = \mathcal{K}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})$  と書ける空間であることを意味する<sup>\*49</sup>。時間をユークリッド化すると双曲空間に等しい。 $d+1$  次元 AdS 時空は、 $d+2$  次元時空間  $\mathbb{R}^{2,d}$

$$ds_{\mathbb{R}^{2,d}}^2 = -dY_0^2 - dY_1^2 + dY_2^2 + \cdots + dY_{d+1}^2 \quad (4.6)$$

における半径一定面として定義される<sup>\*50</sup>。その半径 (AdS 半径) を  $L$  とすると  $d+1$  次元 AdS 時空は、

$$Y_0^2 + Y_1^2 = Y_2^2 + Y_3^2 + \cdots + Y_{d+1}^2 + L^2 \quad (4.7)$$

を満たす解である [14]。この解の 1 つは大域的 AdS 時空という以下の様な座標系である。

$$\begin{aligned} Y_0 &= L \cosh u \cos t, \\ Y_{d+1} &= L \cosh u \sin t, \\ Y_i &= L \sinh u \Omega_i \end{aligned} \quad (4.8)$$

ここで  $i = 1, 2, \dots, d$  であり、 $\Omega_i$  は  $d-1$  次元単位球面の  $i$  番目の座標である。この時空の計量は、

$$ds_{AdS}^2 = L^2(-\cosh^2 u dt^2 + du^2 + \sinh^2 u d\Omega_i^2) \quad (4.9)$$

である。(4.6) の別の解として Poincaré 座標系が知られている [47][48]。

$$\begin{aligned} Y_0 &= \frac{z}{2} \left( 1 + \frac{L^2 + \vec{x}^2 - x_0^2}{z^2} \right), \\ Y_i &= \frac{Lx_i}{z}, \\ Y_d &= \frac{z}{2} \left( 1 - \frac{L^2 - \vec{x}^2 + x_0^2}{z^2} \right), \\ Y_{d+1} &= \frac{Lx_0}{z} \end{aligned} \quad (4.10)$$

ここでは  $i = 1, 2, \dots, d-1$  である。Poincaré 座標系であり、このとき AdS 時空の計量は以下の様になる。

$$ds_{AdS}^2 = L^2 \frac{dz^2 - dx_0^2 + \sum_{i=1}^{d-1} dx_i^2}{z^2} \quad (4.11)$$

<sup>\*48</sup> 時空の計量  $g_{\mu\nu}(X)$  に対して、時空の曲率を表す基本的な量の一つはリーマン曲率テンソル  $R_{\mu\nu\rho\sigma}(X)$  である。これは以下の様に定義される (一般相対論の基本事項としては [46] を参照されたい)。

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} \equiv \partial_\rho \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\rho} \Gamma^\alpha{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu{}_{\alpha\sigma} \Gamma^\alpha{}_{\nu\rho}$$

ここで  $\Gamma_{\mu,\rho\sigma} \equiv \frac{1}{2}(\partial_\rho g_{\mu\sigma} + \partial_\sigma g_{\mu\rho} - \partial_\mu g_{\rho\sigma})$  はバルクにおけるクリストフェル記号 (レヴィ・チビタ接続) である。脚の縮約を取り、リッチテンソル  $R_{\mu\nu}$  やリッチスカラー  $R$  が定義される  $R_{\mu\nu} \equiv R^\rho{}_{\mu\rho\nu}$ ,  $R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ 。

<sup>\*49</sup> 定曲率空間は 3 つに分類される。 $\mathcal{K} > 0$  はドジッター時空、 $\mathcal{K} = 0$  はミンコフスキー時空、 $\mathcal{K} < 0$  は反ドジッター (AdS) 時空になる。これらの時間方向をユークリッド化すれば、それぞれ球面、ユークリッド空間、双曲面となる [37], [46], [48]。

<sup>\*50</sup>  $\mathbb{R}^{2,d}$  の添字は計量の対角成分に負符号が 2 つある  $d+2$  次元の平坦な空間ことである。



### 4.3 AdS/CFT 対応をつかった計算手法

(4.1) より共形場理論の分配関数から得られる物理量と AdS 重力理論から得られる物理量が等しい。つまり重力理論を分配関数を使って共形場理論における相関関数を求めることができる。そのために重要な概念が場の古典解の分類である normalizable mode と non-normalizable mode である。バルクにおいて質量  $m$  の実自由スカラー場  $\phi$  が存在するとする<sup>\*51</sup>。作用は次の通りである。

$$I_{\text{AdS}}[\phi] = \frac{1}{2} \int d^{d+1} X \sqrt{g} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + m^2 \phi^2) \quad (4.12)$$

このスカラー場が従う運動方程式は、

$$0 = (\square_X - m^2)\phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) - m^2 \phi \quad (4.13)$$

である。ここで簡単のため計量は (4.11) を採用する。2 階の微分方程式より独立な解が 2 つ存在しそれらはバルクの動径座標  $z$  の方向について双対な共形場理論が存在する境界近傍  $z \sim 0$  での振る舞いが異なる。古典解  $\phi$  の境界近傍  $z \sim 0$  での振る舞いは、

$$\phi(z, \vec{x}) = A(\vec{x}) z^\Delta + B(\vec{x}) z^{d-\Delta} + \dots \quad (4.14)$$

と展開できることが知られている [10]。  $\vec{x}$  は境界方向の座標である。ここで  $\Delta$  は境界近傍における解  $A(\vec{x})$  の動径方向の収束性の強さを表す量であり、双対な共形場理論に存在する演算子の共形次元に一致する。  $A(\vec{x})$  が normalizable mode と呼ばれる解であり、  $B(\vec{x})$  が non-normalizable mode である。この 2 つは重力理論を用いて共形場理論の相関関数を求めるときに重要な役割を果たす。 AdS/CFT 対応において共形場理論に存在する外場  $J(\vec{x})$  と重力理論の存在する場  $\phi$  には以下のような対応関係がある。

normalizable mode  $A(\vec{x})$

これは双対な共形場理論におけるヒルベルト空間を構成する役割を果たす。つまり、共形場理論における演算子  $O(\vec{x})$  に対応し量子化される対象となり、境界近傍において、

$$A(\vec{x}) \propto \langle O(\vec{x}) \rangle \quad (4.15)$$

と振る舞う。

non-normalizable mode  $B(\vec{x})$

これは双対な共形場理論においてヒルベルト空間は構成せず演算子に結合する外場の役割を果たす。つまり、重力理論の場  $\phi(z, \vec{x})$  の境界値  $B(\vec{x}) = J(\vec{x})$  に対応し量子化されない。共形場理論において作用に、

$$\int d^d x J(x) O(x) \quad (4.16)$$

という項を加えることは理論を変形することに相当する。作用が無次元であることと  $\phi(z, \vec{x})$  との関係は (4.14) を思い出すと、

$$B(\vec{x}) = J(\vec{x}) \quad (4.17)$$

<sup>\*51</sup> 実スカラー場は場の値が実数を取ることを意味する。自由とは相互作用項 ( $\phi^4$  項など) を含まないことを意味する。また以降で示す計算は時間方向をユークリッド化して行うことにする。時間方向のユークリッド化とは、計量の時間方向の成分の符号を反転させ空間方向との区別をなくすことである。例えばミンコフスキー時空 ( $M$ ) をユークリッド化するとユークリッド空間 ( $E$ ) になる。具体的には  $ds_M^2 = -dt^2 + \sum_i dx_i^2 \rightarrow ds_E^2 = dt_E^2 + \sum_i dx_i^2$  となり、形式的に  $t \rightarrow t_E = it$  という置き換えをしたことになっている。AdS 時空をユークリッド化した場合は双曲空間になる。

と表される。すなわち共形場理論に存在する外場  $J(\vec{x})$  がバルクの動径方向にも連続的に値をとるとき、境界からわずかに離れた場所  $z \sim 0$  では (4.17) のような  $z^{\Delta-d}$  で表される場のリスケールが起きる。

normalizable mode  $O(\vec{x})$  の  $z$  の幂の依存性 (4.14) と前章の (3.9) との対応から、境界近傍における動径座標方向への移動が場の理論におけるスケール変換に対応することが示唆される。スケール変換は運動量空間ではエネルギースケールの変化と同義である。すなわち、バルクの境界近傍で  $z$  方向に移動することは、その境界で定義されている場の理論の繰り込み群変換に対応すると解釈される。 $z$  が小さくなる方向に移動することは場の理論では UV(紫外) 方向にエネルギースケールを変化させることに対応し、そのスケール変換に対する演算子  $O(\vec{x})$  のリスケールの強さを示す  $\Delta$  が共形次元になるのである。

また重力理論側の立場としては、 $z$  を小さくする方向に移動することは (4.11) からわかる様に計量が発散する方向の移動である。これは 2 点間の距離が大きくなり体積が無限大になることによる発散であるため、IR(赤外) 発散である。IR(赤外) 方向へエネルギースケールを移動させることになる。つまり重力理論側では場の理論とは逆に  $z$  が小さくなる方向に移動すると重力理論としてはエネルギーが低くなるのである。

以上のことから場の理論での UV(紫外) 発散と重力理論での IR 発散が対応していることが分かり、これを UV/IR 対応と呼ぶ。場の理論における紫外発散は重力理論の計算では赤外発散として現れる。この際に現れる重力理論の赤外発散はホログラフィック繰り込みという処方箋によって対処することになるがここでは触れないことにする。重力理論の側の計算は以下にも述べる様な古典近似の下で行われる。

次に共形場理論における相関関数を重力理論を使って調べる方法を説明する。この方法は GKP-Witten の処方箋と呼ばれているものである。共形場理論において連結相関関数を求めたければ生成汎関数  $\Gamma[J]$  を外場  $J(x)$  で汎関数微分すれば良い<sup>\*52</sup>。

$$\langle O(\vec{x}_1)O(\vec{x}_2)\cdots O(\vec{x}_n) \rangle_{\text{conn}} = (-)^{n-1} \frac{\delta^n \Gamma_{\text{CFT}}[J]}{\delta J(\vec{x}_1)\delta J(\vec{x}_2)\cdots \delta J(\vec{x}_n)} \Big|_{J=0}$$

ここで  $\Gamma_{\text{CFT}}[J]$  は  $Z_{\text{CFT}_d}$  と

$$Z_{\text{CFT}_d} = \int \mathcal{D}\Phi e^{-(S_{\text{CFT}} + \int J(\vec{x})O(\vec{x}))} = \exp(-\Gamma_{\text{CFT}}[J]) = \left\langle \exp\left(-\int d^d x J(\vec{x})O(\vec{x})\right) \right\rangle \quad (4.18)$$

の関係にあり<sup>\*53</sup>、

$$-\Gamma_{\text{CFT}}[J] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int d^d x_1 d^d x_2 \cdots d^d x_n J(\vec{x}_1)J(\vec{x}_2)\cdots J(\vec{x}_n) \langle O(\vec{x}_1)O(\vec{x}_2)\cdots O(\vec{x}_n) \rangle_{\text{conn}} \quad (4.19)$$

とも表される。

AdS/CFT 対応に戻って考える。(4.17) によるとバルク上のスカラー場  $\phi(X)$  の境界条件は境界の場の理論における外場に等しい (ディリクレ境界条件)。

$$\lim_{z \rightarrow \epsilon} \phi(X) = \epsilon^{d-\Delta} J(\vec{x}) \quad (4.20)$$

<sup>\*52</sup> (4.22) の左辺の添字  $\langle \cdots \rangle_{\text{conn}}$  は連結相関関数の意。場の理論の相関関数は摂動計算においてファインマンダイアグラムの展開で表される。相関関数がひと繋ぎのダイアグラム (connected diagram) だけで表せるものを連結相関関数 (連結グリーン関数) という。分配関数は非連結な相関関数の寄与も含んでいるが、その対数を取ったもの ((4.18) の  $\Gamma_{\text{CFT}}$ ) は連結相関関数の寄与のみで表されることが知られている。この解説に関しては、例えば [42] の 1 巻 4.3 章などを参照されたい。

<sup>\*53</sup> ここで  $\mathcal{D}\Phi$  は経路積分の積分則度であり、 $\Phi$  は共形場理論の作用を構成する基本的な場を表している。本論文では共形場理論の具体形に立ち入らない一般的な解析を行うため、 $S_{\text{CFT}}$  や  $\Phi$  の詳細には触れない。

境界条件 (4.20) の元で解かれた運動方程式の解を重力理論の作用に代入し、分配関数を鞍点近似<sup>\*54</sup>すると以下の様になる。

$$Z_{\text{AdS}_{d+1}} \sim \exp \left( -\frac{1}{2\kappa_{d+1}^2} I_{\text{AdS}}[J] \right) \quad (4.21)$$

と表す<sup>\*55</sup>。ここで  $I_{\text{AdS}}[J]$  は  $d+1$  次元 AdS 重力理論の on-shell 作用であり、 $\phi(X)$  の境界値  $J(\vec{x})$  の汎関数として表される。(4.18) と (4.21) より、 $d$  次元境界上の場合の理論と  $d+1$  次元バルク上の AdS 重力理論の分配関数が等価であるという AdS/CFT 対応の主張は以下の式で書き換えられる。

$$\Gamma_{\text{CFT}}[J] = \frac{1}{2\kappa_{d+1}^2} I_{\text{AdS}}[J]$$

これを GKP-Witten 関係式という。この関係式を用いると、共形場理論の連結相関関数の計算を、AdS 重力理論の on-shell 作用 (作用に運動方程式の解を代入したもの) を外場  $J$  で汎関数微分することで代行できる。

$$\langle O(\vec{x}_1) O(\vec{x}_2) \cdots O(\vec{x}_n) \rangle_{\text{conn}} = (-)^{n-1} \frac{\delta^n I_{\text{AdS}}[J]}{\delta J(\vec{x}_1) \delta J(\vec{x}_2) \cdots \delta J(\vec{x}_n)} \Big|_{J=0} \quad (4.22)$$

ここで補足として重力理論が実自由スカラー場で記述される場合に共形次元  $\Delta$  と質量  $m$  の関係を述べておく。用いる計量とスカラー場の方程式はそれぞれ (4.11) と (4.13) とする。境界方向は並進対称性を持つため  $k$  を座標  $x$  に共役な運動量として部分的に Fourier 変換することができる。

$$\phi(z, x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ikx} \tilde{\phi}(z, k) \quad (4.23)$$

これを運動方程式 (4.11) に代入すると

$$\begin{aligned} 0 &= z^{d+1} \partial_\mu \left[ \left( \frac{1}{z} \right)^{d+1} g^{\mu\nu} \partial_\nu \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ikx} \tilde{\phi}(z, k) \right] - m^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ikx} \tilde{\phi}(z, k) \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= z^2 \partial_z^2 \tilde{\phi} + (1-d) z \partial_z \tilde{\phi} - k^2 z^2 \tilde{\phi} - m^2 \tilde{\phi} \\ &\rightarrow z^2 \partial_z^2 \tilde{\phi} + (1-d) z \partial_z \tilde{\phi} - m^2 R^2 \tilde{\phi}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

ここで境界近傍  $z \rightarrow 0$  では運動量  $k^2$  に比例する項は効かなくなることを使った。この方程式に  $z$  依存性  $\tilde{\phi}(z, k) \sim z^\Delta$  を代入すると、

$$\begin{aligned} \Delta(\Delta-1) + (1-d)\Delta - m^2 R^2 &= 0 \\ \Rightarrow \quad \Delta(\Delta-d) &= m^2 R^2 \end{aligned} \quad (4.25)$$

を得る。今後議論したい exactly marginal coupling の場合は  $\Delta = d$  であるが、(4.25) より exactly marginal 演算子に対応するバルクのスカラー場は零質量であることがわかる。

さらに共形場理論においてユニタリー性が存在するためには  $\Delta \geq 0$  である必要がある。(4.25) の解は

$$\Delta = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2 R^2}, \quad (4.26)$$

<sup>\*54</sup> 分配関数は経路積分によって、場がとり得るすべての配位の寄与を足し上げたものである。そのため量子効果が加味されている。運動方程式の解は其中で古典的に安定な配位のみを表している。鞍点近似 (4.21) は、分配関数への寄与が最も大きい安定な配位を 1 つだけ採用することを意味する。

<sup>\*55</sup>  $\kappa_{d+1}^2 \equiv 8\pi G_N^{(d+1)}$  である。 $G_N^{(d+1)}$  はバルクのニュートン定数。

であるから共形場理論がユニタリー性を持つめの条件から

$$\frac{d^2}{4} + m^2 R^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 R^2 \geq -\frac{d^2}{4}, \quad (4.27)$$

を得る。AdS/CFT 対応においては  $m^2 \leq 0$  となるようなタキオン解のうち一部は安定になり許されることがわかる。(4.27) の不等式をプレートノーマー・フリードマンバウンド (Breitenlohner-Freedman bound) と呼ぶ。

#### 4.4 GKP-Witten 関係式を用いた相関関数の計算例

例として、共形場理論の外場  $J(\vec{x})$  を境界値に持つ質量  $m$  の実自由スカラー場  $\phi(X)$  がバルクに存在する場合で、2 点関数を求める手順を述べる。まず  $d+1$  次元 AdS 重力理論の作用は部分積分により、動径方向の表面積分で表される項と  $(\square_X - m^2)$  が作用する項の 2 つに分かれる。

$$\begin{aligned} I_{\text{AdS}}[\phi] &= \frac{1}{2} \int d^{d+1} X \sqrt{g} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + m^2 \phi^2) \\ &= \frac{1}{2} \int_{z=\epsilon} d^d x \frac{1}{z^{d-1}} \phi \partial_z \phi - \frac{1}{2} \int d^{d+1} X \frac{1}{z^{d+1}} \phi (\square_X - m^2) \phi \end{aligned} \quad (4.28)$$

$(\square_X - m^2)$  を含む項は運動方程式 (4.13) を用いると消すことができる。ここで、境界条件 (4.20) を満たす  $\phi(X)$  の解が<sup>5</sup>、

$$\phi(X) = \int d^d y K_\Delta(X, \vec{y}) J(\vec{y}) \quad (4.29)$$

と表されたとする。 $K_\Delta(X, \vec{y})$  は微分演算子  $(\square_X - m^2)$  の核であり、次の運動方程式と境界条件を満たす  $X, \vec{y}$  の関数である<sup>\*56</sup>。

$$\begin{aligned} (\square_X - m^2) K(X, \vec{y}) &= 0 \\ \lim_{z \rightarrow \epsilon} K_\Delta(X, \vec{y}) &= \epsilon^{d-\Delta} \delta^d(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (4.30)$$

$K_\Delta(X, \vec{y})$  はバルク-境界伝播関数と呼ばれる。ここで AdS 重力理論におけるバルク-境界伝播関数は [20] や [17] に示されている様に、以下の様な関数形を持つことが知られている。

$$K_\Delta(X, \vec{y}) = C_\Delta \left( \frac{z}{z^2 + (\vec{x} - \vec{y})^2} \right)^\Delta \quad (4.31)$$

(4.29) を作用 (4.28) に代入すると、上述の様に  $(\square_X - m^2)$  に比例する最右辺第 2 項目は 0 になり on-shell 作用は表面項のみ残る。境界の存在する  $z = 0$  近傍での解の振る舞いに興味があるため、 $z = \infty$  の表面項は加味していない。バルク-境界伝播関数の具体形が判明しているので on-shell は境界条件  $J(\vec{x})$  の汎関数として表される。

$$I_{\text{AdS}}[J] = \frac{1}{2\epsilon^{\Delta-1}} \int d^d x d^d y J(\vec{x}) J(\vec{y}) \partial_z K(X, \vec{y}) \Big|_{\text{boundary}} \quad (4.32)$$

(4.31) を  $I_{\text{AdS}}[J]$  に代入し、外場  $J$  汎関数微分することにより、演算子  $O(\vec{x})$  の 2 点関数は以下の様になる。

$$\langle O(\vec{x}_1) O(\vec{x}_2) \rangle = \frac{(2\Delta - d) C_\Delta}{(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^{2\Delta}} \quad , \quad C_\Delta = \frac{\Gamma(\Delta)}{\pi^{d/2} \Gamma(\Delta - \frac{d}{2})}. \quad (4.33)$$

この様に、共形次元  $\Delta$  の演算子の 2 点関数が AdS 重力理論から導かれることが分かる。

<sup>\*56</sup> ここで  $\epsilon$  は 0 に近い小さな値を取るとした。

## 5 AdS/CFT 対応を用いた exactly marginal 演算子の相関関数

### 5.1 Setup

セットアップとしてまず繰り込み群の議論から重力理論の作用の形を決定しておきたい。文献 [24] に従い、重力理論から繰り込み群のベータ関数を求め、作用に現れるポテンシャル項を議論する。

考える理論は超重力理論のボゾンパートであり、以下の様にアインシュタイン-ヒルベルト作用にスカラーセクターを加えたものとする [24]。

$$S[\hat{g}_{\mu\nu}(\vec{x}, \tau), \hat{\phi}(\vec{x}, \tau)] = \int d^{d+1}X \sqrt{\hat{g}} \left[ V(\hat{\phi}) - \hat{R}_{d+1} + \frac{1}{2} L_{IJ}(\hat{\phi}) \hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \hat{\phi}^I \partial_\nu \hat{\phi}^J \right] \quad (5.1)$$

GKP-Witten の処方に基づき、考えているスカラー場  $\phi^I$  は共形場理論の exactly marginal coupling をバルク側に延長したものとする。ここで記号  $\hat{\cdot}$  は運動方程式を課す前の off-shell の場を表している。また  $V(\hat{\phi})$  はバルクスカラー場のポテンシャルであり、 $\hat{R}_{d+1}$  はバルクのスカラー曲率である。ここでは ADM 分解を用いて重力理論をハミルトン系で記述し、ホログラフィックに繰り込み群を議論したい。そのためバルクの座標  $X^\mu$  をある方向  $\tau$  とそれ以外の  $d$  次元の方向  $\vec{x}$  に分解して表している。このときバルクの計量は以下の様に表される。

$$ds^2 = \hat{g}_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu = \hat{N}^2(\tau, \vec{x}) d\tau^2 + \hat{h}_{ij}(\tau, \vec{x}) (dx^i + \hat{\lambda}^i(\tau, \vec{x}) d\tau) (dx^j + \hat{\lambda}^j(\tau, \vec{x}) d\tau) \quad (5.2)$$

ここで  $\hat{N}(\tau, \vec{x})$ ,  $\hat{\lambda}^i(\tau, \vec{x})$  はそれぞれラプス関数、シフトベクトルと呼ばれる。

ここでバルク上の  $\tau = \tau_0$  における  $d$  次元の超曲面を  $\Sigma_d$  と表し、そこでの値を

$$\hat{h}_{ij}(\vec{x}, \tau_0) = h_{ij}(\vec{x}), \quad \hat{\phi}^I(\vec{x}, \tau_0) = \phi^I(\vec{x}) \quad (5.3)$$

としよう。 $h_{ij}(\vec{x})$  は  $\Sigma_d$  上の誘導計量として定義される。 $\tau$  を仮想的に時間座標と捉え、誘導計量  $h_{ij}(\vec{x})$  や  $\phi^I(\vec{x})$  を境界条件として、 $\hat{h}_{ij}(\vec{x}, \tau)$  や  $\hat{\phi}^I(\vec{x}, \tau)$  の  $\tau$  方向の時間発展として考える。

正準形式で重力理論を議論する際、拘束条件としてハミルトニアン拘束条件という拘束条件がある。ここから、ハミルトン・ヤコビ方程式

$$\{S, S\} = \mathcal{L} \quad (5.4)$$

$$\{S, S\} \equiv \left( \frac{1}{\sqrt{h}} \right)^2 \left[ -\frac{1}{d-1} \left( h_{ij} \frac{\delta S}{\delta h_{ij}} \right) + \left( \frac{\delta S}{\delta h_{ij}} \right)^2 + \frac{1}{2} L^{IJ}(\phi) \frac{\delta S}{\delta \phi^I} \frac{\delta S}{\delta \phi^J} \right] \quad (5.5)$$

を得る。導出の詳細は A.1 を参照されたい。

次に微分展開<sup>\*57</sup>という手法を用い、バルクの作用を局所的な寄与を持つ項 (局所相殺項) と非局所的な寄与を持つ項 (有効作用) に分離する。

$$\frac{1}{2\kappa_{d+1}^2} S[h(x), \phi(x)] = \frac{1}{2\kappa_{d+1}^2} S_{\text{loc}}[h(x), \phi(x)] - \Gamma[h(x), \phi(x)] \quad (5.6)$$

<sup>\*57</sup> 元々この手法は低エネルギー有効理論を決定する際の長波長展開に用いられていた。長波長展開によって (長さ)<sup>-1</sup> の次数に関して作用の各項を分類することで、低エネルギーにおいて主要な低次の項に注目し作用の形を議論できる ([32] の 2 巻 13 章などを参照されたい)。

さらにこれらをウェイト<sup>\*58</sup>によって分類し、各ウェイトごとにハミルトン・ヤコビ方程式を考えたい。 $S_{\text{loc}}$ のうち今の議論に関係ある部分のみ書き出すと以下の様に表される。

$$S_{\text{loc}}[h(x), \phi(x)] = \int d^d x \sqrt{h} [W(\phi) + (\text{微分を含む項})] \quad (5.7)$$

そして (5.4) に  $[S_{\text{loc}}]_0 = \int d^d x \sqrt{h} W(\phi)$ ,  $[\mathcal{L}]_0 = V(\phi)$  を (5.4) 代入することで、ウェイト 0 のハミルトン・ヤコビ方程式は以下の様に表される [22], [24]。

$$[\{S_{\text{loc}}, S_{\text{loc}}\}]_0 = V(\phi) \quad (5.8)$$

これより重力理論のポテンシャルと境界面上の理論のポテンシャルとの関係式が得られる。導出の詳細は A.2 を参照されたい。

$$V(\phi) = -\frac{d}{4(d-1)} W^2(\phi) + \frac{1}{2} L^{IJ}(\phi) \partial_I W(\phi) \partial_J W(\phi) \quad (5.9)$$

座標  $\tau$  を、境界における場の理論のスケールを調節するパラメータだと解釈すると、繰り込み群のベータ関数とポテンシャル  $W(\phi)$  が以下の様に関係づけられる。導出の詳細は A.2 を参照されたい。

$$\beta^I(\phi) = \frac{2(d-1)}{W(\phi)} L^{IJ}(\phi) \partial_J W(\phi) \quad (5.10)$$

このことから、興味のある exactly marginal coupling の場合において、繰り込み群のベータ関数は厳密に 0 でなければならない。重力理論の ADM 分解を通して得られた結果 (5.10) からわかることは、繰り込み群のベータ関数が 0 になる必要条件是、ポテンシャル  $W(\phi)$  が  $\phi^I$  に依存しないことである。(5.9) からわかる様に、このことは重力理論に含まれるポテンシャル  $V(\phi)$  が定数であることと等価と言える。

元の重力理論の作用において、ポテンシャルが定数の場合、バルクでの  $\phi^I$  の運動に関与しない。そのため、以降ではこの定数項を無視する。故に最終的に作用は以下の形に求められる。

$$S_{\text{bulk}} = \frac{1}{4\kappa_{d+1}^2} \int d^{d+1} X \sqrt{g} G_{IJ}(\phi) g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^I \partial_\nu \phi^J + \dots \quad (5.11)$$

また以降はバルクの計量を AdS 時空に固定し背景場として扱う。その上で AdS 時空上のスカラー場の運動を扱うものとする。

$$g_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu = \frac{dz^2 + d\vec{x}^2}{z^2} \quad (5.12)$$

以上の議論より重力理論を AdS 時空の計量に固定したバルク上のスカラー場  $\phi^I$  の運動を考える。その上で興味のあるラグランジアンのスカラーセクターに限り議論する。このスカラーセクターを改めて  $I[\phi]$  と表記することにする ( $S_{\text{bulk}}|_{\text{scalar}} \equiv I[\phi]$ )。

重力理論の作用は一般的には理論が超対称性を有しているため、フェルミオンを含めて考える必要がある。しかし、今回は簡単のためボゾンパートのみに着目し、期待される結果が AdS 重力理論による計算から再現されるか検証する。大文字のアルファベット  $A, B, \dots, I, J, \dots$  は exactly marginal coupling が持つ脚であり、共形多様体の座標系を特徴づけている。(超対称性を考慮すると一般には  $\phi^I(X)$  は複素スカラー場となる。これにより共形多様体も複素多様体になるので、脚  $A, B, \dots$  は正確には正則セクター  $I$  と反正則セクター  $\bar{I}$  に分けられる。簡単のため今回はその区別を無視し実スカラー場のラグランジアンとして扱う。)

<sup>\*58</sup> ウェイトとは微分の次元を持つ量を感情するための指標である。微分演算子  $\partial/\partial x^\mu$  一つあたりのウェイトは 1 と定義される。他にも計量  $g_{\mu\nu}$  とスカラー場  $\phi^I$  はウェイト 0 と勘定される。詳しくは A.2 を参照されたい。



$G_{IJ}(\phi)$  は境界上の双対な場の理論では Zamolodchikov 計量に対応する量であり、本論文の解析で最も基本的な幾何学量である。定数  $V$  は  $\phi^I$  の運動に寄与しないため今後は  $V$  を無視して議論しても差し支えない。

作用  $I[\phi]$  をバルクのスカラー場  $\phi^I$  についての変分とすることで運動方程式を得る。スカラー場  $\phi^I$  の運動方程式は以下の様な非線形方程式 (共形多様体上の測地線方程式) の形で表される。

$$\square_X \phi^I + \Gamma_{JK}^I(\phi) \partial_\mu \phi^J \partial^\mu \phi^K = 0 \quad (5.13)$$

この方程式を解いて解を境界上の外場  $J^I(\vec{x})$  の汎関数の形で求めたい。非線形方程式を直接解くことは困難なので、微小量  $\alpha \equiv (2\kappa_{d+1}^2)^{1/2}$  を導入してバルクのスカラー場  $\phi^I(X)$  の摂動を考える。そして摂動に対して方程式を線形化し逐次的に解いていく。つまり、微小量  $\alpha$  の次数ごとに運動方程式を立て、その解を作用  $I[\phi]$  に代入し、各次数ごとに GKP-Witten 関係式を用いて相関関数を得ていくことになる。具体的な展開は以下の様に表される。

$$\begin{aligned} \phi^I(X) &= \phi^I(z, \vec{x}) = \varphi_0^I + \eta^I(z, \vec{x}) \\ \eta^I(z, \vec{x}) &= \sum_{n \geq 1} \alpha^n \eta_{(n)}^I(z, \vec{x}) \end{aligned} \quad (5.14)$$

ここで定数  $\varphi_0^I$  は基準となる exactly marginal coupling の値であり、 $\eta^I(z, \vec{x})$  は exactly marginal coupling からのずれを表す大きさ  $O(\alpha)$  の揺らぎである<sup>\*59</sup>。微小量  $\alpha$  は境界上の場の理論のゲージ群の大きさ  $N$  と  $\alpha \propto 1/N$  という関係にある<sup>\*60</sup>。ゲージ重力対応が成り立つラージ  $N$  極限の元では、スカラー場の揺らぎの寄与が小さいことを式 (5.14) は意味する。

## 5.2 作用の $\alpha$ 展開と運動方程式

ここからは、実際に  $\alpha$  の次数について運動方程式 (5.13) を解いて on-shell 作用を求めていく。まずバルクのスカラー場の  $\alpha$  展開 (5.14) を作用  $I[\phi]$  に代入すると、作用は  $\alpha$  の次数ごとに、

$$I[\phi] = \sum_{n \geq 2} \alpha^n I_n \quad (5.15)$$

の様に展開される<sup>\*61</sup>。  $I_2 \sim I_4$  の具体形は、以下の通りである。

$$I_2 = \frac{1}{2} G_{IJ} \int d^{d+1} X \sqrt{g(X)} \partial_\mu \eta_{(1)}^I \partial^\mu \eta_{(1)}^J \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{2} G_{IJ} \int d^{d+1} X \sqrt{g(X)} \left( \partial_\mu \eta_{(1)}^I \partial^\mu \eta_{(2)}^J + \partial_\mu \eta_{(2)}^I \partial^\mu \eta_{(1)}^J \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_K G_{IJ} \int d^{d+1} X \sqrt{g(X)} \eta_{(1)}^K \partial_\mu \eta_{(1)}^I \partial^\mu \eta_{(1)}^J \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{1}{2} G_{IJ} \int d^{d+1} X \sqrt{g(X)} (2 \partial_\mu \eta_{(1)}^I \partial^\mu \eta_{(3)}^J + \partial_\mu \eta_{(2)}^I \partial^\mu \eta_{(2)}^J) \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_K G_{IJ} \int d^{d+1} X \sqrt{g(X)} (\eta_{(2)}^K \partial_\mu \eta_{(1)}^I \partial^\mu \eta_{(1)}^J + 2 \eta_{(1)}^K \partial_\mu \eta_{(2)}^I \partial^\mu \eta_{(1)}^J) \\ &\quad + \frac{1}{4} \partial_L \partial_K G_{IJ} \int d^{d+1} X \sqrt{g(X)} \eta_{(1)}^L \eta_{(1)}^K \partial_\mu \eta_{(1)}^I \partial^\mu \eta_{(1)}^J \end{aligned} \quad (5.18)$$

<sup>\*59</sup> この揺らぎが重力理論に双対な共形場理論における共形摂動  $\delta\varphi^I$  の部分に対応する ( $\delta\varphi \Leftrightarrow \eta^I(X)$ )。

<sup>\*60</sup> (4.5) より  $\alpha$  と  $N$  の関係は  $\alpha \sim (2\kappa_{d+1}^2)^{1/2} = (G_N^{d+1})^{1/2} \sim 1/N$  である。

<sup>\*61</sup>  $n = 0, 1$  の項は  $\varphi_0^I$  が定数のため存在しない。

$\alpha$  の 0 次と 1 次の寄与がないのは exactly marginal coupling が定数であるためである。ここで、式中の  $\varphi^I$  についての関数 ( $G_{IJ}(\varphi)$  や  $\partial_K G_{IJ}(\varphi)$ ) はその引数を省略している。(以降、 $G_{IJ} \equiv G_{IJ}(\varphi)$  などと表し、あらわに  $\varphi^I$  に依存する部分以外は  $\varphi^I$  を省略するものとする。) 運動方程式 (5.13) に展開 (5.14) を代入することで  $\alpha$  次数ごとの運動方程式を以下の様を得る。

$$\begin{aligned}\square_X \eta_{(1)}^I &= 0 \\ \square_X \eta_{(2)}^I &= -\Gamma_{JK}^I \partial_\mu \eta_{(1)}^J \partial^\mu \eta_{(1)}^K \\ \square_X \eta_{(3)}^I &= -2\Gamma_{JK}^I \partial_\mu \eta_{(1)}^J \partial^\mu \eta_{(2)}^K - \partial_M \Gamma_{JK}^I \eta_{(1)}^M \partial_\mu \eta_{(1)}^J \partial^\mu \eta_{(1)}^K \\ &\vdots\end{aligned}\tag{5.19}$$

ここで  $\Gamma_{JK}^I$  は  $G_{IJ}$  で定義されるレビ・チビタ接続 ( $\Gamma_{A,BC} \equiv (\partial_B G_{CA} + \partial_C G_{AB} - \partial_A G_{BC})/2$ ) である。特に (5.19) の  $\alpha$  の 1 次の運動方程式は 0 質量 Klein-Gordon 方程式の解に相当するものである。そのため、 $\eta_{(1)}$  の境界条件は境界上の外場  $J^I(\vec{x})$  と取ることにする。

### 5.3 修正された AdS 時空の伝播関数

今までの議論は  $\text{AdS}_{d+1}$  空間には  $z$  方向のカットオフが存在しない状況でのスカラー場  $\phi^I$  の運動並びに on-shell 作用を考えてきた。しかし多くの場の理論と同様に、相関関数を議論する際には演算子の挿入点がぶつかる際に生じる発散を考慮しなければならない。一般に演算子の挿入点が非常に近接する状況では発散が生じてしまうので、適切なカットオフを導入し正則化する必要がある。AdS/CFT 対応ではこのカットオフをバルクの動径座標の原点近傍  $z = \epsilon (\ll 1)$  にとり、カットオフの位置を新たな境界面として議論する (これを修正された AdS 時空と呼ぶことにする (図 4))。このため上に示したカットオフがない場合の AdS 時空中の伝播関数を修正する必要がある。この章ではこの修正について議論する。

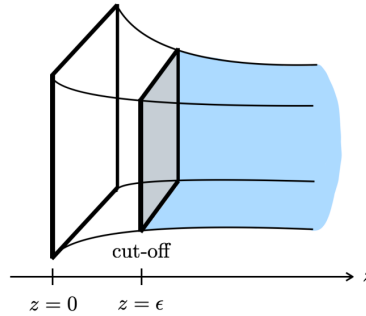


図 4 カットオフ面を境界に持つ修正された AdS 時空 (網掛け領域)

[15] に示されている様に修正されたバルク-バルク伝播関数  $G_\Delta^\epsilon(X, y)$  は修正前のバルク-バルク伝播関数  $G_\Delta(X, y)$  を用いて以下の様に与えられる。

$$G_\Delta^\epsilon(X, Y) = G_\Delta(X, Y) - \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} (zw)^{\frac{d}{2}} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} K_\nu(kz) K_\nu(kw) \frac{I_\nu(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}\tag{5.20}$$

$I_\nu(kz)$  と  $K_\nu(kw)$  はそれぞれ第 1 種と第 2 種の変形ベッセル関数であり、 $\nu = \Delta - d/2$  を通して演算子の共形次元  $\Delta$  に依存している。修正前のバルク-バルク伝播関数  $G_\Delta(X, y)$  も変形ベッセル関数を用いて次の様な



形で与えられる。

$$G_\Delta(X, Y) = (zw)^{\frac{d}{2}} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \left[ \Theta(w - z) I_\nu(kz) K_\nu(kw) + \Theta(z - w) I_\nu(kw) K_\nu(kz) \right] \quad (5.21)$$

$G_\Delta(X, Y)$  の導出と変形ベッセル関数の定義に関しては B.1 を参照されたい。 $G_\Delta^\epsilon(X, Y)$  の右辺第 2 項目の修正項は、新たな境界条件がカットオフ境界面上  $z = \epsilon$  で

$$\lim_{z \rightarrow \epsilon} G_\Delta^\epsilon(X, Y) = 0 \quad (5.22)$$

となる様に決定される。この修正において運動方程式の形式は一切変更を受けておらずため、 $G_\Delta^\epsilon(X, Y)$  は  $G_\Delta(X, Y)$  と同じ運動方程式

$$\square_X G_\Delta^\epsilon(X, Y) = -\frac{1}{\sqrt{g}} \delta(X - Y) \quad (5.23)$$

を満たす。この修正されたバルク-バルク伝播関数はカットオフ境界面を境界に持つ変形された AdS 時空中を伝搬するスカラー場  $\phi^I$  の振る舞いを記述している量である。

次に (5.20) を用いて修正されたバルク-境界伝播関数  $K_\Delta^\epsilon(X, y)$  を構成しよう。カットオフなしの場合と同様に、バルク-バルク伝播関数のバルクの動径座標  $z$  に関する微分を用いて以下の様に定義される。

$$K_\Delta^\epsilon(X, \vec{y}) \equiv \frac{1}{\epsilon^{d-1}} \frac{\partial}{\partial w} G_\Delta^\epsilon(X, Y) \Big|_{w=\epsilon}, \quad \frac{\partial}{\partial w} G_\Delta^\epsilon(X, Y) \Big|_{w=\epsilon} = z^{\frac{d}{2}} \epsilon^{\frac{d}{2}-1} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \frac{K_\nu(kz)}{K_\nu(k\epsilon)} \quad (5.24)$$

修正されたバルク-境界伝播関数の境界条件と運動方程式は、以下の通りである。

$$\square_X K_\Delta^\epsilon(X, \vec{y}) = 0 \quad (5.25)$$

$$\lim_{z \rightarrow \epsilon} K_\Delta^\epsilon(X, \vec{y}) = \delta^d(\vec{x} - \vec{y}) \quad (5.26)$$

修正された伝播関数 (5.22)、(5.26) を用いて、修正された AdS 時空における (5.19) の解  $\eta_{(1)}^I, \eta_{(2)}^I, \eta_{(3)}^I$  は形式的に以下の様に与えられる。

$$\eta_{(1)}^I(X) = \int d^d x_i K_\Delta^\epsilon(X, x_i) J_\epsilon^I(\vec{x}_i) \quad (5.27)$$

$$\eta_{(2)}^I(X) = \Gamma_{JK}^I \int d^{d+1} Y \sqrt{g(Y)} G_\Delta^\epsilon(X, Y) \partial_\nu \eta_{(1)}^J(Y) \partial^\nu \eta_{(1)}^K(Y) \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} \eta_{(3)}^I(X) &= 2\Gamma_{JK}^I \int d^{d+1} Y \sqrt{g(Y)} G_\Delta^\epsilon(X, Y) \partial_\nu \eta_{(2)}^J(Y) \partial^\nu \eta_{(1)}^K(Y) \\ &\quad + \partial_L \Gamma_{JK}^I \int d^{d+1} Y \sqrt{g(Y)} G_\Delta^\epsilon(X, Y) \eta_{(1)}^L(Y) \partial_\nu \eta_{(1)}^J(Y) \partial^\nu \eta_{(1)}^K(Y) \end{aligned} \quad (5.29)$$

⋮

またそれらの境界条件は (5.22) や (5.26) に従って以下の様になる。

$$\eta_{(1)}^I(z = \epsilon, \vec{x}) = J_\epsilon^I(\vec{x}) \quad (5.30)$$

$$\eta_{(2)}^I(z = \epsilon, \vec{x}) = 0 \quad (5.31)$$

$$\eta_{(3)}^I(z = \epsilon, \vec{x}) = 0 \quad (5.32)$$

ここで  $J_\epsilon^I(\vec{x})$  は、 $\eta_{(1)}^I$  のカットオフ境界面上の値であり、今後この値を重力理論に双対な共形場理論の外場として扱う。<sup>\*62</sup>

<sup>\*62</sup> 一般にカットオフ境界面上の外場  $J_\epsilon^I(\vec{x})$  は、修正前の境界条件  $\eta_{(1)}^I(z = 0, \vec{x}) = J^I(\vec{x})$  と以下の関係にある。

$$J^I(\vec{x}) = \epsilon^{\Delta-d} J_\epsilon^I(\vec{x}) \quad (5.33)$$

## 5.4 on-shell 作用 $I_2[J]$ と 2 点関数

まず初めに求める関数形について述べておく。exactly marginal 演算子の 2 点関数を求める際に注目しているのは座標依存性の係数である。微分正則化 (differential regularization) を採用し、2 点関数の座標依存する部分の運動量表示を求める。注目するのは  $k^2$  について非解析関数となる部分であり、 $k^d \log(k\epsilon)$  に比例する項とその係数  $U_d$  を調べたい<sup>\*63</sup>。

$$\langle O(\vec{x})O(\vec{y}) \rangle = U_d \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} k^d \log(k\epsilon) \quad (5.34)$$

$U_d$  を求めることで、共形場理論における Zamolodchikov 計量  $g_{IJ}(\varphi)$  と本論文の重力理論におけるスカラー場の計量  $G_{IJ}(\varphi)$  の間の関係を知ることができるためである。

外場  $J^I(\vec{x})$  の汎関数として on-shell 作用を求めたい。(5.27) を (5.16) に代入し  $z$  方向に関して部分積分することで、表面項としての on-shell 作用  $I_2[J]$  を得る。

$$I_2[J] = -\frac{1}{2} G_{IJ} \int_{z=\epsilon} d^d x \frac{1}{\epsilon^{d-1}} \eta_{(1)}^J \partial_z \eta_{(1)}^I \quad (5.35)$$

ここで  $\partial_z \eta_{(1)}^I|_{z=\epsilon}$  の境界での値を知る必要がある。まず (5.24) と (5.27) より  $\partial_z \eta_{(1)}^I|_{z=\epsilon}$  の以下で与えられる<sup>\*64</sup>。

$$\partial_z \eta_{(1)}^I \Big|_{z=\epsilon} = \int d^d y J^I(\vec{y}) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \frac{1}{\epsilon} \left[ \frac{d}{2} - \nu + k \frac{\partial}{\partial k} \log[(k\epsilon)^\nu K_\nu(k\epsilon)] \right] \quad (5.36)$$

また第 2 種変形ベッセル関数は  $s = 0$  周りの展開によって以下の様に定義される。

$$K_\nu(s) = \frac{1}{2} \Gamma(\nu) \Gamma(1 - \nu) \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! \Gamma(-\nu + m + 1)} \left(\frac{s}{2}\right)^{2m-\nu} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! \Gamma(\nu + m + 1)} \left(\frac{s}{2}\right)^{2m+\nu} \right] \quad (5.37)$$

(5.37) から分かる様にガンマ関数によって、(5.36) は  $\nu = d/2$  で極 (pole) を持つ可能性がある。そのため、今考えている exactly marginal 演算子の場合 ( $\Delta = d$ ) に対して  $K_\nu(s)$  の振る舞いを慎重に調べる必要がある。具体的には、 $K_\nu(s)$  を  $\nu = d/2 + \delta$  と解析接続し、極限  $\delta \rightarrow 0$  をとることで 2 点関数の物理的 (非局所的) な情報を得る。

(5.37) に含まれるガンマ関数に対して解析接続  $\nu = d/2 + \delta$  を行い  $\delta \sim 0$  で  $\delta$  についての振る舞いを調べると、 $K_\nu(s)$  は  $\delta \rightarrow 0$  で特異性を生じないことが分かる<sup>\*65</sup>。故に (5.36) に含まれる第 2 種変形ベッセル関数については  $\nu = d/2$  において以下の様になる。

$$K_{d/2}(k\epsilon) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{-d/2} \left[ \sum_{m=0}^{d/2-1} \frac{1}{m!} \prod_{l=1}^m \frac{1}{l - d/2} \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{d/2-1}}{m! \left(\frac{d}{2} - 1\right)! \left(m + \frac{d}{2}\right)!} \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{2m+d} \left\{ 2\gamma + 2 \log\left(\frac{k\epsilon}{2}\right) - H_m - H_{m+\frac{d}{2}} \right\} \right] \quad (5.38)$$

---

元々の外場と  $\epsilon^{\Delta-d}$  の因子の分だけ異なる。しかし解析したいのは  $\Delta = d$  の場合であるため、以降は  $J^I(\vec{x})$  と  $J_\epsilon^I(\vec{x})$  を区別しないこととする。

\*63 この理由については付録 C を参照されたい

\*64 この導出に関しては B.2 を参照されたい。

\*65 この導出に関しては B.3 を参照されたい。

ここで  $\gamma = 0.57721 \dots$  はオイラー定数、 $H_n$  は調和数である<sup>\*66</sup>。これにより  $\nu = d/2$  で

$$\partial_z \eta_{(1)}^I \Big|_{z=\epsilon, \nu=d/2} = \int d^d y J^I(\vec{y}) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \frac{1}{\epsilon} \left[ k \frac{\partial}{\partial k} \log [(k\epsilon)^{d/2} K_{d/2}(k\epsilon)] \right] \quad (5.40)$$

を得る。(5.38) と (5.40) から求めるべき非局所的な寄与が係数と共に得られる<sup>\*67</sup>。

$$k \frac{\partial}{\partial k} \log [(k\epsilon)^{d/2} K_{d/2}(k\epsilon)] \supset 2d \frac{(-1)^{d/2-1}}{\left(\frac{d}{2} - 1\right)! \frac{d!}{2}} \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^d \log(k\epsilon) \quad (5.41)$$

故に、 $\alpha$  の 2 次の on-shell 作用 (5.35) のうち 2 点関数の物理的な情報を持つ非局所的な寄与は以下の様になる。

$$\begin{aligned} I_2[J] &= -\frac{1}{2} G_{IJ} \int_{z=\epsilon} d^d x \frac{1}{\epsilon^{d-1}} \eta_{(1)}^J \partial_z \eta_{(1)}^I \\ &\supset -\frac{1}{2} U_d G_{IJ} \int d^d x \int d^d y J^I(\vec{x}) J^J(\vec{y}) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} k^d \log(k\epsilon) \end{aligned} \quad (5.42)$$

以上の結果より、2 次の on-shell 作用を外場で 2 回汎関数微分すると 2 点関数の運動量表示は以下の様になる。

$$\langle O_A(\vec{x}_a) O_B(\vec{x}_b) \rangle = U_d G_{AB} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x}_a - \vec{x}_b)} k^d \log(k\epsilon), \quad (5.43)$$

ここで境界面の次元に依存した係数は

$$U_d \equiv \frac{(-1)^{d/2-1}}{2^{d-2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)^2} \quad (5.44)$$

であることがわかる。 $U_d$  は [18] で示されている共形次元  $\Delta$  のスカラー演算子の 2 点関数の係数  $C_\Delta$

$$\langle O(\vec{x}) O(0) \rangle = \frac{(2\Delta - d) C_\Delta}{|\vec{x}|^{2\Delta}}, \quad C_\Delta = \frac{\Gamma(\Delta)}{\pi^{d/2} \Gamma(\Delta - \frac{d}{2})}$$

と以下の関係にある<sup>\*68</sup>。

$$\frac{(-1)^{d/2-1} \pi^{d/2}}{2^{d-2} \Gamma(d) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} C_{\Delta(=d)} = U_d \quad (5.45)$$

これより、共形場理論における Zamolodchikov 計量  $g_{IJ}$  と重力理論におけるスカラー場の計量  $G_{IJ}$  の関係は、

$$g_{AB}(\varphi) \stackrel{\text{GKP-W}}{=} d C_d G_{AB} = d \frac{\Gamma(d)}{\pi^{d/2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} G_{AB}(\varphi) \quad (5.46)$$

となることが分かる。

---

<sup>\*66</sup>

$$H_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \gamma \quad (5.39)$$

<sup>\*67</sup> この導出は (B.4) を参照されたい。

<sup>\*68</sup> 詳細は (付録 C) を参照されたい。

### 5.5 3点関数

$\alpha$  の 3 次の on-shell 作用は以下の様にとても簡単な形に帰着できることが分かる。この導出は (付録 D) を参照されたい。

$$I_3[J] = \frac{1}{2} \partial_K G_{IJ} \int d^{d+1} X \sqrt{g(X)} \eta_{(1)}^K(X) \partial_\mu \eta_{(1)}^I(X) \partial^\mu \eta_{(1)}^J(X) \quad (5.47)$$

さて、 $I_3$  を部分積分して以下の形に帰着させることができる。

$$I_3[J] = -\frac{1}{2\epsilon^{d-1}} \Gamma_{K,IJ} \int_{z=\epsilon} d^d x \partial_z \eta_{(1)}^K \eta_{(1)}^I \eta_{(1)}^J \quad (5.48)$$

2 点関数の場合と同様に表面項に帰着できた。(5.48) から同様に非局所的な寄与を抜き出すと以下のようになる。

$$I_3[J] = -\frac{1}{2} U_d \Gamma_{K,IJ} \int d^d x \int d^d y J^K(\vec{y}) J^I(\vec{x}) J^J(\vec{x}) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} k^d \log(k\epsilon) + \dots \quad (5.49)$$

1 回積分された 3 点関数を求めるために、 $I_3[J]$  を外場  $J^I$  で 2 回汎関数微分すると以下の様になる。

$$\left. \frac{\delta^2 I_3[J]}{\delta J^A(x_a) \delta J^B(x_b)} \right|_{J=\text{const.}} = -J^K \partial_K G_{AB} U_d \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x}_a - \vec{x}_b)} k^d \log(k\epsilon) \quad (5.50)$$

ここで 2 回汎関数微分したあとの残りの外場を定数においた ( $J^I(\vec{x}) = J^I = \text{定数}$ )。 (4.22) より、この結果は 1 回積分された 3 点関数について

$$\langle O_A(\vec{x}_a) O_B(\vec{x}_b) \rangle \int d^d x_c O_C(\vec{x}_c) = \partial_C G_{AB} U_d \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x}_a - \vec{x}_b)} k^d \log(k\epsilon) \quad (5.51)$$

が成り立つことを意味する。

ここで共形場理論から要請れることを再度考えてみる。まず  $\mathbb{R}^d$  上の 2 点関数  $\langle O_A(\vec{x}_a) O_B(\vec{x}_b) \rangle$  以下の様になる。

$$\langle O_A(\vec{x}_a) O_B(\vec{x}_b) \rangle = \frac{g_{AB}(\varphi)}{(\vec{x}_a - \vec{x}_b)^{2d}} \quad (5.52)$$

ここで  $g_{AB}(\varphi)$  は理論の Zamolodchikov 計量であり、exactly marginal coupling  $\varphi^I$  に依存している。2 点関数に対して  $\varphi = \varphi_0$  周りの摂動<sup>\*69</sup>をおこなった場合、その 1 次の補正が積分された 1 回積分された 3 点関数となる。[3] によると、exactly marginal 演算子の 3 点関数がコンタクト項となることから、1 回積分された 3 点関数の形は 2 点関数と同じ座標依存性を持ち以下の様になる。

$$\begin{aligned} \langle O_A(\vec{x}_a) O_B(\vec{x}_b) \rangle_{\varphi_0 + \delta\varphi} &= \langle O_A(\vec{x}_a) O_B(\vec{x}_b) \rangle_{\varphi_0} + \delta\varphi^C \langle O_A(\vec{x}_a) O_B(\vec{x}_b) \int dx_c O_C(\vec{x}_c) \rangle_{\varphi_0} + \dots \\ &= \frac{g_{AB}(\varphi_0)}{(\vec{x}_a - \vec{x}_b)^{2d}} + \delta\varphi^C \frac{\partial_C g_{AB}(\varphi_0)}{(\vec{x}_a - \vec{x}_b)^{2d}} + \dots \end{aligned} \quad (5.53)$$

そこで、(5.53) と (5.51) を見比べると、(5.51) は確かに [3] で示されている様な 2 点関数 (5.43) の 1 次の補正項になっていることが分かる。故に係数まで含め、共形場理論から得られる 3 点関数を AdS 重力理論の計算から再現することができたと言える。

---

<sup>\*69</sup>  $\delta\varphi = O(\alpha)$  として考えている。

## 5.6 4 点関数

3 点関数が、2 点関数 ( $\varphi^I$  に関しての) の 1 次の摂動になっていた。同様に exactly marginal 演算子の (積分された) 4 点関数は、2 点関数の 2 次の摂動になっている。[3] により、具体的には以下の形が期待される。

$$\begin{aligned}
& \langle O_A(\vec{x}_a) O_B(\vec{x}_b) \rangle_{\varphi_0 + \delta\varphi} \\
&= \langle O_A(\vec{x}_a) O_B(\vec{x}_b) \rangle_{\varphi_0} + \delta\varphi^C \langle O_A(\vec{x}_a) O_B(\vec{x}_b) \int dx_c O_C(\vec{x}_c) \rangle_{\varphi_0} \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{2} \delta\varphi^C \delta\varphi^D \langle O_A(\vec{x}_a) O_B(\vec{x}_b) \int dx_c O_C(\vec{x}_c) \int dx_d O_D(\vec{x}_d) \rangle_{\varphi_0}}_{\text{wavy line}} + \dots \quad (5.54) \\
&= \frac{g_{AB}(\varphi_0)}{(\vec{x}_a - \vec{x}_b)^{2d}} + \delta\varphi^C \frac{\partial_C g_{AB}(\varphi_0)}{(\vec{x}_a - \vec{x}_b)^{2d}} + \underbrace{\frac{1}{2} \delta\varphi^C \delta\varphi^D \frac{\partial_C \partial_D g_{AB}(\varphi_0)}{(\vec{x}_a - \vec{x}_b)^{2d}}}_{\text{wavy line}} + \dots
\end{aligned}$$

これを AdS 重力理論の計算で確かめる。

まず on-shell 作用について整理する。(5.18) に (5.19) を代入し整理すると on-shell 作用は以下の形に帰着される。

$$\begin{aligned}
I_4[J] &= \frac{1}{4} \partial_L \partial_K G_{IJ} \int d^{d+1} X \sqrt{g(X)} \eta_{(1)}^L \eta_{(1)}^K \partial_\mu \eta_{(1)}^I \partial^\mu \eta_{(1)}^J \\
&\quad - \frac{1}{2} \Gamma_{K,IJ} \Gamma^K{}_{MN} \int \int d^{d+1} X d^{d+1} Y \sqrt{g(X)} \sqrt{g(Y)} G_\Delta^\epsilon(X, Y) \partial_\mu^{(X)} \eta_{(1)}^I(X) \partial_{(X)}^\mu \eta_{(1)}^J(X) \partial_\nu^{(Y)} \eta_{(1)}^M(Y) \partial_{(Y)}^\nu \eta_{(1)}^N(Y) \quad (5.55)
\end{aligned}$$

この導出に関しては (E.1) を参照されたい。

(5.55) の 2 項をそれぞれ  $I_{\text{cont}}, I_{\text{ex}}$  表すことにする。

$$I_{\text{cont}}[J] \equiv \frac{1}{4} \partial_I \partial_J G_{MN} \int dV_X \eta_{(1)}^I \eta_{(1)}^J \partial_\mu \eta_{(1)}^M \partial^\mu \eta_{(1)}^N \quad (5.56)$$

$$I_{\text{ex}}[J] \equiv -\frac{1}{2} \Gamma_{K,IJ} \Gamma^K{}_{MN} \int \int dV_X dV_Y G_\Delta^\epsilon(X, Y) \partial_\mu^{(X)} \eta_{(1)}^I(X) \partial_{(X)}^\mu \eta_{(1)}^J(X) \partial_\nu^{(Y)} \eta_{(1)}^M(Y) \partial_{(Y)}^\nu \eta_{(1)}^N(Y) \quad (5.57)$$

ここで積分則度を  $\int dV_X := \int d^{d+1} X \sqrt{g(X)}$  という表記で省略した。 $I_{\text{cont}}$  と  $I_{\text{ex}}$  は、Witten ダイアグラムの 4 点相互作用のコンタクトダイアグラム (contact diagram) とのスカラール場が内線に飛ぶダイアグラム (scalar exchange diagram) にそれぞれ相当する (図 5)。以降は  $\alpha$  の 4 次の on-shell 作用を詳しく見ていくが、簡単のため  $I_{\text{cont}}$  と  $I_{\text{ex}}$  それぞれで計算を行なっていく。

### 5.6.1 $I_{\text{cont}}$ と $I_{\text{ex}}$

$I_{\text{cont}}$  から非局所的な寄与を抜き出すため、解の具体形を代入しカットオフ  $\epsilon$  の依存性を見ていく。 $I_{\text{cont}}$  は関数  $\mathcal{F}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3, \vec{y}_4)$  を用いて以下の様に表される。

$$I_{\text{cont}}[J] = \frac{1}{4} \partial_I \partial_J G_{MN} \int d^d y_1 d^d y_2 d^d y_3 d^d y_4 J^I(y_1) J^J(y_2) J^M(y_3) J^N(y_4) \mathcal{F}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3, \vec{y}_4) \quad (5.58)$$

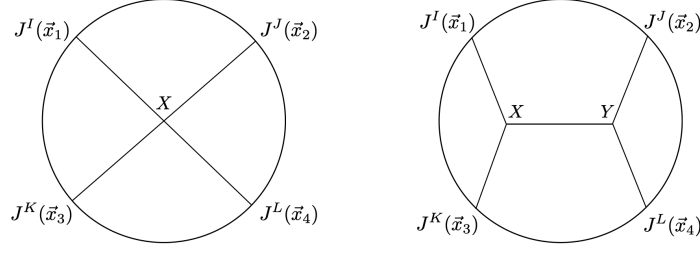


図5 contact diagram(左) と scalar exchange diagram(右)。ダイアグラムの円周は共形場理論が存在する境界を表わす。そして円周の内部で共形場理論の演算子に対応する場が飛ぶ様子をバルクを表している。

ここで  $\mathcal{F}$  は以下のように  $z$  積分を含んでいる。

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3, \vec{y}_4) \equiv & \int_{\epsilon}^{\infty} dz \frac{1}{z^{d-1}} \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k_3}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k_4}{(2\pi)^d} (2\pi)^d \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 + \vec{k}_4) \\ & \times \frac{e^{-i\vec{k}_1 \cdot \vec{y}_1}}{\epsilon^{d/2} K_{\nu}(k_1 \epsilon)} \cdot \frac{e^{-i\vec{k}_2 \cdot \vec{y}_2}}{\epsilon^{d/2} K_{\nu}(k_2 \epsilon)} \cdot \frac{e^{-i\vec{k}_3 \cdot \vec{y}_3}}{\epsilon^{d/2} K_{\nu}(k_3 \epsilon)} \cdot \frac{e^{-i\vec{k}_4 \cdot \vec{y}_4}}{\epsilon^{d/2} K_{\nu}(k_4 \epsilon)} \\ & \times z^d K_{\nu}(k_1 z) K_{\nu}(k_2 z) \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( z^{d/2} K_{\nu}(k_3 z) \right) \frac{\partial}{\partial z} \left( z^{d/2} K_{\nu}(k_4 z) \right) - (\vec{k}_3 \cdot \vec{k}_4) z^d K_{\nu}(k_3 z) K_{\nu}(k_4 z) \right] \end{aligned} \quad (5.59)$$

この導出に関しては (E.2) を参照されたい。

同様に  $I_{\text{ex}}$  から  $I_{\text{cont}}$  と同じ構造が含まれるかを調べる。共形多様体が任意の曲率を持つ場合には、レビ・チビタ接続  $\Gamma_{JK}^I$  は 0 でないので、 $I_{\text{ex}}$  から寄与が生じる可能性がある。

部分積分を実行し、解 (5.27)~(5.29) を代入したものに運動方程式を適用すると、 $I_{\text{ex}}$  は以下のように表面項と関数  $\mathcal{F}$  を含んだ項に分離する。この導出は E.3 を参照されたい。

$$\begin{aligned} I_{\text{ex}}[J] = & \frac{1}{4} \Gamma_{K,IJ} \Gamma_{MN}^K \int \int \int \int d^d y_1 d^d y_2 d^d y_3 d^d y_4 J^I(y_1) J^J(y_2) J^M(y_3) J^N(y_4) \mathcal{F}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3, \vec{y}_4) \\ & + \frac{1}{4} \Gamma_{K,IJ} \Gamma_{MN}^K \left( \int_{z=\epsilon} d^d x \int d^d y J^I(\vec{x}) J^J(\vec{x}) J^M(\vec{x}) J^N(\vec{y}) \frac{1}{\epsilon^{d-1}} \partial_z K_{\Delta}^{\epsilon}(X, \vec{y}) \Big|_{z=\epsilon} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \int_{z=\epsilon} d^d x \int_{w=\epsilon} d^d y J^I(\vec{x}) J^J(\vec{x}) J^M(\vec{y}) J^N(\vec{y}) \frac{1}{\epsilon^{d-1}} \partial_w K_{\Delta}^{\epsilon}(\vec{x}, Y) \Big|_{w=\epsilon} \right) \end{aligned} \quad (5.60)$$

### 5.6.2 積分された 4 点関数

(5.58) と (5.60) を合わせて、4 次の on-shell 作用は以下の形に帰着する。

$$\begin{aligned} I_4[J] = & \frac{1}{4} A_{IJMN} \int d^d y_1 d^d y_2 d^d y_3 d^d y_4 J^I(y_1) J^J(y_2) J^M(y_3) J^N(y_4) \mathcal{F}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3, \vec{y}_4) \\ & + \frac{1}{4} \Gamma_{K,IJ} \Gamma_{MN}^K \left( \int_{z=\epsilon} d^d x \int d^d y J^I(\vec{x}) J^J(\vec{x}) J^M(\vec{x}) J^N(\vec{y}) \frac{1}{\epsilon^{d-1}} \partial_z K_{\Delta}^{\epsilon}(X, \vec{y}) \Big|_{z=\epsilon} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \int_{z=\epsilon} d^d x \int_{w=\epsilon} d^d y J^I(\vec{x}) J^J(\vec{x}) J^M(\vec{y}) J^N(\vec{y}) \frac{1}{\epsilon^{d-1}} \partial_w K_{\Delta}^{\epsilon}(\vec{x}, Y) \Big|_{w=\epsilon} \right) \end{aligned} \quad (5.61)$$

ここで  $A_{IJMN}$  は以下の様に定義した。

$$A_{IJMN} \equiv \partial_I \partial_J G_{MN} + \Gamma_{K,IJ} \Gamma_{MN}^K \quad (5.62)$$

次に (5.61) から非局所的な寄与を取り出す。求めたいのは  $I_4[J]$  を外場で 2 回汎関数微分して得られる積分された 4 点関数である。

まず関数  $\mathcal{F}$  の積分を含む項について考える。この項は  $A_{IJMN}$  に比例するので  $I_A$  と表すことにする。

$$I_A[J] \equiv \frac{1}{4} A_{IJMN} \int d^d y_1 d^d y_2 d^d y_3 d^d y_4 J^I(y_1) J^J(y_2) J^M(y_3) J^N(y_4) \mathcal{F}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3, \vec{y}_4) \quad (5.63)$$

$I_A[J]$  を外場で 2 回汎関数微分し、残っている外場を定数 ( $J^I(\vec{x}) = J^I = \text{定数}$ ) すると、 $\nu = d/2$  の場合では以下になる。導出については E.4、E.4.1 を参照されたい。

$$\left. \frac{\delta^2 I_A[J]}{\delta J^A(\vec{x}_a) \delta J^B(\vec{x}_b)} \right|_{J=\text{const.}} = \frac{1}{2} A_{CDAB} J^C J^D \int \int d^d y_1 d^d y_2 \mathcal{F}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{x}_a, \vec{x}_b) \quad (5.64)$$

ここで汎関数微分したあとの残りの 2 つの外場は定数  $\delta\varphi$  に置き換えて積分の外に出した。(5.64) より、関数  $\mathcal{F}$  から非局所的な寄与が得られることがわかる。

$$\left. \int \int d^d y_1 d^d y_2 \mathcal{F}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{x}_a, \vec{x}_b) \right|_{\nu=d/2} \ni -U_d \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x}_a - \vec{x}_b)} k^d \log(k\epsilon) \quad (5.65)$$

次に (5.61) のうち表面項の部分を考える。この項を  $I_\Gamma$  と表すことにする。

$$I_\Gamma[J] \equiv \frac{1}{4} \Gamma_{K,IJ} \Gamma^K_{MN} \left( \int_{z=\epsilon} d^d x \int d^d y J^I(\vec{x}) J^J(\vec{x}) J^M(\vec{x}) J^N(\vec{y}) \frac{1}{\epsilon^{d-1}} \partial_z K_\Delta^\epsilon(X, \vec{y}) \right) \Big|_{z=\epsilon} \\ - \frac{1}{2} \int_{z=\epsilon} d^d x \int_{w=\epsilon} d^d y J^I(\vec{x}) J^J(\vec{x}) J^M(\vec{y}) J^N(\vec{y}) \frac{1}{\epsilon^{d-1}} \partial_w K_\Delta^\epsilon(\vec{x}, Y) \Big|_{w=\epsilon} \quad (5.66)$$

$I_A[J]$  の場合と同様に  $I_\Gamma$  を外場で 2 回汎関数微分し、残っている外場を定数 ( $J^I(\vec{x}) = J^I = \text{定数}$ ) すると以下になる。導出については E.5 を参照されたい。 $I_\Gamma$  からは、

$$\left. \frac{\delta^2 I_\Gamma}{\delta J^A(\vec{x}_a) \delta J^B(\vec{x}_b)} \right|_{J=\text{const.}} \ni \frac{1}{2} \Gamma_{K,MN} \Gamma^K_{AB} J^M J^N U_d \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x}_a - \vec{x}_b)} k^d \log(k\epsilon) \quad (5.67)$$

という非局所的な寄与があることが分かる。

故に (5.64)~(5.67) の結果を総合すると、2 回積分された 4 点関数の  $I_{\text{ex}}[J]$  からの非局所的な寄与は  $I_{\text{ex}}[J]$  の中で相殺してしまうことが分かる E.6。結局、積分された 4 点関数への寄与は  $I_{\text{cont}}$  のみが寄与し以下の結果が得られる。

$$\left. \frac{\delta^2 I_4[J]}{\delta J^A(\vec{x}_a) \delta J^B(\vec{x}_b)} \right|_{J=\text{const.}} \ni -\frac{1}{2} J^C J^D \partial_C \partial_D G_{AB} U_d \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x}_a - \vec{x}_b)} k^d \log(k\epsilon) \quad (5.68)$$

(4.22) より、この結果は 2 回積分された 4 点関数に対して、

$$\langle O_A(\vec{x}_a) O_B(\vec{x}_b) \int d^d x_c O_C(\vec{x}_c) \int d^d x_d O_D(\vec{x}_d) \rangle = \frac{1}{2} J^C J^D \partial_C \partial_D G_{AB} U_d \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x}_a - \vec{x}_b)} k^d \log(k\epsilon) \quad (5.69)$$

が成り立つことを意味する。つまり [3] で示されている様な 2 点関数の 2 次の補正項の形となっている。2 点関数の 2 次の補正 (5.54) として期待される構造を、重力理論側から確かめることができた。

AdS 重力理論の計算から、 $I_{\text{ex}}$  の解析からスカラー場が内線に飛ぶ Witten ダイアグラムからの寄与はないことがわかった。言い換えると、共形多様体が任意の曲率を持つ場合 ( $\Gamma_{IJ}^K \neq 0$ ) に対しても、4 点相互作用の contact ダイアグラムのみがコンタクト項に寄与することがわかった。

### 5.6.3 コンタクト項のまとめ

前節と本節で GKP-Witten 関係式を用い、exactly marginal 演算子の 3 点関数と 4 点関数を AdS 重力理論の計算で調べた。積分された 3 点関数は 2 点関数 ( $\varphi^I$  に関しての) の 1 次の摂動補正になっており、積分された 4 点関数は、2 点関数の 2 次の摂動補正になっていることを確かめた。実際以下のように積分された 3 点及び 4 点関数が得られた。

$$\begin{aligned}
& \langle O_A(\vec{x}_a) O_B(\vec{x}_b) \rangle_{\varphi_0 + \delta\varphi} \\
&= \langle O_A(\vec{x}_a) O_B(\vec{x}_b) \rangle_{\varphi_0} + \delta\varphi^C \langle O_A(\vec{x}_a) O_B(\vec{x}_b) \int dx_c O_C(\vec{x}_c) \rangle_{\varphi_0} \\
&\quad + \frac{1}{2} \delta\varphi^C \delta\varphi^D \langle O_A(\vec{x}_a) O_B(\vec{x}_b) \int dx_c O_C(\vec{x}_c) \int dx_d O_D(\vec{x}_d) \rangle_{\varphi_0} + \dots \quad (5.70) \\
&= \frac{G_{AB}(\varphi_0)}{(\vec{x}_a - \vec{x}_b)^{2d}} + \delta\varphi^C \frac{\partial_C G_{AB}(\varphi_0)}{(\vec{x}_a - \vec{x}_b)^{2d}} + \frac{1}{2} \delta\varphi^C \delta\varphi^D \frac{\partial_C \partial_D G_{AB}(\varphi_0)}{(\vec{x}_a - \vec{x}_b)^{2d}} + \dots
\end{aligned}$$

ここで、正則化された 2 点関数の運動量表示は

$$\mathcal{R} \frac{1}{|\vec{x}|^{2d}} = \frac{(-)^{\frac{d}{2}-1} \pi^{d/2}}{2^{d-1} \Gamma(d) \Gamma(\frac{d}{2} + 1)} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} k^d \log(k\epsilon) \quad (5.71)$$

であり、Zamolodochikov 計量  $g_{IJ}(\varphi)$  と重力理論のスカラー場の計量  $G_{IJ}(\varphi)$  の関係は以下のとおりである。

$$g_{AB} = \frac{\Gamma(d+1)}{\pi^{d/2} \Gamma(d/2)} G_{AB} \quad (5.72)$$

## 5.7 4 点関数の Double OPE 極限

この節では、AdS 重力理論から exactly marginal 演算子の 2 重トレース演算子の相関関数の構造について調べる。そのために、exactly marginal 演算子の 4 点関数に対して double OPE 極限をとることを考える。

4 点関数は主要項に非連結なダイアグラムが寄与し、 $\alpha$  の 2 次の補正項として連結なダイアグラムが寄与する。それを書き下すと以下の様になる。

$$\begin{aligned}
& \langle O_I(\vec{x}_1) O_J(\vec{x}_2) O_K(\vec{x}_3) O_L(\vec{x}_4) \rangle \\
&= \frac{g_{IJ} g_{KL}}{x_{12}^{2\Delta} x_{34}^{2\Delta}} + \frac{g_{IK} g_{JL}}{x_{13}^{2\Delta} x_{24}^{2\Delta}} + \frac{g_{IL} g_{JK}}{x_{14}^{2\Delta} x_{23}^{2\Delta}} - \alpha^2 \frac{\delta^4 I_4[J]}{\delta J^I(\vec{x}_1) \delta J^J(\vec{x}_2) \delta J^K(\vec{x}_3) \delta J^L(\vec{x}_4)} \quad (5.73)
\end{aligned}$$

ここで on-shell 作用を新たな関数  $\mathcal{I}$  を用いて以下の様に表すことにする。

$$I_4[J] = A_{IJKL} \left( \frac{\Gamma(d)}{\pi^{d/2} \Gamma(d/2)} \right)^4 \int d^d x_1 d^d x_2 d^d x_3 d^d x_4 J^I(\vec{x}_1) J^J(\vec{x}_2) J^K(\vec{x}_3) J^L(\vec{x}_4) \mathcal{I}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4) \quad (5.74)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4) &= \int_0^\infty \frac{dz}{z^{d-1}} \int d^d x \left( \frac{z}{z^2 + (\vec{x} - \vec{x}_1)^2} \right)^{\Delta_1} \left( \frac{z}{z^2 + (\vec{x} - \vec{x}_2)^2} \right)^{\Delta_2} \\
&\quad \times \delta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial X^\mu} \left( \frac{z}{z^2 + (\vec{x} - \vec{x}_3)^2} \right)^{\Delta_3} \frac{\partial}{\partial X^\nu} \left( \frac{z}{z^2 + (\vec{x} - \vec{x}_4)^2} \right)^{\Delta_4} \quad (5.75)
\end{aligned}$$



この様な関数  $\mathcal{I}$  を用いると、連結な 4 点関数は次の様な形となる。

$$\begin{aligned}
& - \frac{\delta^4 I_4[J]}{\delta J^I(\vec{x}_1) \delta J^J(\vec{x}_2) \delta J^K(\vec{x}_3) \delta J^L(\vec{x}_4)} \\
& = - \left( \frac{\Gamma(d)}{\pi^{d/2} \Gamma(d/2)} \right)^4 \left( A_{IKJL} \mathcal{I}(\vec{x}_1, \vec{x}_3, \vec{x}_2, \vec{x}_4) + A_{JLIK} \mathcal{I}(\vec{x}_2, \vec{x}_4, \vec{x}_1, \vec{x}_3) \right. \\
& \quad + A_{IJKL} \mathcal{I}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4) + A_{KLJI} \mathcal{I}(\vec{x}_3, \vec{x}_4, \vec{x}_1, \vec{x}_2) \\
& \quad \left. + A_{ILJK} \mathcal{I}(\vec{x}_1, \vec{x}_4, \vec{x}_2, \vec{x}_3) + A_{JKIL} \mathcal{I}(\vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_1, \vec{x}_4) \right)
\end{aligned} \tag{5.76}$$

ここで定義した関数  $\mathcal{I}$  は [13] における  $D$  関数

$$D_{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4) = \int_0^\infty \frac{dz}{z^{d+1}} \int d^d x \prod_{i=1}^4 \left( \frac{z}{z^2 + (\vec{x} - \vec{x}_i)^2} \right)^{\Delta_i} \tag{5.77}$$

と以下の関係を持っており、Witten ダイアグラムでのコンタクトグラフに対応する (図 6)。

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4) &= d^2 [D_{dddd} - 2x_{34}^2 D_{d,d,d+1,d+1}] \\
&= d^2 \left( 1 + \frac{3}{d} x_{34}^2 \frac{\partial}{\partial x_{34}^2} \right) D_{dddd}
\end{aligned} \tag{5.78}$$

この導出については付録 F を参照されたい。 $D$  関数はカットオフ境界面を導入する前の AdS 重力理論に

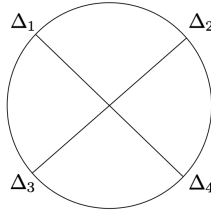
$$D_{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4) =$$


図 6  $D$  関数を表す Witten ダイアグラム

におけるバルク-境界伝播関数を用いて次の様に定義される。これは 4 点相互作用を持つコンタクトダイアグラムに対応する量である。

ここで 2 つの共形不変な変数

$$s = \frac{1}{2} \frac{x_{13}^2 x_{24}^2}{x_{12}^2 x_{34}^2 + x_{14}^2 x_{23}^2}, \quad t = \frac{x_{12}^2 x_{34}^2 - x_{14}^2 x_{23}^2}{x_{12}^2 x_{34}^2 + x_{14}^2 x_{23}^2} \tag{5.79}$$

を導入し、double OPE 極限 ( $x_{13} \ll x_{12}$ ,  $x_{24} \ll x_{12}$ ) を考える (図 7)。これは  $t$  チャンネル極限とも呼ばれる極限であり、exactly marginal 演算子の挿入点を接近させる操作  $\vec{x}_3 \rightarrow \vec{x}_1$  と  $\vec{x}_4 \rightarrow \vec{x}_2$  を同時に行う意味を持つ。この極限のもとで  $s, t$  は、

$$s \sim \frac{1}{4} \frac{x_{13}^2 x_{24}^2}{x_{12}^4} \rightarrow 0, \quad t \sim -\frac{1}{x_{12}^2} \left[ \vec{x}_{13} \cdot \vec{x}_{24} - 2 \frac{(\vec{x}_{12} \cdot \vec{x}_{13})(\vec{x}_{12} \cdot \vec{x}_{24})}{x_{12}^2} \right] \rightarrow 0 \tag{5.80}$$

と振る舞う。<sup>\*70</sup> これを用いると  $D$  関数について以下の極限形が示される。

$$D_{dddd}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4) \sim -\frac{\pi^{d/2} \Gamma(3d/2)}{2\Gamma(2d)} \frac{1}{x_{12}^{4d}} (\log s + 3H_{d-1} - H_{d-1/2}) \tag{5.81}$$

<sup>\*70</sup> このとき  $s/t$  は 0 に近づくが、 $s/t^2$  は有限に保たれる。

導出は F.1.3 を参照されたい。(5.81) を (5.76) に代入することで 4 点関数の double OPE 極限は以下の様に求まる。まず  $N^0$  のオーダーとして非連結な Witten ダイアグラムが寄与し、その次  $1/N^2$  のオーダーとして連結な Witten ダイアグラムが寄与する。この導出については (F.4) を参照されたい。

$$\begin{aligned} \langle O_I(\vec{x}_1) O_J(\vec{x}_2) O_K(\vec{x}_3) O_L(\vec{x}_4) \rangle &\sim \frac{g_{IK}g_{JL}}{x_{13}^{2\Delta} x_{24}^{2\Delta}} + \frac{g_{IJ}g_{KL} + g_{IL}g_{JKL}}{(x_{12}^2)^{2\Delta}} \\ &+ \alpha^2 \frac{d^2}{2\pi^{3d/2}} \frac{\Gamma(3d/2)}{\Gamma(2d)} \left( \frac{\Gamma(d)}{\Gamma(d/2)} \right)^4 \frac{1}{(x_{12}^2)^{2d}} \left[ (3H_d - H_{d-1/2}) \mathcal{A}_{IKJL} - 5(3H_{d-1} - H_{d-1/2}) \mathcal{B}_{IKJL} \right. \\ &\quad \left. + (\mathcal{A}_{IKJL} - 5\mathcal{B}_{IKJL}) \log s \right] \end{aligned} \quad (5.82)$$

ここで  $\mathcal{A}_{IKJL}$  を用いて  $\mathcal{A}_{IKJL}, \mathcal{B}_{IKJL}$  を以下の様に定義した。これらは共形多様体上の幾何学的な情報を持っている。

$$\mathcal{A}_{IKJL} = A_{IKJL} + A_{JLIK}, \quad \mathcal{B}_{IKJL} = A_{IJKL} + A_{KLIJ} + A_{ILJK} + A_{JKIL} \quad (5.83)$$

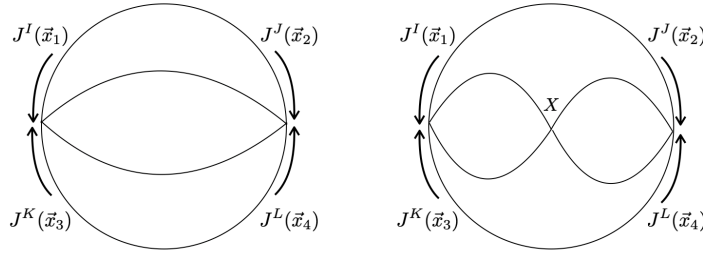


図 7 4 点関数の主要項となるの非連結なダイアグラム (左) と  $O(1/N^2)$  の寄与を与えるコンタクトグラフ (右) の double OPE 極限 ( $t$  チャンネル極限)

(5.82) を共形場理論における exactly marginal 演算子の OPE の言葉として理解したい。前章で見た様に exactly marginal 演算子同士の OPE は消えなければならない。そのため exactly marginal 演算子の OPE に exactly marginal 演算子自体は現れない。OPE の結果に現れる演算子  $O_a(\vec{x}_1)$  として 2 重トレース演算子を考えることができる。この時 exactly marginal 演算子の OPE を

$$O_I(\vec{x}_1) O_K(\vec{x}_3) \sim \frac{g_{IK}}{x_{13}^{2\Delta}} + \sum_a \frac{C_{IK}^a}{x_{13}^{2\Delta - \Delta_a}} O_a(\vec{x}_1) \quad (5.84)$$

と表すことができる<sup>\*71</sup>。ここで、 $C_{IK}^a$  は exactly marginal 演算子とその 2 重トレース演算子の間の OPE 係数である。 $\Delta_a$  は exactly marginal 演算子の 2 重トレース演算子の共形次元であり、次の様に異常次元  $\gamma^a$  を含んでいる。

$$\Delta_a = 2\Delta + \gamma_a \quad (5.85)$$

2 重トレース演算子の 2 点関数が

$$\langle O_a(\vec{x}_1) O_b(\vec{x}_2) \rangle = \frac{\delta_{ab}}{x_{12}^{2\Delta}} \quad (5.86)$$

<sup>\*71</sup> 一般には、exactly marginal 演算子とストレステンソルの間の OPE も存在するがこの議論では重要でないので省略することにする。

となる様に演算子の基底を正規直交基底にとり、(5.84) を用いることで共形場理論における 4 点関数の double OPE 極限は以下の形に帰着する。

$$\langle O_I(\vec{x}_1) O_J(\vec{x}_2) O_K(\vec{x}_3) O_L(\vec{x}_4) \rangle \sim \frac{g_{IK}g_{JL}}{x_{13}^{2\Delta}x_{24}^{2\Delta}} + \frac{1}{(x_{12}^2)^{2\Delta}} \sum_a C_{IK}^a C_{JL}^a (4s)^{\gamma_a} \quad (5.87)$$

ここで 2 重トレース演算子の 1 点関数が 0 になることを用いた。また  $s$  については (5.80) の極限形を用いた。

(5.82) と (5.87) を等しいとし、(5.82) の結果が共形場理論の言葉でどの様に表されるのかを見ていく。(5.87) を  $\alpha$  について展開し、(5.82) と  $\alpha$  の次数ごとに比較する。この比較は single trace 演算子である exactly marginal 演算子  $O_I(\vec{x})$  やストレステンソル  $T_{\mu\nu}$  は、 $\alpha$  の補正を受けない場合に可能となる。 $T_{\mu\nu}$  は保存するため繰り込まれない。exactly marginal 演算子  $O_I(\vec{x})$  がプラナー極限で exactly marginal 演算子に保たれることを仮定し [26]、さらに  $\gamma_a = \mathcal{O}(\alpha^2)$  であり、OPE 係数  $C_{IK}^a$  が  $\mathcal{O}(\alpha^2)$  の補正を受けることを仮定する。つまり、

$$C_{IK}^a = C_{IK}^{(0)a} + \alpha^2 C_{IK}^{(1)a} \quad (5.88)$$

となることを仮定する。この時、(5.87) は  $\alpha$  について以下の様に展開される。

$$\begin{aligned} \langle O_I(\vec{x}_1) O_J(\vec{x}_2) O_K(\vec{x}_3) O_L(\vec{x}_4) \rangle &\sim \frac{g_{IK}g_{JL}}{x_{13}^{2\Delta}x_{24}^{2\Delta}} \\ &+ \frac{1}{(x_{12}^2)^{2\Delta}} \sum_a \left[ C_{IK}^{(0)a} C_{JL}^{(0)a} + \alpha^2 \left( C_{IK}^{(0)a} C_{JL}^{(1)a} + C_{IK}^{(1)a} C_{JL}^{(0)a} \right) + C_{IK}^{(0)a} \gamma_a C_{JL}^{(0)a} \log 2 \right] \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\log s}{(x_{12}^2)^{2\Delta}} \sum_a C_{IK}^{(0)a} \gamma_a C_{JL}^{(0)a} + \mathcal{O}(\alpha^4) \end{aligned} \quad (5.89)$$

(5.82) と (5.89) を比較することで、以下の対応関係が得られる。

$$\sum_a C_{IK}^{(0)a} C_{JL}^{(0)a} = g_{IJ}g_{KL} + g_{IL}g_{JK} \quad (5.90)$$

$$\sum_a C_{IK}^{(0)a} \gamma_a C_{JL}^{(0)a} = 2\alpha^2 \frac{d^2}{2\pi^{3d/2}} \frac{\Gamma(3d/2)}{\Gamma(2d)} \left( \frac{\Gamma(d)}{\Gamma(d/2)} \right)^4 (\mathcal{A}_{IKJL} - 5\mathcal{B}_{IKJL}) \quad (5.91)$$

$$\begin{aligned} \sum_a \left( C_{IK}^{(0)a} C_{JL}^{(1)a} + C_{IK}^{(1)a} C_{JL}^{(0)a} \right) &= \frac{d^2}{2\pi^{3d/2}} \frac{\Gamma(3d/2)}{\Gamma(2d)} \left( \frac{\Gamma(d)}{\Gamma(d/2)} \right)^4 \\ &\times \left[ (3H_d - H_{d-1/2} - \log 4) \mathcal{A}_{IKJL} - 5(3H_{d-1} - H_{d-1/2} - \log 4) \mathcal{B}_{IKJL} \right] \end{aligned} \quad (5.92)$$

バルクの幾何学的情報と OPE の情報を緩解づける様な全ての方程式を導出するには exactly marginal 演算子とストレステンソルを両方含んだ 4 点関数の double OPE 極限が必要になる。境界のストレステンソルは計量の変分と結合するため、ストレステンソルと exactly marginal 演算子の相関関数を考慮したい場合は、重力子を交換する様なダイアグラムを考慮に入れる必要がある。これはこの解析で扱っているバルクの計量を AdS 時空に固定せずに動力学的に扱うことになるため、今回の解析では扱わないことにする。

(5.90) から、行列  $C_{IK}^{(0)a}$  が  $a$  と  $IK$  という 2 つの演算子基底を関係づける直交行列になっていることがわかる。また (5.91) から、行列  $\mathcal{A}_{IKJL} - 5\mathcal{B}_{IKJL}$  は直交行列  $C_{IK}^{(0)a}$  を用いて対角化され、その固有値が  $\gamma_a$  であることを表している。さらに  $C_{IK}^{(1)a}$  は線形方程式 (5.92) の解として得られることがわかる。

## 6 結論

これまでの解析の目的は、共形場理論の詳細に言及せず exactly marginal 演算子の相関関数を重力理論から解析することであった。exactly marginal 演算子の存在する共形場理論は、exactly marginal 演算子によって生成される摂動 (共形摂動論) によって対称性が保たれる。このことが連続パラメータ  $\varphi$  によって特徴付けられる共形多様体の存在を保証している。そしてこの摂動は、exactly marginal 演算子の 3 点及び 4 点関数に物理的な意味を持つコンタクト項が現れ、その係数が共形多様体上の幾何学的情報と関連していることを要請する。

ホログラフィックな繰り込み群の議論によって、exactly marginal 演算子の存在する共形場理論に双対な重力理論の作用は、一般に定数ポテンシャルを持つ非線形シグマ模型で表されることが示された。その作用から得られる非線形運動方程式を exactly marginal coupling  $\varphi^I$  の周りの  $O(\alpha)$  の揺らぎ  $\eta^I$  で展開し、解  $\eta^I[J]$  をカットオフ境界面上で外場  $J^I(\vec{x})$  が境界条件になる様に構成した。その解を作用に代入し外場の汎関数としての on-shell 作用  $I[J]$  を求めた。GKP-Witten の処方箋に従ってそれら汎関数微分することで 2 点、3 点及び 4 点関数を導出した。

共形場理論場において exactly marginal 演算子の 3 点及び 4 点関数は、2 点関数の共形摂動論によって得られる。そのため 3 点及び 4 点関数のコンタクト項の係数は、それぞれ Zamolodochikov 計量の 1 次と 2 次の摂動補正である。解析により、揺らぎを導入して AdS 重力理論から摂動的に導かれた 3 点及び 4 点関数には物理的な意味を持つコンタクト項が存在することが分かった。そしてそれらのコンタクト項の係数が、共形場理論から期待される通りのテンソル構造を持つことを明かにした。

AdS 重力理論から exactly marginal 演算子の相関関数を解析し共形場理論から期待される exactly marginal 演算子のコンタクト項を正しく導出したことで、exactly marginal 演算子の相関関数の性質について AdS/CFT 対応が成立していることを一般的に示した。このことは exactly marginal 演算子に双対な AdS 重力理論において、スカラー場  $\phi^I(X)$  の標的空間<sup>\*72</sup>が共形多様体となっていることを示したとも言い換えられる。また共形摂動論における発散を正則化する方法の一つとして、AdS 重力理論の境界近傍にカットオフ面を入れる処方箋が有効であることを示した。これらのことは exactly marginal 演算子が存在する強結合の共形場理論において、AdS/CFT 対応が成立していることを意味する。そして AdS/CFT 対応の正しさをより確かにする傍証を与えたといえる。

さらに共形多様体の構造と 2 重トレース演算子の OPE 係数や異常次元との関係について理解するために、AdS/CFT 対応の観点から詳細な解析を行った。共形場理論では、double OPE 極限により複雑な演算子混合が起こり、2 重トレース演算子の共形次元は異常次元を含むことが知られている。この異常次元はラージ  $N$  極限で  $1/N^2$  に比例することが知られており、その具体形を知るため非摂動効果を重力理論から解析する必要がある。そこで、exactly marginal 演算子の 4 点関数の double OPE 極限に対応する量を重力理論から求めるため、4 点関数に対応する Witten ダイアグラムの  $t$  チャンネル極限を解析した。その結果 exactly marginal 演算子とその 2 重トレース演算子の間の OPE 係数  $C_{IJ}^a$  や異常次元  $\gamma_a$  が、共形多様体の幾何学的情報を持つテンソル  $A_{IKJL}, B_{IKJL}$  を用いて表されることがわかった。 $C_{IJ}^a$  や  $\gamma_a$  と  $A_{IKJL}, B_{IKJL}$  の一般的な関係を  $1/N^2$  のオーダーまでの解析で示したことは、一部の具体例 [25] で示されていた先行研究の結果を大きく一般化したものになっているという点で新しい。

<sup>\*72</sup> 弦理論などではスカラー場の配位が構成する空間を標的空間という。

今回の解析では、exactly marginal 演算子に双対なスカラー場  $\phi^I(X)$  が重力場  $g_{\mu\nu}(X)$  に及ぼす反作用を考慮しない範囲で解析を行なった。複雑にはなるが重力場に及ぼす反作用を加味した解析を行えば、共形多様体の構造と 2 重トレース演算子の異常次元の関係をより詳しく知ることができると考えられる。このことは理論の空間の構造を解明することにつながると考えられる。

# 付録

## 付録 A 繰り込み群のホログラフィックな議論

### A.1 ADM 分解

ここでは [22] や [24] で議論されている様に、ユークリッド化された重力理論の作用の ADM 分解について述べる。ADM 分解は  $d+1$  次元空間を  $d$  次元の境界  $\Sigma_d$  と 1 次元の時間に分離し、境界  $\Sigma_d$  の“時間”発展という見方で時空の運動を記述する。分解の仕方は時間 + 空間に限定せず、境界が至るところで時間的または空間的な超曲面であれば成り立つ。時空の中の 1 つの方向に特定の意味づけをするため、重力理論のゲージ不変性（一般座標変換に対する不変性）を壊してしまうが、時空の運動を記述するために役に立つ手法である。

ADM 分解を行い  $d+1$  次元空間中の座標を  $X^\mu = X^\mu(\tau, x^i)$  と分解したとしよう (図 8)。特に  $\tau = \tau_0$  の境界を  $\Sigma_d$  と表す。また以降は  $\tau = \tau_0$  の  $\Sigma_d$  上での値を境界条件とし、それに対してバルク上の計量やスカラー場の運動を調べていく。そのため  $\Sigma_d$  上での値とそれ以外のバルク上での値を区別する必要がある。 $\tau = \tau$  でのバルク上の値に対して  $\hat{\phantom{a}}$  記号をつけることにする。同時に  $\Sigma_d$  上の境界値には  $\hat{\phantom{a}}$  を付けず境界条件とみなす ( $\hat{a}(\tau = \tau_0, \vec{x}) \equiv a(\vec{x})$ )。このとき計量を以下の様に表される。

$$ds^2 = \hat{g}_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu = \varepsilon \hat{N}(\tau, \vec{x})^2 d\tau^2 + \hat{h}_{ij}(\tau, \vec{x}) \left( dx^i + \hat{\lambda}^i(\tau, \vec{x}) d\tau \right) \left( dx^j + \hat{\lambda}^j(\tau, \vec{x}) d\tau \right) \quad (\text{付録 A.1})$$

ここで  $\hat{N}(\tau, \vec{x})$ ,  $\hat{\lambda}^i(\tau, \vec{x})$  はラプス関数とシフトベクトルと呼ばれる関数である。以下では、 $\Sigma_d$  の法ベクトル  $n^\mu$  が空間的な場合 ( $n^2 \equiv \varepsilon = +1$ ) に限定し議論していくことにする。これらの関数によって、この論文で必要となるバルクの作用を書き換える。

$$S[\hat{g}, \hat{\phi}] = \int d^d X \sqrt{\hat{g}} (V(\hat{\phi}) - \hat{R} + \frac{1}{2} L_{IJ}(\hat{\phi}) \hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \hat{\phi}^I \partial_\nu \hat{\phi}^J) - 2 \int_{\Sigma_d} d^d x \sqrt{h} K \quad (\text{付録 A.2})$$

この式の左辺 2 項目の  $\Sigma_d$  上の積分で表される項は Gibbons-Hawking 項<sup>\*73</sup> という [33]。これは境界が存在する様なバルクの運動方程式を導く際に、境界からの寄与を正しく取り扱うために必要となる項である。 $h$  は  $\Sigma_d$  上の誘導計量  $h_{ij} \equiv e_i^\mu e_j^\nu g_{\mu\nu}$ <sup>\*74</sup> の行列式であり、 $K = h^{ij} K_{ij}$  は  $\Sigma_d$  上の外部曲率  $K_{ij} \equiv e_i^\mu e_j^\nu \nabla_\mu n_\nu$  の脚を誘導計量  $h_{ij}$  で縮約したスカラー量である [49]。

(付録 A.2) を部分ごとに (付録 A.1) を用いて分解していく。まず、積分則度  $\sqrt{\hat{g}}$  の書き換えを行う。まずバルクの計量  $\hat{g}_{\mu\nu}$  を行列表示すると、

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \hat{N}^2 + \hat{\lambda}_i^2 & \hat{\lambda}_j \\ \hat{\lambda}_i & \hat{h}_{ij} \end{pmatrix}$$

<sup>\*73</sup> Gibbons-Hawking 項は境界を持つ重力理論において作用の変分を行い計量の運動方程式を導く際に必要となる。この項により変分による境界からの寄与を相殺し、バルクの運動を正しく取り扱うことができる。

<sup>\*74</sup> 境界  $\Sigma_d$  上の誘導計量の定義は

$$h_{ij} \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial x^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^j} g_{\mu\nu}$$

である。境界  $\Sigma_d$  の接ベクトルを  $e_i \equiv \partial/\partial x^i$  と定義する。このとき  $e_i = (\partial x^\mu / \partial x^i)(\partial/\partial x^\mu)$  と展開できる。その成分を  $e_i^\mu \equiv \partial x^\mu / \partial x^i$  とした。誘導計量はバルクの計量  $g_{\mu\nu}$  の形に伴って決定される量である。

となる。よって逆行列  $g^{\mu\nu}$  は、

$$\hat{g}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1/\hat{N}^2 & -\hat{\lambda}^j/\hat{N}^2 \\ -\hat{\lambda}^i/\hat{N}^2 & \hat{h}^{ij} + \frac{\hat{\lambda}^i\hat{\lambda}^j}{\hat{N}^2} \end{pmatrix}$$

$g^{\mu\nu}$  の行列式を、ブロック行列を用いて行列式を計算する方法<sup>\*75</sup> で計算すると以下の様になる。

$$\det(\hat{g}^{\mu\nu}) = \begin{vmatrix} 1/\hat{N}^2 & -\hat{\lambda}^j/\hat{N}^2 \\ -\hat{\lambda}^i/\hat{N}^2 & \hat{h}^{ij} + \frac{\hat{\lambda}^i\hat{\lambda}^j}{\hat{N}^2} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\hat{N}^2}\right)^{d+1} \begin{vmatrix} 1 & -\hat{\lambda}^j \\ -\hat{\lambda}^i & \hat{N}^2\hat{h}^{ij} + \hat{\lambda}^i\hat{\lambda}^j \end{vmatrix} = \frac{1}{\hat{N}^2} \det(\hat{h}^{ij})$$

したがって、積分則度  $\sqrt{\hat{g}}$  は ADM 分解 (付録 A.1) で以下の様に表される。

$$\sqrt{\hat{g}} \equiv \sqrt{\det(\hat{g}_{\mu\nu})} = \hat{N} \sqrt{\det(\hat{h}_{ij})} \quad (\text{付録 A.3})$$

続いて、スカラー場  $\phi$  の運動項をラプラス関数やシフトベクトルで表すと以下の様になる。

$$\hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \hat{\phi}^I \partial_\nu \hat{\phi}^J = \frac{1}{\hat{N}^2} \left( (\dot{\hat{\phi}}^I - \hat{\lambda}^i \partial_i \hat{\phi}^I) (\dot{\hat{\phi}}^J - \hat{\lambda}^j \partial_j \hat{\phi}^J) + \hat{N}^2 \hat{h}^{ij} \partial_i \hat{\phi}^I \partial_j \hat{\phi}^J \right) \quad (\text{付録 A.4})$$

ここで  $\cdot$  は  $\partial/\partial\tau$  を意味する。また、スカラー曲率  $\hat{R}$  は以下の様に誘導計量  $h_{ij}$  で構成される  $d$  次元のスカラー曲率  $R^{(d)}$  と  $\Sigma_d$  上の外部曲率を用いて表される<sup>\*76</sup>。

$$\hat{R} = \hat{R}^{(d)} - (\hat{K}_{ij} \hat{K}^{ij} - \hat{K}^2) + 2\hat{\nabla}_\mu (\hat{n}^\nu \hat{\nabla}_\nu \hat{n}^\mu - \hat{n}^\mu \hat{K}) \quad (\text{付録 A.5})$$

これらの結果を用いて作用 (付録 A.2) は以下の様に書き換えられる。

$$S = \int d^d x d\tau \sqrt{\hat{h}} \left[ \hat{N} \left( V(\hat{\phi}) - \hat{R}^{(d)} + \hat{K}_{ij} \hat{K}^{ij} - \hat{K}^2 \right) + \frac{1}{2\hat{N}} L_{IJ}(\hat{\phi}) \left( (\dot{\hat{\phi}}^I - \hat{\lambda}^i \partial_i \hat{\phi}^I) (\dot{\hat{\phi}}^J - \hat{\lambda}^j \partial_j \hat{\phi}^J) + \hat{N}^2 \hat{h}^{ij} \partial_i \hat{\phi}^I \partial_j \hat{\phi}^J \right) \right] \quad (\text{付録 A.6})$$

ここでガウスの発散定理より (付録 A.5) の右辺第 3 項の積分が、

$$2 \int d^d x \sqrt{\hat{g}} \hat{\nabla}_\mu (\hat{n}^\nu \hat{\nabla}_\nu \hat{n}^\mu - \hat{n}^\mu \hat{K}) = 2 \int_{\Sigma_d} d^d x \sqrt{\hat{h}} (n_\mu n^\nu \nabla_\nu n^\mu - K) = 2 \int_{\Sigma_d} d^d x \sqrt{\hat{h}} K \quad (\text{付録 A.7})$$

<sup>\*75</sup>  $A, D$  をそれぞれ  $r$  次と  $s$  次の正方行列とする。これらの行列をブロック要素として行列  $S$  が

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

と表されたとする。 $S$  は上三角ブロック行列と下三角ブロック行列の積に分解できるので、 $S$  の行列式は以下の様に計算される ( $\mathbb{I}_n$  は  $n \times n$  の単位行列を表す)。

$$S = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & \mathbb{I}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_s & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

$$\det S = \det \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & \mathbb{I}_r \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} \mathbb{I}_s & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} = \det A \det(D - CA^{-1}B)$$

<sup>\*76</sup> 外部曲率テンソルは以下の様になる。

$$\hat{K}_{ij} = \frac{1}{2\hat{N}} (\dot{\hat{h}}_{ij} - \hat{\nabla}_i \hat{\lambda}_j - \hat{\nabla}_j \hat{\lambda}_i)$$



となり、Gobbons-Hawking の境界項と相殺することを用いた<sup>\*77</sup>。

一方、古典作用 (付録 A.6) は以下の様に 1 次の形式で書くことができる。

$$S[\hat{h}^{ij}, \hat{\pi}_{ij}, \hat{N}, \hat{\lambda}^i, \hat{\phi}^I, \hat{\pi}_I] = \int d^d x d\tau \sqrt{\hat{g}} \left( \hat{\pi}_I \dot{\hat{\phi}}^I + \hat{\pi}_{ij} \dot{\hat{h}}^{ij} + \hat{N} \hat{\mathcal{H}} + \hat{\lambda}_i \hat{\mathcal{P}}^i \right) \quad (\text{付録 A.8})$$

ここで  $\hat{\mathcal{H}}$  や  $\hat{\mathcal{P}}^i$  は以下の様に定義した。

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} &\equiv -\hat{\pi}_{ij}^2 + \frac{(\hat{\pi}_i^i)^2}{d-1} - \frac{1}{2} L^{IJ}(\hat{\phi}) \hat{\pi}_I \hat{\pi}_J + V(\hat{\phi}) - \hat{R} + \frac{1}{2} L_{IJ}(\hat{\phi}) \hat{h}^{ij} \partial_i \hat{\phi}^I \partial_j \hat{\phi}^J \\ \hat{\mathcal{P}}^i &\equiv 2 \hat{\nabla}_j \hat{\pi}^{ij} - \hat{\pi}_I \hat{\nabla}^i \hat{\phi}^I \end{aligned} \quad (\text{付録 A.9})$$

$\hat{\pi}_I$  や  $\hat{\pi}_{ij}$  に関する運動方程式により、以下の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_I &= \frac{1}{\hat{N}} L_{IJ}(\hat{\phi}) (\dot{\hat{\phi}}^J - \hat{\lambda}^i \partial_i \hat{\phi}^J) \\ \hat{\pi}^{ij} &= \hat{K}^{ij} - \hat{h}^{ij} \hat{K} \end{aligned} \quad (\text{付録 A.10})$$

(付録 A.9) や (付録 A.10) を (付録 A.8) に代入し (付録 A.6) が導かれることがわかる。これより、ハミルトニアン拘束条件並びに運動量拘束条件は以下の様になる。

$$\frac{1}{\sqrt{\hat{h}}} \frac{\delta S}{\delta \hat{N}} = \hat{\mathcal{H}} = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{\hat{h}}} \frac{\delta S}{\delta \hat{\lambda}_i} = \hat{\mathcal{P}}^i = 0 \quad (\text{付録 A.11})$$

続いて、(付録 A.8) に運動方程式の解を代入し境界条件  $h_{ij}(\vec{x})$  や  $\phi^I(\vec{x})$  の汎関数として作用を表す。バルク上の運動方程式の解を  $\bar{h}_{ij}(\tau, \vec{x}), \bar{\phi}^I(\tau, \vec{x})$  と表し、その境界条件を

$$\bar{h}_{ij}(\tau = \tau_0, \vec{x}) \equiv h_{ij}(\vec{x}), \quad \bar{\phi}^I(\tau = \tau_0, \vec{x}) \equiv \phi^I(\vec{x}) \quad (\text{付録 A.12})$$

としよう。ハミルトニアン拘束条件並びに運動量拘束条件  $\bar{\mathcal{H}} = \bar{\mathcal{P}}^i = 0$  を課すことにより on-shell 作用は、

$$S[\phi^I, h_{ij}; \tau_0] = \int d^d x \int_{\tau_0} d\tau \sqrt{\bar{h}} \left( \bar{\pi}_I \dot{\bar{\phi}}^I + \bar{\pi}_{ij} \dot{\bar{h}}^{ij} \right) \quad (\text{付録 A.13})$$

と表せる。この on-shell 作用の変分をとると、

$$\begin{aligned} \delta S[\phi^I, h_{ij}; \tau_0] &= \delta \left[ \int d^d x \int_{\tau_0} d\tau \sqrt{\bar{h}} \left( \bar{\pi}_I \dot{\bar{\phi}}^I + \bar{\pi}_{ij} \dot{\bar{h}}^{ij} \right) \right] \\ &= - \int d^d x \sqrt{\bar{h}} \left[ \left( \bar{\pi}_I(\tau_0, \vec{x}) \dot{\bar{\phi}}^I(\tau_0, \vec{x}) + \bar{\pi}_{ij}(\tau_0, \vec{x}) \dot{\bar{h}}^{ij}(\tau_0, \vec{x}) \right) \delta \tau_0 \right. \\ &\quad \left. + \bar{\pi}_I(\tau_0, \vec{x}) \delta \bar{\phi}^I(\tau_0, \vec{x}) + \bar{\pi}_{ij}(\tau_0, \vec{x}) \delta \bar{h}^{ij}(\tau_0, \vec{x}) \right] \\ &= - \int d^d x \sqrt{\bar{h}} \left( \bar{\pi}_I(\tau_0, \vec{x}) \delta \phi^I(\vec{x}) + \bar{\pi}_{ij}(\tau_0, \vec{x}) \delta h^{ij}(\vec{x}) \right) \end{aligned} \quad (\text{付録 A.14})$$

<sup>\*77</sup> 2 つ目の等号で  $n_\mu n^\nu \nabla_\nu n^\mu$  の項の積分に関しては、 $n_\mu n^\mu = +1$  より

$$\nabla_\nu (n_\mu n^\mu) = 2 n_\mu \nabla_\nu n^\mu = 0$$

であることを用いた。

となる。ここで  $\delta\bar{\phi}^I = \delta\phi^I - \dot{\phi}^I\delta\tau_0$  や  $\delta\bar{h}_{ij} = \delta h_{ij} - \dot{h}_{ij}\delta\tau_0$  となることを用いた。これより境界での  $h(\vec{x}), \phi^I(\vec{x})$  の共役運動量を与える定義式を得る<sup>\*78</sup>。

$$\pi_I(\vec{x}) = \frac{-1}{\sqrt{h}} \frac{\delta S}{\delta\phi^I}, \quad \pi^{ij}(\vec{x}) = \frac{-1}{\sqrt{h}} \frac{\delta S}{\delta h_{ij}} \quad (\text{付録 A.16})$$

次に、ハミルトニアン拘束条件を用いてハミルトン・ヤコビ方程式を導きたい。(付録 A.16) を境界におけるハミルトニアン拘束条件

$$\mathcal{H} \equiv -\pi_{ij}^2 + \frac{(\pi_i^i)^2}{d-1} - \frac{1}{2}L^{IJ}(\phi)\pi_I\pi_J + V(\phi) - R^{(d)} + \frac{1}{2}L_{IJ}(\phi)h^{ij}\partial_i\phi^I\partial_j\phi^J = 0 \quad (\text{付録 A.17})$$

に代入し、 $d$  次元ラグランジアンを

$$\mathcal{L} = V(\phi) - R^{(d)} + \frac{1}{2}L_{IJ}(\phi)h^{ij}\partial_i\phi^I\partial_j\phi^J \quad (\text{付録 A.18})$$

と定義することで、[22] で示されている様なハミルトン・ヤコビ方程式を得る。

$$\{S, S\} = \mathcal{L} \quad (\text{付録 A.19})$$

$$\{S, S\} \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{h}}\right)^2 \left[ -\frac{1}{d-1} \left( h_{ij} \frac{\delta S}{\delta h_{ij}} \right) + \left( \frac{\delta S}{\delta h_{ij}} \right)^2 + \frac{1}{2} L^{IJ}(\phi) \frac{\delta S}{\delta\phi^I} \frac{\delta S}{\delta\phi^J} \right] \quad (\text{付録 A.20})$$

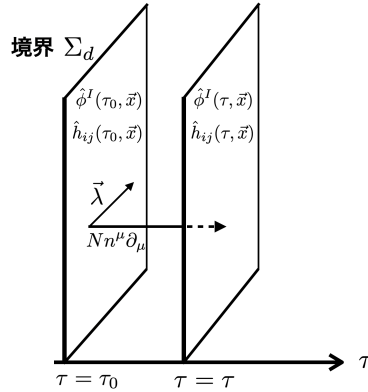


図8 バルクの ADM 分解の様子。各  $\tau =$  一定面上に場  $\hat{h}_{ij}, \hat{\phi}^I$  が存在し、それら運動を  $\tau$  方向の (時間) 発展とみる。

<sup>\*78</sup>  $q^i(t)$  と  $\dot{q}^i(t)$  変数にもつ古典作用の変分を考える。境界条件として  $\delta q \neq 0$  とすると  $p_i = \partial S / \partial q^i$  が得られる。

$$\begin{aligned} \delta S(q^i, \dot{q}^i) &= \delta \int_{t_0}^t dt \mathcal{L}(q^i, \dot{q}^i) = \int_{t_0}^t dt \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) \\ &= \int_{t_0}^t dt \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \right] \\ &\approx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_0}^t \\ \therefore p_i &= \frac{\partial S}{\partial q^i} \end{aligned} \quad (\text{付録 A.15})$$

最後の弱等号は運動方程式を用いたことを意味する。これにより共役運動量が古典作用  $S$  の座標微分として与えられることが示された。

## A.2 微分展開とフロー方程式

作用は以下の様に 2 つの部分に分解される。

$$\frac{1}{2\kappa_{d+1}^2}S[h(\vec{x}), \phi(\vec{x})] = \frac{1}{2\kappa_{d+1}^2}S_{\text{loc}}[h(\vec{x}), \phi(\vec{x})] - \Gamma[h(\vec{x}), \phi(\vec{x})] \quad (\text{付録 A.21})$$

$S_{\text{loc}}[h, \phi]$  は場の理論における短距離の特異性から生じる発散の相殺項であり、 $h(\vec{x}), \phi^I(\vec{x})$  の局所関数の形で表される。 $\Gamma[h, \phi]$  は非局所的な寄与を含む項であり、場の理論における相関関数の生成汎関数として解釈できる。

作用を生成汎関数と相殺項に分離できたので、次にそれぞれを微分の次数ごとに対応させたい。そこで各項の微分の次数を数える指標としてウェイト  $w$  を導入し、ウェイトごとにハミルトン・ヤコビ方程式を解くことにする。以下に各構成要素のウェイトを示す [24]。

境界面上の量	ウェイト
$g_{\mu\nu}, \phi^I, \Gamma[g, \phi]$	0
$\partial_\mu$	1
$R^{(d)}, R_{\mu\nu}^{(d)}, \partial_\mu \phi^I \partial_\nu \phi^J$	2
$\delta\Gamma/\delta h_{ij}, \delta\Gamma/\delta \phi^I$	$d$

このウェイトに従って微分展開すると、 $S_{\text{loc}}$  は以下の様に表される。

$$S_{\text{loc}}[h(\vec{x}), \phi(\vec{x})] = \sum_{w=0,2,4,6,\dots} \int d^d x \sqrt{h} [\mathcal{L}_{\text{loc}}(\vec{x})]_w \quad (\text{付録 A.22})$$

ウェイトごとの項は例えば以下の様なものになる<sup>\*79</sup>。

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_{\text{loc}}]_0 &= W(\phi) \\ [\mathcal{L}_{\text{loc}}]_2 &= -\Phi(\phi)R^{(d)} + \frac{1}{2}M_{IJ}(\phi)h^{ij}\partial_i\phi^I\partial_j\phi^J \end{aligned} \quad (\text{付録 A.23})$$

各ウェイトでハミルトン・ヤコビ方程式は [24] を参照されたい。ウェイト  $d$  のフロー方程式に注目すると、

$$2[\{S_{\text{loc}}, \Gamma\}]_d - \frac{1}{2\kappa_{d+1}^2}[\{S_{\text{loc}}, S_{\text{loc}}\}]_d = 0 \quad (\text{付録 A.24})$$

という方程式になっている。これより、

$$\frac{2}{\sqrt{h}}h_{ij}\frac{\delta\Gamma}{\delta h_{ij}} - \beta^I(\phi)\frac{1}{\sqrt{h}}\frac{\delta\Gamma}{\delta \phi^I} = -\frac{1}{2\kappa_{d+1}^2}\frac{2(d-1)}{W(\phi)}[\{S_{\text{loc}}, S_{\text{loc}}\}]_d \quad (\text{付録 A.25})$$

$$\beta^I(\phi) = \frac{2(d-1)}{W(\phi)}L_{IJ}(\phi)\partial_J W(\phi) \quad (\text{付録 A.26})$$

を得る。 $\beta^I(\phi)$  は境界  $\Sigma_d$  における  $\phi^I$  についての繰り込み群のベータ関数として解釈できる。それは以下の様に示される。

<sup>\*79</sup> ウェイトの勘定により  $S_{\text{loc}}$  の具体形が決まる。(付録 A.23) の第一式はウェイト 0 のスカラー場のみで構成されるポテンシャルしか許されない。また、第二式はウェイト 2 のスカラー曲率を 1 つ使う項とウェイト 1 の微分演算子を 2 つ使う項の存在しか許されない。それぞれの項の係数にはウェイト 0 の関数  $\Phi(\phi), M_{IJ}(\phi)$  をつける任意性が残されている。

まず、 $\bar{\phi}^I$  と  $\bar{h}_{ij}$  運動方程式の解の境界条件を定数だと仮定する。

$$\bar{\phi}^I(\tau_0, \vec{x}) \equiv \phi^I(\vec{x}) = \varphi^I, \quad \bar{h}_{ij}(\tau_0, \vec{x}) \equiv h_{ij}(\vec{x}) = \frac{1}{a^2} \delta_{ij} \quad (\text{付録 A.27})$$

ここで  $a$  と  $\varphi^I$  は定数である。共役運動量 (付録 A.10) の境界での値は以下のようになる<sup>\*80</sup>。

$$\begin{aligned} \pi_I &= \frac{1}{N} L_{IJ}(\phi) (\dot{\phi}^J - \lambda^i \partial_i \phi^J) \Big|_{\tau=\tau_0} = \frac{1}{N} L_{IJ}(\varphi) \dot{\phi}^J \\ \pi^{ij} &= K^{ij} - h^{ij} K = \frac{1}{2N} \left[ (\dot{h}^{ij} - \nabla^i \lambda^j - \nabla^j \lambda^i) - h^{ij} (h^{kl} \dot{h}_{kl} - \nabla^k \lambda_k - \nabla^k \lambda_k) \right] \Big|_{\tau=\tau_0} \end{aligned} \quad (\text{付録 A.28})$$

またハミルトン方程式 (付録 A.16) のうちウェイト 0 に着目すると、

$$\begin{aligned} \pi_I(\vec{x}) &= \frac{-1}{\sqrt{h}} \frac{\delta[S_{\text{loc}}]_0}{\delta \phi^I} = -\partial_I W(\phi) \\ \pi_{ij}(\vec{x}) &= \frac{-1}{\sqrt{h}} \frac{\delta[S_{\text{loc}}]_0}{\delta h^{ij}} = -\frac{1}{2} h_{ij} W(\phi) \end{aligned} \quad (\text{付録 A.29})$$

となる。これらを比較すると境界での  $\tau$  方向の導関数がえられる<sup>\*81</sup>。

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \bar{\phi}^I \Big|_{\tau=\tau_0} &= -L^{IJ}(\varphi) \partial_J W(\varphi) \\ \frac{d}{d\tau} \bar{h}_{ij} \Big|_{\tau=\tau_0} &= \frac{W(\varphi)}{d-1} \frac{1}{a^2} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (\text{付録 A.31})$$

これはフロー (繰り込み群の流れ) の速さを与える方程式なのでフロー方程式といわれる [22]。

さらに、境界  $\Sigma_d$  が平坦であること並びにバルクが漸近的 AdS であることから、解 (計量) をの形を関数  $a(\tau)$  を用いて以下の様になると仮定する。

$$\bar{h}_{ij}(\tau, \vec{x}) = \frac{1}{a(\tau)^2} \delta_{ij}$$

関数  $a(\tau)$  は  $a(\tau_0) = a$  を満たすものとする。これより、

$$\frac{d}{d\tau} \bar{h}_{ij}(\tau, \vec{x}) = -\frac{2}{a(\tau)^3} \frac{\partial a}{\partial \tau} \delta_{ij}$$

これを  $\bar{h}_{ij}$  のフロー速度の式 (付録 A.31) に代入し、 $a(\tau)$  の境界でのフロー速度を得る。

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} \Big|_{\tau=\tau_0} = -\frac{W(\varphi)}{2(d-1)} a$$

<sup>\*80</sup>  $\pi_I$  の式については  $\varphi^I$  が定数であることより、 $\partial_i \phi^I \Big|_{\tau=\tau_0} = \partial_i \varphi^I = 0$  を用いた。

<sup>\*81</sup>  $\pi_{ij}(\vec{x})$  に関しては、(付録 A.28) と (付録 A.29) が等しいことを用い以下の様な変形をおこなった。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2N} \left[ (\dot{h}_{ij} - \nabla_i \lambda_j - \nabla_j \lambda_i) - h^{ij} (h^{kl} \dot{h}_{kl} - \nabla^k \lambda_k - \nabla^k \lambda_k) \right] \Big|_{\tau=\tau_0} &= -\frac{1}{2} h_{ij} W(\varphi) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2N} (d-1) (h^{ij} \dot{h}_{ij} - 2 \nabla^k \lambda_k) \Big|_{\tau=\tau_0} &= \frac{d}{2} W(\varphi) \\ \Leftrightarrow h^{ij} \dot{h}_{ij} \Big|_{\tau=\tau_0} &= 2 \nabla^k \lambda_k + \frac{d}{d-1} N W(\varphi) \end{aligned} \quad (\text{付録 A.30})$$

一般座標変換の自由度から  $N = 1$ ,  $\lambda^i = 0$  ととることができ、(付録 A.31) 以降は  $N, \lambda^i$  に依存しない形で表している。

これを  $\bar{\phi}^I$  についてのフロー速度 (付録 A.31) に適用することで、

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial \tau} \frac{d}{da} \bar{\phi}^I(a(\tau)) \Big|_{\tau=\tau_0} &= -L^{IJ}(\varphi) \partial_J W(\varphi) \\ \Leftrightarrow \quad a \frac{d}{da} \bar{\phi}^I(a(\tau)) \Big|_{\tau=\tau_0} &= \frac{2(d-1)}{W(\varphi)} L^{IJ}(\varphi) \partial_J W(\varphi) \end{aligned} \quad (\text{付録 A.32})$$

$a(\tau)$  は  $\tau = \text{一定面}$  における境界の場の理論におけるカットオフスケールと解釈される。つまり、フロー速度 (付録 A.32) は場の理論の結合定数  $\varphi^I$  に関する繰り込み群のベータ関数と解釈できる。

$$\beta^I(\phi) \equiv a \frac{d}{da} \bar{\phi}^I(a(\tau)) = \frac{2(d-1)}{W(\phi)} L^{IJ}(\phi) \partial_J W(\phi)$$

## 付録 B 伝播関数に関する計算

### B.1 バルク-境界伝播関数 (5.21) の導出

ここでは文献 [15], [12] に従って、バルク-バルク伝播関数 (5.21) を導出する。まず、質量を持ったスカラー場の運動方程式をフーリエ変換し運動量表示する。

$$\begin{aligned} (\Box_X - m^2) G_\Delta(X, Y) &= -\frac{1}{\sqrt{g}} \delta^{d+1}(X - Y), \\ \Leftrightarrow \quad \left[ z^{d+1} \partial_z \left( \frac{1}{z^{d-1}} \partial_z \right) + z^2 \Box - m^2 \right] \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \tilde{G}_\Delta(k; z, w) &= -z^{d+1} \delta(z - w) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}, \\ \Leftrightarrow \quad \left[ z^{d+1} \partial_z \left( \frac{1}{z^{d-1}} \partial_z \right) - z^2 k^2 - m^2 \right] \tilde{G}_\Delta(k; z, w) &= -z^{d+1} \delta(z - w) \end{aligned} \quad (\text{付録 B.1})$$

ここで、 $\tilde{G}_\Delta(k; z, w)$  はバルク-バルク伝播関数のフーリエ変換である。

$$G_\Delta(X, Y) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \tilde{G}_\Delta(k; z, w) \quad (\text{付録 B.2})$$

である。(付録 B.1) の左辺における微分演算子を  $\mathcal{D}_z$  と定義する。

$$\mathcal{D}_z \equiv z^{d+1} \partial_z \left( \frac{1}{z^{d-1}} \partial_z \right) - z^2 k^2 - m^2 \quad (\text{付録 B.3})$$

また  $\tilde{G}_\Delta(k; z, w)$  から  $z^{d/2}$  の因子を除いた新しい関数  $\tilde{H}_\Delta(k; z, w)$  を導入する。

$$\tilde{G}_\Delta(k; z, w) = z^{\frac{d}{2}} \tilde{H}_\Delta(k; z, w) \quad (\text{付録 B.4})$$

これより、(付録 B.1) は以下の様書き換えられる。

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_z \tilde{G}_\Delta(k; z, w) &= -z^{d+1} \delta(z - w), \\ \Leftrightarrow \quad \mathcal{D}'_z \tilde{H}_\Delta(k; z, w) &= -z^{\frac{d}{2}-1} \delta(z - w) \end{aligned} \quad (\text{付録 B.5})$$

ここで

$$\mathcal{D}'_z \equiv \partial_z^2 + \frac{1}{z} \partial_z - \left( k^2 + \frac{m^2 + \frac{d^2}{4}}{z^2} \right) = \partial_z^2 + \frac{1}{z} \partial_z + \frac{\nu^2}{z^2} - k^2 \equiv \Delta_\nu - k^2 \quad (\text{付録 B.6})$$

と定義した。次に  $\tilde{H}_\Delta(k; z, w)$  を演算子  $\mathcal{D}'_z$  の固有関数  $\{\varphi(z)\}$  で表すことを考える。正規直行系を成す様な  $\mathcal{D}'_z$  固有関数  $\{\varphi(z)\}$  はベッセル関数  $J_\nu(\lambda z)$  で与えられる。さらに以下の内積を満たす。

$$\int_0^\infty d\lambda \lambda J_\nu(\lambda z_1) J_\nu(\lambda z_2) = \frac{1}{z_1} \delta(z_1 - z_2) \quad (\text{付録 B.7})$$

(付録 B.6) よりベッセル関数  $J_\nu(\lambda z)$  は  $\Delta_\nu$  の固有関数になっており、その固有値は  $-\lambda^2$  となる。

$$\Delta_\nu J_\nu(\lambda z) = -\lambda^2 J_\nu(\lambda z) \quad (\text{付録 B.8})$$

故に解  $\tilde{H}_\Delta(k; z, w)$  をベッセル関数  $J_\nu(\lambda z)$  で次の様に表すことができる。

$$\tilde{H}_\Delta(k; z, w) = \int_0^\infty d\lambda \lambda J_\nu(\lambda z) f_\lambda(w) \quad (\text{付録 B.9})$$

(付録 B.7) と (付録 B.9) を (付録 B.5) に代入すると  $f_\lambda(w) = \frac{w^{d/2}}{\lambda^2 + k^2} J_\nu(\lambda w)$  であることがわかり、さらに  $\tilde{H}_\Delta(k; z, w)$  は

$$\tilde{H}_\Delta(k; z, w) = w^{\frac{d}{2}} \int_0^\infty d\lambda \frac{\lambda}{\lambda^2 + k^2} J_\nu(\lambda z) J_\nu(\lambda w). \quad (\text{付録 B.10})$$

となることがわかる。以上より解  $G_\Delta(X, Y)$  も以下の様に与えられる。

$$\begin{aligned} G_\Delta(X, Y) &= (zw)^{\frac{d}{2}} \int_0^\infty d\lambda \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \frac{\lambda}{\lambda^2 + k^2} J_\nu(\lambda z) J_\nu(\lambda w) \\ &= (zw)^{\frac{d}{2}} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \frac{i\pi}{2} J_\nu(ikz) \mathcal{H}_\nu^{(1)}(ikw) \\ &= (zw)^{\frac{d}{2}} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} I_\nu(kz^<) K_\nu(kw^>), \end{aligned} \quad (\text{付録 B.11})$$

ここで 2 つ目の等号で [51] に示されている以下の関係式を用いた。そして最後の等号で関係式  $I_\nu(kz) = e^{\frac{i\nu\pi}{2}} J_\nu(ikz)$  を用いた。

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\lambda \frac{\lambda}{\lambda^2 - k^2} J_\nu(\lambda z) J_\nu(\lambda w) &= \frac{i\pi}{2} J_\nu(kz) \mathcal{H}_\nu^{(1)}(kw), \\ \mathcal{H}_\nu^{(1)}(ikw) &= \left( \frac{i\pi}{2} e^{\frac{i\nu\pi}{2}} \right)^{-1} K_\nu(kw) \end{aligned} \quad (\text{付録 B.12})$$

また  $\mathcal{H}_\nu^{(1)}$  はハンケル関数である。さらに  $I_\nu(kz), K_\nu(kz)$  は第 1 種と第 2 種のベッセル関数であり、それぞれ以下の様に定義される。

$$\begin{aligned} I_\nu(z) &= \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m! \Gamma(\nu + m + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m} \\ K_\nu(z) &= \frac{\pi}{\sin \nu\pi} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \Gamma(\nu) \Gamma(1 - \nu) \left[ \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m! \Gamma(-\nu + m + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m} - \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m! \Gamma(\nu + m + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m} \right] \end{aligned} \quad (\text{付録 B.13})$$

## B.2 (5.36) の導出

境界近傍でスカラー場の 1 次の揺らぎ  $\eta_{(1)}^I(X)$  は以下の様になる。

$$\eta_{(1)}^I(X) = \int_{\text{bdy}} d^d x n^\mu \frac{\partial}{\partial Y^\mu} G_\Delta(X, Y) \eta_{(1)}^I(Y) \quad (\text{付録 B.14})$$

$z = \epsilon$  の位置にカットオフ境界面を入れた修正された AdS 時空においては、

$$\eta_{(1)}^I(X) = \int_{w=\epsilon} d^d y \sqrt{g(Y)} g^{ww}(Y) \frac{\partial}{\partial w} G_\Delta^\epsilon(X, Y) \eta_{(1)}^I(Y) = \int_{w=\epsilon} d^d y K_\Delta^\epsilon(X, y) J_\epsilon^I(\vec{y}) \quad (\text{付録 B.15})$$

となる。ここで境界面の方ベクトルの向きはバルクに対して内向き  $n^\mu = (+\epsilon, 0, \dots, 0)$  であるとした。

$(\partial G_\Delta^\epsilon(X, Y)/\partial w)|_{w=\epsilon}$  を計算すると、

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial}{\partial w} G_\Delta^\epsilon(X, Y) \right]_{z=\epsilon, w=\epsilon} = \epsilon^{d-2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \left[ \frac{d}{2} + \epsilon \frac{\partial_z K_\nu(kz)}{K_\nu(k\epsilon)} \right]_{z=\epsilon}. \quad (\text{付録 B.16})$$

となる。 $z$  微分を  $k$  微分で書き直すと、 $\nu = d/2$  の場合では以下の様になる。

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial_z K_\nu(kz)}{K_\nu(k\epsilon)} \right|_{z=\epsilon, \nu=d/2} &= \frac{\partial}{\partial z} \log K_{d/2}(kz) \Big|_{z=\epsilon} = \frac{k}{z} \frac{\partial}{\partial k} \log K_{d/2}(kz) \Big|_{z=\epsilon} = \frac{k}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial k} \log K_{d/2}(k\epsilon) \\ &= \frac{1}{\epsilon} \left[ k \frac{\partial}{\partial k} \log \left( (k\epsilon)^{d/2} K_{d/2}(k\epsilon) \right) - \frac{d}{2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{付録 B.17})$$

故に、

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial}{\partial w} G_\Delta^\epsilon(X, Y) \right]_{z=\epsilon, w=\epsilon, \nu=d/2} = \epsilon^{d-2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \left[ k \frac{\partial}{\partial k} \log \left( (k\epsilon)^{d/2} K_{d/2}(k\epsilon) \right) \right]. \quad (\text{付録 B.18})$$

となり、(付録 B.15) から (5.36) が導かれる。

$$\partial_z \eta_{(1)}^I(X) \Big|_{z=\epsilon, \nu=d/2} = \frac{1}{\epsilon} \int d^d y J^I(\vec{y}) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \left[ k \frac{\partial}{\partial k} \log \left( (k\epsilon)^{d/2} K_{d/2}(k\epsilon) \right) \right], \quad (\text{付録 B.19})$$

ちなみに境界条件は  $\eta_{(1)}^I(X) \rightarrow J^I(x)$  である。

## B.3 の $\nu \sim d/2$ での解析接続

$\nu$  が非整数の場合 ( $\nu = d/2 + \delta$ ) に  $\Gamma$  関数を解析接続し、 $\delta \rightarrow 0$  の元での  $K_\nu(s)$  の振る舞いを調べる。

$$\begin{aligned} K_\nu(s) &= \frac{1}{2} \Gamma(\nu) \Gamma(1 - \nu) \left[ \sum_{m=0}^{d/2-1} \frac{1}{m! \Gamma(-\nu + m + 1)} \left( \frac{s}{2} \right)^{2m-\nu} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + \frac{d}{2})! \Gamma(-\nu + n + \frac{d}{2} + 1)} \left( \frac{s}{2} \right)^{2n+d-\nu} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! \Gamma(\nu + m + 1)} \left( \frac{s}{2} \right)^{2m+\nu} \right] \end{aligned} \quad (\text{付録 B.20})$$

(付録 B.20) の第 1 項目は、その係数の分子と分母が極を相殺するので  $\delta \rightarrow 0$  の元で正則である。つまり安全に  $\delta \rightarrow 0$  の極限を取れる。実際に、(付録 B.20) のうち  $0 \leq m \leq d/2 - 1$  の項は以下の様になる。

$$\frac{\Gamma(1 - \nu)}{\Gamma(m + 1 - \nu)} = \frac{1}{(1 - \nu)(2 - \nu) \cdots (m - \nu)} = \prod_{l=1}^m \frac{1}{l - \nu} = \prod_{l=1}^m \frac{1}{l - d/2 - \delta} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \prod_{l=1}^m \frac{1}{l - d/2} \quad (\text{付録 B.21})$$



この時点での結果をまとめると  $K_\nu(s)$  は以下の様になる。

$$K_{\nu=d/2+\delta}(s) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{d}{2} + \delta\right) \left(\frac{s}{2}\right)^{-d/2-\delta} \\ \times \left[ \sum_{m=0}^{d/2-1} \frac{1}{m!} \left(1 - \delta(H_{\frac{d}{2}-1} - H_{\frac{d}{2}-m-1}) + O(\delta^2)\right) \prod_{l=1}^m \frac{1}{l-d/2} \left(\frac{s}{2}\right)^{2m} \right. \\ \left. + \Gamma(1-d/2-\delta) \underbrace{\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+d/2)!\Gamma(n+1-\delta)} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n+d} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\Gamma(d/2+m+1+\delta)} \left(\frac{s}{2}\right)^{2m+d+2\delta} \right\}}_{\text{(付録 B.22)}} \right].$$

次に (付録 B.22) の  $\underbrace{\#}_{\sim}$  部分の振る舞いを見ると以下の様になる。まず、分子について、

$$\underbrace{\#}_{\sim} = \frac{(-1)^{d/2-1}}{\left(\frac{d}{2}-1\right)!} \left( -\frac{1}{\delta} + \sum_{k=1}^{d/2-1} \frac{1}{k} - \gamma + O(\delta) \right) \\ \times \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+d/2)!\Gamma(n+1-\delta)} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n+d} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\Gamma(d/2+m+1+\delta)} \left(\frac{s}{2}\right)^{2m+d} \left\{ 1 + 2\delta \log\left(\frac{s}{2}\right) + O(\delta^2) \right\} \right],$$

(付録 B.23)

となる。ここで、 $\Gamma(1-d/2-\delta)$  のローラン展開を用いた。また  $\gamma = 0.57721\dots$  はオイラー一定数である。

分母についても以下の様に  $\delta$  についてのテーラー展開を用いる。

$$\frac{1}{\Gamma(n+1-\delta)} = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \left[ 1 + \delta \left( \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} - \frac{1}{2} \delta \frac{\Gamma''(n+1)}{\Gamma(n+1)} + O(\delta^2) \right) \right] \\ = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \left( 1 + \delta \psi(n+1) - \frac{1}{2} \delta^2 \frac{\Gamma''(n+1)}{\Gamma(n+1)} + O(\delta^3) \right) \quad \text{(付録 B.24)} \\ = \frac{1}{n!} \left( 1 + \delta(H_n - \gamma) - \frac{1}{2} \delta^2 \frac{\Gamma''(n+1)}{\Gamma(n+1)} + O(\delta^3) \right),$$

ここで  $\psi(n+1)(= H_n - \gamma)$  はディガンマ関数である<sup>\*82</sup>。これらを用いることで、 $\underbrace{\#}_{\sim}$  部分は  $\delta$  について以下の様に展開される。

$$\underbrace{\#}_{\sim} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{d/2-1}}{n! \left(\frac{d}{2}-1\right)! \left(n+\frac{d}{2}\right)!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2n+d} \left\{ 2\gamma + 2\log\left(\frac{\alpha}{2}\right) - H_n - H_{n+\frac{d}{2}} + O(\delta) \right\} \quad \text{(付録 B.25)}$$

これらの計算から分かる様に  $\underbrace{\#}_{\sim}$  は  $\delta \rightarrow 0$  の極限の元で正則である。(これは、 $\underbrace{\#}_{\sim}$  の係数も含めた  $K_{\nu=d/2+\delta}(s)$  全体で見ても  $\delta \rightarrow 0$  の極限を安全に取ることができるということである。

解析接続  $\nu = d/2 + \delta$  を行い  $\delta \sim 0$  で  $\delta$  についての展開した結果をまとめると第2種変形ベッセル関数  $K_\nu(k\epsilon)$  は以下の様になる。

$$K_{\nu=d/2+\delta}(k\epsilon) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{-d/2} \left[ \sum_{m=0}^{d/2-1} \frac{1}{m!} \prod_{l=1}^m \frac{1}{l-d/2} \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{2m} \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{d/2-1}}{m! \left(\frac{d}{2}-1\right)! \left(m+\frac{d}{2}\right)!} \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{2m+d} \left\{ 2\gamma + 2\log\left(\frac{k\epsilon}{2}\right) - H_m - H_{m+\frac{d}{2}} \right\} \right] + O(\delta)$$

(付録 B.26)

---

<sup>\*82</sup>  $H_n \equiv \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  は調和級数である。

#### B.4 $\nu \rightarrow d/2$ における非局所的な寄与

準備ができたので実際に 2 点関数を求める。今求めている非局所的な寄与は (5.36) から現れる。(5.36) を以下の様に変形しよう。

$$\partial_z \eta_{(1)}^I \Big|_{z=\epsilon, \nu=d/2} = \int d^d x_i J_\epsilon^I(\vec{x}_i) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_i)} \frac{1}{\epsilon} \left[ k \frac{\partial}{\partial k} \log [(k\epsilon)^{d/2} K_{d/2}(k\epsilon)] \right] \quad (\text{付録 B.27})$$

ここで以下の等式を用いた (この導出については (付録 B.17) や (B.2) を参照されたい。 )。

$$\frac{\partial_z K_\nu(kz)}{K_\nu(k\epsilon)} \Big|_{z=\epsilon, \nu=d/2} = \frac{1}{\epsilon} \left[ k \frac{\partial}{\partial k} \log \left( (k\epsilon)^{d/2} K_{d/2}(k\epsilon) \right) - \frac{d}{2} \right]. \quad (\text{付録 B.28})$$

$(k\epsilon)^{d/2} K_{d/2}(k\epsilon)$  は以下の様になる。

$$\begin{aligned} (k\epsilon)^{d/2} K_{d/2}(k\epsilon) &= \frac{1}{2^{1-d/2}} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \left[ \sum_{m=0}^{d/2-1} \frac{1}{m!} \left( \prod_{l=1}^m \frac{1}{l-d/2} \right) \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{2m} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{d/2-1}}{m! \left(\frac{d}{2}-1\right)! (m+\frac{d}{2})!} \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{2m+d} \left\{ 2\gamma + 2\log\left(\frac{k\epsilon}{2}\right) - H_m - H_{m+\frac{d}{2}} \right\} \right] \\ &= \frac{1}{2^{1-d/2}} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \left[ 1 + \left\{ \frac{1}{1-d/2} \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \frac{(-1)^{d/2-1}}{(d/2-1)!(d/2-1)(d/2-2)\cdots 2 \cdot 1} \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{d-2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^{d/2-1}}{\left(\frac{d}{2}-1\right)! \frac{d!}{2}} \left\{ 2\gamma + 2\log\left(\frac{k\epsilon}{2}\right) - H_0 - H_{\frac{d}{2}} \right\} \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^d \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^{d/2-1}}{\left(\frac{d}{2}-1\right)! \left(\frac{d}{2}+1\right)!} \left\{ 2\gamma + 2\log\left(\frac{k\epsilon}{2}\right) - H_1 - H_{1+\frac{d}{2}} \right\} \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{d+2} + \cdots \right], \end{aligned} \quad (\text{付録 B.29})$$

$\epsilon \ll 1$  であるので  $\{\#\}$  を微小量としてテイラー展開すると (付録 B.28) は以下の様になる。

$$\begin{aligned} k \frac{\partial}{\partial k} \log[(k\epsilon)^{d/2} K_{d/2}(k\epsilon)] &= k \frac{\partial}{\partial k} \left[ \left\{ \frac{1}{1-d/2} \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{(-1)^{d/2-1}}{(d/2-1)!(d/2-1)(d/2-2)\cdots 2 \cdot 1} \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{d-2} \right. \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^{d/2-1}}{\left(\frac{d}{2}-1\right)! \frac{d!}{2}} \left\{ 2\gamma + 2\log\left(\frac{k\epsilon}{2}\right) - H_0 - H_{\frac{d}{2}} \right\} \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^d \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^{d/2-1}}{\left(\frac{d}{2}-1\right)! \left(\frac{d}{2}+1\right)!} \left\{ 2\gamma + 2\log\left(\frac{k\epsilon}{2}\right) - H_1 - H_{1+\frac{d}{2}} \right\} \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{d+2} + \cdots \right\} + \left\{ \#\right\}^2 + \cdots \right] \end{aligned} \quad (\text{付録 B.30})$$

$k^d \log(k\epsilon)$  で表される非局所的な寄与探すと、確かに

$$k \frac{\partial}{\partial k} \left[ 2 \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^d \log\left(\frac{k\epsilon}{2}\right) \right] = 2d \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^d \log(k\epsilon) + 2 \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^d (1 - d \log 2). \quad (\text{付録 B.31})$$

という部分にそれが含まれていることが分かる。

## 付録 C 2 点関数の座標表示のフーリエ変換

### C.1 微分正則化

$\int d^d x e^{-ik \cdot x} \frac{1}{|\vec{x}|^{2\Delta}}$  のフーリエ変換を行い運動量表示を得たい。しかし  $\frac{1}{|\vec{x}|^{2\Delta}}$  フーリエ変換を行うには  $|\vec{x}| \rightarrow 0$  における発散が強すぎる。そのためまずは  $1/|\vec{x}|^{2\Delta}$  を正則化し特異性を緩和した式に対してフーリエ変換を行う。ここでは微分正則化 [21] という正則化の手法を用いる。そこでまず場の理論が存在する  $\mathbb{R}^d$  上のラプラシアン  $\square$  を用いて、分母の次数を小さくする以下の様な関係式を導入する。

$$\square \frac{1}{|\vec{x}|^{2\Delta-2}} = (2\Delta-2)(2\Delta-d) \frac{1}{|\vec{x}|^{2\Delta}} \quad (\text{付録 C.1})$$

( $\because$ )

$\vec{x}$  の大きさを  $r = |\vec{x}|$  とする。  $1/|\vec{x}|^{2\Delta-2}$  は  $r$  のみに依存するので、ラプラシアンは  $r$  微分のみで構成される。 $a \neq 0$  に対して以下の様に表される。

$$\square \frac{1}{|\vec{x}|^{2a}} = \frac{1}{r^{d-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^{d-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{1}{r^{2a}} = 2a(2(a+1)-d) \frac{1}{|\vec{x}|^{2a+2}} \quad (\text{付録 C.2})$$

今の場合 ( $a = \Delta - 1$ ) に対して次の形を得る。

$$\square \frac{1}{|\vec{x}|^{2\Delta-2}} = (2\Delta-2)(2\Delta-d) \frac{1}{|\vec{x}|^{2\Delta}} \quad (\text{付録 C.3})$$

今考えている  $\Delta = d$  の場合においては、以下の様に  $(2\Delta - 2d)$  が右辺に現れるまでこの操作を繰り返しラプラシアンに置き換える。

$$\square \frac{1}{|\vec{x}|^{2\Delta-(d+2)}} = (2\Delta-(d+2))(2\Delta-2d) \frac{1}{|\vec{x}|^{2\Delta-d}} \quad (\text{付録 C.4})$$

次に次元正則化を行う。そのカットオフ  $\delta$  を  $2\Delta - 2d = \delta$  の様に定義する。こうすることで両辺の  $\delta$  に関する展開を得る。

$$\begin{aligned} [(\text{付録 C.4}) \text{ 左辺}] &= \square \frac{(\mu|\vec{x}|)^{-(2\Delta-2d)}}{|\vec{x}|^{d-2}} = \square \frac{e^{-\delta \log(\mu|\vec{x}|)}}{|\vec{x}|^{d-2}} = \square \frac{1}{|\vec{x}|^{d-2}} - \delta \square \frac{\log(\mu|\vec{x}|)}{|\vec{x}|^{d-2}} + O(\delta^2) \\ [(\text{付録 C.4}) \text{ 右辺}] &= \delta(d-2) \frac{1}{|\vec{x}|^d} + O(\delta^2) \end{aligned} \quad (\text{付録 C.5})$$

故にラプラシアンに置き換える操作 (付録 C.1) を  $(d+2)/2$  回繰り返し、次元正則化を行うことで正則化された  $1/|\vec{x}|^{2\Delta}$  を得る。

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{x}|^{2\Delta}} &= \frac{1}{(2\Delta-2)(2\Delta-4) \cdots (2\Delta-d)(2\Delta-(d+2)) \cdot (2\Delta-d)(2\Delta-(d+2)) \cdots (2\Delta-d-(d-2))(2\Delta-2d)} \\ &\quad \times \square^{\frac{d+2}{2}} \frac{1}{|\vec{x}|^{2\Delta-(d+2)}} \\ &= \frac{1}{(2\Delta-2)(2\Delta-4) \cdots (2\Delta-d)(2\Delta-(d+2)) \cdot (2\Delta-d)(2\Delta-(d+2)) \cdots (2\Delta-d-(d-2))} \\ &\quad \times \left( -\square^{\frac{d+2}{2}} \frac{\log(\mu|\vec{x}|)}{|\vec{x}|^{d-2}} \right) + \cdots \end{aligned} \quad (\text{付録 C.6})$$

ここで最後の等号で興味のある  $\log(\mu|\vec{x}|)$  を含む項のみあらわに示しその他の項は省略した。係数の部分については  $\delta \rightarrow 0$  の極限で、

$$\frac{1}{(2\Delta-2)(2\Delta-4)\cdots(2\Delta-d)(2\Delta-(d+2))\cdot(2\Delta-d)(2\Delta-(d+2))\cdots(2\Delta-d-(d-2))} \\ \stackrel{\delta \rightarrow 0}{=} \frac{\Gamma(\frac{d}{2}-1)}{2^{d+1}\Gamma(d)\Gamma(\frac{d}{2}+1)} \quad (\text{付録 C.7})$$

となる。これより正則化された  $1/|\vec{x}|^{2\Delta}$  は以下の様に表される<sup>\*83</sup>。

$$\mathcal{R}\frac{1}{|\vec{x}|^{2\Delta}} = -F_d \square^{\frac{d+2}{2}} \frac{\log(\mu|\vec{x}|)}{|\vec{x}|^{d-2}} \quad (\text{付録 C.8})$$

$F_d$  は係数であり、 $\mathcal{R}(\cdot)$  は正則化されたことを意味する。

$$F_d = \frac{\Gamma(\frac{d}{2}-1)}{2^{d+1}\Gamma(d)\Gamma(\frac{d}{2}+1)} \quad (\text{付録 C.9})$$

## C.2 正則化された座標表示のフーリエ変換

まず  $\alpha \ll 1$  における  $(\mu|x|)^{2\alpha}/|x|^{d-2}$  のフーリエ変換を行う。そこで極座標表示をも良いて簡単化すると以下の様になる。

$$\int d^d x e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \frac{(\mu|x|)^{2\alpha}}{|x|^{d-2}} = \int_0^\infty dr r^{d-1} \int d\Omega_{d-1} e^{ikr \cos \theta_1} \frac{(\mu r)^{2\alpha}}{r^{d-2}} \\ = \mu^{2\alpha} \text{Vol}(\mathbb{S}^{d-2}) \int_0^\infty dr r^{2\alpha+1} \int_{-1}^1 dt (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} e^{ikrt} \quad (\text{付録 C.10})$$

最後の等号で変数変換  $t := \cos \theta_1$  をおこなった。  $\beta(:= kt)$  というパラメータに関する微分を用いてこの積分を書き換える。

$$\int_0^\infty dr r^{2\alpha+1} \int_{-1}^1 dt (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} e^{ikrt} = (-)^{\alpha+1} [1 + (-)^{2\alpha}] \frac{\Gamma(2\alpha+2)}{k^{2\alpha+2}} \int_0^1 dt (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} (t^2)^{-(\alpha+1)} \quad (\text{付録 C.11})$$

(付録 C.11) の積分は新しい変数  $T := t^2$  を導入することで以下の様に  $\Gamma$  関数を用いた形で表される。

$$\int_0^1 dt (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} (t^2)^{-(\alpha+1)} = \frac{1}{2} \int_0^1 dT (1-T)^{\frac{d-3}{2}} T^{-(\alpha+\frac{3}{2})} = \frac{1}{2} B\left(\frac{d-1}{2}, -\alpha - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2}) \Gamma(-\alpha - \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2} - \alpha - 1)} \quad (\text{付録 C.12})$$

(付録 C.11) や (付録 C.12) を (付録 C.10) に代入することで、  $(\mu|x|)^{2\alpha}/|x|^{d-2}$  のフーリエ変換以下の様に  $\Gamma$  関数を用いて表すことができる。

$$(\text{付録 C.10}) = (-)^{\alpha+1} \frac{[1 + (-)^{2\alpha}]}{2} \mu^{2\alpha} \text{Vol}(\mathbb{S}^{d-2}) \frac{\Gamma(2\alpha+2)}{k^{2\alpha+2}} \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2}) \Gamma(-\alpha - \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2} - \alpha - 1)} \\ = -2\pi^{\frac{d-1}{2}} \cos \pi\alpha \frac{\mu^{2\alpha}}{k^{2\alpha+2}} \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \frac{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2}) \Gamma(-\alpha - \frac{1}{2})}{2^{1-(2\alpha+2)} \sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(\frac{d}{2} - \alpha - 1)} \quad (\text{付録 C.13})$$

<sup>\*83</sup> 得られた (付録 C.8) は分布として  $\vec{x} = 0$  において特異性が無くなったものになる。 $\vec{x} \neq 0$  において  $1/|\vec{x}|^{2\Delta}$  と等価な振る舞いになっている。[36] の 5.7 章などを参照されたい

$\Gamma$  関数の公式を用いることで、

$$\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\alpha - \frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \pi} = -\frac{\pi}{\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \cos \pi \alpha} \quad (\text{付録 C.14})$$

を得る。これを (付録 C.13) に代入し、フーリエ変換をえる。

$$\int d^d x e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \frac{(\mu|x|)^{2\alpha}}{|x|^{d-2}} = \frac{4\pi^{\frac{d}{2}}}{k^2} \left(\frac{4\mu^2}{k^2}\right)^\alpha \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(\frac{d}{2} - \alpha - 1\right)} \quad (\text{付録 C.15})$$

この結果は  $d \rightarrow 4$  の極限を取ることで、[21] の式 (A.4) に帰着する。

次に [51] にある  $\Gamma$  関数のテイラー展開公式を用いて (付録 C.15) の分子を展開する。

$$\log \Gamma(x) = \frac{1}{2} \log \left( \frac{\pi}{x \sin \pi x} \frac{1-x}{1+x} \right) + (1-\gamma)x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(2n+1)-1}{2n+1} x^{2n+1} \quad (\text{付録 C.16})$$

ここで  $\gamma = 0.5772 \dots$  はオイラー定数である。 $\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$  を用いて変形した後に展開公式を適用すると (付録 C.15) の分子は以下の様になる。

$$\begin{aligned} \Gamma(1+\alpha) &= \exp[\log \alpha + \log \Gamma(\alpha)] \\ &= \exp \left[ \frac{1}{2} \log \alpha + \frac{1}{2} \log \left( \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right) + (1-\gamma)\alpha - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(2n+1)-1}{2n+1} \alpha^{2n+1} \right] \end{aligned} \quad (\text{付録 C.17})$$

また、(付録 C.15) の分母に関係式  $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi/\sin \pi x$  を用いることで、4 以上の偶数次元では以下の様になる。

$$\Gamma\left(\frac{d}{2} - 1 - \alpha\right) = \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \left[ 1 - \alpha H_{d/2-2} \right] + O(\alpha^2) \quad (\text{付録 C.18})$$

故に

$$\begin{aligned} \Gamma(1-\alpha) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \\ &= \exp \left[ -\log \Gamma(\alpha) + \log \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \right] \\ &= \exp \left[ -\frac{1}{2} \log \left( \frac{\pi}{\alpha \sin \pi \alpha} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right) - (1-\gamma)\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(2n+1)-1}{2n+1} \alpha^{2n+1} + \log \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \right], \end{aligned} \quad (\text{付録 C.19})$$

と展開される。対数関数が含まれるが、これについても以下のテイラー展開を用いる。

$$\log \left( \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right) = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{2n+1} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{2n+1} - 2\alpha. \quad (\text{付録 C.20})$$

ここまでの結果を用いて (付録 C.17) と (付録 C.19) はそれぞれ以下の様に表される。

$$\begin{aligned} \Gamma(1+\alpha) &= \exp \left[ \frac{1}{2} \log \alpha + \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} - \gamma \alpha - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(2n+1)}{2n+1} \alpha^{2n+1} \right], \\ \Gamma(1-\alpha) &= \exp \left[ \frac{1}{2} \log \alpha + \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} + \gamma \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(2n+1)}{2n+1} \alpha^{2n+1} \right] \end{aligned} \quad (\text{付録 C.21})$$

故に  $\Gamma$  関数の比のテイラー展開を得る。

$$\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} = \exp \left[ -2\gamma\alpha - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(2n+1)}{2n+1} \alpha^{2n+1} \right] = 1 - 2\gamma\alpha + \dots \quad (\text{付録 C.22})$$

(付録 C.18) と (付録 C.22) の結果から、 $\Gamma(1+\alpha)/\Gamma(d/2-1-\alpha)$  の最終的な展開式を得る。

$$\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(\frac{d}{2}-1-\alpha)} = \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2}-1)} \left[ 1 + \alpha(H_{d/2-2} - 2\gamma) + O(\alpha^2) \right] \quad (\text{付録 C.23})$$

故に (付録 C.15) の  $\alpha = 0$  周りのテイラー展開は以下の様になる。

$$\int d^d x e^{ik \cdot x} \frac{(\mu|x|)^{2\alpha}}{|x|^{d-2}} \text{ のフーリエ変換における } \alpha = 0 \text{ 周りのテイラー展開} \quad \text{---}$$

$$\int d^d x e^{ik \cdot x} \frac{(\mu|x|)^{2\alpha}}{|x|^{d-2}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2}-1)} \frac{4\pi^{\frac{d}{2}}}{k^2} \left[ 1 - \alpha \log \left( \frac{k^2}{\bar{\mu}^2} \right) + O(\alpha^2) \right], \quad \bar{\mu} \equiv \frac{2\mu}{e^{\gamma-\frac{1}{2}H_{d/2-2}}} \quad (\text{付録 C.24})$$

ここで  $\bar{\mu} := 2\mu/e^{\gamma-\frac{1}{2}H_{d/2-2}}$  は場の理論における繰り込み点に対応する。

一方で、(付録 C.10) の  $\alpha = 0$  周りでのテイラー展開は以下の様になる。

$$(\mu^2|\vec{x}|^2)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \log^n(\mu^2|\vec{x}|^2) \quad (\text{付録 C.25})$$

これより、(付録 C.10) の実空間の座標表示における  $\alpha = 0$  周りでのテイラー展開が得られる。

$$\int d^d x e^{ik \cdot x} \frac{(\mu|x|)^{2\alpha}}{|x|^{d-2}} \text{ の実空間の座標表示における } \alpha = 0 \text{ 周りのテイラー展開} \quad \text{---}$$

$$\int d^d x e^{ik \cdot x} \frac{(\mu^2|x|^2)^\alpha}{|x|^{d-2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \int d^d x e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \frac{\alpha^n \log^n(\mu^2|x|^2)}{n! |x|^{d-2}} \quad (\text{付録 C.26})$$

(付録 C.24) と (付録 C.26) の 2 つの表示が得られたので、それぞれの  $\alpha$  の 1 次の項を見比べることで  $\frac{(\mu|x|)^{2\alpha}}{|x|^{d-2}}$  のフーリエ変換を間接的に得ることができる。

$\frac{(\mu|x|)^2}{|x|^{d-2}}$  のフーリエ変換

$$\mathcal{F} \left( \frac{\log(\mu^2|x|^2)}{|x|^{d-2}} \right) \equiv \int d^d x e^{ik \cdot x} \frac{\log(\mu^2|x|^2)}{|x|^{d-2}} = -\frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2}-1)} \frac{4\pi^{\frac{d}{2}}}{k^2} \log \frac{k^2}{\bar{\mu}^2} \quad (\text{付録 C.27})$$

$$\left( \bar{\mu} \equiv \frac{2\mu}{e^{\gamma-\frac{1}{2}H_{d/2-2}}} \right)$$

### C.3 2点関数の運動量表示と Zamolodochikov 計量

(付録 C.27) を用いることで  $\mathcal{R}_{|\vec{x}|^{2d}}$  のフーリエ変換を得る。

$\mathcal{R}_{|\vec{x}|^{2d}}$  の運動量表示

$$\mathcal{R}_{|\vec{x}|^{2d}} = \tilde{F}_d \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} k^d \log \frac{k}{\mu}, \quad \tilde{F}_d \equiv (-)^{d/2+1} \frac{4\pi^{d/2}}{2^{d+1}\Gamma(d)\Gamma(\frac{d}{2}+1)} \quad (\text{付録 C.28})$$

[18] によると、AdS 重力理論から得られた 2 点関数が (4.33) となることが示されている。上で示したフーリエ変換 (付録 C.28) を用いて [18] の 2 点関数の運動量表示が、本論文で求めた 2 点関数の運動量表示と一致することを確かめることができる。実際に、

$$\begin{aligned} \langle O_A(\vec{x}_a) O_B(\vec{x}_b) \rangle &= dC_d G_{AB} \mathcal{R}_{|\vec{x}|^{2d}} \stackrel{(\text{付録 C.28})}{=} dC_d \tilde{F}_d G_{AB} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} k^d \log \frac{k}{\mu} \\ &= (-)^{\frac{d}{2}+1} d \frac{\Gamma(d)}{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d}{2})} \frac{4\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}-1)} \frac{\Gamma(\frac{d}{2}-1)}{2^{d+1}\Gamma(d)\Gamma(\frac{d}{2}+1)} G_{AB} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} k^d \log \frac{k}{\mu} \\ &= \frac{(-)^{\frac{d}{2}+1} d}{2^{d-1}\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(\frac{d}{2}+1)} G_{AB} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} k^d \log \frac{k}{\mu} \\ &\equiv U_d G_{AB} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} k^d \log \frac{k}{\mu} \end{aligned} \quad (\text{付録 C.29})$$

$\epsilon = 1/\mu$  と取することで、本論文で求めた 2 点関数の運動量表示を得る。そしてその係数  $U_d$

$$U_d = \frac{(-)^{d/2+1} d}{2^{d-1}\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(\frac{d}{2}+1)} = \frac{(-)^{d/2-1}}{2^{d-2}\Gamma^2(\frac{d}{2})}$$

が正しく再現されている。以上より双対な共形場理論における Zamolodochikov 計量  $g_{AB}$  と本論文の AdS 重力理論におけるスカラー場の計量  $G_{AB}$  が関係付けられる。

Zamolodochikov 計量

$$g_{AB}(\varphi) \stackrel{\text{GKP-W}}{=} dC_d G_{AB} = \frac{d\Gamma(d)}{\pi^{d/2}\Gamma(\frac{d}{2})} G_{AB}(\varphi). \quad (\text{付録 C.30})$$

## 付録 D 3 次の on-shell 作用 $I_3[J]$ (5.48) の導出

まず (5.17) を部分積分し解 (5.27)、(5.28) を代入したものは以下ようになる。

$$\begin{aligned} I_3[J] &= \frac{1}{2} G_{IJ} \left\{ - \int_{z=\epsilon} d^d x \sqrt{g(X)} g^{zz}(X) \left( \eta_{(1)}^I \partial_z \eta_{(2)}^J + \eta_{(2)}^I \partial_z \eta_{(1)}^J \right) + \Gamma_{JK}^I \int d^{d+1} X \sqrt{g(X)} \eta_{(1)}^I \partial_\mu \eta_{(1)}^J(X) \partial^\mu \eta_{(1)}^K(X) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_K G_{IJ} \int d^{d+1} X \sqrt{g(X)} \eta_{(1)}^K \partial_\mu \eta_{(1)}^I \partial^\mu \eta_{(1)}^J \\ &= -\frac{1}{2} G_{IJ} \int_{z=\epsilon} d^d x \sqrt{g(X)} g^{zz}(X) \eta_{(2)}^I \partial_z \eta_{(1)}^J + \frac{1}{2} \partial_K G_{IJ} \int d^{d+1} X \sqrt{g(X)} \eta_{(1)}^K \partial_\mu \eta_{(1)}^I \partial^\mu \eta_{(1)}^J \end{aligned} \quad (\text{付録 D.1})$$

2 つ目の等号で運動方程式 (5.19) を適用してラプラシアンがない形に置き換え、その上で第 1 行目の  $\eta_{(1)}^I \partial_z \eta_{(2)}^J$  の項を、

$$\int_{z=\epsilon} d^d x \sqrt{g(X)} g^{zz}(X) \eta_{(1)}^I \partial_z \eta_{(2)}^J = \Gamma_{MN}^J \int d^{d+1} X \sqrt{g(X)} \eta_{(1)}^I \partial_\nu \eta_{(1)}^M \partial^\nu \eta_{(1)}^N \quad (\text{付録 D.2})$$



と変形し<sup>\*84</sup>、バルク積分の形に戻した式を用いて整理した。

(付録 D.1) の右辺第 1 項目はバルク-バルク伝播関数を含み、その境界条件 (5.32) より 0 となることがすぐ分かる。故に 3 次の on-shell 作用は、

$$I_3[J] = \frac{1}{2} \partial_K G_{IJ} \int d^{d+1} X \sqrt{g(X)} \eta_{(1)}^K \partial_\mu \eta_{(1)}^I \partial^\mu \eta_{(1)}^J \quad (\text{付録 D.3})$$

に帰着する。さらに、これを部分積分し表面項に帰着させる。

$$I_3[J] = \frac{1}{2} \partial_K G_{IJ} \int d^{d+1} X \sqrt{g(X)} \left[ \nabla_\mu \left\{ \eta_{(1)}^K \eta_{(1)}^I \partial^\mu \eta_{(1)}^J \right\} - \partial_\mu \eta_{(1)}^K \eta_{(1)}^I \partial^\mu \eta_{(1)}^J - \eta_{(1)}^K \eta_{(1)}^I \square_X \eta_{(1)}^J \right] \quad (\text{付録 D.4})$$

(5.27),(5.28) を (付録 D.4) に代入すると

$$I_3 = \frac{1}{2} \partial_K G_{IJ} \int d^{d+1} X \sqrt{g(X)} \left[ \nabla_\mu \left\{ \eta_{(1)}^K \eta_{(1)}^I \partial^\mu \eta_{(1)}^J \right\} - \partial_\mu \eta_{(1)}^K \eta_{(1)}^I \partial^\mu \eta_{(1)}^J \right] \quad (\text{付録 D.5})$$

次にこの式の (付録 D.5) 内の 2 項目について計算する。  $\partial_K G_{IJ}$  の  $(I \leftrightarrow J)$  の交換についての対称性を用いることで、(付録 D.5) 内の 2 項目は以下の様に表面項に帰着する。

$$\begin{aligned} (\text{付録 D.5}) \text{ の 2 項目} &= \frac{1}{2} \partial_K G_{IJ} \int d^{d+1} X \sqrt{g(X)} \partial_\mu \eta_{(1)}^K \eta_{(1)}^I \partial^\mu \eta_{(1)}^J \\ &= \frac{1}{4} \partial_K G_{IJ} \int d^{d+1} X \sqrt{g(X)} \nabla^\mu \left[ \partial_\mu \eta_{(1)}^K \eta_{(1)}^I \eta_{(1)}^J \right] \\ &= -\frac{1}{4} \partial_K G_{IJ} \int_{z=\epsilon} d^d x \sqrt{g(X)} g^{zz}(X) \partial_z \eta_{(1)}^K \eta_{(1)}^I \eta_{(1)}^J \end{aligned} \quad (\text{付録 D.6})$$

以上より、(5.48) を得る。

$$\begin{aligned} I_3[J] &= -\frac{1}{2} \partial_K G_{IJ} \int_{z=\epsilon} d^d x \sqrt{g(X)} g^{zz}(X) \eta_{(1)}^K \eta_{(1)}^I \partial_z \eta_{(1)}^J + \frac{1}{4} \partial_K G_{IJ} \int_{z=\epsilon} d^d x \sqrt{g(X)} g^{zz}(X) \partial_z \eta_{(1)}^K \eta_{(1)}^I \eta_{(1)}^J \\ &= -\frac{1}{2\epsilon^{d-1}} \Gamma_{K,IJ} \int_{z=\epsilon} d^d x \partial_z \eta_{(1)}^K \eta_{(1)}^I \eta_{(1)}^J \end{aligned}$$

## 付録 E 4 点関数に関する計算

### E.1 on-shell 作用 $I_4[J]$ の導出

今までの議論と同様に 4 点関数は作用の  $\alpha$  の 4 次の部分から生じる。この部分を  $I_4$  と表すことにする。 $I_4$  に解を代入し on-shell 作用  $I_4[J]$  を求める。まず off-shell 作用  $I_4$  は次の様になる。

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{1}{2} G_{IJ} \int d^{d+1} X \sqrt{g(X)} (2 \partial_\mu \eta_{(1)}^I \partial^\mu \eta_{(3)}^J + \partial_\mu \eta_{(2)}^I \partial^\mu \eta_{(2)}^J) \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_K G_{IJ} \int d^{d+1} X \sqrt{g(X)} (\eta_{(2)}^K \partial_\mu \eta_{(1)}^I \partial^\mu \eta_{(1)}^J + 2 \eta_{(1)}^K \partial_\mu \eta_{(2)}^I \partial^\mu \eta_{(1)}^J) \\ &\quad + \frac{1}{4} \partial_L \partial_K G_{IJ} \int d^{d+1} X \sqrt{g(X)} \eta_{(1)}^L \eta_{(1)}^K \partial_\mu \eta_{(1)}^I \partial^\mu \eta_{(1)}^J \end{aligned} \quad (\text{付録 E.1})$$

---

<sup>\*84</sup> (5.24) と (5.27) を用いて導くことができる。

ここで新たに解  $\eta_{(3)}^I$  を用いる必要がある。修正された AdS 時空における 3 次の解  $\eta_{(3)}^I$  は以下の様になる。<sup>\*85</sup>

$$\begin{aligned}\eta_{(3)}^I(X) = & +2\Gamma_{JK}^I \int d^{d+1}Y \sqrt{g(Y)} G_{\Delta}^{\epsilon}(X, Y) \partial_{\nu}^{(Y)} \eta_{(2)}^J(Y) \partial_{(Y)}^{\nu} \eta_{(1)}^K(Y) \\ & + \partial_L \Gamma_{JK}^I \int d^{d+1}Y \sqrt{g(Y)} G_{\Delta}^{\epsilon}(X, Y) \eta_{(1)}^L(Y) \partial_{\nu}^{(Y)} \eta_{(1)}^J(Y) \partial_{(Y)}^{\nu} \eta_{(1)}^K(Y)\end{aligned}\quad (\text{付録 E.2})$$

境界条件は (5.24) より

$$\lim_{z \rightarrow \epsilon} \eta_{(3)}^I = 0 \quad (\text{付録 E.3})$$

となる。いくつかの項に部分積分を行うと

$$\begin{aligned}I_4 = & \frac{1}{2} G_{IJ} \int d^{d+1}x \sqrt{g(X)} \left[ \underbrace{\nabla^{\mu} (2\partial_{\mu} \eta_{(1)}^I \eta_{(3)}^J)} - 2\Box_X \eta_{(1)}^I \eta_{(3)}^J + \underbrace{\nabla^{\mu} (\partial_{\mu} \eta_{(2)}^I \eta_{(2)}^J)} - \Box_X \eta_{(2)}^I \eta_{(2)}^J \right] \\ & + \frac{1}{2} \partial_K G_{IJ} \int d^{d+1}X \sqrt{g(X)} \\ & \times \left[ \eta_{(2)}^K \partial_{\mu} \eta_{(1)}^I \partial^{\mu} \eta_{(1)}^J + 2 \left\{ \underbrace{\nabla^{\mu} (\eta_{(1)}^K \partial_{\mu} \eta_{(1)}^I \eta_{(2)}^J)} - \partial^{\mu} \eta_{(1)}^K \partial_{\mu} \eta_{(1)}^I \eta_{(2)}^J - \eta_{(1)}^K \Box_X \eta_{(1)}^I \eta_{(2)}^J \right\} \right] \\ & + \frac{1}{4} \partial_L \partial_K G_{IJ} \int d^{d+1}X \sqrt{g(X)} \eta_{(1)}^L \eta_{(1)}^K \partial_{\mu} \eta_{(1)}^I \partial^{\mu} \eta_{(1)}^J.\end{aligned}\quad (\text{付録 E.4})$$

を得る。 $\Box_X \eta^I(1)$  を含む項は運動方程式で 0 になる。また  $\underbrace{\quad}_{\#}$  部分には  $\eta_{(2)}^I$  や  $\eta_{(3)}^I$  が含まれるため、境界条件 (5.32) より 0 になる。また  $\underline{\underline{\#}}$  部分について、

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\#}} = & -\partial_K G_{IJ} \int dV_X \partial^{\mu} \eta_{(1)}^K \partial_{\mu} \eta_{(1)}^I \eta_{(2)}^J = -\frac{1}{2} (\partial_K G_{IJ} + \partial_I G_{KJ}) \int dV_X \partial^{\mu} \eta_{(1)}^K \partial_{\mu} \eta_{(1)}^I \eta_{(2)}^J \\ \equiv & -\frac{1}{2} (\partial_K G_{IK} + \partial_I G_{JK}) \int dV_X \eta_{(2)}^K \partial_{\mu} \eta_{(1)}^I \partial^{\mu} \eta_{(1)}^J\end{aligned}\quad (\text{付録 E.5})$$

と変形できることを用い、on-shell 作用は以下の様になる。

$$\begin{aligned}I_4[J] = & \frac{1}{4} \partial_L \partial_K G_{IJ} \int d^{d+1}X \sqrt{g(X)} \eta_{(1)}^L \eta_{(1)}^K \partial_{\mu} \eta_{(1)}^I \partial^{\mu} \eta_{(1)}^J \\ & - \frac{1}{2} \Gamma_{K,IJ} \Gamma^K{}_{MN} \int \int d^{d+1}X d^{d+1}Y \sqrt{g(X)} \sqrt{g(Y)} G_{\Delta}^{\epsilon}(X, Y) \partial_{\mu}^{(X)} \eta_{(1)}^I(X) \partial_{(X)}^{\mu} \eta_{(1)}^J(X) \partial_{\nu}^{(Y)} \eta_{(1)}^M(Y) \partial_{(Y)}^{\nu} \eta_{(1)}^N(Y) \\ \equiv & I_{\text{cont}}[J] + I_{\text{ex}}[J]\end{aligned}\quad (\text{付録 E.6})$$

<sup>\*85</sup> バルク上の座標を複数扱う必要があるので、座標  $Y^{\mu}$  についての偏微分を  $\partial_{\mu}^{(Y)} \equiv \frac{\partial}{\partial Y^{\mu}}$  と表すことにする。

## E.2 関数 $\mathcal{F}$ (5.59) の導出

on-shell 作用  $I_{\text{cont}}$  から始める。

$$\begin{aligned}
I_{\text{cont}}[J] &= \frac{1}{4} \partial_I \partial_J G_{MN} \int dV_X \eta_{(1)}^I \eta_{(1)}^J \partial_\mu \eta_{(1)}^M \partial^\mu \eta_{(1)}^N \\
&= \frac{1}{4} \partial_I \partial_J G_{MN} \int dV_X \int d^d y_1 \int d^d y_2 \int d^d y_3 \int d^d y_4 J^I(\vec{y}_1) J^J(\vec{y}_2) J^M(\vec{y}_3) J^N(\vec{y}_4) \\
&\quad \times K_\Delta^\epsilon(X, \vec{y}_1) K_\Delta^\epsilon(X, \vec{y}_2) \partial_\nu K_\Delta^\epsilon(X, \vec{y}_3) \partial_\mu K_\Delta^\epsilon(X, \vec{y}_4) \\
&= \frac{1}{4} \partial_I \partial_J G_{MN} \int d^d x \int d^d y_1 \int d^d y_2 \int d^d y_3 \int d^d y_4 J^I(\vec{y}_1) J^J(\vec{y}_2) J^M(\vec{y}_3) J^N(\vec{y}_4) \\
&\quad \times \int_\epsilon^\infty dz \frac{1}{z^{d-1}} K_\Delta^\epsilon(X, \vec{y}_1) K_\Delta^\epsilon(X, \vec{y}_2) \delta^{\mu\nu} \partial_\nu K_\Delta^\epsilon(X, \vec{y}_3) \partial_\mu K_\Delta^\epsilon(X, \vec{y}_4)
\end{aligned}
\tag{付録 E.7}$$

ここで  $\partial_\mu K_\Delta^\epsilon(X, \vec{y}_3)$  は以下の様に場合分けして書き下すことができる。

$$\partial_\mu K_\Delta^\epsilon(X, \vec{y}_3) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k}_3 \cdot (\vec{x} - \vec{y}_3)} \frac{1}{\epsilon^{d/2} K_\nu(k_3 \epsilon)} \times \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} (z^{d/2} K_\nu(k_3 z)) & (\mu = z) \\ -i(k_3)_i z^{d/2} K_\nu(k_3 z) & (\mu \neq z) \end{cases} \quad \text{付録 E.8}$$

これを代入することで以下の式を得る。

$$\begin{aligned}
F(\vec{x}, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3, \vec{y}_4) = & \int_{\epsilon}^{\infty} dz \frac{1}{z^{d-1}} \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k_3}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k_4}{(2\pi)^d} \\
& \times \frac{e^{-i\vec{k}_1 \cdot (\vec{x} - \vec{y}_1)}}{\epsilon^{d/2} K_{\nu}(k_1 \epsilon)} \cdot \frac{e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y}_2)}}{\epsilon^{d/2} K_{\nu}(k_2 \epsilon)} \cdot \frac{e^{-i\vec{k}_3 \cdot (\vec{x} - \vec{y}_3)}}{\epsilon^{d/2} K_{\nu}(k_3 \epsilon)} \cdot \frac{e^{-i\vec{k}_4 \cdot (\vec{x} - \vec{y}_4)}}{\epsilon^{d/2} K_{\nu}(k_4 \epsilon)} \\
& \times z^d K_{\nu}(k_1 z) K_{\nu}(k_2 z) \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( z^{d/2} K_{\nu}(k_3 z) \right) \frac{\partial}{\partial z} \left( z^{d/2} K_{\nu}(k_4 z) \right) - (\vec{k}_3 \cdot \vec{k}_4) z^d K_{\nu}(k_3 z) K_{\nu}(k_4 z) \right].
\end{aligned}$$

(付録 E.9)

$F(\vec{x}, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3, \vec{y}_4)$  に  $\vec{x}$  積分を行うことで、(5.59) を得る。

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3, \vec{y}_4) &:= \int d^d x \, F(\vec{x}, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3, \vec{y}_4) \\
&= \int_{\epsilon}^{\infty} dz \frac{1}{z^{d-1}} \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k_3}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k_4}{(2\pi)^d} (2\pi)^d \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 + \vec{k}_4) \\
&\quad \times \frac{e^{-i\vec{k}_1 \cdot \vec{y}_1}}{\epsilon^{d/2} K_{\nu}(k_1 \epsilon)} \cdot \frac{e^{-i\vec{k}_2 \cdot \vec{y}_2}}{\epsilon^{d/2} K_{\nu}(k_2 \epsilon)} \cdot \frac{e^{-i\vec{k}_3 \cdot \vec{y}_3}}{\epsilon^{d/2} K_{\nu}(k_3 \epsilon)} \cdot \frac{e^{-i\vec{k}_4 \cdot \vec{y}_4}}{\epsilon^{d/2} K_{\nu}(k_4 \epsilon)} \\
&\quad \times z^d K_{\nu}(k_1 z) K_{\nu}(k_2 z) \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( z^{d/2} K_{\nu}(k_3 z) \right) \frac{\partial}{\partial z} \left( z^{d/2} K_{\nu}(k_4 z) \right) - (\vec{k}_3 \cdot \vec{k}_4) z^d K_{\nu}(k_3 z) K_{\nu}(k_4 z) \right] \\
&\equiv (5.59).
\end{aligned}$$

### E.3 作用 $I_{\text{ex}}$ の分離 ((5.60) の導出)

$J^I$  で汎関数微分する前に  $I_{\text{ex}}$  を  $X$  について部分積分して簡単化しておく。

$$\begin{aligned}
I_{\text{ex}}[J] &= -\frac{1}{2}\Gamma_{K,IJ}\Gamma^K{}_{MN}\int dV_X\int dV_Y\left(\nabla_\nu^{(X)}\left[G_\Delta^\epsilon(X,Y)\eta_{(1)}^I\partial_{(X)}^\mu\eta_{(1)}^J\right]-\partial_\mu^{(X)}G_\Delta^\epsilon(X,Y)\eta_{(1)}^I(X)\partial_{(X)}^\mu\eta_{(1)}^J\right)\partial_\nu^{(Y)}\eta_{(1)}^M\partial_{(Y)}^\nu\eta_{(1)}^N \\
&= \frac{1}{4}\Gamma_{K,IJ}\Gamma^K{}_{MN}\int dV_X\int dV_Y\left(\partial_\mu^{(X)}G_\Delta^\epsilon(X,Y)\partial_{(X)}^\mu\left(\eta_{(1)}^I\eta_{(1)}^J\right)\right)\partial_\nu^{(Y)}\eta_{(1)}^M\partial_{(Y)}^\nu\eta_{(1)}^N
\end{aligned} \tag{付録 E.11}$$

ここで 1 つ目の等号で運動方程式  $\square_X\eta_{(1)}^J = 0$  を使い、2 つ目の等号では表面項について境界条件  $\lim_{z\rightarrow\epsilon}G_\Delta^\epsilon(X,Y) = 0$  を用いた。 $\Gamma_{K,IJ}$  は添字の  $I$  と  $J$  の交換について対称なので、 $\eta_{(1)}^I\partial^\mu\eta_{(1)}^J = \partial^\mu(\eta_{(1)}^I\eta_{(1)}^J)/2$  と微分をくり出すことができる。再度  $X^\mu$  についての部分積分を行い以下の形に帰着する。

$$\begin{aligned}
I_{\text{ex}} &= \underbrace{-\frac{1}{4}\Gamma_{K,IJ}\Gamma^K{}_{MN}\int_{z=\epsilon}d^dx\int dV_Y\widetilde{K_\Delta^\epsilon(\vec{x},Y)}J^I(\vec{x})J^J(\vec{x})\partial_\nu^{(Y)}\eta_{(1)}^M\partial_{(Y)}^\nu\eta_{(1)}^N}_{\langle A \rangle} \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{4}\Gamma_{K,IJ}\Gamma^K{}_{MN}\int dV_X\eta_{(1)}^I(X)\eta_{(1)}^J(X)\partial_\nu^{(X)}\eta_{(1)}^M\partial_{(X)}^\nu\eta_{(1)}^N}_{\langle B \rangle}
\end{aligned} \tag{付録 E.12}$$

上の式をみると、 $\langle B \rangle$  の積分は前節の  $I_{\text{cont}}$  (付録 E.7) と全く同じ形であり、係数の添字の構造だけ異なっている。故に  $\langle B \rangle$  の解析は、 $I_{\text{cont}}$  とひとまとめにして行うことができる ((E.4) 参照)。 $\langle A \rangle$  に関しては、 $Y^\mu$  について部分積分を実行すると以下の様になる。

$$\begin{aligned}
\langle A \rangle &= \frac{1}{4\epsilon^{d-1}}\Gamma_{K,IJ}\Gamma^K{}_{MN}\int_{z=\epsilon}d^dx\int d^dx_nJ^I(\vec{x})J^J(\vec{x})J^M(\vec{x})J^N(\vec{x}_n)\partial_wK_\Delta^\epsilon(Y,\vec{x}_n)\Big|_{w=\epsilon,\vec{y}=\vec{x}} \\
&\quad - \frac{1}{8\epsilon^{d-1}}\Gamma_{K,IJ}\Gamma^K{}_{MN}\int_{z=\epsilon}d^dx\int_{w=\epsilon}d^dyJ^I(\vec{x})J^J(\vec{x})J^M(\vec{y})J^N(\vec{y})\partial_wK_\Delta^\epsilon(\vec{x},Y)\Big|_{w=\epsilon}.
\end{aligned} \tag{付録 E.13}$$

(付録 B.28) の結果から  $\#$  部分は以下の様に非局所的な寄与

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\epsilon^{d-1}}\partial_zK_{\Delta(=d)}^\epsilon(\vec{x},Y)\Big|_{z=\epsilon} &= \frac{1}{\epsilon^d}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}k\frac{\partial}{\partial k}\log[(k\epsilon)^{d/2}K_{d/2}(k\epsilon)] \\
&\ni -U_d\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}k^d\log(k\epsilon)
\end{aligned} \tag{付録 E.14}$$

含んでいることが分かる。つまり  $\langle A \rangle$  は表面項に帰着し 2 点や 3 点関数と同じ仕組みで非局所的な寄与を生

じることが分かる。結果をまとめると  $I_{\text{ex}}[J]$  は以下の様な形 (5.60) に帰着する。

$$\begin{aligned}
I_{\text{ex}}[J] = & \frac{1}{4} \Gamma_{K,IJ} \Gamma^K_{MN} \int dV_X \eta_{(1)}^I \eta_{(1)}^J \partial_\nu \eta_{(1)}^M \partial^\nu \eta_{(1)}^N \\
& + \frac{1}{4\epsilon^{d-1}} \Gamma_{K,IJ} \Gamma^K_{MN} \int_{z=\epsilon} d^d x \int d^d y J^I(\vec{x}) J^J(\vec{x}) J^M(\vec{x}) J^N(\vec{y}) \partial_z K_\Delta^\epsilon(X, \vec{y}) \Big|_{z=\epsilon} \\
& - \frac{1}{8\epsilon^{d-1}} \Gamma_{K,IJ} \Gamma^K_{MN} \int_{z=\epsilon} d^d x \int_{w=\epsilon} d^d y J^I(\vec{x}) J^J(\vec{x}) J^M(\vec{y}) J^N(\vec{y}) \partial_w K_\Delta^\epsilon(\vec{x}, Y) \Big|_{w=\epsilon}^{y=\epsilon}
\end{aligned} \tag{付録 E.15}$$

## E.4 関数 $\mathcal{F}$ (5.59) から現れる非局所的な寄与

### E.4.1 関数 $\mathcal{F}$ (5.63) から現れる非局所的な寄与の取り出し

2 点関数の  $\varphi^I$  についての 2 次の摂動をみたいので、 $I_A[J]$  を外場で 2 回汎関数微分し残っている外場を定数に戻す ( $J^I = \text{定数}$ )。その結果は以下の様になる。

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 I_A[J]}{\delta J^A(\vec{x}_a) \delta J^B(\vec{x}_b)} \Big|_{J=\text{const.}} = & \frac{1}{2} A_{ABMN} J^M J^N \int \int d^d y_3 d^d y_4 \mathcal{F}(\vec{x}_a, \vec{x}_b, \vec{y}_3, \vec{y}_4) \tag{1} \\
& + \frac{A_{BMAN} J^M J^N \int \int d^d y_2 d^d y_4 \mathcal{F}(\vec{x}_a, \vec{y}_2, \vec{x}_b, \vec{y}_4)}{\tag{2}} \\
& + \frac{A_{AMBN} J^M J^N \int \int d^d y_2 d^d y_4 \mathcal{F}(\vec{x}_b, \vec{y}_2, \vec{x}_a, \vec{y}_4)}{\tag{3}} \\
& + \frac{1}{2} A_{MNAB} J^M J^N \int \int d^d y_1 d^d y_2 \mathcal{F}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{x}_a, \vec{x}_b) \tag{4}
\end{aligned} \tag{付録 E.16}$$

以降の計算で非局所的な寄与は  $\langle 4 \rangle$  のみから得られることが分かる。

(付録 E.16) の  $\langle 1 \rangle \sim \langle 4 \rangle$  積分  $\int \int \mathcal{F}$  をそれぞれの場合に実行する。

$\langle 4 \rangle$  について

$\vec{y}_1, \vec{y}_2$  について積分を行うと  $\delta$  関数  $\delta(\vec{k}_1), \delta(\vec{k}_2)$  を得る。そして  $\vec{k}_1, \vec{k}_2$  について積分すると以下の形が得られる。

$$\begin{aligned}
& \int \int d^d y_1 d^d y_2 \mathcal{F}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{x}_a, \vec{x}_b) \\
& = \int_\epsilon^\infty dz \frac{1}{z^{d-1}} \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k_3}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k_4}{(2\pi)^d} (2\pi)^d \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 + \vec{k}_4) \\
& \quad \times (2\pi)^d \delta(\vec{k}_1) (2\pi)^d \delta(\vec{k}_2) \frac{z^{d/2} K_\nu(k_1 z)}{\epsilon^{d/2} K_\nu(k_1 \epsilon)} \cdot \frac{z^{d/2} K_\nu(k_2 z)}{\epsilon^{d/2} K_\nu(k_2 \epsilon)} \cdot \frac{e^{-i\vec{k}_3 \cdot \vec{x}_a}}{\epsilon^{d/2} K_\nu(k_3 \epsilon)} \cdot \frac{e^{-i\vec{k}_4 \cdot \vec{x}_b}}{\epsilon^{d/2} K_\nu(k_4 \epsilon)} \\
& \quad \times \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( z^{d/2} K_\nu(k_3 z) \right) \frac{\partial}{\partial z} \left( z^{d/2} K_\nu(k_4 z) \right) - (\vec{k}_3 \cdot \vec{k}_4) z^d K_\nu(k_3 z) K_\nu(k_4 z) \right] \\
& = \int_\epsilon^\infty dz \frac{1}{z^{d-1}} \int \frac{d^d k_3}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k_4}{(2\pi)^d} (2\pi)^d \delta(\vec{k}_3 + \vec{k}_4) \left( \frac{z}{\epsilon} \right)^{d-2\nu} \frac{e^{-i\vec{k}_3 \cdot \vec{x}_a}}{\epsilon^{d/2} K_\nu(k_3 \epsilon)} \cdot \frac{e^{-i\vec{k}_4 \cdot \vec{x}_b}}{\epsilon^{d/2} K_\nu(k_4 \epsilon)} \\
& \quad \times \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( z^{d/2} K_\nu(k_3 z) \right) \frac{\partial}{\partial z} \left( z^{d/2} K_\nu(k_4 z) \right) - (\vec{k}_3 \cdot \vec{k}_4) z^d K_\nu(k_3 z) K_\nu(k_4 z) \right]
\end{aligned} \tag{付録 E.17}$$

最後の等号で、極限  $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{K_\nu(kz)}{K_\nu(k\epsilon)} = \left(\frac{\epsilon}{z}\right)^\nu$  を用いたこれを  $\vec{k}_4$  について積分することで、積分は  $\vec{k}_3$  のみになる。 $\vec{k} := \vec{k}_3$  と再定義することで  $\nu = d/2$  の場合に以下の形に帰着する。

$$\begin{aligned} & \int \int d^d y_1 d^d y_2 \mathcal{F}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{x}_a, \vec{x}_b) \\ &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x}_a - \vec{x}_b)} \int_\epsilon^\infty dz \frac{z^{1-2\nu}}{\epsilon^{2d-2\nu}} \left[ \left( \frac{\partial_z (z^{d/2} K_\nu(kz))}{K_\nu(k\epsilon)} \right)^2 + k^2 \left( \frac{z^{d/2} K_\nu(kz)}{K_\nu(k\epsilon)} \right)^2 \right] \\ & \xrightarrow{\nu \rightarrow d/2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x}_a - \vec{x}_b)} \int_\epsilon^\infty dz \frac{z^{1-d}}{\epsilon^d} \left[ \left( \frac{\partial_z (z^{d/2} K_{d/2}(kz))}{K_{d/2}(k\epsilon)} \right)^2 + k^2 \left( \frac{z^{d/2} K_{d/2}(kz)}{K_{d/2}(k\epsilon)} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{付録 E.18})$$

ここで (付録 B.26) 安全性を確認したので、 $z$  積分を実行する前に極限操作  $\nu \rightarrow d/2$  をとった。

これより、非局所的な寄与  $k^d \log(k\epsilon)$  を  $\#$  から抜き出す準備が整った。変形ベッセル関数の展開式 (5.37) の各項を  $z$  積分し  $\epsilon$  依存性をみていく。

被積分関数の分母  $\epsilon^{-d} K_{d/2}^{-2}(k\epsilon)$  については以下の様に表される。

$$\frac{1}{K_{d/2}^2(k\epsilon)} = \frac{4}{\Gamma^2(d/2)} \left( \frac{k\epsilon}{2} \right)^d [1 - O((k\epsilon)^2)] \quad (\text{付録 E.19})$$

次に被積分関数の 2 つの分子  $[\partial_z (z^{d/2} K_{d/2}(kz))]^2$ 、 $k^2 [z^{d/2} K_{d/2}(kz)]^2$  に対しても以下の様に展開される。

$$\begin{aligned} & \left[ \partial_z (z^{d/2} K_{d/2}(kz)) \right]^2 \\ &= \Gamma^2 \left( \frac{d}{2} \right) \left( \frac{k}{2} \right)^{2-d} \left[ \frac{1}{(1-d/2)^2} \left( \frac{kz}{2} \right)^2 + \cdots + \frac{(-)^{d/2}(d/2-1)}{\Gamma^2(d/2)} \left( \frac{kz}{2} \right)^{d-2} + \cdots \right] \end{aligned} \quad (\text{付録 E.20})$$

$$k^2 [z^{d/2} K_{d/2}(kz)]^2 = \Gamma^2 \left( \frac{d}{2} \right) \left( \frac{k}{2} \right)^{2-d} \left[ 1 + \cdots + \frac{(-)^{d/2-1}d/2}{\Gamma^2(d/2)} \left( \frac{kz}{2} \right)^{d-2} + \cdots \right] \quad (\text{付録 E.21})$$

ここで  $kz$  の  $d-2$  次の項をあらわに書いている。この理由は、(付録 E.19) を考慮すると、この  $d-2$  番目の項を  $z$  積分をしたもののみが  $k^d \log(k\epsilon)$  に寄与するからである。これについては以下のコメントを参照されたい。

—  $\langle kz$  の  $d-2$  次の項に着目する理由 —

(付録 E.20) と (付録 E.21) の展開の典型的な項を  $(kz)^\alpha$ 、分母 (付録 E.19) の展開の典型的な項を  $(k\epsilon)^{d+\beta}$  と表す。

$$\begin{aligned} (\text{分子}) &\sim k^{2-d} (kz)^\alpha \\ (\text{分母}) &\sim (k\epsilon)^{d+\beta} \end{aligned}$$

その様な典型的な項同士の積を  $z$  積分すると以下の様になる。

$$\begin{aligned} (\text{付録 E.18}) &\sim k^{2-d} (k\epsilon)^{d+\beta} \int_\epsilon^\infty dz \frac{z^{1-d}}{\epsilon^d} (kz)^\alpha = k^{2+\alpha+\beta} \epsilon^\beta \int_\epsilon^\infty dz z^{1-d+\alpha} \\ &\ni k^{2+\alpha+\beta} \epsilon^\beta \times \begin{cases} -\frac{\epsilon^{2-d+\alpha}}{2-d+\alpha} & (2-d+\alpha \neq 0) \\ -\log \epsilon & (2-d+\alpha = 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{付録 E.22})$$

これからも分かる様に、 $k^d$  に比例する項が現れる組み合わせは、分子から生じる  $(kz)$  の 0 次項 (分子の展開式 (付録 E.20) と (付録 E.21) の  $\alpha = d - 2$  の項と、分母から生じる  $(k\epsilon)^d$  の項 ( $\beta = 0$ ) である。故に  $\alpha = d - 2$  と  $\beta = 0$  の項のみ必要となる。

(付録 E.20)、(付録 E.21) と (付録 E.19) の積をとり、 $z$  積分を実行した後、 $\epsilon$  依存性のみをみると非局所的な寄与を得る。(付録 E.18) の非局所的な寄与は以下の様になる。

$$\text{(付録 E.18)} \ni -\frac{(-)^{d/2-1}}{2^{d-2}\Gamma^2(d/2)}k^d \log(k\epsilon) \equiv -U_d k^d \log(k\epsilon) \quad (\text{付録 E.23})$$

(付録 E.16) の  $\langle 4 \rangle$  積分から非局所的な寄与が得られることがわかった。

$$\int \int d^d y_1 d^d y_2 \mathcal{F}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{x}_a, \vec{x}_b) \Big|_{\nu=d/2} \ni -U_d \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x}_a - \vec{x}_b)} k^d \log(k\epsilon) \quad (\text{付録 E.24})$$

残りの  $\langle 1 \rangle \sim \langle 3 \rangle$  は exactly marginal coupling( $\nu = d/2$ ) の場合には 0 になることが以下の計算で分かる。

$\langle 1 \rangle$  について

$\langle 4 \rangle$  と同様に、 $\vec{y}_3, \vec{y}_4$  について積分他のち  $\vec{k}_3, \vec{k}_4$  について積分することで (付録 E.16) の  $\langle 1 \rangle$  は以下の様に  $(\frac{d}{2} - \nu)^2$  に比例する。

$$\int \int d^d y_3 d^d y_4 \mathcal{F}(\vec{x}_a, \vec{x}_b, \vec{y}_3, \vec{y}_4) = \left(\frac{d}{2} - \nu\right)^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x}_a - \vec{x}_b)} \int_{\epsilon}^{\infty} dz \frac{z^{d-2\nu-1}}{\epsilon^{2d-2\nu}} \left[ \left( \frac{K_{\nu}(kz)}{K_{\nu}(k\epsilon)} \right)^2 \right] \rightarrow 0 \quad (\text{付録 E.25})$$

最後に  $\nu \rightarrow d/2$  の極限をとった。ここから  $\langle 1 \rangle$  に非局所的な寄与は生じないことが分かる。

$\langle 2 \rangle$  について

$\vec{y}_2, \vec{y}_4$  について積分他のち  $\vec{k}_2, \vec{k}_4$  について積分することで (付録 E.16) の  $\langle 2 \rangle$  は以下の様  $(\frac{d}{2} - \nu)$  に比例する。

$$\int \int d^d y_2 d^d y_4 \mathcal{F}(\vec{x}_a, \vec{y}_2, \vec{x}_b, \vec{y}_4) = \left(\frac{d}{2} - \nu\right) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x}_a - \vec{x}_b)} \int_{\epsilon}^{\infty} dz \frac{z^{d/2-2\nu}}{\epsilon^{2d-2\nu}} \left[ \frac{K_{\nu}(kz)}{K_{\nu}(k\epsilon)} \cdot \frac{\partial_z (z^{d/2} K_{\nu}(kz))}{K_{\nu}(k\epsilon)} \right] \rightarrow 0 \quad (\text{付録 E.26})$$

$\langle 2 \rangle$  も同様に非局所的な寄与をもたないことが分かる。

$\langle 3 \rangle$  について

$\langle 3 \rangle$  は、 $\langle 2 \rangle$  の添字と座標の組みを交換  $((A, \vec{x}_a) \leftrightarrow (B, \vec{x}_b))$  したものに等しい。故に、 $\langle 3 \rangle$  も  $\langle 2 \rangle$  と同じく非局所的な寄与を生じない。

$\langle 1 \rangle \sim \langle 3 \rangle$  の結果をまとめると、

$$\int d^d y \mathcal{F}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{y}) = \int d^d y \mathcal{F}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y}, \vec{x}_3) = 0 \quad (\text{付録 E.27})$$



である。以上より、2 回積分された 4 点関数の  $I_A[J]$  からの寄与は、

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 I_A[J]}{\delta J^A(\vec{x}_a) \delta J^B(\vec{x}_b)} \Big|_{J=\text{const.}} &= \frac{1}{2} A_{MNAB} J^M J^N \int \int d^d y_1 d^d y_2 \mathcal{F}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{x}_a, \vec{x}_b) \\ &\ni -\frac{1}{2} A_{MNAB} J^M J^N U_d \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x}_a - \vec{x}_b)} k^d \log(k\epsilon) \\ A_{IJMN} &\equiv \partial_I \partial_J G_{MN} + \Gamma_{K,IJ} \Gamma^K_{MN} \end{aligned} \quad (\text{付録 E.28})$$

## E.5 $I_\Gamma$ からの非局所的な寄与

以下の計算で見ていくように、 $I_\Gamma$  からは、積分された 4 点関数 (5.54) に反映されるような非局所的な寄与は存在しない。

まず  $I_\Gamma$  は二つの項から構成されているため、2 つの項をそれぞれ  $\langle 1 \rangle$ 、 $\langle 2 \rangle$  と表すことにする。

$$\begin{aligned} I_\Gamma &\equiv \frac{1}{4\epsilon^{d-1}} \Gamma_{K,IJ} \Gamma^K_{MN} \int_{z=\epsilon} d^d x \int d^d y J^I(\vec{x}) J^J(\vec{x}) J^M(\vec{x}) J^N(\vec{y}) \partial_z K_\Delta^\epsilon(X, \vec{y}) \Big|_{z=\epsilon \langle 1 \rangle} \\ &\quad - \frac{1}{8\epsilon^{d-1}} \Gamma_{K,IJ} \Gamma^K_{MN} \int_{z=\epsilon} d^d x \int_{w=\epsilon} d^d y J^I(\vec{x}) J^J(\vec{x}) J^M(\vec{y}) J^N(\vec{y}) \partial_w K_\Delta^\epsilon(\vec{x}, Y) \Big|_{w=\epsilon \langle 2 \rangle} \end{aligned} \quad (\text{付録 E.29})$$

まず 2 種類の表面項  $\langle 1 \rangle$ 、 $\langle 2 \rangle$  を外場  $J^I$  で 2 回汎関数微分し、それらから非局所的な寄与を抜き出す。

▷  $\langle 1 \rangle$  について

$J^I$  について 2 回汎関数微分すると以下の様になる。

$$\begin{aligned} &\frac{\delta^2 I_{\langle 1 \rangle}}{\delta J^A(\vec{x}_a) \delta J^B(\vec{x}_b)} \\ &= \frac{\delta}{\delta J^A(\vec{x}_a)} \left[ \frac{1}{4} \Gamma_{K,IJ} \Gamma^K_{MN} \int d^d x \int d^d y \frac{1}{\epsilon^{d-1}} \partial_z K_\Delta^\epsilon(X, \vec{y}) \Big|_{z=\epsilon} \right. \\ &\quad \times \left. \left\{ 2\delta_B^I \delta^d(\vec{x} - \vec{x}_b) J^J(\vec{x}) J^M(\vec{x}) J^N(\vec{y}) + \delta_B^M \delta^d(\vec{x} - \vec{x}_b) J^I(\vec{x}) J^J(\vec{x}) J^N(\vec{y}) + \delta_B^N \delta^d(\vec{y} - \vec{x}_b) J^I(\vec{x}) J^J(\vec{x}) J^M(\vec{x}) \right\} \right] \\ &= \frac{1}{4} \Gamma_{K,IJ} \Gamma^K_{MN} \int d^d x \int d^d y \frac{1}{\epsilon^{d-1}} \partial_z K_\Delta^\epsilon(X, \vec{y}) \Big|_{z=\epsilon} \\ &\quad \times \left\{ 2\delta_B^I \delta^d(\vec{x} - \vec{x}_b) \left( \delta_A^J \delta^d(\vec{x} - \vec{x}_a) J^M(\vec{x}) J^N(\vec{y}) + \delta_A^M \delta^d(\vec{x} - \vec{x}_a) J^J(\vec{x}) J^N(\vec{y}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \delta_A^N \delta^d(\vec{y} - \vec{x}_a) J^J(\vec{x}) J^M(\vec{x}) \right) \right. \\ &\quad + \delta_B^M \delta^d(\vec{x} - \vec{x}_b) \left( 2\delta_A^I \delta^d(\vec{x} - \vec{x}_a) J^J(\vec{x}) J^N(\vec{y}) + \delta_A^N \delta^d(\vec{y} - \vec{x}_a) J^I(\vec{x}) J^J(\vec{x}) \right) \\ &\quad \left. + \delta_B^N \delta^d(\vec{y} - \vec{x}_b) \left( 2\delta_A^I \delta^d(\vec{x} - \vec{x}_a) J^J(\vec{x}) J^M(\vec{x}) + \delta_A^M \delta^d(\vec{x} - \vec{x}_a) J^I(\vec{x}) J^J(\vec{x}) \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{付録 E.30})$$

これまでと同様に残った外場を定数に置き換えることで以下の形に帰着する。

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\delta^2 I_{(1)}}{\delta J^A(\vec{x}_a) \delta J^B(\vec{x}_b)} \right|_{J=\text{const.}} \\ &= \frac{1}{2} \left( \Gamma_{K,AB} \Gamma^K_{MN} + 2\Gamma_{K,BM} \Gamma^K_{AN} \right) J^M J^N \delta^d(\vec{x}_a - \vec{x}_b) \int_{z=\epsilon} d^d y \frac{1}{\epsilon^{d-1}} \partial_z K^\epsilon_\Delta(X, \vec{y}) \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_a} \\ &+ \frac{1}{2} \left( \Gamma_{K,AB} \Gamma^K_{MN} + 2\Gamma_{K,BM} \Gamma^K_{AN} \right) J^M J^N \frac{1}{\epsilon^{d-1}} \partial_z K^\epsilon_\Delta(X, \vec{y}) \Big|_{z=\epsilon, \vec{x}=\vec{x}_a, \vec{y}=\vec{x}_b} \end{aligned} \quad (\text{付録 E.31})$$

(付録 E.31) の 1 項目は ultra local contact term という  $\delta$  関数の積に帰着するので欲しい寄与は含まず、今の解析には重要でない。〈1〉から生じる非局所的な寄与は 2 項目から生じる。それは以下の添字の構造を持つことが分かる ( $\nu = d/2$  の場合)。

$$\left. \frac{\delta^2 I_{(1)}}{\delta J^A(\vec{x}_a) \delta J^B(\vec{x}_b)} \right|_{J=\text{const.}} = \frac{1}{2} \left( \Gamma_{K,MN} \Gamma^K_{AB} + 2\Gamma_{K,BM} \Gamma^K_{AN} \right) J^M J^N U_d \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x}_a - \vec{x}_b)} k^d \log(k\epsilon) \quad (\text{付録 E.32})$$

▷〈2〉について

〈2〉についても 〈1〉と同様の計算で求めることができる。

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\delta^2 I_{(2)}}{\delta J^A(\vec{x}_a) \delta J^B(\vec{x}_b)} \right|_{J=\text{const.}} \\ &= \frac{\delta}{\delta J^A(\vec{x}_a)} \left[ -\frac{1}{8} \Gamma_{K,IJ} \Gamma^K_{MN} \int d^d x \int d^d y \frac{1}{\epsilon^{d-1}} \partial_w K^\epsilon_\Delta(\vec{x}, Y) \Big|_{w=\epsilon} \right. \\ &\quad \times \left\{ 2\delta_B^I \delta^d(\vec{x} - \vec{x}_b) J^J(\vec{x}) J^M(\vec{y}) J^N(\vec{y}) + 2\delta_B^M \delta^d(\vec{y} - \vec{x}_b) J^I(\vec{x}) J^J(\vec{x}) J^N(\vec{y}) \right\} \Big] \\ &= -\frac{1}{4} \Gamma_{K,IJ} \Gamma^K_{MN} \int d^d x \int d^d y \frac{1}{\epsilon^{d-1}} \partial_w K^\epsilon_\Delta(\vec{x}, Y) \Big|_{w=\epsilon} \\ &\quad \times \left\{ \delta_B^I \delta^d(\vec{x} - \vec{x}_b) \left( \delta_A^J \delta^d(\vec{x} - \vec{x}_a) J^M(\vec{y}) J^N(\vec{y}) + 2\delta_A^M \delta^d(\vec{y} - \vec{x}_a) J^J(\vec{x}) J^N(\vec{y}) \right) \right. \\ &\quad \left. + \delta_B^M \delta^d(\vec{y} - \vec{x}_b) \left( 2\delta_A^I \delta^d(\vec{x} - \vec{x}_a) J^J(\vec{x}) J^N(\vec{y}) + \delta_A^N \delta^d(\vec{y} - \vec{x}_a) J^I(\vec{x}) J^J(\vec{x}) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{付録 E.33})$$

残った外場を定数に置き換えて

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta^2 I_{(2)}}{\delta J^A(\vec{x}_a) \delta J^B(\vec{x}_b)} \right|_{J=\text{const.}} &= -\frac{1}{2} \Gamma_{K,MN} \Gamma^K_{AB} J^M J^N \delta^d(\vec{x}_a - \vec{x}_b) \int d^d x \frac{1}{\epsilon^{d-1}} \partial_w K^\epsilon_\Delta(\vec{x}, Y) \Big|_{w=\epsilon, \vec{y}=\vec{x}_a} \\ &\quad - \Gamma_{K,MB} \Gamma^K_{AN} J^M J^N \frac{1}{\epsilon^{d-1}} \partial_w K^\epsilon_\Delta(\vec{x}, Y) \Big|_{w=\epsilon, \vec{x}=\vec{x}_a, \vec{y}=\vec{x}_b} \end{aligned} \quad (\text{付録 E.34})$$

を得る。(付録 E.34) の 1 項目も ultra local contact term であり無視できる。〈2〉からの非局所的な寄与は、 $\nu = d/2$  で以下の様な添字の構造を持つことが分かる。

$$\left. \frac{\delta^2 I_{(2)}}{\delta J^A(\vec{x}_a) \delta J^B(\vec{x}_b)} \right|_{J=\text{const.}} \ni -\Gamma_{K,MB} \Gamma^K_{AN} J^M J^N U_d \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x}_a - \vec{x}_b)} k^d \log(k\epsilon) \quad (\text{付録 E.35})$$

(付録 E.32) と (付録 E.35) の結果を合わせると、結局  $I_\Gamma$  からは、

$$\left. \frac{\delta^2 I_\Gamma}{\delta J^A(\vec{x}_a) \delta J^B(\vec{x}_b)} \right|_{J=\text{const.}} \ni \frac{1}{2} \Gamma_{K,MN} \Gamma^K{}_{AB} J^M J^N U_d \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x}_a - \vec{x}_b)} k^d \log(k\epsilon) \quad (\text{付録 E.36})$$

という非局所的な寄与があることが分かる。

## E.6 $I_4[J]$ からの寄与

ここで関数  $\mathcal{F}$  の解析から得られた結果 (付録 E.28) と、 $I_{\text{ex}}[J]$  の表面項  $I_\Gamma[J]$  から得られた結果 (付録 E.36) を合わせて考える。それぞれの結果を比較すると、 $I_{\text{ex}}$  からの寄与は相殺してしまい、結局  $I_{\text{cont}}[J]$  からの寄与のみ残ることが分かる。

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta^2 I_4[J]}{\delta J^A(\vec{x}_a) \delta J^B(\vec{x}_b)} \right|_{J=\text{const.}} &= \left. \frac{\delta^2 I_A[J]}{\delta J^A(\vec{x}_a) \delta J^B(\vec{x}_b)} \right|_{J=\text{const.}} + \left. \frac{\delta^2 I_\Gamma[J]}{\delta J^A(\vec{x}_a) \delta J^B(\vec{x}_b)} \right|_{J=\text{const.}} \\ &= -\frac{1}{2} \partial_M \partial_N G_{AB} J^M J^N U_d \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x}_a - \vec{x}_b)} k^d \log(k\epsilon) \end{aligned} \quad (\text{付録 E.37})$$

となる。

## 付録 F Witten ダイアグラムに関する計算

### F.1 $D$ 関数の Feynman 積分

スカラー場の 4 点相関関数  $\langle O(\vec{x}_1) O(\vec{x}_2) O(\vec{x}_3) O(\vec{x}_4) \rangle$  を計算する際に必要になる以下の関数について Feynman 積分を用いて分母を整理したい。

$$\begin{aligned} D_{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4) \\ := \int_0^\infty \frac{dz}{z^{d+1}} \int d^d x \prod_i \tilde{K}_{\Delta_i}(X, \vec{x}_i) = \int_0^\infty \frac{dz}{z^{d+1}} \int d^d x \prod_i \left( \frac{z}{z^2 + (\vec{x} - \vec{x}_i)^2} \right)^{\Delta_i} \end{aligned} \quad (\text{付録 F.1})$$

これは 4 点関数の構成要素のひとつである contact グラフという Witten ダイアグラムを表す。 $\Delta_i$  は演算子  $O(\vec{x}_i)$  の共形次元を表す。ここで  $\tilde{K}_\Delta(X, \vec{x}_i)$  は cut-off なしの AdS 時空における bulk-to-boundary propagator の比例係数を除いた部分である。

$$\tilde{K}_{\Delta_i}(X, \vec{x}_i) := \left( \frac{z}{z^2 + (\vec{x} - \vec{x}_i)^2} \right)^{\Delta_i} \quad (\text{付録 F.2})$$

この積分を実行すると Feynmann パラメータ  $\{\alpha_i\}$  を用いて以下のように表せる。

$$D_{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4) = \frac{\pi^{d/2} \Gamma\left(\frac{\tilde{\Delta}-d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\tilde{\Delta}}{2}\right)}{2 \prod_i \Gamma(\Delta_i)} \int_0^1 \prod_i d\alpha_i \alpha_i^{\Delta_i-1} \delta(\tilde{\alpha}-1) \left( \frac{1}{\sum_{m < n} \alpha_m \alpha_n x_{mn}^2} \right)^{\tilde{\Delta}/2} \quad (\text{付録 F.3})$$

ここで  $\tilde{\Delta} := \sum_i \Delta_i$ ,  $\tilde{\alpha} := \sum_i \alpha_i$  である。

□

Feynmann パラメータを用いると、(付録 F.1) の被積分関数は以下ようになる。

$$\prod_i \left( \frac{1}{z^2 + (\vec{x} - \vec{x}_i)^2} \right)^{\Delta_i} = \frac{\Gamma(\tilde{\Delta})}{\prod_i \Gamma(\Delta_i)} \int_0^1 \prod_i d\alpha_i \alpha_i^{\Delta_i-1} \delta(\tilde{\alpha}-1) \frac{1}{[\sum_i \alpha_i (z^2 + (\vec{x} - \vec{x}_i)^2)]^{\tilde{\Delta}}} \quad (\text{付録 F.4})$$

と表される。まず  $z$  積分を行う。この際にパラメータ  $u$  を用いて Schwinger 積分を導入する。簡単のため  $f(x) := \sum_i \alpha_i (\vec{x} - \vec{x}_i)^2$  において  $z$  積分を実行すると、

$$\int \frac{dz}{z^{d+1}} \frac{z^{\tilde{\Delta}}}{[\sum_i \alpha_i (z^2 + (\vec{x} - \vec{x}_i)^2)]^{\tilde{\Delta}}} = \frac{\tilde{\alpha}^{-(\tilde{\Delta}-d)/2}}{2\Gamma(\tilde{\Delta})} \Gamma\left(\frac{\tilde{\Delta}-d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\tilde{\Delta}+d}{2}\right) f(x)^{-\frac{\tilde{\Delta}+d}{2}} \quad (\text{付録 F.5})$$

となる。途中から  $\beta := \tilde{\Delta} - (d+1)$  において最右辺で元に戻している。(付録 F.4) に代入するとき、 $\delta(\tilde{\alpha}-1)$  より  $\tilde{\alpha} = 1$  としても良い。以降も勝手に  $\tilde{\alpha} := \sum_i \alpha_i = 1$  として計算する。

$$\int \frac{dz}{z^{d+1}} \frac{z^{\tilde{\Delta}}}{[\sum_i \alpha_i (z^2 + (\vec{x} - \vec{x}_i)^2)]^{\tilde{\Delta}}} = \frac{1}{2\Gamma(\tilde{\Delta})} \Gamma\left(\frac{\tilde{\Delta}-d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\tilde{\Delta}+d}{2}\right) \left( \frac{1}{\sum_i \alpha_i (\vec{x} - \vec{x}_i)^2} \right)^{\frac{\tilde{\Delta}+d}{2}} \quad (\text{付録 F.6})$$

次に (付録 F.6) を  $x$  積分する。今度は  $l := (\tilde{\Delta} + d)/2$  において上と同様に Schwinger 積分を実行する。

$$\int d^d x \left( \frac{1}{\sum_i \alpha_i (\vec{x} - \vec{x}_i)^2} \right)^{\frac{\tilde{\Delta}+d}{2}} = \frac{1}{\Gamma(l)} \int_0^\infty du u^{l-1} \int d^d x e^{-u \sum_i \alpha_i (\vec{x} - \vec{x}_i)^2} \quad (\text{付録 F.7})$$

ここで、指数の肩について平方完成する。 $\vec{\alpha} := \sum_i \alpha_i \vec{x}_i$  において、

$$\sum_i \alpha_i (\vec{x} - \vec{x}_i)^2 = \vec{x}^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{x} + \sum_i \alpha_i \vec{x}_i^2 = (\vec{x} - \vec{\alpha})^2 - \vec{\alpha}^2 + \sum_i \alpha_i \vec{x}_i^2 \quad (\text{付録 F.8})$$

となる。これを代入すると、

$$\int d^d x \left( \frac{1}{\sum_i \alpha_i (\vec{x} - \vec{x}_i)^2} \right)^{\frac{\tilde{\Delta}+d}{2}} = \frac{1}{\Gamma(l)} \int_0^\infty du u^{l-1} e^{u(\vec{\alpha}^2 - \sum_i \alpha_i \vec{x}_i^2)} \int d^d x e^{-u\tilde{\alpha}(\vec{x} - \vec{\alpha})^2} \quad (\text{付録 F.9})$$

$\vec{x} = \vec{\alpha}$  を原点に取り直した座標  $\vec{x}'$  についての曲座標表示でこの  $d$  次元 Gauss 積分を実行すると、

$$\int d^d x e^{u\tilde{\alpha}(\vec{x} - \vec{\alpha})^2} = \int d^d x' e^{u\tilde{\alpha}\vec{x}'^2} = \text{Vol}(\mathbb{S}^{d-1}) \int_0^\infty dr r^{d-1} e^{-ur^2} = \frac{\Gamma(d/2)}{2} \text{Vol}(\mathbb{S}^{d-1}) u^{-d/2} \quad (\text{付録 F.10})$$

となるので、

$$\int d^d x \left( \frac{1}{\sum_i \alpha_i (\vec{x} - \vec{x}_i)^2} \right)^{\frac{\tilde{\Delta}+d}{2}} = \frac{\Gamma(d/2)}{2\Gamma(l)} \text{Vol}(\mathbb{S}^{d-1}) \int_0^\infty du u^{l-d/2-1} e^{u(\vec{\alpha}^2 - \sum_i \alpha_i \vec{x}_i^2)} \quad (\text{付録 F.11})$$

となる。再び指数の肩について整理する。以下の等式が成り立つことに気付く。

$$\vec{\alpha}^2 - \sum_i \alpha_i \vec{x}_i^2 = - \left[ \sum_i \alpha_i \vec{x}_i^2 - \left( \sum_m \alpha_m \vec{x}_m \right) \left( \sum_n \alpha_n \vec{x}_n \right) \right] = - \sum_{m < n} \alpha_m \alpha_n x_{mn}^2 \quad (\text{付録 F.12})$$

ここで  $x_{mn} \equiv |\vec{x}_m - \vec{x}_n|$  である。故に、

$$\int d^d x \left( \frac{1}{\sum_i \alpha_i (\vec{x} - \vec{x}_i)^2} \right)^{\frac{\tilde{\Delta}+d}{2}} = \frac{\Gamma(d/2)}{2\Gamma\left(\frac{\tilde{\Delta}+d}{2}\right)} \text{Vol}(\mathbb{S}^{d-1}) \Gamma\left(l - \frac{d}{2}\right) \left( \frac{1}{\sum_{m < n} \alpha_m \alpha_n x_{mn}^2} \right)^{\tilde{\Delta}/2} \quad (\text{付録 F.13})$$

を得る。(付録 F.6) と (付録 F.13) の結果、(付録 F.3) が導かれる。

■

### F.1.1 微分相互作用を含む $D$ 関数の変換

4 点関数は一般に以下のような微分相互作用を含む vertex を持つ。

$$D_{\Delta_1 \Delta_2 \partial \Delta_3 \partial \Delta_4} = \int_0^\infty \frac{dz}{z^{d+1}} \int d^d x \tilde{K}_{\Delta_1}(X, \vec{x}_1) \tilde{K}_{\Delta_2}(X, \vec{x}_2) \partial_\mu \tilde{K}_{\Delta_3}(X, \vec{x}_3) \partial^\mu \tilde{K}_{\Delta_4}(X, \vec{x}_4) \quad (\text{付録 F.14})$$

以下の関係式を用いいることで微分相互作用がない形に書き換えることができる。

$$D_{\Delta_1 \Delta_2 \partial \Delta_3 \partial \Delta_4} = \Delta_i \Delta_j \left[ D_{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4} - 2x_{ij}^2 D_{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3+1 \Delta_4+1} \right] \quad (\text{付録 F.15})$$

これは以下の関係式が成り立つことによる。

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \partial_\mu \tilde{K}_{\Delta_i}(X, \vec{x}_i) \partial_\nu \tilde{K}_{\Delta_j}(X, \vec{x}_j) \\ = \Delta_i \Delta_j \left[ \tilde{K}_{\Delta_i}(X, \vec{x}_i) \tilde{K}_{\Delta_j}(X, \vec{x}_j) - 2x_{ij}^2 \tilde{K}_{\Delta_i+1}(X, \vec{x}_i) \tilde{K}_{\Delta_j+1}(X, \vec{x}_j) \right] \end{aligned} \quad (\text{付録 F.16})$$

⋮

#### (i) $z$ 成分

$$\begin{aligned} g^{zz} \partial_z \tilde{K}_{\Delta_i}(X, \vec{x}_i) \partial_z \tilde{K}_{\Delta_j}(X, \vec{x}_j) \\ = z^2 \Delta_i \Delta_j \left( \frac{z}{z^2 + (\vec{x} - \vec{x}_i)^2} \right)^{\Delta_i-1} \left( \frac{z}{z^2 + (\vec{x} - \vec{x}_j)^2} \right)^{\Delta_j-1} \frac{z^2 - (\vec{x} - \vec{x}_i)^2}{[z^2 + (\vec{x} - \vec{x}_i)^2]^2} \frac{z^2 - (\vec{x} - \vec{x}_j)^2}{[z^2 + (\vec{x} - \vec{x}_j)^2]^2} \\ = \Delta_i \Delta_j \tilde{K}_{\Delta_i}(X, \vec{x}_i) \tilde{K}_{\Delta_j}(X, \vec{x}_j) \left[ 1 - \frac{2z^2 \{ (\vec{x} - \vec{x}_j)^2 + (\vec{x} - \vec{x}_j)^2 \}}{[z^2 + (\vec{x} - \vec{x}_i)^2][z^2 + (\vec{x} - \vec{x}_j)^2]} \right] \\ = \Delta_i \Delta_j \left[ \tilde{K}_{\Delta_i}(X, \vec{x}_i) \tilde{K}_{\Delta_j}(X, \vec{x}_j) - 2 \{ (\vec{x} - \vec{x}_j)^2 + (\vec{x} - \vec{x}_j)^2 \} \tilde{K}_{\Delta_i+1}(X, \vec{x}_i) \tilde{K}_{\Delta_j+1}(X, \vec{x}_j) \right] \end{aligned} \quad (\text{付録 F.17})$$

#### (ii) $\vec{x}$ 成分

$$\begin{aligned}
& g^{ab} \partial_a \tilde{K}_{\Delta_i}(X, \vec{x}_i) \partial_b \tilde{K}_{\Delta_j}(X, \vec{x}_j) \\
&= 4z^4 \Delta_i \Delta_j \left( \frac{z}{z^2 + (\vec{x} - \vec{x}_i)^2} \right)^{\Delta_i - 1} \left( \frac{z}{z^2 + (\vec{x} - \vec{x}_j)^2} \right)^{\Delta_j - 1} \frac{(\vec{x} - \vec{x}_i)}{[z^2 + (\vec{x} - \vec{x}_i)^2]^2} \cdot \frac{(\vec{x} - \vec{x}_j)}{[z^2 + (\vec{x} - \vec{x}_j)^2]^2} \\
&= 4\Delta_i \Delta_j (\vec{x} - \vec{x}_i) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_j) \tilde{K}_{\Delta_i+1}(X, \vec{x}_i) \tilde{K}_{\Delta_j+1}(X, \vec{x}_j)
\end{aligned} \tag{付録 F.18}$$

(付録 F.17) と (付録 F.18) を足すと、(付録 F.16) を得る。 ■

### F.1.2 $D$ 関数の微分

(付録 F.3) より、以下の関係式が成り立つことがわかる。

$$\frac{\partial}{\partial x_{34}} D_{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4} = -\frac{2\Delta_3 \Delta_4}{\tilde{\Delta} - d} D_{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 + 1 \Delta_4 + 1} \tag{付録 F.19}$$

□

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x_{34}^2} D_{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4} \\
&= \frac{\pi^{d/2} \Gamma\left(\frac{\tilde{\Delta}-d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\tilde{\Delta}}{2}\right)}{2 \prod_i \Gamma(\Delta_i)} \int_0^1 \prod_i d\alpha_i \alpha_i^{\Delta_i-1} \delta(\tilde{\alpha}-1) \frac{\partial}{\partial x_{34}^2} \left( \frac{1}{\sum_{m<n} \alpha_m \alpha_n x_{mn}^2} \right)^{\tilde{\Delta}/2} \\
&= \frac{\pi^{d/2} \Gamma\left(\frac{\tilde{\Delta}-d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\tilde{\Delta}}{2}\right)}{2 \prod_i \Gamma(\Delta_i)} \int_0^1 \prod_i d\alpha_i \alpha_i^{\Delta_i-1} \delta(\tilde{\alpha}-1) \left( -\frac{\alpha_3 \alpha_4 \tilde{\Delta} [\sum_{m<n} \alpha_m \alpha_n x_{mn}^2]^{\tilde{\Delta}/2-1}}{2 [\sum_{m<n} \alpha_m \alpha_n x_{mn}^2]^{\tilde{\Delta}}} \right) \\
&= -\frac{\pi^{d/2} \Gamma\left(\frac{\tilde{\Delta}-d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\tilde{\Delta}}{2} + 1\right)}{2 \prod_i \Gamma(\Delta_i)} \int_0^1 \alpha_3 \alpha_4 \prod_i d\alpha_i \alpha_i^{\Delta_i-1} \delta(\tilde{\alpha}-1) \left( \frac{1}{\sum_{m<n} \alpha_m \alpha_n x_{mn}^2} \right)^{\tilde{\Delta}/2+1} \\
&= -\frac{2\Delta_3 \Delta_4}{\tilde{\Delta} - d} \frac{\pi^{d/2} \Gamma\left(\frac{\tilde{\Delta}-d}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\tilde{\Delta}}{2} + 1\right)}{2\Delta_3 \Delta_4 \prod_i \Gamma(\Delta_i)} \int_0^1 \alpha_3 \alpha_4 \prod_i d\alpha_i \alpha_i^{\Delta_i-1} \delta(\tilde{\alpha}-1) \left( \frac{1}{\sum_{m<n} \alpha_m \alpha_n x_{mn}^2} \right)^{\tilde{\Delta}/2+1} \\
&= -\frac{2\Delta_3 \Delta_4}{\tilde{\Delta} - d} D_{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 + 1 \Delta_4 + 1}
\end{aligned} \tag{付録 F.20}$$

■

### F.1.3 $D$ 関数の Double OPE 極限

exactly marginal 演算子の 4 点関数における t-channel 極限 ( $x_{13} \ll x_{12}$ ,  $x_{24} \ll x_{12}$  もしくは  $s, t \rightarrow 0$ ) を考える。 $s, t$  は共形不変量である。

$$s := \frac{1}{2} \frac{x_{13}^2 x_{24}^2}{x_{12}^2 x_{34}^2 + x_{14}^2 x_{23}^2}, \quad t := \frac{x_{12}^2 x_{34}^2 - x_{14}^2 x_{23}^2}{x_{12}^2 x_{34}^2 + x_{14}^2 x_{23}^2} \tag{付録 F.21}$$

このとき 4 点 vertex について以下の極限が存在する。

$$D_{dddd}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4) \sim -\frac{\pi^{d/2}\Gamma(3d/2)}{2\Gamma(2d)} \frac{1}{x_{12}^{4d}} (\log s + 3H_{d-1} - H_{d-1/2}) \quad (\text{付録 F.22})$$

ここで  $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  は調和数 (Harmonic number) である。

□

[13] の (6.23) 式を土台にして話を進める<sup>\*86</sup>。

$$W_p^\Delta(0,0) = \frac{(-)^{p+\Delta}\pi^{d/2}\Gamma(p+\Delta-d/2)}{2^\Delta\Gamma(p)^2\Gamma(\Delta)^2(\xi^2+\omega^2)^\Delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)^2 s^{k-\Delta+1}}{\Gamma(k-\Delta+2)\Gamma(k-p+2)} \\ \times [b_k(t) - a_k(t)\{\log s + 2\psi(k+1) - \psi(k-\Delta+2) - \psi(k-p+2)\}] \quad (\text{付録 F.23})$$

ここで  $(\vec{\xi}, \vec{\omega}_2)$  は反転した座標  $\vec{x}' = \frac{\vec{x}}{x^2}$  を用いて  $\vec{\xi} := \vec{x}'_{41} - \vec{x}'_{31}$ ,  $\vec{\omega} := \vec{x}'_{21} - \vec{x}'_{31}$  と定義される。また  $W_p^\Delta(a,b)$  と  $a_k(t)$ ,  $b_k(t)$  は以下の式を満たすものとする (文献 [13] の (A.3)、(6.17)、(6.18) 参照)。

$$W_p^\Delta(a,b) = x_{13}^{2p} x_{14}^{2\Delta} x_{12}^{2(\Delta+b)} D_{2a-b+p,p,\Delta+b,\Delta} \quad (\text{付録 F.24})$$

$$a_k(t) := \int_{-1}^1 d\lambda \frac{(1-\lambda^2)^k}{(1+\lambda t)^{k+1}} \\ b_k(t) := \int_{-1}^1 d\lambda \frac{(1-\lambda^2)^k}{(1+\lambda t)^{k+1}} \log \frac{(1+\lambda t)}{(1-\lambda^2)} \quad (\text{付録 F.25})$$

今考えるべきは  $p = \Delta$ ,  $a = 0$ ,  $b = 0$  の場合である。

$$W_\Delta^\Delta(0,0) = \frac{(-)^{2\Delta}\pi^{d/2}\Gamma(2\Delta-d/2)}{2^\Delta\Gamma(\Delta)^4(\xi^2+\omega^2)^\Delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)^2 s^{k-\Delta+1}}{\Gamma(k-\Delta+2)^2} \\ \times [b_k(t) - a_k(t)\{\log s + 2\psi(k+1) - 2\psi(k-\Delta+2)\}] \quad (\text{付録 F.26})$$

ここで無限和に注目すると、分母の Gamma 関数  $\Gamma(k)$  や分子の Digamma 関数  $\psi(k)$  の発散により  $\Delta-2 \leq k$  の場合しか残らないことがわかる。今  $s, t \rightarrow 0$  の極限を考えているので、この展開式において  $s, t$  の最低次を調べれば良い。 $s$  の  $k = \Delta-1$  次の項の寄与が最も大きいと分かる。

$$W_\Delta^\Delta(0,0) \sim \frac{(-)^{2\Delta}\pi^{d/2}\Gamma(2\Delta-d/2)}{2^\Delta\Gamma(\Delta)^2(\xi^2+\omega^2)^\Delta} [b_{\Delta-1}(t) - a_{\Delta-1}(t)\{\log s + 2H_{\Delta-1}\}] \quad (\text{付録 F.27})$$

さらに、 $a_{\Delta-1}(t)$ ,  $b_{\Delta-1}(t)$  について、 $t$  の最低次は以下になる<sup>\*87</sup>。

$$a_{\Delta-1}(t \sim 0) \sim \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\Delta)}{\Gamma(\Delta+1/2)} \\ b_{\Delta-1}(t \sim 0) \sim \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\Delta)}{\Gamma(\Delta+1/2)} (H_{\Delta-1/2} - H_{\Delta-1}) \quad (\text{付録 F.28})$$

<sup>\*86</sup> 導出に関しては (F.2) を参照せよ

<sup>\*87</sup>  $\Gamma$  関数の微分、 $\frac{\partial}{\partial k}\Gamma(k) = \psi(k)\Gamma(k)$ ,  $\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{1}{\Gamma(k)}\right) = -\frac{\psi(k)}{\Gamma(k)}$  を用いると以下を得る。

$$a_k(t \sim 0) \sim \int_{-1}^1 d\lambda (1-\lambda^2)^k = 2 \int_0^1 d\alpha (1-\alpha)^{-\frac{1}{2}} \alpha^k = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+3/2)} \\ b_k(t \sim 0) \sim -\int_{-1}^1 d\lambda (1-\lambda^2)^k \log(1-\lambda^2) = -\int_0^1 d\alpha (1-\alpha)^{\frac{1}{2}} \alpha^k \log \alpha = -\frac{\partial}{\partial k} \int_0^1 d\alpha (1-\alpha)^{\frac{1}{2}} \alpha^k \\ = -\sqrt{\pi} \frac{\partial}{\partial k} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+3/2)} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+3/2)} [\psi(k+3/2) - \psi(k+1)] = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+3/2)} (H_{k+1/2} - H_k)$$



これらを (付録 F.27) に代入すると、

$$W_{\Delta}^{\Delta}(0,0) \sim -\frac{\pi^{d/2}\Gamma(2\Delta-d/2)}{2^{1-\Delta}\Gamma(2\Delta)} \frac{1}{(\xi^2+\omega^2)^{\Delta}} (\log s + 3H_{\Delta-1} - H_{\Delta-1/2}) \quad (\text{付録 F.29})$$

これを (付録 F.25) の第 1 式に従って  $D_{\Delta\Delta\Delta\Delta}$  に直す。定義から  $\xi^2 + \omega^2 = \frac{x_{12}^2 x_{34}^2 + x_{14}^2 x_{23}^2}{x_{12}^2 x_{13}^2 x_{14}^2}$  より、\*88

$$\begin{aligned} D_{\Delta\Delta\Delta\Delta}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4) &= x_{13}^{-2\Delta} x_{12}^{-2\Delta} x_{14}^{-2\Delta} W_{\Delta}^{\Delta}(0,0) \\ &\sim -\frac{\pi^{d/2}\Gamma(2\Delta-d/2)}{2^{1-\Delta}\Gamma(2\Delta)} \frac{x_{12}^{-2\Delta} x_{13}^{-2\Delta} x_{14}^{-2\Delta}}{(\xi^2+\omega^2)^{\Delta}} (\log s + 3H_{\Delta-1} - H_{\Delta-1/2}) \\ &= -\frac{\pi^{d/2}\Gamma(2\Delta-d/2)}{2^{1-\Delta}\Gamma(2\Delta)} \frac{1}{(x_{12}^2 x_{34}^2 + x_{14}^2 x_{23}^2)^{\Delta}} (\log s + 3H_{\Delta-1} - H_{\Delta-1/2}) \\ &\sim -\frac{\pi^{d/2}\Gamma(2\Delta-d/2)}{2\Gamma(2\Delta)} \frac{1}{x_{12}^{4\Delta}} (\log s + 3H_{\Delta-1} - H_{\Delta-1/2}) \end{aligned} \quad (\text{付録 F.30})$$

第 4 右辺の近似で  $x_{12}^2 x_{34}^2 + x_{14}^2 x_{23}^2 \sim 2x_{12}^4$  を用いた。故に exactly marginal 演算子  $\Delta = d$  の場合、

$$D_{ddd}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4) \sim -\frac{\pi^{d/2}\Gamma(3d/2)}{2\Gamma(2d)} \frac{1}{x_{12}^{4d}} (\log s + 3H_{d-1} - H_{d-1/2}) \quad (\text{付録 F.31})$$

となり、(5.81) を得る。

■

## F.2 $W_k^{\Delta}(a,b)$ の導出

ここでは [13] に従って (付録 F.23) の導出を行う。[13] の (5.53) によると、 $W_k^{\Delta}(a,b)$  の定義は以下のとおりである (ただし  $X^{\mu} = (z, \vec{x})$ )。

$$W_k^{\Delta}(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{dz}{z^{d+1}} \int d^d x \frac{z^{2\Delta+2a+2k}}{X^{2k}} \frac{1}{(X^{\mu} - \vec{\xi})^{2\Delta}} \frac{1}{(X^{\mu} - \vec{\omega})^{2\Delta+2b}} \quad (\text{付録 F.32})$$

$\vec{\xi}, \vec{\omega}$  は (付録 F.23) で定義したものと同一である。[13] の (6.1) によると、これを変形して

$$\begin{aligned} W_k^{\Delta}(a,b) &= \frac{\pi^{d/2}}{2} \frac{\Gamma(k+\Delta+a-\frac{d}{2})\Gamma(\Delta+b-a)}{\Gamma(\Delta)\Gamma(k)\Gamma(\Delta+b)} \\ &\quad \times \int_0^1 d\alpha \int_0^1 d\beta \frac{\alpha^{\Delta-1}(1-\alpha)^{k-1}\beta^{\Delta+b-1}(1-\beta)^{k+a-b-1}}{[\beta(\vec{\omega} - \alpha\vec{\xi})^2 + \alpha(1-\alpha)\xi^2]^{\Delta-a+b}} \end{aligned} \quad (\text{付録 F.33})$$

を得る。ここで  $\alpha, \beta$  は Feynman パラメータである。

\*88 因みに

$$(\vec{\xi} - \vec{\omega})^2 = \frac{x_{24}^2}{x_{12}^2 x_{14}^2}, \quad \xi^2 - \omega^2 = \frac{x_{12}^2 x_{34}^2 - x_{14}^2 x_{23}^2}{x_{12}^2 x_{13}^2 x_{14}^2}$$

であるので、

$$s = \frac{1}{2} \frac{(\vec{\xi} - \vec{\omega})^2}{\xi^2 + \omega^2}, \quad t = \frac{\xi^2 - \omega^2}{\xi^2 + \omega^2}$$

と分かる。

□

まず二つの分母  $X^2$  と  $(X^\mu - \vec{\xi})^2$  について Feynman パラメータ  $\alpha$  を導入すると以下のように変形される。

$$\begin{aligned} W_k^\Delta(a, b) &= \int_0^\infty \frac{dz}{z^{d+1}} \int d^d x \frac{z^{2\Delta+2a+2k}}{X^{2k}} \frac{1}{(X^\mu - \vec{\xi})^{2\Delta}} \frac{1}{(X^\mu - \vec{\omega})^{2\Delta+2b}} \\ &= \frac{\Gamma(\Delta+k)}{\Gamma(k)\Gamma(\Delta)} \int_0^\infty dz z^{2\Delta+2a+2k-(d+1)} \int d^d x \frac{1}{(X^\mu - \vec{\omega})^{2\Delta+2b}} \\ &\quad \times \int_0^1 d\alpha \frac{\alpha^{\Delta-1}(1-\alpha)^{k-1}}{[X^2 + \alpha(\xi^2 - 2X \cdot \vec{\xi})]^{\Delta+k}} \end{aligned} \quad (\text{付録 F.34})$$

次に二つの分母  $(X^\mu - \vec{\omega})^2$  と  $X^2 + \alpha(\xi^2 - 2X \cdot \vec{\xi})$  について Feynman パラメータ  $\beta$  を導入すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} W_k^\Delta(a, b) &= \frac{\Gamma(2\Delta+k+b)}{\Gamma(k)\Gamma(\Delta)\Gamma(\Delta+b)} \int_0^\infty dz z^{2\Delta+2a+2k-(d+1)} \int d^d x \\ &\quad \times \int_0^1 d\alpha \int_0^1 d\beta \frac{\alpha^{\Delta-1}(1-\alpha)^{k-1}\beta^{\Delta+b-1}(1-\beta)^{\Delta+k-1}}{[(1-\beta)\{X^2 + \alpha(\xi^2 - 2X \cdot \vec{\xi})\} + \beta(X^\mu - \vec{\omega})^2]^{2\Delta+k+b}} \\ &= \frac{\Gamma(2\Delta+k+b)}{\Gamma(k)\Gamma(\Delta)\Gamma(\Delta+b)} \int_0^\infty dz z^{2\Delta+2a+2k-(d+1)} \int d^d x \\ &\quad \times \int_0^1 d\alpha \int_0^1 d\beta \frac{\alpha^{\Delta-1}(1-\alpha)^{k-1}\beta^{\Delta+b-1}(1-\beta)^{\Delta+k-1}}{[z^2 + f(x, \alpha, \beta)]^{2\Delta+k+b}} \end{aligned} \quad (\text{付録 F.35})$$

最後の等式で簡単のため積分の分母の中身を、

$$f(x, \alpha, \beta) = x^2 + \alpha(1-\beta)\xi^2 + \beta\omega^2 - 2\{\alpha(1-\beta)\vec{\xi} + \beta\vec{\omega}\} \cdot \vec{x} \quad (\text{付録 F.36})$$

とおいた。以下の等式を用いて  $z$  積分を Gauss 積分の形にし実行する。

$$\int \frac{dx}{A(x)^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int dw w^{n-1} \int dx e^{-wA(x)} \quad (\text{Re}(n) > 0) \quad (\text{付録 F.37})$$

具体的には\*89、

$$\begin{aligned} W_k^\Delta(a, b) &= \frac{1}{\Gamma(k)\Gamma(\Delta)\Gamma(\Delta+b)} \int_0^1 d\alpha \int_0^1 d\beta \alpha^{\Delta-1}(1-\alpha)^{k-1}\beta^{\Delta+b-1}(1-\beta)^{\Delta+k-1} \\ &\quad \times \int d^d x \int_0^\infty dw w^{2\Delta+k+b-1} \int_0^\infty dz z^{2\Delta+2a+2k-(d+1)} e^{-w[z^2 + f(x, \alpha, \beta)]} \\ &= \frac{\Gamma(\Delta+k+a-d/2)}{\Gamma(k)\Gamma(\Delta)\Gamma(\Delta+b)} \int_0^1 d\alpha \int_0^1 d\beta \alpha^{\Delta-1}(1-\alpha)^{k-1}\beta^{\Delta+b-1}(1-\beta)^{\Delta+k-1} \\ &\quad \times \frac{1}{2} \int d^d x \int_0^\infty dw w^{\Delta-a+b+\frac{d}{2}-1} e^{-wf(x, \alpha, \beta)} \end{aligned} \quad (\text{付録 F.38})$$

次に  $\vec{x}$  積分を行う。そのために平方完成する。平方完成は以下のようになる。

$$f(x, \alpha, \beta) = [\vec{x} - \{\alpha(1-\beta)\vec{\xi} + \beta\vec{\omega}\}]^2 + (1-\beta)[\beta(\vec{\omega} - \alpha\vec{\xi})^2 + \alpha(1-\alpha)\xi^2] \quad (\text{付録 F.39})$$

---

\*89 導入した  $w$  と  $\omega$  の混同に注意する。

$\vec{x}$  の原点を  $\vec{x} = \alpha(1-\beta)\vec{\xi} + \beta\vec{\omega}$  に取り直して積分を実行すると、

$$\begin{aligned}
W_k^\Delta(a, b) &= \frac{\text{Vol}(\mathbb{S}^{d-1})}{2} \frac{\Gamma(\Delta + k + a - d/2)}{\Gamma(k)\Gamma(\Delta)\Gamma(\Delta + b)} \int_0^1 d\alpha \int_0^1 d\beta \alpha^{\Delta-1} (1-\alpha)^{k-1} \beta^{\Delta+b-1} (1-\beta)^{\Delta+k-1} \\
&\quad \times \int_0^\infty dw w^{\Delta-a+b+\frac{d}{2}-1} e^{-w(1-\beta)[\beta(\vec{\omega}-\alpha\vec{\xi})^2 + \alpha(1-\alpha)\xi^2]} \int_0^\infty dr r^{d-1} e^{-wr^2} \\
&= \frac{\pi^{d/2}}{2} \frac{\Gamma(\Delta + k + a - d/2)\Gamma(\Delta - a + b)}{\Gamma(k)\Gamma(\Delta)\Gamma(\Delta + b)} \\
&\quad \times \int_0^1 d\alpha \int_0^1 d\beta \frac{\alpha^{\Delta-1} (1-\alpha)^{k-1} \beta^{a-b+k-1} (1-\beta)^{\Delta+k-1}}{[\beta(\vec{\omega} - \alpha\vec{\xi})^2 + \alpha(1-\alpha)\xi^2]^{\Delta-a+b}}
\end{aligned} \tag{付録 F.40}$$

となり、(付録 F.33) を得る<sup>\*90</sup>。

■

さらに積分変数  $(\alpha, \beta)$  を  $(u, v)$  へ変換する。

$$\alpha = \frac{1}{1+u}, \quad \beta = \frac{u}{u+v+uv} \tag{付録 F.42}$$

これにより、

$$\begin{aligned}
W_k^\Delta(a, b) &= \frac{\pi^{d/2}}{2} \frac{\Gamma(k + \Delta + a - \frac{d}{2})\Gamma(\Delta + b - a)}{\Gamma(\Delta)\Gamma(k)\Gamma(\Delta + b)} \\
&\quad \times \int_0^\infty du \int_0^\infty dv \frac{u^{k+a-1} v^{k+a-b-1}}{(u+v+uv)^{k+2a-b}} \frac{1}{[(\vec{\xi} - \vec{\omega})^2 + u\omega^2 + v\xi^2]^{\Delta-a+b}}
\end{aligned} \tag{付録 F.43}$$

となる。

□

(付録 F.33) の該当箇所を変換すると、

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 d\alpha \int_0^1 d\beta \frac{\alpha^{\Delta-1} (1-\alpha)^{k-1} \beta^{a-b+k-1} (1-\beta)^{\Delta+k-1}}{[\beta(\vec{\omega} - \alpha\vec{\xi})^2 + \alpha(1-\alpha)\xi^2]^{\Delta-a+b}} \\
&= \int_0^\infty du \int_0^\infty dv \left( \frac{1}{1+u} \right)^2 \frac{u(1+u)}{(u+v+uv)^2} \\
&\quad \times \left( \frac{1}{1+u} \right)^{\Delta-1} \left( \frac{u}{1+u} \right)^{k-1} \left( \frac{(1+u)v}{u+v+uv} \right)^{a-b+k-1} \left( \frac{u}{u+v+uv} \right)^{\Delta+b-1} \\
&\quad \times \left\{ \frac{u}{1+u} \frac{1}{u+v+uv} [(\vec{\xi} - \vec{\omega})^2 + u\omega^2 + v\xi^2] \right\}^{-(\Delta-a+b)}
\end{aligned} \tag{付録 F.44}$$

故に、(付録 F.43) を得る。

■

---

<sup>\*90</sup> 2 つ目の等号で

$$\text{Vol}(\mathbb{S}^{d-1}) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}, \quad \int_0^\infty dr r^{d-1} e^{-wr^2} = \left( -\frac{\partial}{\partial w} \right)^{(d-1)/2} \int_0^\infty dr e^{-wr^2} = \frac{\Gamma(d/2)}{2} w^{-d/2} \tag{付録 F.41}$$

を用いた。また最後の等号で (付録 F.37) を用いて分数の形に戻した。

次に以下の変数変換を行う。

$$\begin{aligned} u &= 2\rho(1 - \lambda) \\ v &= 2\rho(1 + \lambda) \end{aligned} \quad (\text{付録 F.45})$$

これより  $W_k^\Delta(a, 0)$  は共形不変な変数 (付録 F.21) を用いて以下の形になる。

$$\begin{aligned} W_k^\Delta(a, 0) &= \frac{\pi^{d/2}}{2^{\Delta+a}} \frac{\Gamma(k + \Delta + a - \frac{d}{2})\Gamma(\Delta - a)}{\Gamma(k)\Gamma(\Delta)^2(\xi^2 + \omega^2)^{\Delta-a}} \\ &\times \int_0^\infty d\rho \int_{-1}^1 d\lambda \frac{\rho^{k-1}(1 - \lambda^2)^{k+a-1}}{[1 + \rho(1 - \lambda^2)]^{k+2a}} \frac{1}{(s + \rho + \rho\lambda t)^{\Delta-a}} \end{aligned} \quad (\text{付録 F.46})$$

□

(付録 F.43) の該当箇所を変換すると、

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty du \int_0^\infty dv \frac{u^{k+a-1}v^{k+a-b-1}}{(u + v + uv)^{k+2a-b}} \frac{1}{[(\vec{\xi} - \vec{\omega})^2 + u\omega^2 + v\xi^2]^{\Delta'-a+b}} \\ &= \frac{1}{2^{\Delta'+a-b-1}} \int_0^\infty d\rho \int_{-1}^1 d\lambda \rho^{k-1}(1 - \lambda^2)^{k+a-1}(1 + \lambda)^{-b} \frac{1}{[1 + \rho(1 - \lambda^2)]^{k+2a-b}} \\ &\times \frac{1}{(\xi^2 + \omega^2)^{\Delta'-a+b}} \frac{1}{[s + \rho + \rho\lambda t]^{\Delta'-a+b}} \end{aligned} \quad (\text{付録 F.47})$$

最後の等号で関係式、

$$s = \frac{1}{2} \frac{(\vec{\xi} - \vec{\omega})^2}{\xi^2 + \omega^2}, \quad t = \frac{\xi^2 - \omega^2}{\xi^2 + \omega^2}$$

を用いた。 $b = 0$  と代入すれば (付録 F.46) を得る。

■

(付録 F.46) は  $s$  について以下の公式を用いて簡単化することができる。

$$\frac{1}{(s + \alpha)^k} = \frac{(-)^{k+1}}{\Gamma(k)} \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^{k-1} \frac{1}{s + \alpha} \quad (\text{付録 F.48})$$

具体的には

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty d\rho \int_{-1}^1 d\lambda \frac{\rho^{k-1}(1 - \lambda^2)^{k+a-1}}{[1 + \rho(1 - \lambda^2)]^{k+2a}} \frac{1}{(s + \rho + \rho\lambda t)^{\Delta'-a}} \\ &= \frac{(-)^{\Delta'-a+1}}{\Gamma(\Delta'-a)} \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^{\Delta'-a-1} \int_0^\infty d\rho \int_{-1}^1 d\lambda \frac{\rho^{k-1}(1 - \lambda^2)^{k+a-1}}{[1 + \rho(1 - \lambda^2)]^{k+2a}} \frac{1}{s + \rho + \rho\lambda t} \end{aligned} \quad (\text{付録 F.49})$$

ここで  $\rho = s/\mu$  と変換することで、残っている分母に関しても (付録 F.48) を適用し分母の字数を小さくできる。すなわち、

$$\frac{\rho^{k-1}(1 - \lambda^2)^{k+a-1}}{[1 + \rho(1 - \lambda^2)]^{k+2a}} = \left( \frac{s}{\mu} \right)^{k-1} (1 - \lambda^2)^{k+a-1} \left( \frac{\mu}{1 - \lambda^2} \right)^{k+2a-1} \frac{(-)^{k+2a+1}}{\Gamma(k+2a)} \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^{k+2a-1} \frac{1}{\mu + s(1 - \lambda^2)} \quad (\text{付録 F.50})$$

より、

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty d\rho \int_{-1}^1 d\lambda \frac{\rho^{k-1}(1-\lambda^2)^{k+a-1}}{[1+\rho(1-\lambda^2)]^{k+2a}} \frac{1}{(s+\rho+\rho\lambda t)^{\Delta'-a}} \\
&= \frac{(-)^{\Delta'-a+1}}{\Gamma(\Delta'-a)} \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^{\Delta'-a-1} \int_0^\infty d\rho \int_{-1}^1 d\lambda \frac{\rho^{k-1}(1-\lambda^2)^{k+a-1}}{[1+\rho(1-\lambda^2)]^{k+2a}} \frac{1}{s+\rho+\rho\lambda t} \\
&= \frac{(-)^{\Delta'+k+a}}{\Gamma(\Delta'-a)\Gamma(k+2a)} \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^{\Delta'-a-1} \\
&\quad \times \left\{ s^{k-1} \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^{k+2a-1} \int_0^\infty d\mu \mu^{2a} \int_{-1}^1 d\lambda \frac{(1-\lambda^2)^{-a}}{\mu+s(1-\lambda^2)} \frac{1}{1+\mu+\lambda t} \right\}
\end{aligned} \tag{付録 F.51}$$

これをまとめると、(付録 F.46) は、

$$W_k^\Delta(a, 0) = \pi^{d/2} \frac{(-)^{\Delta+k+a} 2^{-(\Delta+a)} \Gamma(k+\Delta+a-\frac{d}{2})}{\Gamma(k)\Gamma(k+2a)\Gamma(\Delta)^2(\xi^2+\omega^2)^{\Delta-a}} \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^{\Delta-a-1} \left\{ s^{k-1} \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^{k-1+2a} I_a(s, t) \right\} \tag{付録 F.52}$$

と、積分  $I_a(a, t)$  を用いて表される。ここで  $I_a(s, t)$  は以下の積分で定義される。

$$\begin{aligned}
I_a(s, t) &:= s^{2a} \int_0^\infty d\mu \int_{-1}^1 d\lambda \frac{(1-\lambda^2)^a}{\mu+s(1-\lambda^2)} \frac{1}{1+\mu+\lambda t} \\
&= s^{2a} \int_{-1}^1 d\lambda \frac{(1-\lambda^2)^a}{1+\lambda t-s(1-\lambda^2)} \log \frac{1+\lambda t}{s(1-\lambda^2)}
\end{aligned} \tag{付録 F.53}$$

次に  $W_k^{\Delta'}(0, 0)$  の  $t$  チャンネル極限  $|x_{13}| \ll |x_{12}|, |x_{24}| \ll |x_{12}|$  を考える。この極限は  $s, t \rightarrow 0$  によって与えられるため、 $s, t \sim 0$  の近傍で  $I_0(s, t)$  を展開して振る舞いを見ればよい。 $s$  についての展開は以下のようになる。

$$I_0(s, t) = \sum_{p=0}^\infty s^p [-a_p(t) \log s + b_p(t)] \tag{付録 F.54}$$

$a_p(t), b_p(t)$  は (付録 F.25) で定義した通りである。

$$a_p(t) := \int_{-1}^1 d\lambda \frac{(1-\lambda^2)^p}{(1+\lambda t)^{p+1}}, \quad b_p(t) := \int_{-1}^1 d\lambda \frac{(1-\lambda^2)^p}{(1+\lambda t)^{p+1}} \log \frac{1+\lambda t}{1-\lambda^2} \tag{付録 F.55}$$

(付録 F.52) に戻って、(付録 F.54) を代入し

$$\begin{aligned}
s^k \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^k s^p &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-k+1)} s^p \\
s^k \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^k (s^p \log s) &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-k+1)} s^p [\log s + \psi(p+1) - \psi(p-k+1)]
\end{aligned} \tag{付録 F.56}$$

を用いることにより\*91、以下を得る。

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^{\Delta-1} \left\{ s^{k-1} \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^{k-1} I_0(s, t) \right\} \\
&= \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^{\Delta-1} \sum_{p=0}^{\infty} \left[ \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-k+2)} s^p \left\{ b_p(t) - a_p(t) [\log s + \psi(p+1) - \psi(p-k+2)] \right\} \right] \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+1)^2 s^{p-\Delta+1}}{\Gamma(p-\Delta+2)\Gamma(p-k+2)} \left\{ b_p(t) - a_p(t) [\log s + 2\psi(p+1) - \psi(p-\Delta+2) - \psi(p-k+2)] \right\}
\end{aligned}$$

まとめると、

$$\begin{aligned}
W_k^{\Delta}(0, 0) &= \frac{(-)^{k+\Delta} \pi^{d/2} \Gamma(k+\Delta-d/2)}{2^{\Delta} \Gamma(k)^2 \Gamma(\Delta)^2 (\xi^2 + \omega^2)^{\Delta}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+1)^2 s^{p-\Delta+1}}{\Gamma(p-\Delta+2)\Gamma(p-k+2)} \\
&\quad \times [b_p(t) - a_p(t) \{\log s + 2\psi(p+1) - \psi(k-\Delta+2) - \psi(p-k+2)\}]
\end{aligned}$$

となり (付録 F.23) を得る。

### F.3 $W_k^{\Delta}(a, b)$ と $D_{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4}$ の関係式 (付録 F.24) の導出

$$W_k^{\Delta}(a, b) = x_{13}^{2k} x_{14}^{2\Delta} x_{12}^{2(\Delta+b)} D_{2a-b+k, \Delta+b, k, \Delta} \quad (\text{付録 F.58})$$

まず、 $W_k^{\Delta}(a, b)$  と  $D_{2a-b+k, k, \Delta+b, \Delta}$  の定義は (付録 F.1) と (付録 F.32) のとおりである。

$$\begin{aligned}
W_k^{\Delta}(a, b) &= \int_0^{\infty} \frac{dz}{z^{d+1}} \int d^d x \frac{z^{2\Delta+2a+2k}}{X^{2k}} \frac{1}{(X^{\mu} - \vec{\xi})^{2\Delta}} \frac{1}{(X^{\mu} - \vec{\omega})^{2\Delta+2b}} \\
D_{2a-b+k, \Delta+b, k, \Delta} &= \int_0^{\infty} \frac{dz}{z^{d+1}} \int d^d x \tilde{K}_{2a-b+k}(X, \vec{x}_1) \tilde{K}_{\Delta+b}(X, \vec{x}_2) \tilde{K}_k(X, \vec{x}_3) \tilde{K}_{\Delta}(X, \vec{x}_4) \\
\tilde{K}_{\Delta_i}(X, \vec{x}_i) &= \left( \frac{z}{(X^{\mu} - \vec{x}_i)^2} \right)^{\Delta_i} = \left( \frac{z}{z^2 + (\vec{x} - \vec{x}_i)^2} \right)^{\Delta_i}
\end{aligned}$$

座標の並進変換を行い、境界面上の演算子の挿入点  $\vec{x}_1$  を基準に原点を取り直すと、

$$\begin{aligned}
D_{2a-b+k, \Delta+b, k, \Delta} &= \int_0^{\infty} \frac{dz}{z^{d+1}} \int d^d x \tilde{K}_{2a-b+k}(X, 0) \tilde{K}_{\Delta+b}(X, \vec{x}_{21}) \tilde{K}_k(X, \vec{x}_{31}) \tilde{K}_{\Delta}(X, \vec{x}_{41}) \\
&= \int_0^{\infty} \frac{dz}{z^{d+1}} \int d^d x \left( \frac{z}{X^2} \right)^{2a-b+k} \left( \frac{z}{(X - \vec{x}_{21})^2} \right)^{\Delta+b} \left( \frac{z}{(X - \vec{x}_{31})^2} \right)^k \left( \frac{z}{(X - \vec{x}_{41})^2} \right)^{\Delta} \\
&\quad (\text{付録 F.59})
\end{aligned}$$

次に  $D$  関数を反転変換を用いて変形する。bulk-to-boundary propagator 反転は、 $X^{\mu} = \frac{X'^{\mu}}{X'^2} (X^{\mu}, X'^{\mu} \in$

\*91 2 つ目の式は

$$s^k \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^k (s^p \log s) = \frac{\partial}{\partial p} \left( s^k \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^k s^p \right) \quad (\text{付録 F.57})$$

と、F.1.3 章で用いた  $\Gamma$  関数の微分を用いる事により簡単に示すことができる。

$AdS_{d+1}$ 、 $\vec{x}_i = \frac{\vec{x}'_i}{x'^2_i}(\vec{x}'_i, x'_i \in \mathbb{R}^d)$  の元で、以下のとおりである。

$$\tilde{K}_{\Delta_i}(X, \vec{x}_i) = \left( \frac{z}{(X - \vec{x}_i)^2} \right)^{\Delta_i} = \left( \frac{z'}{X'^2 (X' - \vec{x}'_i)^2} \right)^{\Delta_i} = x'^{2\Delta_i}_i \tilde{K}_{\Delta_i}(X', \vec{x}'_i) \quad (\text{付録 F.60})$$

すなわち、

$$\begin{aligned} D_{2a-b+k, \Delta+b, k, \Delta} &= x'^{2k}_{13} x'^{2\Delta}_{14} x'^{2(\Delta+b)}_{12} \int_0^\infty \frac{dz'}{z'^{d+1}} \int d^d x' \tilde{K}_{2a-b+k}(X', 0) \tilde{K}_{\Delta+b}(X', \vec{x}'_{21}) \tilde{K}_k(X', \vec{x}'_{31}) \tilde{K}_\Delta(X', \vec{x}'_{41}) \\ &= x'^{2k}_{13} x'^{2\Delta}_{14} x'^{2(\Delta+b)}_{12} \int_0^\infty \frac{dz'}{z'^{d+1}} \int d^d x' \frac{z'^{2\Delta+2a+2k}}{(X' - \vec{x}'_{31})^{2k}} \frac{1}{(X' - \vec{x}'_{21})^{2(\Delta+b)}} \frac{1}{(X' - \vec{x}'_{41})^{2\Delta}} \end{aligned} \quad (\text{付録 F.61})$$

ここで再び並進変換を行い、境界面上の原点を  $\vec{x}'_{31}$  に取り直す。

$$D_{2a-b+k, \Delta+b, k, \Delta} = x'^{2k}_{13} x'^{2\Delta}_{14} x'^{2(\Delta+b)}_{12} \int_0^\infty \frac{dz'}{z'^{d+1}} \int d^d x' \frac{z'^{2\Delta+2a+2k}}{X'^{2k}} \frac{1}{(X'^\mu - \vec{\xi})^{2\Delta}} \frac{1}{(X'^\mu - \vec{\omega})^{2(\Delta+b)}} \quad (\text{付録 F.62})$$

最後に積分変数を  $X'^\mu \rightarrow X^\mu$  と書き換えると (付録 F.24) が導かれる<sup>\*92</sup>。

#### F.4 4点関数の double OPE 極限

極限形 (5.78) を (5.76) に代入すると以下の様になる。

$$\begin{aligned} & - \frac{\delta^4 I_4[J]}{\delta J^I(\vec{x}_1) \delta J^J(\vec{x}_2) \delta J^K(\vec{x}_3) \delta J^L(\vec{x}_4)} \\ &= - \left( \frac{\Gamma(d)}{\pi^{d/2} \Gamma(d/2)} \right)^4 d^2 \left[ A_{IKJL} \left( 1 + \frac{3}{d} x_{24}^2 \frac{\partial}{\partial x_{24}^2} \right) + A_{JLIK} \left( 1 + \frac{3}{d} x_{13}^2 \frac{\partial}{\partial x_{13}^2} \right) \right. \\ & \quad + A_{IJKL} \left( 1 + \frac{3}{d} x_{34}^2 \frac{\partial}{\partial x_{34}^2} \right) + A_{KLJI} \left( 1 + \frac{3}{d} x_{12}^2 \frac{\partial}{\partial x_{12}^2} \right) \\ & \quad \left. + A_{ILJK} \left( 1 + \frac{3}{d} x_{23}^2 \frac{\partial}{\partial x_{23}^2} \right) + A_{JKIL} \left( 1 + \frac{3}{d} x_{14}^2 \frac{\partial}{\partial x_{14}^2} \right) \right] D_{dddd}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4) \end{aligned} \quad (\text{付録 F.63})$$

ここで関数  $D_{dddd}$  の挿入点 ( $\vec{x}_1 \sim \vec{x}_4$ ) の入れ替えについての対称性を用いた。次に、ここに極限形 (5.81) を代入し、 $x_{ij}^2$  についての微分を作用させる必要がある。 $(i, j)$  の組み合わせによって以下の様に結果が異なることがわかる。

$x_{13}$  や  $x_{24}$  と  $x_{12}$  とは独立変数なので、(5.81) は  $x_{13}$  や  $x_{24}$  に依存しない。また、 $x_{13}$  や  $x_{24}$  以外の場合、 $x_{12}$  に従属変数として考えられる。(5.81) を微分すると、

$$x_{ij}^2 \frac{\partial}{\partial x_{ij}^2} \lim_{s, t \rightarrow 0} D_{dddd} = \begin{cases} -2d D_{dddd} & ((ij) = (12), (34), (23), (14)) \\ 0 & ((ij) = (13), (24)) \end{cases} \quad (\text{付録 F.64})$$

<sup>\*92</sup> 積分測度は反転変換の元で不変である。

この結果を用いると (付録 F.63) は次の様になる。

$$\begin{aligned}
& - \frac{\delta^4 I_4[J]}{\delta J^I(\vec{x}_1) \delta J^J(\vec{x}_2) \delta J^K(\vec{x}_3) \delta J^L(\vec{x}_4)} \\
& \sim - \left( \frac{\Gamma(d)}{\pi^{d/2} \Gamma(d/2)} \right)^4 d^2 [A_{IKJL} + A_{JLIK} \\
& \quad + A_{IJKL} \left( 1 + \frac{3}{d}(-2d) \right) + A_{KLIJ} \left( 1 + \frac{3}{d}(-2d) \right) \\
& \quad + A_{ILJK} \left( 1 + \frac{3}{d}(-2d) \right) + A_{JKIL} \left( 1 + \frac{3}{d}(-2d) \right)] D_{dddd} \\
& = - \left( \frac{\Gamma(d)}{\pi^{d/2} \Gamma(d/2)} \right)^4 d^2 [A_{IKJL} + A_{JLIK} - 5(A_{IJKL} + A_{KLIJ} + A_{ILJK} + A_{JKIL})] D_{dddd} \\
& \hspace{25em} (\text{付録 F.65})
\end{aligned}$$

$s, t \rightarrow 0$  の極限のもとでの (5.76) は、(5.81) の具体形で表すと以下の様になる。

$$\begin{aligned}
& - \frac{\delta^4 I_4[J]}{\delta J^I(\vec{x}_1) \delta J^J(\vec{x}_2) \delta J^K(\vec{x}_3) \delta J^L(\vec{x}_4)} \\
& \sim \frac{d^2}{2\pi^{3d/2}} \frac{\Gamma(3d/2)}{\Gamma(2d)} \left( \frac{\Gamma(d)}{\Gamma(d/2)} \right)^4 \frac{1}{(x_{12}^2)^{2d}} \left[ (3H_d - H_{d-1/2}) \mathcal{A}_{IKJL} - 5(3H_{d-1} - H_{d-1/2}) \mathcal{B}_{IKJL} \right. \\
& \quad \left. + (\mathcal{A}_{IKJL} - 5\mathcal{B}_{IKJL}) \log s \right]
\end{aligned}$$

ただし  $\mathcal{A}_{IKJL}, \mathcal{B}_{IKJL}$  については (5.83) で定義したとおりである。



## 参考文献

- [1] Tadakatsu Sakai and Masashi Zenkai, “Comments on contact terms and conformal manifolds in the AdS/CFT correspondence,” *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2020**, 013B02, doi:10.1093/ptep/ptaa164 [hep-th/2010.06106]
- [2] N. Seiberg, “Observations on the Moduli Space of Superconformal Field Theories,” *Nucl. Phys. B* **303**, 286 (1988). doi:10.1016/0550-3213(88)90183-6
- [3] D. Kutasov, “Geometry on the Space of Conformal Field Theories and Contact Terms,” *Phys. Lett. B* **220**, 153 (1989). doi:10.1016/0370-2693(89)90028-2 arXiv:1408.3393/hep-th
- [4] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, “Large N field theories, string theory and gravity,” *Phys. Rept.* **323**, 183 (2000) [hep-th/9905111].
- [5] K. Wilson, J. Kugut, “The renormalization group and the  $\epsilon$  expansion,” *Phys. Rept.* **12**, 75, (1974).
- [6] A. B. Zamolodchikov, “Irreversibility of the Flux of the Renormalization Group in a 2D Field Theory,” *JETP Lett.* **43**, 730 (1986) [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **43**, 565 (1986)].
- [7] J. Maldacena, “The large N limit of superconformal field theories and supergravity,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231, [hep-th/9711200]
- [8] Leo P. Kadanoff, “Operator Algebra and The Determination Of Critical Indices,” *Phys. Rev. Lett.* **23**, 1430 (1969)
- [9] Paul Ginsparg, “Applied Conformal Field Theory,” *Les Houches Summer School in Theoretical Physics: Fields, Strings, Critical Phenomena*, 1-168 [hep-th/9108028]
- [10] Igor R. Klebanov and Edward Witten, “AdS/CFT Correspondence and Symmetry Breaking,” *Nucl. Phys. B* **556**, 89 (1999) [hep-th/9905104]
- [11] P. Breitenlohner and D.Z. Freedman, “Stability in Gauged Extended Supergravity” , *Ann. Phys.* **144** (1982) 249.
- [12] H. Liu and A. A. Tseytlin, “On four point functions in the CFT / AdS correspondence,” *Phys. Rev. D* **59**, 086002 (1999) doi:10.1103/PhysRevD.59.086002 [hep-th/9807097].
- [13] E. D’ Hoker, D. Z. Freedman, S. D. Mathur, A. Matusis and L. Rastelli, “Graviton exchange and complete four point functions in the AdS / CFT correspondence,” *Nucl. Phys. B* **562**, 353 (1999) doi:10.1016/S0550-3213(99)00525-8 [hep-th/9903196].
- [14] Eric D’ Hoker and Daniel Z. Freedman, “Supersymmetric Gauge Theories and the AdS/CFT Correspondence,” *TASI 2001 Lecture Notes* [hep-th/0201253]
- [15] Gordon Chalmers and Koenraad Schalm, “The large  $N_c$  limit of four-point functions in  $\mathcal{N} = 4$  super-Yang-Mills theory from anti-de Sitter Supergravity,” [hep-th/9810051]
- [16] Daniel Z. Freedman, Samir D. Mathur, Alec Matusis and Leonardo Rastelli, “Comments on 4-point functions in the CFT/AdS correspondence,” *Phys. Lett. B* **452**:61-68,1999, doi: 10.1016/S0370-2693(99)00229-4 [hep-th/9808006]
- [17] D. Z. Freedman, S. D. Mathur, A. Matusis and L. Rastelli, “Correlation functions in the CFT(d)/AdS(d + 1) correspondence,” *Nucl. Phys. B* **546** (1999) 96 [arXiv:hep-th/9804058]
- [18] W. Mück and K. S. Viswanathan, “Conformal Field Theory from Classical Scalar Field Theory on

- AdS<sub>d+1</sub>,” Phys. Rev. D **58**, 041901 (1998), doi:10.1103/PhysRevD.58.041901 [hep-th/9804035]
- [19] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, “Gauge Theory Correlators from Non-Critical String Theory,” Phys.Lett.B **428**,105 (1998), doi:10.1016/S0370-2693(98)00377-3 [hep-th/9802109]
  - [20] E. Witten, “Anti-de Sitter space and holography,” Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 253 (1998) doi:10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a2 [hep-th/9802150]
  - [21] Daniel Z. Freedman, Kenneth Johnson, José I. Latorre, “Differential regularization and renormalization : a new method of calculation in quantum field theory,” Nuclear Physics B **371** (1992) 353
  - [22] J. de Boer, E. P. Verlinde and H. L. Verlinde, “On the holographic renormalization group,” JHEP **0008**, 003 (2000) doi:10.1088/1126-6708/2000/08/003 [hep-th/9912012]
  - [23] J. de Boer, “The Holographic Renormalization Group,” Fortsch. Phys. **49** (2001) 339-358 [hep-th/0101026]
  - [24] M. Fukuma, S. Matsuura and T. Sakai, “Holographic renormalization group,” Prog. Theor. Phys. **109**, 489 (2003) doi:10.1143/PTP.109.489 [hep-th/0212314].
  - [25] E. D’ Hoker, S. D. Mathur, A. Matusis and L. Rastelli, “The Operator product expansion of  $\mathcal{N} = 4$  SYM and the 4-point functions of supergravity,” Nucl. Phys. B **589**, 38 (2000) doi:10.1016/S0550-3213(00)00523-X [hep-th/9911222].
  - [26] V. Bashmakov, M. Bertolini and H. Raj, “On non-supersymmetric conformal manifolds: field theory and holography,” JHEP **1711**, 167 (2017) doi:10.1007/JHEP11(2017)167 [arXiv:1709.01749 [hep-th]]
  - [27] Connor Behan, “Conformal manifolds: ODEs from OPEs,” J. High Energy Phys. **1803**, 127 (2018) [arXiv:1709.03967 [hep-th]].
  - [28] K. Sen and Y. Tachikawa, “First-order conformal perturbation theory by marginal operators,” arXiv:1711.05947 [hep-th]
  - [29] David Berenstein, Alexandra Miller, “Conformal perturbation theory, dimensional regularization, and AdS/CFT correspondence,” D. Berenstein and A. Miller, Phys. Rev. D **90**, 086011 (2014) [arXiv:1406.4142 [hep-th]]
  - [30] A. M. Polyakov, “Conformal Symmetry of Critical Fluctuations,” JETP Lett. **12** 381(1970)
  - [31] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, “Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory,” Nucl. Phys. B **241** (1984) 333
  - [32] M. Green, J. Schwarz and E. Witten, “Superstring Theory,” Cambridge University Press, New York, 1987.
  - [33] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, “Action integrals and partition functions in quantum gravity,” Phys. Rev. D **15**, 2752.
  - [34] J. Wess and J. Bagger, “Supersymmetry and Supergravity, 2nd ed.”, Princeton N.J., Princeton University Press, 1992.
  - [35] E. Fradkin and M. Palchik, “Conformal Quantum Field Theory in D-dimensions,” Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.
  - [36] Kostas Skenderis, “Lecture Notes on Holographic Renormalization,” Class. Quant. Grav. **19**, 5849, 2002, [hep-th/0209067]
  - [37] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, John Archibald Wheeler, “Gravitation,” Princeton University Press.

- [38] M. Nakahara, “Geometry, Topology And Physics,” Second Edition, CRC Press.
- [39] Michael E. Peskin, Daniel V. Schroder “An Introduction to Quantum Field Theory,” Perseus Books, 1995.
- [40] 青木, 健一, “くりこみ とくりこみ群の意味,” 科研費総合研究 A「素粒子模型とゲージ理論」研究会「素粒子論の基礎的課題-90 年代をめざして」研究会報告, doi:10.24532/sokeken.80.4\_D51
- [41] 高橋和孝, 西森秀稔, “相転移・臨界現象と繰り込み群,” 丸善出版.
- [42] 久後汰一郎, “ゲージ場の量子論 I,” 新物理学シリーズ 23, 培風館.
- [43] H. ジョージアイ, 久後汰一郎 訳, “物理学におけるリー代数,” 原著第 2 版, 物理学選書 107, 吉岡書店.
- [44] 江口徹, 菅原裕二, “共形場理論” 岩波書店
- [45] 浜田賢二, “ $D \geq 3$  共形場理論の最近の発展”
- [46] 佐々木節, “一般相対論,” 物理学教科書シリーズ, 産業図書
- [47] 夏梅誠, “超弦理論の応用 ,” SGC ライブラリ 93, サイエンス社
- [48] 高柳匡, “ホログラフィー原理と量子エンタングルメント ,” SGC ライブラリ 106, サイエンス社
- [49] 福岡将文, 酒谷雄峰, “重力とエントロピー,” SGC ライブラリ 112, サイエンス社
- [50] 森口繁一, 宇田川銑久, 一松信, “岩波数学公式 II 級数・フーリエ解析,” 岩波書店.
- [51] 森口繁一, 宇田川銑久, 一松信, “岩波数学公式 III 特殊関数,” 岩波書店.

## 謝辞

この博士論文を執筆するにあたり多くの方にお世話になりました。

特に副論文の共著者の酒井先生には議論や幾多もの計算、論文執筆、投稿を通して長きにわたり手厚い指導をしていただきました。私の力不足で副論文の投稿まで予定よりも大幅に時間がかかってしまいました。さらに私の体調不良や就職活動による中断もあり、研究にかなりブランクが空いてしまいました。酒井先生にはその間も多大なサポートをしていただきました。また、学位論文執筆を諦めていた時期もありましたが、学位申請を促してくださいました。自分一人では決して学位論文執筆を始める段階にたどり着くことはできませんでした。誠に感謝しております。この場をお借りして再度お礼申し上げます。

現在ポストクの綿村先輩と菊池先輩には、この研究の初期の段階において、議論を交わしたり相談に乗っていただくなど、お世話になりました。お二人が海外に研究拠点を移され、途中から4人の共同研究という形ではなくなりましたが、お二人と議論させていただけたことで、大変多くの多くの刺激受け、自分にはない発想にも触れることができました。特に菊池さんとはチャットで何度か議論していただき、副論文を論文投稿サイトに投稿した際には「おめでとう!」と言葉を送っていただきました。学位を申請してからの期間も物理に関する疑問に答えていただき、非常に有意義な議論をさせていただきました。議論できた期間は私にとって決して長くはありませんでしたが、貴重な経験をさせていただきました。

また大学院生活全体のことを含め、改めて両親と2人の祖母に感謝しなければならないと思っています。特に私は博士後期課程1年目の終わり頃に体調を崩す様になってから、本格的な研究から離れていました。精神的にも弱っていたこともあり、私はよく両親に相談に乗ってもらっていました。何度も話を聞いてもらえたことが頭の中を整理することができ、精神的にもとても大きなサポートとなりました。また祖母達は大学院進学を喜んでくれたり、私の学業を心から応援してくれました。「どうしても辛くなったら実家に帰ろう」と思うことで気持ちに余裕が生まれ、何とか進んでこれました。そういった環境や両親や祖母たちの心理的サポートなくしては、ここまで大学院生活が続けることはできませんでした。身近な人たちの応援に恵まれていたと思います。

大学院生活では、自分の精神面における不安定さで前に進めないことが多くありました。同時に、周りの人からのサポートや環境など、自分以外の多くの力に支えられて自分が成り立っていることを実感しました。その全てが当たり前ではなく、本当に有難いことだと感じています。新型コロナウイルスの感染が各地で拡がっている中、感染する事なく今まで学位論文の執筆を継続できていることは私の周りの方々のおかげです。研究環境を与えてくださっている素粒子論研究室の皆様に大変感謝いたします。