

学位論文

5次元等角運動量ブラックホール時空における
Killing-Yano 3-形式の重力摂動への寄与の解析

槌谷 将隆

2021年2月22日

要旨

曲がった時空中の場の方程式（スカラー場，電磁場等）の演算子と交換する微分演算子は symmetry operator と呼ばれ，時空のもつ対称性との関連が調べられている．例えば，時空の対称性から構成された symmetry operator が高次元時空中における場の方程式の変数分離性を説明する例や，ある解に作用すると別のモードや質量等をもつ解を与える演算子（昇降演算子）が時空の対称性を用いて構成される例が知られている．また，各々の場の方程式に対して，symmetry operator を構成する時空の対称性の種類が調べられており，特に時空の隠れた対称性が注目されている．時空の隠れた対称性とは，時間並進や回転といった時空を不変に保つ変換（等長変換）の生成子である Killing ベクトル場を，高階のテンソル場へと拡張した概念である．

真空時空の重力摂動に対する 1 階 symmetry operator の一般形が 2019 年に示された．これによると，等長変換の生成子である Killing ベクトル場に加えて，隠れた対称性の一種である Killing-Yano 3-形式が symmetry operator を構成する．ところで，高次元 Myers-Perry 時空中における重力摂動の変数分離性や安定性は未だ調べられておらず，また，奇数次元 Myers-Perry 時空は Killing-Yano 3-形式をもつことが知られている．そこで，演算子間の交換関係や独立性を調べることによって，Killing-Yano 3-形式が重力摂動の変数分離性や安定性解析に応用される可能性を検討した．

本研究では，5 次元 Schwarzschild 時空および有限等角運動量をもつ 5 次元 Myers-Perry 時空を扱った．これらの時空は，Killing-Yano 3-形式とは独立に Killing ベクトル場によって重力摂動の変数分離およびモード展開を行うことのできる，最も解析の簡単な奇数次元 Myers-Perry 時空である．それぞれの時空において，Killing-Yano 3-形式から構成される symmetry operator を各モードに作用することで，交換関係や独立性を調べた．

5 次元 Schwarzschild 時空の場合，重力摂動方程式を用いず，symmetry operator は 3 次元球面上のスカラー，ベクトル，テンソルに対する演算に帰着することを示した．さらに，3 次元球面上の特定のモード分解のもとで，スカラー，ベクトル，テンソルハーモニクスは全て symmetry operator に対する固有スカラー，ベクトル，テンソルであることを示した．特にスカラー型摂動は固有値 0 をもつ．

有限等角運動量をもつ 5 次元 Myers-Perry 時空の場合，この時空の対称性と相性の良いモード分解を任意の 2 階対称テンソル場に適用し，symmetry operator によるモード間の遷移がないことを，重力摂動方程式を用いることなく示した．次に，重力摂動方程式をいくつかのモードに適用することによって，これらのモードに対する symmetry operator の作用は高々位相のずれを与えるに留まることを示した．

結論として，5 次元 Schwarzschild 時空中の全てのモードと有限等角運動量をもつ 5 次元 Myers-Perry 時空中のいくつかのモードについて，Killing-Yano 3-形式から構成される symmetry operator は Killing ベクトル場から構成される symmetry operator と交換し，さらに独立ではないことを示した．つまり，本研究で扱った範囲では，Killing-Yano 3-形式はモード間の昇降演算子を与えず，各モードに対して等長変換による解の変換しか与えないことを示した．

目次

第 1 章 導入	3
第 2 章 Killing-Yano 3-形式と重力摂動	7
2.1 時空の対称性	7
2.2 Kerr-NUT-(A)dS 時空	10
2.3 重力摂動と Symmetry Operators	15
第 3 章 5 次元 Schwarzschild 時空における解析	18
3.1 計量テンソル及び Killing-Yano 3-形式	18
3.2 モード分解	19
3.3 Symmetry Operator の解析	22
第 4 章 有限等角運動量を持つ 5 次元 Myers-Perry 時空における解析	25
4.1 計量テンソル及び Killing-Yano 3-形式	25
4.2 モード分解	28
4.3 Symmetry Operator の解析	30
第 5 章 結論と議論	38
付録 A 準備	40
A.1 時空上の微分	40
A.2 Einstein 方程式	44
A.3 線形計量摂動方程式	45
付録 B 球面調和関数	48
B.1 Hyperspherical 座標系	48
B.2 Hopf 座標系	52
B.3 $SU(2) \times SU(2)$ と相性の良い座標系	54
付録 C 式の導出の詳細	58
C.1 式 (3.29a), (3.29b) 及び (3.30) の導出	58
C.2 式 (4.55) の導出	61
付録 D Schwarzschild 極限	63
D.1 S^3 上の Killing ベクトル場とハーモニクスの関係	63
D.2 各モードの Schwarzschild 極限	66

第1章 導入

背景：場の方程式と時空のもつ対称性

Newton 力学の枠組において扱われる重力は，地球上の物理に対しては現象を能く説明するが，ひとたび地球を離れ宇宙における惑星の運動などを考えたとき，しばしば観測と整合しない．そのため理論の修正が必要とされ，現在から約一世紀過去に一般相対性理論が提案された．一般相対性理論は，Newton 力学において見出された観測との齟齬を解決し，それでいて大変綺麗な理論である．また，理論の提唱に伴い重力波およびブラックホール等の概念が生まれた．そのため，一般相対性理論は近代の物理学における大きな柱の一本として認識されている．

時空の歪みは物質の分布と紐づいており，その紐付けは Einstein 方程式に従うが，これは非線形連立偏微分方程式であるから解くために多大な労力を一般に要する．この煩雑さを避けることを主な目的として，既に知られている曲がった時空のある解を背景時空として固定し，その時空上のテスト場を考えることが定石の一つである．その上で，数值的に計算が行われることもあるが，解析的に振る舞いを調べる研究も盛んに行われてきた．そのような背景に伴って，テスト場の解析解を求める中で，場の方程式そのものに焦点を当てた数理的な研究も盛んに行われてきた．

Newton 力学において，エネルギー保存則や運動量保存則など，系の発展に沿って保存量を見つけることができることはよく知られた事実であり，この事実は系の保存量と系の対称性との対応をまとめた Noether の定理として知られている．相対論においても，例えば重力場中の粒子の運動は測地線系として記述され，Newton 力学と同様に保存量を見出すことができるが，このとき系の保存量に対応する系の対称性とは曲がった時空の対称性を指している．また，系の対称性という概念は力学系のみならず場の方程式においても同様に重要であり，その文脈の中では，対応する保存量とは変数分離に伴い現れる変数分離定数を指す．ここで特に注目すべきは，エネルギー保存則や運動量保存則は等長変換と呼ばれる特定の座標変換のもとでの系の普遍性により見出されるが，そのような見方によって理解することができない，座標変換のもとでの対称性を拡張した概念である隠れた対称性が測地線方程式や場の方程式に寄与することがある．

上述したように，測地線や場の方程式において時空の対称性は保存量や変数分離定数として系に現れることから，隠れた対称性は曲がった時空上の様々な場の方程式の変数分離性に寄与するというので，ブラックホール物理において盛んに研究されている．隠れた対称性の一種である Killing テンソルが Kerr 時空における測地線方程式の積分において Carter 定数と呼ばれる積分定数の源であることが判明し [1-3]，これによって隠れた対称性の重要性が認識され始めた．以降，様々な背景時空上の様々な場の方程式が変数分離可能であること，及びそれらの変数分離性が隠れた対称性によって保証されていることが

示された. ここで, 主に考えられている背景時空とは Kerr-NUT-(A)dS 時空であり, 主に考えられている場とはスピン $s = 0$ をもつ Klein-Gordon 場, スピン $s = 1/2$ をもつ Dirac 場, スピン $s = 1$ をもつ Maxwell 場, スピン $s = 3/2$ をもつ Rarita-Schwinger 場及びスピン $s = 2$ をもつ線形計量摂動である.

場の方程式の変数分離性は, 4次元定常回転時空である Kerr 時空において最もよく調べられている. 知られている結果として, Kerr 時空では, $s = 0, 1/2, 1, 3/2, 2$ に対する場の方程式は全て変数分離することが知られている [4–12]. 一方, Kerr 時空の高次元一般化である Myers-Perry 時空において, スピン $s = 0, 1/2, 1$ 場に対する場の方程式のみが分離可能であることが知られている. (2017年迄の結果については, 文献 [13] 及びこれが参照している文献によって網羅されている. スピン $s = 1$ 場についての変数分離性についての進展は 2017年以後に見出された結果であり, これについては文献 [14–18] を参照のこと)

場の方程式の変数分離性が示されている系は他にも知られている. 例えば, 4次元平坦時空において電磁場と結合したスピン $s = 1/2$ 場 [19], Plebański-Demiański 時空および Wahlquist 時空におけるスピン $s = 1$ 場 [20, 21], $p = 1, 2, 3, 4$ として Myers-Perry 時空における微分 p -形式 (時空次元は, $p = 1, 2, 3$ については任意次元, および $p = 4$ については 10次元) [22] がある.

時空上に隠れた対称性が存在することに起因して場の方程式が分離可能であるとき, 隠れた対称性に付随する symmetry operator を見つけることができる. Symmetry operator とは場の方程式を定義する演算子と交換する微分演算子であり, 場の変数分離に伴って現れる変数分離定数は symmetry operator の固有値として得られる. このように, 隠れた対称性, 場の方程式の分離可能性及び symmetry operator の存在は互いに密接に関係している.

Symmetry operator は, 量子力学における生成・消滅演算子としての昇降演算子のように, 解に作用して別の解を得るための有用なツールでもある. 最近では, $p = 0, 1$ として, $s = p$ の解から $s = p + 1/2$ の解を得ることができる, あるいはその逆を行うことができるような, スピンについての昇降演算子 [23], 及び, ある質量定数をもつスピン $s = 0$ 場の解に対して, これより別の質量をもつ場の方程式の解を得られるような, 質量に対する昇降演算子 [24–26] が報告されている.

動機 : 1階 symmetry operator の一般形

背景時空が真空解であるという仮定のもとで, スピン $s = 3/2, s = 2$ および幾つかの微分 p -形式に対する symmetry operator のとりうる形が既に調べられている [27–29]. これら一連の結果から, (共形) Killing-Yano 形式からこれらの方程式に対する 1階の symmetry operators が構成される. 特に, 我々が注目するスピン $s = 2$ 場, つまり線形計量摂動に対しては, Killing-Yano 形式の中でも Killing-Yano 3-形式のみから 1階 symmetry operator が構成される.

参考文献 [27–29] の結果から, Killing-Yano 3-形式から構成される symmetry operator を用いて, 重力摂動のある解から別の解を得ることができて, それがモード間の何らかの昇降演算子であったり, また, 重力摂動の境界条件を保存しない変換であったりする可能

性がある。もし symmetry operator が、モード分解を定義する時空の等長変換に付随する Lie 微分演算子と可換であるならば、symmetry operator は昇降演算子のどちらか、もしくはその線型結合であるだろう。ここで、一つの Killing-Yano 3-形式が昇降演算子と降演算子の両方を 1 階の演算子の形で同時に与えることは文献 [28] の定理により実現しないが、このことは、この symmetry operator が昇降演算子とならないことを意味しない。以上の観点から symmetry operator の作用を調べるために、具体的な背景時空を設定し、そのもとで symmetry operator を重力摂動に実際に作用させることによって、symmetry operator による解の変換のより詳細な構造を明らかにする。

奇数次元の Myers-Perry 時空は奇数の階数の Killing-Yano 形式を許すことが知られているため、これに着目する。しかしながら、このような時空上での重力摂動に対する一般的なマスター方程式の解析はなされておらず、例えば一般の奇数次元をまとめて取り扱うことはできない。そこで、マスター方程式を用いた解析が可能な 5 次元 Schwarzschild 時空および等角運動量をもつ 5 次元 Myers-Perry 時空を考える。これらの時空において、Killing-Yano 3-形式から構築された symmetry operator を重力摂動に作用させ、解析する。

方法と結果

我々は、5 次元 Schwarzschild 時空および有限等角運動量を持つ 5 次元 Myers-Perry 時空において、Killing-Yano 3-形式から構築された symmetry operator を解析し、その結果を文献 [30] としてまとめた。

5 次元 Schwarzschild 時空における解析では、文献 [31] に従ってまず 3 次元球面上のスカラー、ベクトル、テンソルハーモニクス観点から計量摂動を分解し、次に、文献 [32, 33] に従ってハーモニクスのさらに詳細なクラスを導入した。このように定義したモード分解に対して、symmetry operator を作用させた。

有限等角運動量を持つ 5 次元 Myers-Perry 時空における解析では、Schwarzschild 時空と比較して時空の対称性が $SU(2) \times SU(2)$ から $SU(2) \times U(1)$ へと減少するため、Schwarzschild の場合と同じモード分解はできない。そこで、我々は文献 [34–36] において言及されている別の方法を用いてモードの分解を実行した。文献 [36] において、重力摂動の幾つかのモードの従う方程式およびマスター変数の関数形が既に導出されている。文献 [36] において扱われているモードに symmetry operator を作用させ、解の変換の詳細を見た。

Symmetry operator による作用が、重力摂動に対してどの程度非自明な変換を与えるかを、主に以下の 2 点から調べた。第一に、場の方程式のとある解に symmetry operator を作用させたとき、その像が同様に場の方程式の解であることは既に判明しているが、これに加えて境界条件が保存するかどうかは、symmetry operator の形を一瞥しただけでは明らかでない。第二に、symmetry operator が、モード間の遷移を与える昇降演算子として働くかどうかについても、同様に具体的な計算によって確認する必要がある。

これらは、具体的に計算してみなければ分からない、言うなれば非自明な問題であるものの、結果としては、我々が解析する Killing-Yano 3-形式から構成される symmetry operator は、計量摂動の各モードに作用する等長変換の組み合わせとして得、上に挙げたような非自明な変換ではないことを示した。

構成

本論文の構成は以下の通りである。

第2章では、導入において言及した問題提起を補強する基礎事項についての説明を与える。第2.1節では、時空の各種対称性についての説明を与え、その性質に言及する。第2.2節では、対称性に関して豊富な構造を有している Kerr-NUT-(A)dS 時空に言及し、閉共形 Killing-Yano 2-形式が様々な対称性の構造を生む様子を、前節において言及した各種対称性の性質を用いて見る。また、一般的な Kerr-NUT-(A)dS 時空の計量の表式から4次元 Kerr 時空および5次元 Myers-Perry 時空の計量を導く。また、奇数次元 Kerr-NUT-(A)dS 時空上には Killing-Yano 3-形式が存在することを言う。第2.3節では、重力摂動の従う方程式に対する1階 symmetry operator に関する定理を紹介し、symmetry operator が Killing-Yano 3-形式より構成されることに触れる。

第3章では、5次元 Schwarzschild 時空を背景時空にとり、symmetry operator による解の変換の詳細を調べる。第3.1節では、Boyer-Lindquist 座標系における計量テンソル及び Killing-Yano 3-形式の表式を示し、これらをワープ積の空間として改めて表す。第3.2節では、ワープ積の空間としての Schwarzschild 時空に対して文献 [31] に示されているスカラー、ベクトル、テンソルハーモニクスへとモード分解を行う方法を適用し、さらに文献 [32,33] に基づいてベクトル、テンソルハーモニクスをより詳細なクラスへと分解する。

第4章では、等角運動量を持つ5次元 Myers-Perry 時空を背景時空にとり、symmetry operator による解の変換の詳細を調べる。第4.1節では、計量テンソル及び Killing-Yano 3-形式の Boyer-Lindquist 座標系における表式をまず示し、これらを $SU(2) \times SU(2)$ 対称性と相性の良い標構によって書き直す。第4.2節では、文献 [34-36] において用いられている group-theoretical な手法を適用することによって2階対称テンソル場のモード分解を与える。第4.3節では、ここまで定義したモード分解における単一モードに対して symmetry operator を作用させ、解の変換の詳細を調べる。場の方程式を用いることなく、symmetry operator と $U(1) \times SU(2)$ の生成子による Lie 微分が交換することを示す。そして、場の方程式を適用すると、いくつかのモードに対して symmetry operator は高々等長変換の線型結合として振る舞うことを示す。

第5章は結論と議論に充てる。

第2章 Killing-Yano 3-形式と重力摂動

本研究は、時空のもつ隠れた対称性が、重力摂動の場の方程式に対する symmetry operator と呼ばれる解を解に移す演算子を構築するという事実に基づいている。より具体的には、本研究は、Kerr-NUT-(A)dS 時空と呼ばれる豊かな対称性をもつ時空と、2019 年に見出された重力摂動に対する 1 階 symmetry operator の一般形に関する定理、という 2 つの話題を背景としている。本章においてこれらの話題を概観する。第 2.1 節および第 2.2 節の内容は文献 [13] に、そして、第 2.3 節の内容は文献 [28] に準ずる。

2.1 時空の対称性

Killing-Yano 3-形式は、隠れた対称性と呼ばれる時空の対称性の一種である。時空のもちうる各種対称性は、それぞれが独立した概念であるわけではなく、各種対称性が互いに密接に関連している。本節では、各種対称性の関連を見るとともに、次節で導入する Kerr-NUT-(A)dS 時空が奇数次元であるとき、この時空上に Killing-Yano 3-形式が存在することを示す。本節において、各種対称性の具体例である（共形）Killing ベクトル、Killing テンソル、（共形）Killing-Yano テンソルを導入し、これらの関係に言及する。本節の内容は、文献 [13] の第 2 章に準ずる。

Killing ベクトル場

計量テンソル g があるベクトル場による Lie 移動のもとで不変であるとき、そのベクトル場を Killing ベクトル場と呼ぶ。定義より、Killing ベクトル場 ξ は

$$\mathcal{L}_\xi g = 0 \quad (2.1)$$

を満たし、 ξ に対応するフロー ϕ は等長変換と呼ばれる。 Y および Z をベクトル場として、式 (2.1) は共変微分 ∇ を用いて

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi g)(Y, Z) &= \mathcal{L}_\xi[g(Y, Z)] - g(\mathcal{L}_\xi Y, Z) - g(Y, \mathcal{L}_\xi Z) \\ &= \nabla_\xi[g(Y, Z)] - g(\nabla_\xi Y - \nabla_Y \xi, Z) - g(Y, \nabla_\xi Z - \nabla_Z \xi) \\ &= g(\nabla_Y \xi, Z) + g(Y, \nabla_Z \xi) \end{aligned} \quad (2.2)$$

と書き直される。ここで、式 (2.2) における最後の式変換において、metricity 条件 $(\nabla_\xi g)(Y, Z) = 0$ を用いた。 Y および Z は任意のベクトル場であるため、局所座標系において、

$$\nabla_{(\alpha} \xi_{\beta)} = 0 \quad (2.3)$$

という ξ の従うべき式を得る。これは Killing 方程式と呼ばれる。

共形 Killing ベクトル場

あるベクトル場 ξ が共形 Killing ベクトル場であるとは、ある関数 λ が存在して、 ξ による計量テンソル g の Lie 微分が

$$\mathcal{L}_\xi g = 2\lambda g \quad (2.4)$$

の形で与えられることをいう。局所座標系では、Killing ベクトル場の場合と同様に、式 (2.4) は

$$\nabla_{(\alpha}\xi_{\beta)} = \lambda g_{\alpha\beta} \quad (2.5)$$

のように書き直される。式 (2.5) は共形 Killing 方程式と呼ばれる。 $g_{\alpha\beta}$ を用いて式 (2.5) の両辺の縮約をとることによって、 λ は ξ を用いて

$$\lambda = \frac{1}{D} \nabla \cdot \xi \quad (2.6)$$

と表される。明らかに、Killing ベクトル場は $\lambda = 0$ である共形 Killing ベクトル場である。

Killing テンソル

Killing テンソルは、Killing ベクトル場を完全対称テンソルへと一般化した概念である。ある階数 r の完全対称テンソル場 k が Killing テンソルであるとは、 k が Killing 方程式

$$\nabla_{(\alpha_0} k_{\alpha_1 \dots \alpha_r)} = 0 \quad (2.7)$$

を満たすことをいう。明らかに、式 (2.7) は $r = 1$ (Killing ベクトル場) に対して式 (2.3) に帰着する。計量テンソルに対する metricity 条件 $\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = 0$ より、計量テンソル g は階数 $r = 2$ の Killing テンソルである。

Killing テンソルは Killing ベクトル場と同様に、測地線問題において第一積分を与えるものである。測地線の接ベクトル u は $g(u, u) = \text{const.}$ のように規格化されており、また、測地線方程式 $\nabla_u u = 0$ を満たす。Killing テンソル k と接ベクトル u によって作られる関数 $k(u, \dots, u)$ に対する u による方向微分を考えると、Leibniz 則を適用して

$$\nabla_u [k(u, \dots, u)] = (\nabla_u k)(u, \dots, u) + k(\nabla_u u, \dots, u) + \dots + k(u, \dots, \nabla_u u) \quad (2.8)$$

を得る。ここで、右辺の第1項は Killing 方程式 (2.7) によって消え、また、他の項は測地線方程式 $\nabla_u u = 0$ によって消える。即ち、

$$\nabla_u [k(u, \dots, u)] = 0 \quad (2.9)$$

を得る。よって、関数 $k(u, \dots, u)$ は測地線に沿って定数を取り、Killing テンソルは Killing ベクトル場と同様に測地線方程式の Liouville 可積分性に寄与する可能性がある。

Killing-Yano 形式

Killing-Yano 形式は、Killing ベクトル場を完全反対称テンソル場へと拡張した概念である。ある階数 p の完全反対称テンソル f が Killing-Yano p -形式であるとは、 f が Killing-Yano 方程式

$$\nabla_{(\alpha_0} f_{\alpha_1)\alpha_2\cdots\alpha_p} = 0 \quad (2.10)$$

を満たすことである。言い換えれば、式 (2.10) を書き換えると

$$\nabla_{\alpha_0} f_{\alpha_1\cdots\alpha_p} = \nabla_{[\alpha_0} f_{\alpha_1\cdots\alpha_p]} \quad (2.11)$$

となるように、Killing-Yano 形式 f とは、 f の共変微分が f と同様に完全反対称となるような微分形式である。ここで、Killing-Yano 形式 f から $k_{\alpha\beta} = f_{\alpha}{}^{\gamma_2\cdots\gamma_p} f_{\beta\gamma_2\cdots\gamma_p}$ の形で 2 階の Killing テンソル k が得られることに言及しておく。実際、 f に対する Killing-Yano 方程式 (2.10) から

$$\nabla_{(\alpha_0} k_{\alpha_1\alpha_2)} = \nabla_{(\alpha_0} [f_{\alpha_1}{}^{\gamma_2\cdots\gamma_p} f_{\alpha_2)\gamma_2\cdots\gamma_p}] = 0 \quad (2.12)$$

が得られ、即ち k は Killing 方程式 (2.7) を満たす。

共形 Killing-Yano 形式

共形 Killing-Yano 形式とは、共形 Killing ベクトル場を完全反対称テンソル場へと拡張した概念である。ある階数 p の完全反対称テンソル h が共形 Killing-Yano p -形式であるとは、ある $(p-1)$ -形式 $\lambda_{\alpha_2\cdots\alpha_p}$ が存在して、 h が共形 Killing-Yano 方程式

$$\nabla_{\alpha_0} h_{\alpha_1\cdots\alpha_p} = \nabla_{[\alpha_0} h_{\alpha_1\cdots\alpha_p]} + p g_{\alpha_0[\alpha_1} \lambda_{\alpha_2\cdots\alpha_p]} \quad (2.13)$$

を満たすことをいう。ここで、 $g^{\alpha_0\alpha_1}$ を用いて式 (2.13) の両辺の縮約をとることによって、 $\lambda_{\alpha_2\cdots\alpha_p}$ は h を用いて

$$\lambda_{\alpha_2\cdots\alpha_p} = \frac{1}{D-p+1} \nabla_{\beta} h^{\beta}{}_{\alpha_2\cdots\alpha_p} \quad (2.14)$$

と表される。明らかに、 $p=1$ のとき式 (2.13) は共形ベクトル場に対する共形 Killing 方程式 (2.5) に帰着する。共形 Killing-Yano 方程式 (2.13) の右辺第 1 項が存在しないことは、 h が閉形式であることと同値である。このことは、 h の外微分の表式

$$dh = \frac{1}{p!} \nabla_{[\alpha_0} h_{\alpha_1\cdots\alpha_p]} dx^{\alpha_0} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_p} \quad (2.15)$$

および閉形式の定義 $dh=0$ から即座に理解される。一方、共形 Killing-Yano 方程式 (2.13) の右辺第 2 項が存在しないことは、 h が Killing-Yano 形式であることと対応する。実際、 $\lambda_{\alpha_2\cdots\alpha_p}=0$ を反映すると、式 (2.13) は Killing-Yano 方程式 (2.11) に帰着する。

閉共形 Killing-Yano 形式と Killing-Yano 形式には Hodge 演算子を通して強い関連がある。共形 Killing-Yano p -形式 h は $dh=0$ に従う閉形式であるとする。 h の Hodge 双

対は

$$\begin{aligned}
\nabla_{\beta_0}(\star h)_{\beta_1 \dots \beta_{D-p}} &= \frac{1}{p!} \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_{D-p}} \nabla_{\beta_0} h_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \\
&= \frac{1}{p!} \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_{D-p}} \left(p g_{\beta_0 [\alpha_1} \lambda_{\alpha_2 \dots \alpha_p]} \right) \\
&= \frac{1}{p!} \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_{D-p}} \left(p g_{\beta_0 \alpha_1} \lambda_{\alpha_2 \dots \alpha_p} \right) \\
&= \frac{1}{p!} \varepsilon_{\beta_0}^{\alpha_2 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_{D-p}} \left(p \lambda_{\alpha_2 \dots \alpha_p} \right) \\
&= \frac{1}{p!} \varepsilon_{[\beta_0}^{\alpha_2 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_{D-p}]} \left(p \lambda_{\alpha_2 \dots \alpha_p} \right) \tag{2.16}
\end{aligned}$$

に従うことから、即ち $\nabla_{\beta_0}(\star h)_{\beta_1 \dots \beta_{D-p}}$ は完全反対称であり、よって $f = \star h$ は Killing-Yano $(D-p)$ -形式である。また、任意の微分形式 A に適用される Hodge 演算子の性質 $\star \star A = (-)^{p(D-p)+1} A$ によって、Killing-Yano 形式 f の Hodge 双対 $h = \star f$ は閉共形 Killing-Yano 形式である。同時に、

$$\delta f = -\star d \star [\star h] = (-)^{p(D-p)} \star dh = 0 \tag{2.17}$$

より Killing-Yano 形式は余閉である。一般に、Hodge 演算子は共形 Killing-Yano 形式を共形 Killing-Yano 形式へと移す。

閉共形 Killing-Yano 形式のもつ別の性質を示しておく。閉共形 Killing-Yano 形式 h^1 および h^2 はそれぞれ p -形式および q -形式であるとする。 h^1 と h^2 の楔積によって得られる $(p+q)$ -形式 $h^1 \wedge h^2$ の座標表示は

$$h^1 \wedge h^2 = \frac{1}{p!q!} h^1_{\alpha_1 \dots \alpha_p} h^2_{\beta_1 \dots \beta_q} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\beta_q} \tag{2.18}$$

と表される。 $h^1 \wedge h^2$ は

$$\begin{aligned}
\nabla_{\gamma} [h^1 \wedge h^2]_{\alpha_1 \dots \alpha_p \beta_1 \dots \beta_q} &= \frac{(p+q)!}{p!q!} \nabla_{\gamma} \left[h^1_{[\alpha_1 \dots \alpha_p} h^2_{\beta_1 \dots \beta_q]} \right] \\
&= \frac{(p+q)!}{p!q!} \left[\left(\nabla_{\gamma} h^1_{[\alpha_1 \dots \alpha_p]} \right) h^2_{\beta_1 \dots \beta_q} + h^1_{[\alpha_1 \dots \alpha_p} \left(\nabla_{|\gamma|} h^2_{\beta_1 \dots \beta_q]} \right) \right] \\
&= \frac{(p+q)!}{p!q!} \left[\left(p g_{\gamma [\alpha_1} \lambda_{\alpha_2 \dots \alpha_p]}^1 \right) h^2_{\beta_1 \dots \beta_q} + h^1_{[\alpha_1 \dots \alpha_p} \left(q g_{|\gamma| \beta_1} \lambda_{\beta_2 \dots \beta_q]}^2 \right) \right] \\
&= \frac{(p+q)!}{p!q!} g_{\gamma [\alpha_1} \left[\left(p \lambda_{\alpha_2 \dots \alpha_p]}^1 \right) h^2_{\beta_1 \dots \beta_q} - h^1_{[\beta_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} \left(q \lambda_{\beta_2 \dots \beta_q]}^2 \right) \right] \tag{2.19}
\end{aligned}$$

に従うことから、 $h^1 \wedge h^2$ は閉共形 Killing-Yano $(p+q)$ -形式である。

2.2 Kerr-NUT-(A)dS 時空

Kerr-NUT-(A)dS 時空は、前節において導入した各種対称性の観点から非常に豊かな構造をもつ。具体的には、Kerr-NUT-(A)dS 時空上には非退化の閉共形 Killing-Yano 2-形式が存在し、これが他のさまざまな対称性の源となる。また、この構造から、奇数次元の Kerr-NUT-(A)dS 時空上には Killing-Yano 3-形式が存在する。本節の内容は、文献 [13] の第 5 章に準ずる。

2.2.1 正準座標と Darboux 標構

時空の次元 D を $D = 2n + \varepsilon$ と表す. ここで, n は整数であり, ε は $\varepsilon = 0$ または $\varepsilon = 1$ のいずれかの値をとる. また, 下付き添字 μ, ν, \dots 及び i, j, \dots を導入し, それぞれ $\mu, \nu, \dots \in \{0, \dots, n-1\}$ 及び $i, j, \dots \in \{0, \dots, n-1+\varepsilon\}$ をとるとする. Kerr-NUT-(A)dS 時空の計量テンソルは, 正準座標系と呼ばれる座標系 (x_μ, ψ_i) に対し,

$$g = \sum_{\mu=0}^{n-1} \left[\frac{U_\mu}{X_\mu} dx_\mu^2 + \frac{X_\mu}{U_\mu} \left(\sum_{j=0}^{n-1} A_\mu^{(j)} d\psi_j \right)^2 \right] + \varepsilon \frac{c}{A^{(n)}} \left(\sum_{k=0}^n A^{(k)} d\psi_k \right)^2 \quad (2.20)$$

の形で与えられる. ただし, この表式において, 計量テンソル g は適当な Wick 回転を施されているため Riemannian である. ここで, 関数 $A^{(k)}$, $A_\mu^{(j)}$ および U_μ はそれぞれ

$$A^{(k)} = \sum_{\substack{\mu_1, \dots, \mu_k=0 \\ \nu_1 < \dots < \nu_k}}^{n-1} x_{\nu_1}^2 \cdots x_{\nu_k}^2, \quad A_\mu^{(j)} = \sum_{\substack{\nu_1, \dots, \nu_j=0 \\ \nu_1 < \dots < \nu_j \\ \nu_i \neq \mu}}^{n-1} x_{\nu_1}^2 \cdots x_{\nu_j}^2, \quad U_\mu = \prod_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq \mu}}^{n-1} (x_\nu^2 - x_\mu^2) \quad (2.21)$$

と定義されている. ここで, $A^{(0)} = A_\mu^{(0)} = 1$ である. 関数 X_μ はそれぞれのラベル μ に対して一つの座標 x_μ にのみ依存する関数 $X_\mu = X_\mu(x_\mu)$ として与えられている. Einstein 方程式 $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$ によって, X_μ の関数形は制限されるが, 直後に言及する時空の対称性についての性質は Einstein 方程式を課さずとも成立する. そこで, ここでは Einstein 方程式によって制限される X_μ の関数形には言及しない.

正準座標系 (x_μ, ψ_i) と相性の良い正規直交標構が存在し, それは Darboux 標構と呼ばれる. Darboux 標構および余標構は

$$e^\mu = \left(\frac{U_\mu}{X_\mu} \right)^{1/2} dx_\mu, \quad \hat{e}^\mu = \left(\frac{X_\mu}{U_\mu} \right)^{1/2} \sum_{j=0}^{n-1} A_\mu^{(j)} d\psi_j, \quad \hat{e}^n = \left(\frac{c}{A^{(n)}} \right)^{1/2} \sum_{k=0}^n A^{(k)} d\psi_k, \quad (2.22a)$$

$$e_\mu = \left(\frac{X_\mu}{U_\mu} \right)^{1/2} \partial_{x_\mu}, \quad \hat{e}_\mu = \left(\frac{U_\mu}{X_\mu} \right)^{1/2} \sum_{k=0}^{n-1+\varepsilon} \frac{(-x_\mu^2)^{n-1-k}}{U_\mu} \partial_{\psi_k}, \quad \hat{e}_n = (cA^{(n)})^{-1/2} \partial_{\psi_n} \quad (2.22b)$$

と与えられる. Darboux 標構は正規直交標構であることから, 計量テンソル (2.20) および逆計量テンソル g^{-1} はそれぞれ

$$g = \sum_{\mu=0}^{n-1} (e^\mu e^\mu + \hat{e}^\mu \hat{e}^\mu) + \varepsilon \hat{e}^0 \hat{e}^0, \quad g^{-1} = \sum_{\mu=0}^{n-1} (e_\mu e_\mu + \hat{e}_\mu \hat{e}_\mu) + \varepsilon \hat{e}_0 \hat{e}_0 \quad (2.23)$$

と表される.

2.2.2 対称性

Kerr-NUT-(A)dS 時空上には閉共形 Killing-Yano 2-形式

$$h = \sum_{\mu=0}^{n-1} x_\mu e^\mu \wedge \hat{e}^\mu \quad (2.24)$$

が存在する．係数 x_μ は座標であり則ち関数独立であるため， h は非退化である．この点を強調して，Kerr-NUT-(A)dS 時空上の閉共形 Killing-Yano 2-形式は principal 閉共形 Killing-Yano 2-形式，または単に principal テンソルとも呼ばれる．余談として，principal テンソルの存在する計量の最も一般的な形が式 (2.20) であることが知られている [37, 38]．

Principal テンソルは Kerr-NUT-(A)dS 時空のもつ豊かな対称性の構造の源である．前節において，2 つの閉共形 Killing-Yano 形式の楔積は同様に閉共形 Killing-Yano 形式であることを言及した．このことから，添字 $j \in \{0, \dots, n\}$ に対して

$$h_{(j)} = \frac{1}{j!} \wedge^{(j)} h \quad (2.25)$$

は閉共形 Killing-Yano $2j$ -形式である．次に，前節において，閉共形 Killing-Yano 形式の Hodge 双対が Killing-Yano 形式であることを示した．このことから，

$$f_{(j)} = \star h_{(j)} \quad (2.26)$$

は Killing-Yano $(D - 2j)$ -形式である．本稿においては， D が奇数である場合において $j = n - 1$ として Killing-Yano 3-形式が得られることが最も重要な事実である．

以下は本稿における我々の仕事には直接関係しないが，principal テンソルより Killing テンソル及び Killing ベクトル場がさらに導かれることにも簡単に言及しておく．前節において，Killing-Yano 形式の適当な足の縮約をとると Killing テンソルを得ることは既に示した．このことから添字 $j \in \{0, \dots, n - 1\}$ に対して

$$k_{(j)} = \frac{1}{(D - 2j - 1)!} f_{(j)\alpha_1\beta_2\cdots\beta_{D-2j-1}} f_{(j)\alpha_2}{}^{\beta_2\cdots\beta_{D-2j-1}} dx^{\alpha_1} \otimes dx^{\alpha_2} \quad (2.27)$$

は 2 階の Killing テンソルである．特に， $k_{(0)} = g$ である．最後に，前節の話題を引用して，閉共形 2-形式 h の従う共形 Killing-Yano 方程式はベクトル場

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{D - 1} \nabla^\beta h_{\beta\alpha} \quad (2.28)$$

を含むが，これは Kerr-NUT-(A)dS 時空上の Killing ベクトル場であることが知られており，primary Killing ベクトル場と呼ばれる．また，既に得た Killing テンソル及び primary Killing ベクトル場から得られるベクトル場

$$\zeta_{(j)} = k_{(j)} \cdot \xi \quad (2.29)$$

が Killing ベクトル場であることが同様に知られており，これらは secondary Killing ベクトル場と呼ばれる．

このように，Kerr-NUT-(A)dS 時空において，principal テンソルから閉共形 Killing-Yano $2j$ -形式，Killing-Yano $(D - 2j)$ -形式， n 個の Killing テンソル及び n 個の Killing ベクトル場が得られる．Kerr-NUT-(A)dS 時空は以上のような対称性の構造を有しており，これが第 1 章において言及した各種場の方程式の変数分離性に寄与している．

2.2.3 5 次元 Myers-Perry 時空

計量が式 (2.20) によって与えられる Kerr-NUT-(A)dS 時空が 4 次元 Kerr 時空および 5 次元 Myers-Perry 時空を含むことを具体計算によって確認する。特に、5 次元 Myers-Perry 時空の計量テンソルおよび Killing-Yano 3-形式の表式は後の章において用いられる。

4 次元 Kerr 及び 5 次元 Myers-Perry 時空に共通する事項をまずまとめる。このとき式 (2.20) において $n = 2$ が対応し、座標 x_0 及び x_1 はそれぞれ動径 r 及び角度 θ の関数、すなわち

$$x_0 = ir, \quad x_1 = p(\theta) \quad (2.30)$$

とみなされる。ここで、 $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位、および、 $p = p(\theta)$ は現時点では特定されない θ に対応する座標関数である。以降、標準的な記法に従い、 U_0, U_1, X_0 及び X_1 を

$$U_0 = -U_1 = r^2 + p^2 = \Sigma(r, \theta), \quad X_0 = -\Delta_r(r), \quad X_1 = -\Delta_p(\theta) \quad (2.31)$$

のように Σ, Δ_r 及び Δ_p を用いて書き表す。以上より、計量テンソル (2.20) は

$$g = \Sigma \left(\frac{dr^2}{\Delta_r} + \frac{dp^2}{\Delta_p} \right) + \frac{1}{\Sigma} \left\{ -\Delta_r \left(d\psi_0 + p^2 d\psi_1 \right)^2 + \Delta_p \left(d\psi_0 - r^2 d\psi_1 \right)^2 \right\} \\ - \varepsilon \frac{c}{r^2 p^2} \left\{ d\psi_0 + (-r^2 + p^2) d\psi_1 - r^2 p^2 d\psi_2 \right\}^2 \quad (2.32)$$

となる。

4 次元 Kerr 時空

$D = 4$ の場合、 $\varepsilon = 0$ であるから式 (2.32) の最後の項は存在しない。特に、4 次元 Kerr 時空においては関数 Δ_r 及び Δ_p は

$$\Delta_r = r^2 - 2Mr + a^2, \quad \Delta_p = -p^2 + a^2 \quad (2.33)$$

と与えられる。定数 M 及び a はそれぞれブラックホール質量及び角運動量を表すパラメータである。Kerr 時空において標準的な座標系である Boyer-Lindquist 座標系 (t, r, θ, ϕ) は、座標変換

$$p = a \cos \theta, \quad \psi_0 = t - a\phi, \quad \psi_1 = \frac{\phi}{a} \quad (2.34)$$

によって得られる。この関係式から簡単に得られる

$$d\psi_0 + p^2 d\psi_1 = dt - a \sin^2 \theta d\phi, \quad (2.35)$$

$$d\psi_0 - r^2 d\psi_1 = dt - \frac{r^2 + a^2}{a} d\phi \quad (2.36)$$

を式 (2.32) に代入し整理すると、

$$g = \Sigma \left(\frac{dr^2}{\Delta_r} + \frac{dp^2}{\Delta_p} \right) + \frac{1}{\Sigma} \left\{ -\Delta_r \left(dt - a \sin^2 \theta d\phi \right)^2 + \Delta_p \left(dt - \frac{r^2 + a^2}{a} d\phi \right)^2 \right\} \\ = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{A \sin^2 \theta}{\Sigma} d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta_r} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \quad (2.37)$$

を得る。ここで,

$$\Sigma(r, \theta) = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta_r(r) = r^2 - 2Mr + a^2, \quad A(r, \theta) = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta_r \sin^2 \theta \quad (2.38)$$

である。

5 次元 Myers-Perry 時空

$D = 5$ の場合, 式 (2.32) において $\varepsilon = 1$ である。 M, a 及び b を定数として, 関数 Δ_r 及び Δ_p はそれぞれ

$$\Delta_r = \frac{(r^2 + a^2)(r^2 + b^2)}{r^2} - 2M, \quad \Delta_p = -\frac{(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)}{p^2} \quad (2.39)$$

と与えられ, 式 (2.32) の最後の項が含む定数 c は $c = \frac{a^2 b^2}{(b^2 - a^2)^2}$ と与えられる。定数 M はブラックホール質量であり, 定数 a, b はブラックホール角運動量を表すパラメータである。Boyer-Lindquist 座標系 $(t, r, \theta, \phi, \psi)$ は座標変換

$$p = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}, \quad (2.40a)$$

$$\psi_0 = t + \frac{1}{b^2 - a^2} (a^3 \phi - b^3 \psi), \quad (2.40b)$$

$$\psi_1 = -\frac{1}{b^2 - a^2} (a\phi - b\psi), \quad (2.40c)$$

$$\psi_2 = -\frac{1}{(b^2 - a^2)ab} (-b\phi + a\psi) \quad (2.40d)$$

によって得られる。この座標変換から即座に得られる関係式

$$d\psi_0 + p^2 d\psi_1 = dt - a \sin^2 \theta d\phi - b \sin^2 \theta d\psi, \quad (2.41)$$

$$d\psi_0 - r^2 d\psi_1 = dt + \frac{1}{b^2 - a^2} \{ (r^2 + a^2)a d\phi - (r^2 + b^2)b d\psi \}, \quad (2.42)$$

$$d\psi_0 + (-r^2 + p^2)d\psi_1 - r^2 p^2 d\psi_2 = dt - \frac{1}{ab} \left\{ (r^2 + a^2)b \sin^2 \theta d\phi + (r^2 + b^2)a \cos^2 \theta d\psi \right\} \quad (2.43)$$

及び

$$\Delta_p = \frac{(b^2 - a^2)^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{p^2} \quad (2.44)$$

を式 (2.32) に適用すると, 5 次元 Myers-Perry 時空の計量テンソルの表式を

$$\begin{aligned} g = & -\frac{\Delta_r}{\Sigma} (dt - a \sin^2 \theta d\phi - b \cos^2 \theta d\psi)^2 + \frac{\Sigma}{\Delta_r} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \\ & + \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{p^2 \Sigma} [(b^2 - a^2)dt + (r^2 + a^2)a d\phi - (r^2 + b^2)b d\psi]^2 \\ & + \frac{1}{r^2 p^2} [abd t - (r^2 + a^2)b \sin^2 \theta d\phi - (r^2 + b^2)a \cos^2 \theta d\psi]^2 \end{aligned} \quad (2.45)$$

のように得る.

我々の研究において, Killing-Yano 3-形式が中心的存在であるため, ここに計量テンソルと共に 5 次元 Myers-Perry 時空の Killing-Yano 3-形式の表式を示しておく. Boyer-Lindquist 座標系では, $x_0 = ir$ によって Wick 回転が施されているため, 正規直交標構を改めて

$$e^0 = \sqrt{\frac{\Delta_r}{\Sigma}} (dt - a \sin^2 \theta d\phi - b \cos^2 \theta d\psi), \quad (2.46a)$$

$$e^1 = \sqrt{\frac{\Sigma}{\Delta_r}} dr, \quad (2.46b)$$

$$e^2 = \sqrt{\Sigma} d\theta, \quad (2.46c)$$

$$e^3 = \frac{\sin \theta \cos \theta}{p\sqrt{\Sigma}} [(b^2 - a^2)dt + (r^2 + a^2)ad\phi - (r^2 + b^2)bd\psi], \quad (2.46d)$$

$$e^5 = \frac{1}{rp} [-abdt + (r^2 + a^2)b \sin^2 \theta d\phi + (r^2 + b^2)a \cos^2 \theta d\psi] \quad (2.46e)$$

と与えると, 計量テンソル (2.45) の許す Killing-Yano 3-形式は

$$f = -p e^0 \wedge e^1 \wedge e^5 + r e^2 \wedge e^3 \wedge e^5 \quad (2.47)$$

の形をとる.

2.3 重力摂動と Symmetry Operators

ある場の方程式について, ある演算子が symmetry operator であるとは, ある解にその演算子を作用させたとき, これによって得た像が同様に場の方程式の解であることをいう. 場の方程式における symmetry operator という概念は, 時空のもつ対称性と密接に関連している. 本稿では線形計量摂動に対する symmetry operator に注目する. より具体的には Killing-Yano 3-形式から構成される 1 階 symmetry operator を扱う. 本節の内容は, 文献 [28] に準ずる.

2.3.1 重力摂動に対する一階 Symmetry Operators

重力摂動の方程式

本稿では, 宇宙定数を Λ として, Einstein 方程式 $G_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = 0$ を満足する時空の線形計量摂動 h を考える. 2 階演算子 \mathcal{M} を

$$\begin{aligned} \mathcal{M}h &= R_{\lambda(\beta} h^{\lambda}_{\delta)} - R_{\alpha\beta\gamma\delta} h^{\alpha\gamma} + \nabla_{(\beta} \nabla^{\alpha} h_{\delta)\alpha} - \frac{1}{2} (\nabla_{\beta} \nabla_{\delta} h - \nabla \cdot \nabla h_{\beta\delta}) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\nabla_{\alpha} \nabla_{\gamma} h^{\alpha\gamma} - \nabla \cdot \nabla h - h^{\beta\delta} R_{\beta\delta}) g_{\beta\delta} - \frac{1}{2} (R - 2\Lambda) h_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.48)$$

として, 線形計量摂動 $h_{\alpha\beta}$ は

$$\mathcal{M}h = 0 \quad (2.49)$$

に従う. 導出は付録 A.3 に載せる.

重力摂動に対する一階 Symmetry Operators

線形計量摂動 h の従う方程式の演算子 \mathcal{M} に対し、演算子の組 $(\mathcal{Q}, \mathcal{S})$ が symmetry operator であるとは、 $(\mathcal{Q}, \mathcal{S})$ が

$$\mathcal{Q}_{\lambda\rho}{}^{\kappa\tau} \mathcal{M}_{\kappa\tau}{}^{\mu\nu} - \mathcal{M}_{\lambda\rho}{}^{\kappa\tau} \mathcal{S}_{\kappa\tau}{}^{\mu\nu} = 0 \quad (2.50)$$

を満足することをいう。上式を線形計量摂動 h に対して作用し、 h の従う方程式 (2.49) を適用すると、

$$\mathcal{M}_{\lambda\rho}{}^{\kappa\tau} \mathcal{S}_{\kappa\tau}{}^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = \mathcal{Q}_{\lambda\rho}{}^{\kappa\tau} \mathcal{M}_{\kappa\tau}{}^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = 0 \quad (2.51)$$

となることから、 $\mathcal{S}h$ は h と同様に線形計量摂動である。つまり、線形計量摂動のとある解に symmetry operator を作用させることによって、別の解を得る可能性がある。

2019 年に、線形計量摂動に対する 1 階の symmetry operator に関する定理が見出された。ここで、symmetry operator が 1 階であるとは、symmetry operator の各項が高々共変微分 ∇ を一つ含むことである。

定理 1 (1 階 symmetry operators の一般形 [28]). *Einstein* 方程式 $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$ を満足する任意の $D \geq 4$ 次元の時空に対する線形計量摂動 $h_{\lambda\rho}$ について、1 階 symmetry operators $(\mathcal{Q}_{\lambda\rho}{}^{\kappa\tau}, \mathcal{S}_{\kappa\tau}{}^{\mu\nu})$ として許されるものは

$$\mathcal{Q}_{\lambda\rho}{}^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = ch_{\lambda\rho} + 2f_{(\lambda}{}^{\kappa\tau} \nabla_{|\kappa|} h_{\rho)\tau} + F_{\lambda\rho}{}^{\mu} \nabla^{\nu} h_{\mu\nu} + \left(\mathcal{L}_K h_{\lambda\rho} + \frac{2\nabla_{\kappa} K^{\kappa}}{D} h_{\lambda\rho} \right), \quad (2.52a)$$

$$\mathcal{S}_{\lambda\rho}{}^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = ch_{\lambda\rho} + 2f_{(\lambda}{}^{\kappa\tau} \nabla_{|\kappa|} h_{\rho)\tau} + \nabla_{(\lambda} [H^{\mu\nu}{}_{\rho)} h_{\mu\nu}] + \mathcal{L}_K h_{\lambda\rho} \quad (2.52b)$$

の形に限られる。ここで、 c は定数、 $f_{\mu\nu\lambda}$ は Killing-Yano 3-形式、 $H^{\mu\nu}{}_{\lambda} = H^{\nu\mu}{}_{\lambda}$ 及び $F_{\lambda\rho}{}^{\mu} = F_{\rho\lambda}{}^{\mu}$ は任意のテンソル場、及び K^{μ} は homothetic ベクトル場である。¹特に、 $\Lambda \neq 0$ のとき、 K^{μ} は Killing ベクトルに限られる。

定数 c は線形重力摂動を考えていることに起因する振幅の定数倍についての任意性を表し、テンソル場 $H^{\mu\nu}{}_{\lambda}$ 及び $F_{\lambda\rho}{}^{\mu}$ は座標変換に伴うゲージ自由度を表す。これらは時空の性質に依存せず常に存在するため、言うなれば自明な symmetry operator である。一方、homothetic ベクトルおよび Killing-Yano 3-形式によって提供される 1 階 symmetry operator については、その存在は時空の性質に依存する。

Killing-Yano 3-形式

本稿では、式 (2.52a) 及び (2.52b) の右辺第 2 項に含まれている、Killing-Yano 3-形式によって構成される symmetry operator に注目する。つまり、

$$\mathcal{Q}_{\lambda\rho}{}^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = \mathcal{S}_{\lambda\rho}{}^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = 2f_{(\lambda}{}^{\kappa\tau} \nabla_{|\kappa|} h_{\rho)\tau} \quad (2.53)$$

を考える。ここで、式 (2.50) は

$$[\mathcal{S}, \mathcal{M}]_{\lambda\rho} = \mathcal{S}_{\lambda\rho}{}^{\kappa\tau} \mathcal{M}_{\kappa\tau}{}^{\mu\nu} - \mathcal{M}_{\lambda\rho}{}^{\kappa\tau} \mathcal{S}_{\kappa\tau}{}^{\mu\nu} = 0 \quad (2.54)$$

¹homothetic ベクトルとは、その発散が定数であるような共形 Killing ベクトルである。

に帰着する.

奇数次元の Kerr-NUT-(A)dS 時空上に Killing-Yano 3-形式が存在することは第 2.2.2 節において既に述べたが, その中でも最も単純なモデルであり解析が可能な系として, 5 次元 Schwarzschild 時空および等角運動量を持つ 5 次元 Myers-Perry ブラックホール時空を考える. これらの時空を背景時空において Killing-Yano 3-形式から構成される 1 階の symmetry operator による線形計量摂動による解の変換を詳細に調べる. 第 3 章において 5 次元 Schwarzschild 時空における symmetry operator の振る舞いを調べ, 第 4 章において等角運動量を持つ 5 次元 Myers-Perry 時空における symmetry operator の振る舞いを調べる.²

便宜上, 2 階の対称テンソル $h_{\mu\nu}$ の像 $\mathcal{S}_{\lambda\rho}{}^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$ を, $f_{\lambda}{}^{\kappa\tau}$ に関連付けられた symmetry operator で

$$Z_{\lambda\rho} = 2f_{\lambda}{}^{\kappa\tau}\nabla_{|\kappa|}h_{\rho)\tau} \quad (2.55)$$

と表すことにする. $h_{\mu\nu}$ は, 場の方程式 $\mathcal{M}_{\kappa\phi}{}^{\mu\nu}h_{\mu\nu} = 0$ を課すと宣言しない限り, 任意の 2 階対称テンソル場であり続ける.

²次元 $D = 5$ は, 次の理由で Schwarzschild 極限をとるのが特殊である. ここで考える $(2n + 1)$ 次元 Kerr-NUT-(A)dS 時空の Killing-Yano 3-形式は, $2(n - 1)$ -形式 $\wedge^{(n-1)}\mathfrak{h}$ の Hodge 双対であり, ここで \mathfrak{h} は閉共形 Killing-Yano 2-形式である. Schwarzschild 極限では, $n \geq 3$, つまり $D = 7, 9, \dots$ で \mathfrak{h} の楔積が消滅し, 同時に Killing-Yano 3-形式も消滅する. 一方, $n = 2$, つまり $D = 5$ の場合には, $\wedge^{(n-1)}\mathfrak{h}$ と Killing-Yano 3-形式はどちらも存続し, 3 章で示すように, Killing-Yano 3-形式は S^3 の体積形式として振る舞う.

第3章 5次元 Schwarzschild 時空における解析

5次元 Schwarzschild 時空における線形計量摂動に対して Killing-Yano 3-形式から構成される symmetry operator を作用させ、具体的にどのような解の変換を与えるかを調べる。5次元 Schwarzschild 時空は、3次元単位球面 S^3 を部分空間とするワープ積の空間とみなされる。本節では、文献 [31] に従ってまず3次元球面 S^3 上のスカラー、ベクトル、テンソルハーモニクス観点から計量摂動を分解し、次に、文献 [32,33] に従って、ハーモニクスのさらに詳細なクラスを導入する。最後に、上述のように定義したモード分解に対して、symmetry operator を作用させる。本章の内容は、我々の結果 [30] の第3節に準ずる。

3.1 計量テンソル及び Killing-Yano 3-形式

Boyer-Lindquist 座標系

5次元 Schwarzschild 時空の計量テンソル g は、標準的な座標系 $(t, r, \theta, \phi, \psi)$ において

$$g = -F(r)dt^2 + F(r)^{-1}dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 + \cos^2 \theta d\psi^2) \quad (3.1)$$

と与えられる。ここで、

$$F(r) = 1 - \frac{2M}{r^2} \quad (3.2)$$

である。5次元 Schwarzschild 時空における Killing-Yano 3-形式は

$$f = r^4 \sin \theta \cos \theta d\theta \wedge d\phi \wedge d\psi \quad (3.3)$$

によって与えられる。上で示した計量テンソル及び Killing-Yano 3-形式は、式 (2.45) 及び (2.47) に対して無回転極限 $a = b \rightarrow 0$ をとることによって得られる。

3次元単位球面 S^3 の Hopf 座標系 (θ, ϕ, ψ) における計量テンソルの表式は

$$\gamma = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 + \cos^2 \theta d\psi^2 \quad (3.4)$$

と与えられ、5次元 Schwarzschild 時空の計量テンソル (3.1) の角度方向の項は γ に比例している。また、3次元単位球面 S^3 の体積形式 ω_γ は Hopf 座標系 (θ, ϕ, ψ) において

$$\omega_\gamma = \sin \theta \cos \theta d\theta \wedge d\phi \wedge d\psi \quad (3.5)$$

と表されることから，式 (3.3) は

$$f = r^4 \omega_\gamma \quad (3.6)$$

と書き直される．則ち，5次元 Schwarzschild 時空上の Killing-Yano 3-形式 f は3次元単位球面 S^3 の体積形式に比例する．

ワープ積の空間

ある時空がワープ積の空間であるとは，2種類の座標の組を y^a 及び z^i として，ある座標系 (y^a, z^i) において計量テンソルが

$$g = g_{ab}(y)dy^a dy^b + r^2(y)\gamma_{ij}(z)dz^i dz^j \quad (3.7)$$

と表されることをいう．座標系を $y^a = (t, r)$ および $z^i = (\theta, \phi, \psi)$ と表すと計量テンソル (3.1) は式 (3.7) の形に書き直されることから，5次元 Schwarzschild 時空はワープ積の空間であり， γ は3次元単位球面 S^3 の計量テンソルである．このワープ積としての記法の下で，付録 A.1 において言及しているように体積形式の座標表示は Levi-Civita テンソルであることから，Killing-Yano 3-形式 (3.3) は

$$f_{ijk} = r^4 \hat{\epsilon}_{ijk} \quad (3.8)$$

とかける．ここで， $\hat{\epsilon}_{ijk}$ は S^3 上の計量テンソル γ_{ij} に付随する Levi-Civita テンソルである．

z^i 方向（角度方向）について $g_{ij} = r^2 \gamma_{ij}$ 及び γ_{ij} の二種類の計量テンソルが定義されている．以降の計算において角度方向にテンソルの添字の上げ下げをする際には， γ_{ij} によって添字 i, j, \dots の上げ下げを行うことに取り決める．

3.2 モード分解

スカラー型，ベクトル型，テンソル型摂動

文献 [31] において，ワープ積の空間上の重力摂動（正確には任意の2階のテンソル場）を，スカラー型摂動，ベクトル型摂動及びテンソル型摂動へと分解する方法がまとめられている．文献 [31] は様々な時空の安定性を調べることを目的としており，結果として，例えば，任意次元の Schwarzschild 時空が任意の線形計量摂動の下で安定であることが示されている．

あるワープ積の空間について，座標 z^i によって定められる計量テンソル γ を持つ部分空間がコンパクトであるとき，このワープ積の空間上の任意の2階の対称テンソル場 $h_{\lambda\rho}$ は一意に

$$h_{ab} = h_{ab}, \quad (3.9a)$$

$$h_{ai} = \hat{D}_i h_a + h_{T ai}, \quad (3.9b)$$

$$h_{ij} = h_{T ij} + 2\hat{D}_{(i} h_{T j)} + h_L \gamma_{ij} + \hat{L}_{ij} h_T \quad (3.9c)$$

と分解することができる。ここで、スカラー型摂動 h_{ab}, h_a, h_L, h_T , ベクトル型摂動 $h_{T ai}, h_{T i}$ およびテンソル型摂動 $h_{T ij}$ へと分解することができる。ここで、式 (3.9c) が含む演算子 \hat{L}_{ij} は

$$\hat{L}_{ij} = \hat{D}_i \hat{D}_j - \frac{1}{3} \gamma_{ij} \hat{\Delta} \quad (3.10)$$

と定義されている。ベクトル型摂動 $h_{T ai}, h_{T j}$ 及びテンソル型摂動 $h_{T ij}$ についている添字 “ T ” は、これらが transverse-traceless である性質を表している。つまり、 $h_{T ai}, h_{T j}$ 及び $h_{T ij}$ は

$$\hat{D}^i h_{T ai} = 0, \quad \hat{D}^i h_{T i} = 0, \quad \hat{D}^j h_{T ij} = h_{T i}{}^i = 0 \quad (3.11)$$

に従う。5次元 Schwarzschild 時空について、 z^i 方向の部分空間は S^3 であるから、上の分解を適用できる。

スカラー、ベクトル、テンソルハーモニクス

上で文献 [31] に基づいて得られたスカラー型、ベクトル型およびテンソル型摂動を、さらに S^3 上のスカラー、ベクトル及びテンソルハーモニクスを用いて表すことにより、モード分解を完了する。

S^3 上のスカラーハーモニクス \mathbb{S} , ベクトルハーモニクス \mathbb{V} 及びテンソルハーモニクス \mathbb{T} はそれぞれ Laplace 演算子 $\hat{\Delta} := \hat{D}^i \hat{D}_i$ に対する固有スカラー、固有ベクトル及び固有テンソルであり、則ち、ハーモニクス $\mathbb{S}, \mathbb{V}_i, \mathbb{T}_{ij}$ はそれぞれ

$$(\hat{\Delta} + \lambda_s^2) \mathbb{S} = 0, \quad (\hat{\Delta} + \lambda_v^2) \mathbb{V}_i = 0, \quad (\hat{\Delta} + \lambda_t^2) \mathbb{T}_{ij} = 0 \quad (3.12)$$

を満足する。ここで、固有値 λ_s^2, λ_v^2 及び λ_t^2 は、 S^3 上のハーモニクスに対しては非零である。¹ ベクトルハーモニクス \mathbb{V}_i 及びテンソルハーモニクス \mathbb{T}_{ij} はそれぞれ

$$\hat{D}^i \mathbb{V}_i = 0, \quad \hat{D}^i \mathbb{T}_{ij} = \mathbb{T}^i{}_i = 0 \quad (3.13)$$

に従い、これはベクトル型及びテンソル型摂動の持つ性質 (3.11) と対応している。スカラーハーモニクス \mathbb{S} 及びベクトルハーモニクス \mathbb{V}_i を用いて、ベクトル \mathbb{S}_i 及びテンソル $\mathbb{S}_{ij}, \mathbb{V}_{ij}$ を

$$\mathbb{S}_i := -\frac{1}{\lambda_s} \hat{D}_i \mathbb{S}, \quad \mathbb{S}_{ij} := \frac{1}{\lambda_s^2} \hat{D}_i \hat{D}_j \mathbb{S} + \frac{1}{3} \gamma_{ij} \mathbb{S}, \quad \mathbb{V}_{ij} := -\frac{1}{\lambda_v} \hat{D}_{(i} \mathbb{V}_{j)} \quad (3.14)$$

のように定義する。ここで、 \mathbb{S}_{ij} 及び \mathbb{V}_{ij} は

$$\mathbb{S}^i{}_i = 0, \quad \mathbb{V}^i{}_i = 0 \quad (3.15)$$

¹固有値の非零性は、スカラー型摂動については非負整数 k を用いて $\lambda_s^2 = k(k+2)$ と得られる。ここで $k=0$ に対して $\lambda_s^2 = 0$ となるが、このとき $\mathbb{S} = \text{const.}$ となることからこれを議論から除外する。ベクトル型及びテンソル型摂動については、付録 D.1 内の式 (D.2) 及び (D.9) において λ_v^2 及び λ_t^2 の値が具体的に示されており、これより λ_v^2 及び λ_t^2 は非零であることが確認される。

を満足する。即ち \mathbb{S}_{ij} 及び \mathbb{V}_{ij} はトレースレスである。スカラー型、ベクトル型、及びテンソル型摂動は、ハーモニクス \mathbb{S} , \mathbb{V}_i 及び \mathbb{T}_{ij} によって

$$h_{ab} = f_{ab}(y)\mathbb{S}, \quad h_a = -\frac{r}{\lambda_s} f_a^s(y)\mathbb{S}, \quad h_L = 2r^2 H_L(y)\mathbb{S}, \quad h_T = \frac{2r^2}{\lambda_s^2} H_T^s(y)\mathbb{S}, \quad (3.16a)$$

$$h_{T\ ai} = r f_a^v(y)\mathbb{V}_i, \quad h_{T\ i} = -\frac{r^2}{\lambda_v} H_T^v(y)\mathbb{V}_i, \quad (3.16b)$$

$$h_{T\ ij} = 2r^2 H_T^t(y)\mathbb{T}_{ij} \quad (3.16c)$$

と与えられる。

なお、時空の安定性を解析する際には、 $(f_{ab}, f_a^s, H_L, H_T^s)$, (f_a^v, H_T^v) または H_T^t を用いて、マスター方程式と呼ばれる Schrödinger 型方程式に従うマスター変数が構成され、これを解くことに帰着する。一方、本章における symmetry operator の解析においては、その作用が早々に 3 次元球面 S^3 上のハーモニクスに対する変換へと帰着するので、本章における解析においては動径 r 方向の微分方程式であるマスター方程式には一切言及することなく、symmetry operator の具体的な変換が解析される。つまり、5 次元 Schwarzschild 時空における symmetry operator に関しては、 h に対して場の方程式を課さず、即ち h は時空上の任意の 2 階対称テンソル場であるに留まる。

ベクトルハーモニクス及びテンソルハーモニクスの詳細なクラス

S^3 上のベクトルハーモニクス \mathbb{V}_i 及びテンソルハーモニクス \mathbb{T}_{ij} をより詳細なクラスに分割することが可能であり、各々のクラスはスカラーハーモニクス \mathbb{S} 及びその導関数から決定される [32, 33].

スカラーハーモニクス \mathbb{S} (球面調和関数) は、hyperspherical 座標系 $(\chi, \vartheta, \varphi)$ において $\underline{k}, \underline{\ell} \geq 0, \underline{k} \geq \underline{\ell} \geq |\underline{m}|$ を満足する整数 $\underline{k}, \underline{\ell}, \underline{m}$ によりラベル付けされており、

$$\mathbb{S}^{k\ell m} = H^{k\ell}(\chi) Y^{\ell m}(\vartheta, \varphi) \quad (3.17)$$

で与える変数分離形に対して

$$H^{k\ell} = \sin^{\underline{\ell}} \chi C^{k\ell}(\chi), \quad Y^{\ell m} = e^{-im\varphi} \Theta^{\ell m}(\vartheta) \quad (3.18)$$

によって関数 $C^{k\ell}(\chi)$ 及び $\Theta^{\ell m}(\vartheta)$ を定義すると、これらはそれぞれ常微分方程式

$$\left[(1 - \cos^2 \chi) \frac{d^2}{d(\cos \chi)^2} - (2\underline{\ell} + 3) \cos \chi \frac{d}{d(\cos \chi)} + \underline{k}(\underline{k} + 2) - \underline{\ell}(\underline{\ell} + 2) \right] C^{k\ell} = 0, \quad (3.19)$$

$$\left[\sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \right) + \underline{\ell}(\underline{\ell} + 1) \sin^2 \vartheta - \underline{m}^2 \right] \Theta^{\ell m} = 0 \quad (3.20)$$

を満足する。付録 B.1 に hyperspherical 座標系における球面調和関数の変数分離を載せた。簡単のため、球面調和関数に関する添字 $\underline{k}, \underline{\ell}$ 及び \underline{m} は必要ない限り省略する。

文献 [32, 33] を参照すると, 各ラベル $(\underline{k}, \underline{\ell}, \underline{m})$ に対しベクトルハーモニクスの 3 クラスが

$$\mathbb{V}_i^{(0)} := \frac{1}{\sqrt{\underline{k}(\underline{k}+2)}} \hat{D}_i \mathbb{S}, \quad (3.21a)$$

$$\mathbb{V}_i^{(1)} := \frac{1}{\sqrt{\underline{\ell}(\underline{\ell}+1)}} \hat{\varepsilon}_i{}^{jk} \hat{D}_j \mathbb{S} \hat{D}_k \cos \chi, \quad (3.21b)$$

$$\mathbb{V}_i^{(2)} := \frac{1}{\underline{k}+1} \hat{\varepsilon}_i{}^{jk} \hat{D}_j \mathbb{V}_k^{(1)} \quad (3.21c)$$

テンソルハーモニクスの 6 クラスが

$$\mathbb{T}_{ij}^{(0)} := \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbb{S} \gamma_{ij}, \quad (3.22a)$$

$$\mathbb{T}_{ij}^{(1)} := \frac{2}{\sqrt{2(\underline{k}-1)(\underline{k}+3)}} \hat{D}_{(i} \mathbb{V}_{j)}^{(1)}, \quad (3.22b)$$

$$\mathbb{T}_{ij}^{(2)} := \frac{2}{\sqrt{2(\underline{k}-1)(\underline{k}+3)}} \hat{D}_{(i} \mathbb{V}_{j)}^{(2)}, \quad (3.22c)$$

$$\mathbb{T}_{ij}^{(3)} := \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2(\underline{k}-1)(\underline{k}+3)}} \left(\hat{D}_i \mathbb{V}_j^{(0)} + \frac{\sqrt{\underline{k}(\underline{k}+2)}}{\sqrt{3}} \mathbb{T}_{ij}^{(0)} \right), \quad (3.22d)$$

$$\mathbb{T}_{ij}^{(4)} := \sqrt{\frac{(\underline{\ell}-1)(\underline{\ell}+2)}{2\underline{k}(\underline{k}+2)}} \left\{ E^{k\ell} \hat{D}_{(i} F_{j)}^{\ell m} + 2 \csc^2 \chi \left[\frac{\underline{\ell}-1}{2} \cos \chi E^{k\ell} + C^{k\ell} \right] F_{(i}^{k\ell} \hat{D}_{j)} \cos \chi \right\}, \quad (3.22e)$$

$$\mathbb{T}_{ij}^{(5)} := \frac{2}{2(\underline{k}+1)} \hat{\varepsilon}_{(i}{}^{kl} \hat{D}_{|k|} \mathbb{T}_{j)l}^{(4)} \quad (3.22f)$$

と与えられる. ここで,

$$E^{k\ell} := -\frac{2 \csc^{\underline{\ell}+1} \chi}{(\underline{\ell}-1)(\underline{\ell}+2)} \frac{d}{d\chi} (\sin^2 \chi H^{k\ell}), \quad F_a^{k\ell} := \frac{1}{\sqrt{\underline{\ell}(\underline{\ell}+1)}} \hat{\varepsilon}_a{}^{bc} \hat{D}_b (\sin^{\underline{\ell}} \chi Y^{\ell m}) \hat{D}_c \cos \chi \quad (3.23)$$

である. 式 (3.14) において定義したベクトル \mathbb{S}_i とテンソル \mathbb{S}_{ij} と \mathbb{V}_{ij} は, 上で導入したベクトルハーモニクス及びテンソルハーモニクスの特定のクラスに從属する. これらのベクトルハーモニクスの 3 クラス及びテンソルハーモニクスの 6 クラスは正規直交性

$$\int \omega_\gamma \mathbb{V}^{(A)k\ell m} \cdot \mathbb{V}^{(B)k'\ell'm'} = \int \omega_\gamma \mathbb{T}^{(A)k\ell m} : \mathbb{T}^{(B)k'\ell'm'} = \delta^{AB} \delta^{kk'} \delta^{\ell\ell'} \delta^{mm'} \quad (3.24)$$

を満足する. ここで A, B はハーモニクスのクラスを表すラベルであり, また, 表記を簡単にするために点積 $\mathbb{V} \cdot \mathbb{V} = \mathbb{V}^i \mathbb{V}_i$ 及び二重点積 $\mathbb{T} : \mathbb{T} = \mathbb{T}^{ij} \mathbb{T}_{ji}$ の記法を導入した. 式 (3.21a)–(3.22f) は, Laplace 演算子 $\hat{\Delta} = \hat{D}^i \hat{D}_i$ に対する固有ベクトル及び固有テンソルであるが, その固有値は付録 D.1 内にある式 (D.2) および (D.9) に示されている.

3.3 Symmetry Operator の解析

5次元 Schwarzschild 時空上の 2 階対称テンソル場に Killing-Yano 3-形式を作用させ, その詳細を調べる. Schwarzschild 時空上の Killing-Yano 3-形式の表式 (3.7) を式 (2.55)

に代入し, γ_{ij} に関連付けられた共変微分 \hat{D}_i を用いて ∇ を書き換えると, ワープ積空間の表記のもとで

$$Z_{ab} = 0, \quad (3.25a)$$

$$Z_{ai} = \hat{\varepsilon}_i^{kl} \hat{D}_k h_{al}, \quad (3.25b)$$

$$Z_{ij} = 2\hat{\varepsilon}_{(i}^{kl} \hat{D}_{|k|} h_{j)l} \quad (3.25c)$$

を得る. ここで, \hat{d} 及び $\hat{\star}$ をそれぞれ (S^3, γ) 上の外微分及び Hodge 演算子として, (a, i) 成分の変換 (3.25b) において symmetry operator はまさに演算子 $\hat{\star}\hat{d}$ として作用している.

Symmetry Operator によるスカラー型, ベクトル型, テンソル型摂動の変換

文献 [31] においてまとめられているモード分解の方法を適用する. 第 3.2 節において説明したように, 任意の 2 階の対称テンソル場 $h_{\lambda\rho}$ は一意に式 (3.9) のように分解され, また, ベクトル型摂動及びテンソル型摂動は式 (3.11) において示されている性質を満足する. 同様に, symmetry operator を作用させた像 $Z_{\lambda\rho}$ のスカラー型, ベクトル型及びテンソル型摂動への分解を

$$Z_{ai} = \hat{D}_i Z_a + Z_{T ai}, \quad (3.26a)$$

$$Z_{ij} = Z_{T ij} + 2\hat{D}_{(i} Z_{T j)} + Z_L \gamma_{ij} + \hat{L}_{ij} Z_T \quad (3.26b)$$

と得る. ここで, ベクトル型摂動 $Z_{T ai}$, $Z_{T j}$ 及びテンソル型摂動 $Z_{T ij}$ は transverse であり, 即ち

$$\hat{D}^i Z_{T ai} = 0, \quad \hat{D}^i Z_{T i} = 0, \quad \hat{D}^j Z_{T ij} = Z_T{}^i{}_i = 0 \quad (3.27)$$

を満足する.

式 (3.25b) 及び (3.25c) に基づいた別の $Z_{\lambda\rho}$ の分解を与えよう. $h_{\lambda\rho}$ のスカラー型, ベクトル型及びテンソル型摂動のそれぞれの項の写像の和として, $Z_{\lambda\rho}$ は形式的に

$$Z_{ai} = Z_{ai}[h_a] + Z_{ai}[h_{T ai}], \quad (3.28a)$$

$$Z_{ij} = Z_{ij}[h_{T ij}] + Z_{ij}[h_{T i}] + Z_{ij}[h_L] + Z_{ij}[h_T] \quad (3.28b)$$

と表される.

付録 C.1 において, $Z_{\lambda\rho}$ の 2 種類の表現, つまり式 (3.26) 及び (3.28) をそれぞれと比べている. 結論として, まず, 全てのスカラー型摂動は寄与しない. つまり,

$$Z_a = 0, \quad Z_L = 0, \quad Z_T = 0, \quad (3.29a)$$

$$Z_{ai}[h_a] = 0, \quad Z_{ij}[h_L] = 0, \quad Z_{ij}[h_T] = 0 \quad (3.29b)$$

である. そして, 次に, ベクトル型及びテンソル型摂動からの寄与に対して, 次のような自然な関係,

$$Z_{T ai} = \hat{\varepsilon}_i^{kl} \hat{D}_k h_{T al}, \quad Z_{T j} = \hat{\varepsilon}_j^{kl} \hat{D}_k h_{T l}, \quad Z_{T ij} = 2\hat{\varepsilon}_{(i}^{kl} \hat{D}_{|k|} h_{T j)l} \quad (3.30)$$

を得る. 詳細は付録 C.1 を参照されたし.

Symmetry Operator によるスカラー, ベクトル, テンソルハーモニクスの変換

式 (3.16b) 及び (3.16c) を式 (3.30) へと代入すると, ベクトルハーモニクス \mathbb{V}_i 及びテンソルハーモニクス \mathbb{T}_{ij} に symmetry operator を作用させた像 $Z_{\mu\nu}$ を

$$Z_{T\ ai} = r f_a^v \hat{\varepsilon}_i^{kl} \hat{D}_k \mathbb{V}_l, \quad Z_{T\ j} = -\frac{1}{\lambda_v^2} r^2 H_T^v \hat{\varepsilon}_j^{kl} \hat{D}_k \mathbb{V}_l, \quad Z_{T\ ij} = 2r^2 H_T^t \cdot 2\hat{\varepsilon}_{(i}^{kl} \hat{D}_{|k|} \mathbb{T}_{j)l} \quad (3.31)$$

のように得る. また, 既に述べたように, スカラーハーモニクス \mathbb{S} は symmetry operator によって写像に寄与する余地がない. 式 (3.31) より, symmetry operator はベクトルハーモニクス \mathbb{V}_i を $\hat{\varepsilon}_i^{kl} \hat{D}_k \mathbb{V}_l$ に移し, テンソルハーモニクス \mathbb{T}_{ij} を $2\hat{\varepsilon}_{(i}^{kl} \hat{D}_{|k|} \mathbb{T}_{j)l}$ に移す. 以降, symmetry operator が誘導する S^3 上のベクトル及びテンソルに対する写像を統一的に $\hat{\mathcal{S}}$ と表す. $\hat{\mathcal{S}}$ を \mathbb{V}_i 及び \mathbb{T}_{ij} のクラスの定義 (3.21a)–(3.22f) と比べると, symmetry operator による変換は

$$\hat{\mathcal{S}} \mathbb{V}^{(0)} = 0, \quad \hat{\mathcal{S}} \begin{bmatrix} \mathbb{V}^{(1)} \\ \mathbb{V}^{(2)} \end{bmatrix} = (\underline{k} + 1) \begin{bmatrix} \mathbb{V}^{(2)} \\ \mathbb{V}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad (3.32a)$$

$$\hat{\mathcal{S}} \mathbb{T}^{(0)} = 0, \quad \hat{\mathcal{S}} \begin{bmatrix} \mathbb{T}^{(1)} \\ \mathbb{T}^{(2)} \end{bmatrix} = (\underline{k} + 1) \begin{bmatrix} \mathbb{T}^{(2)} \\ \mathbb{T}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathcal{S}} \mathbb{T}^{(3)} = 0, \quad \hat{\mathcal{S}} \begin{bmatrix} \mathbb{T}^{(4)} \\ \mathbb{T}^{(5)} \end{bmatrix} = 2(\underline{k} + 1) \begin{bmatrix} \mathbb{T}^{(5)} \\ \mathbb{T}^{(4)} \end{bmatrix} \quad (3.32b)$$

に帰着する. まとめると, $\hat{\mathcal{S}}$ はベクトルハーモニクス $\mathbb{V}^{(0)}$, テンソルハーモニクス $\mathbb{T}^{(0)}$ をゼロに移し, また, $\hat{\mathcal{S}}$ はベクトルハーモニクスの組 $(\mathbb{V}^{(1)}, \mathbb{V}^{(2)})$ 及びテンソルハーモニクスの組 $(\mathbb{T}^{(1)}, \mathbb{T}^{(2)})$, $(\mathbb{T}^{(4)}, \mathbb{T}^{(5)})$ を互いに移り変える写像である.

式 (3.32) より,

$$\hat{\mathcal{S}} \mathbb{V}^{(0)} = 0, \quad \hat{\mathcal{S}} \mathbb{T}^{(0)} = 0, \quad \hat{\mathcal{S}} \mathbb{T}^{(3)} = 0, \quad \hat{\mathcal{S}} [\mathbb{V}^{(1)} \pm \mathbb{V}^{(2)}] = \pm(\underline{k} + 1) [\mathbb{V}^{(1)} \pm \mathbb{V}^{(2)}], \quad (3.33a)$$

$$\hat{\mathcal{S}} [\mathbb{T}^{(1)} \pm \mathbb{T}^{(2)}] = \pm(\underline{k} + 1) [\mathbb{T}^{(1)} \pm \mathbb{T}^{(2)}], \quad \hat{\mathcal{S}} [\mathbb{T}^{(4)} \pm \mathbb{T}^{(5)}] = \pm 2(\underline{k} + 1) [\mathbb{T}^{(4)} \pm \mathbb{T}^{(5)}] \quad (3.33b)$$

であるため, 則ち Laplace 演算子 $\hat{\Delta}$ 及び symmetry operator $\hat{\mathcal{S}}$ の両方に対して固有ベクトルまたは固有テンソルであるような正規直交系を得た. 結局, このように定義された各モードに対して, 固有値 0 を含めて symmetry operator は定数倍を与える程度である.

ラベル $\underline{k} = 1$ を持つ $\mathbb{V}^{(1)} \pm \mathbb{V}^{(2)}$ が S^3 上の 6 種類の独立した Killing ベクトル場に対応していることを付録 D.1 において示した. このことは, $\hat{\Delta}$ 及び $\hat{\mathcal{S}}$ の両方に対して固有となるモード分解を与えるハーモニクスは Killing ベクトル場と強い関連があることを示唆する. より詳細には, 式 (3.33) において与えられているハーモニクスの線形結合は $SU(2) \times SU(2)$ を尊重した座標系における表現と関連がある. 次章における等角運動量 5次元 Myers-Perry 時空における解析において $SU(2) \times SU(2)$ を尊重した座標系においてモード分解を行っており, また, 付録 D ではその Schwarzschild 極限を議論している.

結論として, 5次元 Schwarzschild 時空において, Killing-Yano 3-form は, 3次元球面 S^3 上の各ハーモニクスに対する固有演算子であり, 恒等変換とみなせる. つまり, symmetry operator による重力摂動への作用は, モード間の梯子演算子となっていたり, 重力摂動の境界条件を変更したりするような, 非自明な変換をもたらさない.

第4章 有限等角運動量を持つ 5 次元 Myers-Perry 時空における解析

有限等角運動量を持つ 5 次元 Myers-Perry 時空における線形計量摂動に対して Killing-Yano 3-形式から構成される symmetry operator を作用させ、具体的にどのような解の変換を与えるかを解析する。この時空の対称性は、Schwarzschild 時空の球対称性 $SU(2) \times SU(2)$ から $SU(2) \times U(1)$ へと減少しているため、Schwarzschild の場合と同じモード分解の方法ではなく、文献 [34–36] において言及されている別の方法を用いてモードの分解を実行する。加えて、文献 [36] において、重力摂動の幾つかのモードの従う方程式およびマスター変数の関数形が既に導出されている。文献 [36] において扱われているモードに symmetry operator を作用させ、解の変換の詳細を見る。本章の内容は、我々の結果 [30] の第 4 節に準ずる。

4.1 計量テンソル及び Killing-Yano 3-形式

Boyer-Lindquist 座標系における表式

等角運動量を持つ 5 次元 Myers-Perry 時空の計量テンソル、正規直交基底及び Killing-Yano 3-形式は、第 2.2.3 節において既に導出した Boyer-Lindquist 座標系 $(t, r, \theta, \phi, \psi)$ における表式に対して、 $a = b$ を課したものである。結果を以下に示す。計量テンソルは

$$g = -dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta_r} dr^2 + \Sigma \left\{ d\theta^2 + \sin^2 \theta \cos^2 \theta (d\phi - d\psi)^2 + (\sin^2 \theta d\phi + \cos^2 \theta d\psi)^2 \right\} + \frac{2M}{\Sigma} \left\{ dt - a(\sin^2 \theta d\phi + \cos^2 \theta d\psi) \right\}^2 \quad (4.1)$$

となる。ここで、

$$\Delta_r = \frac{\Sigma^2}{r^2} - 2M, \quad \Sigma = r^2 + a^2 \quad (4.2)$$

である。直交標構は

$$e^0 = \sqrt{\frac{\Delta_r}{\Sigma}} \{dt - a(\sin^2 \theta d\phi + \cos^2 \theta d\psi)\}, \quad (4.3a)$$

$$e^1 = \sqrt{\frac{\Sigma}{\Delta_r}} dr, \quad (4.3b)$$

$$e^2 = \sqrt{\Sigma} d\theta, \quad (4.3c)$$

$$e^3 = \sqrt{\Sigma} \sin \theta \cos \theta (d\phi - d\psi), \quad (4.3d)$$

$$e^5 = \frac{1}{r} \{-adt + \Sigma(\sin^2 \theta d\phi + \cos^2 \theta d\psi)\} \quad (4.3e)$$

となる。Killing-Yano 3-形式は

$$f = -a e^0 \wedge e^1 \wedge e^5 + r e^2 \wedge e^3 \wedge e^5 \quad (4.4)$$

となる。

$SU(2) \times SU(2)$ と相性の良い座標系

式 (4.1)–(4.4) によって与えられている計量テンソル, 正規直交標構, Killing-Yano 3-形式の Boyer-Lindquist 座標系における表式を, 3次元単位球面 S^3 のもつ対称性である $SU(2) \times SU(2)$ と相性の良い別の座標系を用いて改めて表す。座標変換の詳細は付録 B に載せた。角度方向の座標系の座標変換 $\tilde{\theta} = 2\theta$, $\tilde{\phi} = \phi + \psi$, $\tilde{\psi} = -\phi + \psi$ を施し, さらに, $i \in \{1, 2, 3\}$ として, コベクトル場 σ^i を

$$\sigma^1 := -\sin \tilde{\phi} d\tilde{\theta} + \cos \tilde{\phi} \sin \tilde{\theta} d\tilde{\psi}, \quad (4.5a)$$

$$\sigma^2 := -\cos \tilde{\phi} d\tilde{\theta} - \sin \tilde{\phi} \sin \tilde{\theta} d\tilde{\psi}, \quad (4.5b)$$

$$\sigma^3 := d\tilde{\phi} + \cos \tilde{\theta} d\tilde{\psi} \quad (4.5c)$$

によって導入する。 σ^i は, (S^3, γ) の等長変換群 $SO(3)$ の生成子 σ_i の双対であり,

$$d\sigma^i = -\frac{1}{2} \epsilon^i{}_{jk} \sigma^j \wedge \sigma^k \quad (4.6)$$

に従う。ここで, $\epsilon^i{}_{jk}$ は Levi-Civita 記号を表す。以降, 定数係数による煩わしさを取り除くために $\bar{\sigma}^i := \frac{1}{2} \sigma^i$ を導入すると, $\bar{\sigma}^i$ は

$$d\bar{\sigma}^i = -\epsilon^i{}_{jk} \bar{\sigma}^j \wedge \bar{\sigma}^k \quad (4.7)$$

に従う。ここでは, フレーム $(dt, d\tilde{r}, \bar{\sigma}^+, \bar{\sigma}^-, \bar{\sigma}^3)$ 上で有限角運動量の場合を扱う。ここで, $\bar{\sigma}^\pm := \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\sigma}^1 \pm i\bar{\sigma}^2)$ は, $i = \sqrt{-1}$ を虚数単位とするヌル基底であり, \tilde{r} は, $\tilde{r}^2 := \Sigma = r^2 + a^2$ で定義される代替動径座標である。式 (4.1)–(4.4) は

$$g = -dt^2 + \frac{d\tilde{r}^2}{G(\tilde{r})} + \tilde{r}^2 \{(\bar{\sigma}^+ \bar{\sigma}^- + \bar{\sigma}^- \bar{\sigma}^+) + (\bar{\sigma}^3)^2\} + \frac{\mu}{\tilde{r}^2} (dt - a\bar{\sigma}^3)^2, \quad (4.8)$$

$$e^0 = \sqrt{\frac{\tilde{r}^2 G(\tilde{r})}{\tilde{r}^2 - a^2}} \left(dt - a \bar{\sigma}^3 \right), \quad (4.9a)$$

$$e^1 = \frac{\tilde{r}}{\sqrt{\tilde{r}^2 G(\tilde{r})}} d\tilde{r}, \quad (4.9b)$$

$$e^2 = -\frac{i\tilde{r}}{\sqrt{2}} \left(-e^{i\tilde{\phi}} \bar{\sigma}^+ + e^{-i\tilde{\phi}} \bar{\sigma}^- \right), \quad (4.9c)$$

$$e^3 = -\frac{\tilde{r}}{\sqrt{2}} \left(e^{i\tilde{\phi}} \bar{\sigma}^+ + e^{-i\tilde{\phi}} \bar{\sigma}^- \right), \quad (4.9d)$$

$$e^5 = \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}^2 - a^2}} \left(-a dt + \tilde{r}^2 \bar{\sigma}^3 \right) \quad (4.9e)$$

及び

$$f = -a\tilde{r} dt \wedge d\tilde{r} \wedge \bar{\sigma}^3 - i\tilde{r}^2 \bar{\sigma}^+ \wedge \bar{\sigma}^- \wedge (-a dt + \tilde{r}^2 \bar{\sigma}^3) \quad (4.10)$$

のように書き換えられる．ここで，

$$G(\tilde{r}) := 1 - \frac{\mu}{\tilde{r}^2} + \frac{\mu a^2}{\tilde{r}^4}, \quad \mu := 2M \quad (4.11)$$

である．

後の計算に備えて，計量テンソル，Killing-Yano 3-形式，逆計量テンソル，接続係数の非零成分をまとめておく．計量テンソル (4.8) の非零成分は

$$g_{tt} = -1 + \frac{\mu}{\tilde{r}^2}, \quad g_{t3} = -\frac{\mu a}{\tilde{r}^2}, \quad g_{33} = \tilde{r}^2 + \frac{\mu a^2}{\tilde{r}^2}, \quad g_{\tilde{r}\tilde{r}} = G(\tilde{r})^{-1}, \quad g_{+-} = \tilde{r}^2 \quad (4.12)$$

である．ここで $g_{tt}g_{33} - g_{t3}^2 = -\tilde{r}^2 G(\tilde{r})$ であり，そして $\det g = \tilde{r}^6$ である．Killing-Yano 3-形式 (4.10) の非零成分は

$$f_{t\tilde{r}3} = -a\tilde{r}, \quad f_{+-t} = ia\tilde{r}^2, \quad f_{+-3} = -i\tilde{r}^4 \quad (4.13)$$

である．続いて，逆計量テンソル及び接続係数を示すが，そのためにまずベクトル標構を導入する． $\bar{\sigma}^i$ の双対であるベクトル場 $\bar{\sigma}_i = 2\sigma_i$ を定義すると，これは関係式 $\bar{\sigma}_i \cdot \bar{\sigma}^j = \delta_i^j$ ， $\bar{\sigma}_i \cdot dt = \bar{\sigma}_i \cdot d\tilde{r} = 0$ を満足する．また，ヌル基底 $\bar{\sigma}_\pm := \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\sigma}_1 \mp i\bar{\sigma}_2)$ を定義すると，これは $\bar{\sigma}^\pm$ と関係式 $\bar{\sigma}_+ \cdot \bar{\sigma}^+ = \bar{\sigma}_- \cdot \bar{\sigma}^- = 1$ 及び $\bar{\sigma}_+ \cdot \bar{\sigma}^- = 0$ を満足する．標構 $(\partial_t, \partial_r, \bar{\sigma}_+, \bar{\sigma}_-, \bar{\sigma}_3)$ において，逆計量テンソルは

$$g^{-1} = -(\partial_t)^2 + G(\tilde{r})(\partial_{\tilde{r}})^2 + \frac{1}{\tilde{r}^2} \left\{ (\bar{\sigma}_+ \bar{\sigma}_- + \bar{\sigma}_- \bar{\sigma}_+) + (\bar{\sigma}_3)^2 \right\} - \frac{\mu}{\tilde{r}^2 G(\tilde{r})} \left(\partial_t - \frac{a}{\tilde{r}^2} \bar{\sigma}_3 \right)^2 \quad (4.14)$$

と与えられる．よって， g^{-1} の非零成分は

$$g^{tt} = -1 - \frac{\mu}{\tilde{r}^2 G(\tilde{r})}, \quad g^{t3} = -\frac{\mu a}{\tilde{r}^4 G(\tilde{r})}, \quad g^{33} = \frac{1}{\tilde{r}^2} \left(1 - \frac{\mu a^2}{\tilde{r}^4 G(\tilde{r})} \right), \quad g^{rr} = G(\tilde{r}), \quad g^{+-} = \frac{1}{\tilde{r}^2} \quad (4.15)$$

である． $\bar{\sigma}^\mu$ はコベクトル標構 $(dt, d\tilde{r}, \bar{\sigma}^+, \bar{\sigma}^-, \bar{\sigma}^3)$ の基底を表すとし， $\bar{\sigma}_\mu$ はベクトル標構 $(\partial_t, \partial_r, \bar{\sigma}_+, \bar{\sigma}_-, \bar{\sigma}_3)$ の基底を表すとすると，接続係数は $\Gamma^\mu_{\nu\rho} := \bar{\sigma}^\mu \cdot \nabla_{\bar{\sigma}_\nu} \bar{\sigma}_\rho$ と定義される．

これを計算すると、非零成分は

$$\begin{aligned}
\Gamma^t_{t\tilde{r}} = \Gamma^t_{\tilde{r}t} &= \frac{\mu}{\tilde{r}^3 G(\tilde{r})}, & \Gamma^t_{\tilde{r}3} = \Gamma^t_{3\tilde{r}} &= -\frac{2\mu a}{\tilde{r}^3 G(\tilde{r})}, & \Gamma^{\tilde{r}}_{t\tilde{t}} &= \frac{\mu G(\tilde{r})}{\tilde{r}^3}, & \Gamma^{\tilde{r}}_{t3} = \Gamma^{\tilde{r}}_{3t} &= -\frac{\mu a G(\tilde{r})}{\tilde{r}^3}, \\
\Gamma^{\tilde{r}}_{\tilde{r}\tilde{r}} &= \frac{1}{\tilde{r}} - \left(1 - \frac{\mu a^2}{\tilde{r}^4}\right) \frac{1}{\tilde{r} G(\tilde{r})}, & \Gamma^{\tilde{r}}_{+-} = \Gamma^{\tilde{r}}_{-+} &= -\tilde{r} G(\tilde{r}), & \Gamma^{\tilde{r}}_{33} &= -\left(1 - \frac{\mu a^2}{\tilde{r}^4}\right) \tilde{r} G(\tilde{r}), \\
\Gamma^+_{t+} = \Gamma^+_{+t} &= -\Gamma^-_{t-} = -\Gamma^-_{-t} = \frac{i\mu a}{\tilde{r}^4}, & \Gamma^+_{\tilde{r}+} = \Gamma^+_{+\tilde{r}} = \Gamma^-_{\tilde{r}-} = \Gamma^-_{-\tilde{r}} &= \frac{1}{\tilde{r}}, \\
\Gamma^+_{+3} = -\Gamma^-_{-3} &= -i \left(1 + \frac{\mu a^2}{\tilde{r}^4}\right), & \Gamma^+_{3+} = -\Gamma^-_{3-} &= i \left(1 - \frac{\mu a^2}{\tilde{r}^4}\right), \\
\Gamma^3_{t\tilde{r}} = \Gamma^3_{\tilde{r}t} &= \frac{\mu a}{\tilde{r}^5 G(\tilde{r})}, & \Gamma^3_{\tilde{r}3} = \Gamma^3_{3\tilde{r}} &= \frac{1}{\tilde{r}} \left(1 - \frac{2\mu a^2}{\tilde{r}^4 G(\tilde{r})}\right), & \Gamma^3_{+-} = -\Gamma^3_{-+} &= i \quad (4.16)
\end{aligned}$$

である。

4.2 モード分解

よく知られているように、Hopf 座標 (θ, ϕ, ψ) における単位 3 球面 S^3 上の計量テンソル γ は、 $\gamma = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 + \cos^2 \theta d\psi^2$ で与えられ、現在のフレームでは、その表式は

$$\gamma = (\bar{\sigma}^1)^2 + (\bar{\sigma}^2)^2 + (\bar{\sigma}^3)^2 \quad (4.17)$$

である。時空の体積形式 ω_g は

$$\omega_g = \tilde{r}^3 dt \wedge d\tilde{r} \wedge \omega_\gamma \quad (4.18)$$

と得られる。ここで、 $\omega_\gamma := \bar{\sigma}^1 \wedge \bar{\sigma}^2 \wedge \bar{\sigma}^3$ は (S^3, γ) の体積形式である。このことから、時空上の積分を分離して角度方向だけを取り出すと、角度方向の積分は 3 次元球面 S^3 上の体積形式を用いて実行される。つまり、 S^3 上の二乗可積分関数空間における正規直交基底は、線形計量摂動を含む 2 階の対称テンソルのモードを構成する際に有用となることを意味している。

有限角運動量の場合の解析では、 S^3 に対する $\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$ 代数の観点から時空の線形計量摂動のモード分解を、参考文献 [35, 36] にしたがって与えてみよう。

Wigner \mathbb{D} 関数

まず、文献 [35, 36] において扱われている、Wigner \mathbb{D} 関数と呼ばれる関数空間の正規直交基底の特徴づけをレビューする。 (S^3, γ) 上の 6 種類の独立な Killing ベクトル場を

$$\sigma_1 = -\sin \tilde{\phi} \partial_{\tilde{\theta}} - \cot \tilde{\theta} \cos \tilde{\phi} \partial_{\tilde{\phi}} + \csc \tilde{\theta} \cos \tilde{\phi} \partial_{\tilde{\psi}}, \quad (4.19a)$$

$$\sigma_2 = -\cos \tilde{\phi} \partial_{\tilde{\theta}} + \cot \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi} \partial_{\tilde{\phi}} - \csc \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi} \partial_{\tilde{\psi}}, \quad (4.19b)$$

$$\sigma_3 = \partial_{\tilde{\phi}} \quad (4.19c)$$

及び

$$\xi_1 = -\sin \tilde{\psi} \partial_{\tilde{\theta}} + \csc \tilde{\theta} \cos \tilde{\psi} \partial_{\tilde{\phi}} - \cot \tilde{\theta} \cos \tilde{\psi} \partial_{\tilde{\psi}}, \quad (4.19d)$$

$$\xi_2 = -\cos \tilde{\psi} \partial_{\tilde{\theta}} - \csc \tilde{\theta} \sin \tilde{\psi} \partial_{\tilde{\phi}} + \cot \tilde{\theta} \sin \tilde{\psi} \partial_{\tilde{\psi}}, \quad (4.19e)$$

$$\xi_3 = \partial_{\tilde{\psi}} \quad (4.19f)$$

のように導入する．ここで， σ_i は σ^i の双対ベクトルであることを改めて書いておく． σ_3 及び ξ_i は時空上の Killing ベクトル場であるが¹， σ_1 及び σ_2 は時空の Killing ベクトル場でないことに注意．Lie 代数 $\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$ は

$$[W_i, W_j] = i\epsilon^{kij} W_k, \quad [L_i, L_j] = i\epsilon^{kij} L_k, \quad [W_i, L_j] = 0 \quad (4.20)$$

に従う $W_i := i\sigma_i$ 及び $L_i := i\xi_i$ によって構成される．また，Casimir 演算子 $W^2 := \sum_i W_i^2 = \sum_i L_i^2 =: L^2$ 及び梯子演算子 $W_{\pm} := W_1 \pm iW_2$ 及び $L_{\pm} := L_1 \pm iL_2$ を得る．Wigner \mathbb{D} 関数は W_3, L_3 及び $W^2 = L^2$ に対する複素数値固有関数であり，ラベル (J, K, M) によってラベルされており，¹

$$W_3 \mathbb{D}_{KM}^J = K \mathbb{D}_{KM}^J, \quad L_3 \mathbb{D}_{KM}^J = M \mathbb{D}_{KM}^J, \quad W^2 \mathbb{D}_{KM}^J = L^2 \mathbb{D}_{KM}^J = J(J+1) \mathbb{D}_{KM}^J, \quad (4.21)$$

$$W_{\pm} \mathbb{D}_{KM}^J = \sqrt{J(J+1) - K(K \pm 1)} \mathbb{D}_{K \pm 1, M}^J, \quad L_{\pm} \mathbb{D}_{KM}^J = \sqrt{J(J+1) - M(M \pm 1)} \mathbb{D}_{K, M \pm 1}^J$$

に従う．

標構の基底

W_i 及び L_i は基底 $\bar{\sigma}^3$ 及び $\bar{\sigma}^{\pm}$ にも作用することにも言及しておく． σ^i の座標表現 (4.5a)–(4.5c) 及び Killing ベクトル場 σ_i 及び ξ_i の座標表現 (4.19a)–(4.19f) より，

$$\mathcal{L}_{\sigma_i} \sigma^j = \epsilon_{ki}{}^j \sigma^k, \quad \mathcal{L}_{\xi_i} \sigma^j = 0 \quad (4.22)$$

を得る．ここで， \mathcal{L} は Lie 微分を表し， $\epsilon_{ki}{}^j$ は the Levi-Civita 記号を表す．これより，

$$\mathcal{L}_{W_3} \bar{\sigma}^{\pm} = \pm \bar{\sigma}^{\pm}, \quad \mathcal{L}_{W_{\mp}} \bar{\sigma}^{\pm} = \mp \sqrt{2} \bar{\sigma}^3, \quad \mathcal{L}_{W_{\mp}} \bar{\sigma}^3 = \pm \sqrt{2} \bar{\sigma}^{\mp}, \quad \mathcal{L}_{W_3} \bar{\sigma}^3 = \mathcal{L}_{W_{\pm}} \bar{\sigma}^{\pm} = 0,$$

$$\mathcal{L}_{L_3} \bar{\sigma}^3 = \mathcal{L}_{L_3} \bar{\sigma}^{\pm} = \mathcal{L}_{L_{\pm}} \bar{\sigma}^{\pm} = \mathcal{L}_{L_{\mp}} \bar{\sigma}^{\pm} = 0 \quad (4.23)$$

を得る．

¹Wigner \mathbb{D} 関数のもつラベル (J, K, M) がとりうる値は，以下の 3 つの条件を満たすべきである：

1. (J, K, M) は不等式 $J \geq 0$ 及び $2J \geq |K| + |M|$ を満足する．
2. (J, K, M) は全て整数であるか，または (J, K, M) は全て半整数である．
3. $2J$ 及び $|K| + |M|$ は共に偶数であるか，または共に奇数である．

2 階対称テンソル場のモード分解

2 階の対称テンソルのモード分解は, Wigner \mathbb{D} 関数と同様にラベル (J, K, M) を持つ. 便宜上, コベクトル基底を $\bar{\sigma}^t := dt$, $\bar{\sigma}^r := d\tilde{r}$ とともに $\bar{\sigma}^3, \bar{\sigma}^\pm$ と表記し, 指数 $A, B, \dots \in \{t, \tilde{r}, 3\}$ を導入する. テンソル h を次のように展開することができる. $h = \sum_{J,K,M} h_{KM}^J$, ここで, 各モード h_{KM}^J は

$$\begin{aligned} h_{KM}^J := & h_{AB}^{JKM}(t, \tilde{r}) \mathbb{D}_{KM}^J \bar{\sigma}^A \bar{\sigma}^B + 2h_{+-}^{JKM}(t, \tilde{r}) \mathbb{D}_{KM}^J \bar{\sigma}^+ \bar{\sigma}^- \\ & + 2h_{A+}^{JKM}(t, \tilde{r}) \mathbb{D}_{K-1M}^J \bar{\sigma}^A \bar{\sigma}^+ + 2h_{A-}^{JKM}(t, \tilde{r}) \mathbb{D}_{K+1M}^J \bar{\sigma}^A \bar{\sigma}^- \\ & + h_{++}^{JKM}(t, \tilde{r}) \mathbb{D}_{K-2M}^J \bar{\sigma}^+ \bar{\sigma}^+ + h_{--}^{JKM}(t, \tilde{r}) \mathbb{D}_{K+2M}^J \bar{\sigma}^- \bar{\sigma}^- \end{aligned} \quad (4.24)$$

と定義される. なお, \mathbb{D}_{KM}^J と h の複素共役は, $(\mathbb{D}_{KM}^J)^* = \mathbb{D}_{-K-M}^J$ と $h^* = h$ であることから, h_{KM}^J の複素共役は $(h_{KM}^J)^* = h_{-K-M}^J$ と与えられる. W_3 と L_3 の $\bar{\sigma}^\pm$ に対する作用 (4.23) を考慮すると

$$\mathcal{L}_{W_3} h_{KM}^J = K h_{KM}^J, \quad \mathcal{L}_{L_3} h_{KM}^J = M h_{KM}^J \quad (4.25)$$

を得る. 則ち, h_{KM}^J は W_3 及び L_3 についての固有テンソルである.

4.3 Symmetry Operator の解析

Killing-Yano 3-形式から作られる symmetry operator を 2 階対称テンソル場 $h_{\lambda\rho}$ の各モードに作用し, その詳細を調べる. 簡単のため, コベクトル基底と同様に, $A \in \{t, r, 3\}$ として, ベクトル基底を $(\bar{\sigma}_A, \bar{\sigma}_\pm)$ と表す記法を導入しよう. 式 (2.55) によって与えられる像 $Z_{\lambda\rho} = S h_{\lambda\rho}$ は

$$\begin{aligned} Z_{AB} = & 2f_{|A|}{}^{CD} \left[\bar{\sigma}_C h_{|B)D} - \Gamma^E{}_{C|B)} h_{ED} - \Gamma^E{}_{CD} h_{|B)E} \right] \\ & + 2f_{|A|}{}^{+-} \left[\bar{\sigma}_+ h_{|B)-} - \bar{\sigma}_- h_{|B)+} - (\Gamma^+{}_{+|B)} - \Gamma^-{}_{-|B)} h_{+-} - (\Gamma^C{}_{+-} - \Gamma^C{}_{-+}) h_{|B)C} \right], \end{aligned} \quad (4.26a)$$

$$Z_{+-} = f_+{}^{+A} \left[\bar{\sigma}_+ h_{-A} - \bar{\sigma}_- h_{+A} - (\Gamma^B{}_{+-} - \Gamma^B{}_{-+}) h_{BA} - (\Gamma^+{}_{+A} - \Gamma^-{}_{-A}) h_{+-} \right], \quad (4.26b)$$

$$\begin{aligned} Z_{A\pm} = & f_A{}^{BC} \left[\bar{\sigma}_B h_{\pm C} - \Gamma^\pm{}_{B\pm} h_{\pm C} - \Gamma^D{}_{BC} h_{\pm D} \right] \\ & + f_A{}^{+-} \left[\bar{\sigma}_+ h_{\pm-} - \bar{\sigma}_- h_{\pm+} - (\mp \Gamma^B{}_{\mp\pm} + \Gamma^B{}_{+-} - \Gamma^B{}_{-+}) h_{B\pm} \right] \\ & + f_\pm{}^{\pm B} \left[\bar{\sigma}_\pm h_{AB} - \bar{\sigma}_B h_{A\pm} + \Gamma^C{}_{BA} h_{C\pm} - \Gamma^\pm{}_{\pm A} h_{\pm B} - (\Gamma^\pm{}_{\pm B} - \Gamma^\pm{}_{B\pm}) h_{A\pm} \right], \end{aligned} \quad (4.26c)$$

$$Z_{\pm\pm} = 2f_\pm{}^{\pm A} \left[\bar{\sigma}_\pm h_{A\pm} - \bar{\sigma}_A h_{\pm\pm} + (2\Gamma^\pm{}_{A\pm} - \Gamma^\pm{}_{\pm A}) h_{\pm\pm} \right] \quad (4.26d)$$

の形をとる. 等式 $f_+{}^{+A}(2\Gamma^+{}_{A+} - \Gamma^+{}_{+A}) = f_-{}^{-A}(2\Gamma^-{}_{A-} - \Gamma^-{}_{-A}) = 3$ を, それぞれ式 (4.26b), (4.26d) に適用し接続係数 (4.16) を明示的に記述することで, $Z_{\lambda\rho}$ のより詳細な表現を得ることができることは注目に値する. 演算子 W_3 と W_\pm は, $\bar{\sigma}_\pm = -\sqrt{2}iW_\mp$

と $\bar{\sigma}_3 = -2iW_3$ の形で式 (4.26a)–(4.26d) に含まれているので、式 (4.24) で与えられた単一モード $h = h_{KM}^J$ を (4.26a)–(4.26d) に代入すると、

$$Z_{AB} \propto \mathbb{D}_{KM}^J, \quad Z_{+-} \propto \mathbb{D}_{KM}^J, \quad Z_{A\pm} \propto \mathbb{D}_{K\mp 1M}^J, \quad Z_{\pm\pm} \propto \mathbb{D}_{K\mp 2M}^J \quad (4.27)$$

を得る。つまり、symmetry operator は単一モード (J, K, M) を同じ (J, K, M) によってラベルづけされる他のテンソルへと移す。

ここで、 $h_{\mu\nu}$ の場の方程式を適用していないこと、つまり、 $h_{\mu\nu}$ は必ずしも線形計量摂動ではないことに注意しよう。この結果は、演算子の交換関係を考えると次のように解釈できる。 W_i, L_i に対するテンソルの Lie 微分をそれぞれ $\mathcal{W}_i := \mathcal{L}_{W_i}, \mathcal{L}_i := \mathcal{L}_{L_i}$ と表記する。以上の結果から、 \mathcal{S} と \mathcal{W}_3 が交換することが確認できる、つまり、

$$\mathcal{S}\mathcal{W}_3h = \mathcal{S}\mathcal{W}_3 \sum_{JKM} h_{KM}^J = \sum_{JKM} KSh_{KM}^J = \mathcal{W}_3\mathcal{S} \sum_{JKM} h_{KM}^J = \mathcal{W}_3\mathcal{S}h \quad (4.28)$$

であり、また、同様に、 \mathcal{S} と \mathcal{L}_i が互いに交換していることが確認できる。その結果、演算子 $(\mathcal{S}, \mathcal{W}_3, \mathcal{L}_i)$ の間の交換関係は以下のようにまとめられる：

$$[\mathcal{S}, \mathcal{W}_3] = 0, \quad [\mathcal{S}, \mathcal{L}_i] = 0, \quad [\mathcal{W}_3, \mathcal{L}_i] = 0. \quad (4.29)$$

これは、 $U(1) \times SU(2)$ 等方性と、等角運動量を持つ 5 次元 Myers-Perry 時空の反対称な隠れた対称性に由来している。演算子 $(\mathcal{S}, \mathcal{W}_3, \mathcal{L}_i)$ は、時空の定常性に関連する演算子 $\mathcal{T} := \mathcal{L}_{i\bar{\sigma}_t}$ と同列であることに注意されたし。

以降、 $\mathcal{M}h = 0$ を課すことにより、 $h_{\mu\nu}$ は線形計量摂動であるとする。定理 1 より、演算子 \mathcal{M} は $(\mathcal{S}, \mathcal{W}_3, \mathcal{L}_i, \mathcal{T})$ と交換する。つまり、

$$[\mathcal{S}, \mathcal{M}] = 0, \quad [\mathcal{W}_3, \mathcal{M}] = 0, \quad [\mathcal{L}_i, \mathcal{M}] = 0, \quad [\mathcal{T}, \mathcal{M}] = 0 \quad (4.30)$$

である。ここで、式 (4.24) にて示されているように、線形計量摂動の変数分離性は $U(1) \times SU(2) \times \mathbb{R}$ に付随する $(\mathcal{W}_3, \mathcal{L}_i, \mathcal{T})$ によって保証されており、そして、symmetry operator \mathcal{S} は変数分離性の観点からは余剰である。

ここまで、等角運動量を持つ 5 次元 Myers-Perry 時空において Killing-Yano 3-形式から作られる symmetry operator は 2 階対称テンソル場の各モード間の遷移を与えないことを示した。なお依然として、symmetry operator \mathcal{S} が、線形計量摂動を別の境界条件が課された摂動に写像している可能性が残されている。もしくは、そうでなければ \mathcal{S} が $(\mathcal{W}_3, \mathcal{L}_3, \mathcal{T})$ と $h_{\mu\nu}$ を自分自身に写像する恒等変換 \mathcal{I} との線形結合である可能性もある。以下の節では、 \mathcal{S} による個々のモードの写像をより詳しく調べる：本論文では、文献 [36] で扱った 3 種類のモードについて調べてみる： $(J, K, M) = (0, 0, 0), (J, K, M) = (0, 1, 0), K = J + 2$ 。その結果、上記のモードを用いた線形計量摂動の写像は、恒等変換と位相シフトの線形結合となり、すなわち、 \mathcal{S} で境界条件が保存される。

付録 D において、本章で扱ったモードの Schwarzschild 極限を計算し、第 3 章において得た結果と比較している。ここで、位相シフトは極限 $a \rightarrow 0$ で消失する。

4.3.1 $(J, K, M) = (0, 0, 0)$ モード

式 (4.24) より, 2階対称テンソルの $(J, K, M) = (0, 0, 0)$ モードは

$$h = h_{K=0 M=0}^{J=0} = h_{AB}(t, \tilde{r}) \bar{\sigma}^A \bar{\sigma}^B + 2h_{+-}(t, \tilde{r}) \bar{\sigma}^+ \bar{\sigma}^- \quad (4.31)$$

の形をとる. ここで $A, B \in \{t, \tilde{r}, 3\}$ である. $(J, K, M) = (0, 0, 0)$ モードに対するゲージ変換 $\delta h_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu$ はゲージ場 $\xi = \xi_A(t, \tilde{r}) \bar{\sigma}^A$ によって与えられ, ゲージ変換の具体的な表式は

$$\delta h_{tt} = 2 \left(\partial_t \xi_t - \frac{\mu G(\tilde{r})}{\tilde{r}^3} \xi_{\tilde{r}} \right), \quad (4.32a)$$

$$\delta h_{t3} = \partial_t \xi_3 + \frac{2\mu a G(\tilde{r})}{\tilde{r}^3} \xi_{\tilde{r}}, \quad (4.32b)$$

$$\delta h_{33} = 2\tilde{r} G(\tilde{r}) \left(1 - \frac{\mu a^2}{\tilde{r}^4} \right) \xi_{\tilde{r}}, \quad (4.32c)$$

$$\delta h_{\tilde{r}\tilde{r}} = 2\partial_{\tilde{r}} \xi_{\tilde{r}} + \frac{2}{\tilde{r} G(\tilde{r})} \left(\frac{\mu}{\tilde{r}^2} - \frac{2\mu a^2}{\tilde{r}^4} \right) \xi_{\tilde{r}}, \quad (4.32d)$$

$$\delta h_{t\tilde{r}} = \partial_t \xi_{\tilde{r}} + \partial_{\tilde{r}} \xi_t - \frac{2\mu}{\tilde{r}^3 G(\tilde{r})} \xi_t - \frac{2\mu a}{\tilde{r}^5 G(\tilde{r})} \xi_3, \quad (4.32e)$$

$$\delta h_{\tilde{r}3} = \partial_{\tilde{r}} \xi_3 + \frac{4\mu a}{\tilde{r}^3 G(\tilde{r})} \xi_t - \frac{2}{\tilde{r} G(\tilde{r})} \left(1 - \frac{\mu}{\tilde{r}^2} - \frac{\mu a^2}{\tilde{r}^4} \right) \xi_3, \quad (4.32f)$$

$$\delta h_{+-} = 2\tilde{r} G(\tilde{r}) \xi_{\tilde{r}} \quad (4.32g)$$

と計算される. このゲージ変換を適用して,

$$h_{tt} = 0, \quad h_{t3} = 0, \quad h_{33} = 0 \quad (4.33)$$

のように3成分をゼロにとる. このとき, 各モードの時間依存性 $e^{-i\omega t}$ についてこのゲージ変換を実現するために, 以降で取り扱う振動数 ω を $\omega \neq 0$ に限る. ここまで, $h_{\tilde{r}\tilde{r}}$, $h_{t\tilde{r}}$, $h_{\tilde{r}3}$, h_{+-} が非零成分として残っている. 式 (4.32c) 及び (4.32g) より, h_{33} と h_{+-} の組み合わせ

$$h_{33} - \left(1 - \frac{\mu a^2}{\tilde{r}^4} \right) h_{+-} \quad (4.34)$$

はゲージ不変であり, 現在のゲージ固定 (4.33) のもとではこれは実質 h_{+-} である. 文献 [36] によると, $h_{\lambda\rho}$ の摂動方程式から $h_{\tilde{r}\tilde{r}}$, $h_{t\tilde{r}}$, $h_{\tilde{r}3}$ を除去することによって得られるマスター方程式について, マスター変数は

$$\Phi_0 := \frac{(\tilde{r}^4 - \mu a^2)(\tilde{r}^4 + \mu a^2)^{1/4}}{\tilde{r}^{3/2}(3\tilde{r}^4 + \mu a^2)} h_{+-} \quad (4.35)$$

と得られる.

Symmetry Operator の作用

ゲージ固定 (4.33) を施した式 (4.31) を式 (4.26a)–(4.26b) へと代入すると, $(J, K, M) = (0, 0, 0)$ モードに対する $Z_{\lambda\rho} = \mathcal{S}h_{\lambda\rho}$ を

$$Z_{tt} = 2 \left\{ -\frac{\mu a^2}{\tilde{r}^3} \partial_t h_{t\tilde{r}} + \frac{\mu a^2 G(\tilde{r})}{\tilde{r}^4} h_{\tilde{r}\tilde{r}} - \frac{2\mu a^2}{\tilde{r}^6} h_{+-} \right\}, \quad (4.36a)$$

$$Z_{t3} = -\frac{\mu a^2}{\tilde{r}^3} \partial_t h_{3\tilde{r}} + a\tilde{r} \left(1 + \frac{\mu a^2}{\tilde{r}^4} \right) \partial_t h_{t\tilde{r}} + aG(\tilde{r}) \left(1 - \frac{2\mu}{\tilde{r}^2} - \frac{\mu a^2}{\tilde{r}^4} \right) h_{\tilde{r}\tilde{r}} + \frac{2a}{\tilde{r}^2} \left(1 + \frac{\mu}{\tilde{r}^2} + \frac{\mu a^2}{\tilde{r}^4} \right) h_{+-}, \quad (4.36b)$$

$$Z_{33} = 2 \left\{ a\tilde{r} \left(1 + \frac{\mu a^2}{\tilde{r}^4} \right) \partial_t h_{3\tilde{r}} + \frac{2\mu a^2 G(\tilde{r})}{\tilde{r}^2} h_{\tilde{r}\tilde{r}} - 2 \left(1 + \frac{\mu a^2}{\tilde{r}^4} \right) h_{+-} \right\}, \quad (4.36c)$$

$$Z_{\tilde{r}\tilde{r}} = -\frac{2a}{\tilde{r}G(\tilde{r})} \partial_t h_{\tilde{r}3}, \quad (4.36d)$$

$$Z_{t\tilde{r}} = -\frac{\mu a^2}{\tilde{r}^3} \left\{ \partial_t h_{\tilde{r}\tilde{r}} - \frac{1}{\tilde{r}^3 G(\tilde{r})} \partial_{\tilde{r}} \left[\tilde{r}^3 G(\tilde{r}) h_{t\tilde{r}} \right] \right\} - \frac{a}{\tilde{r}^4 G(\tilde{r})} \left(1 - \frac{\mu}{\tilde{r}^2} \right) \partial_{\tilde{r}} \left[\tilde{r}^3 G(\tilde{r}) h_{\tilde{r}3} \right], \quad (4.36e)$$

$$Z_{\tilde{r}3} = a\tilde{r} \left(1 + \frac{\mu a^2}{\tilde{r}^4} \right) \partial_t h_{\tilde{r}\tilde{r}} - \frac{a\tilde{r}^2}{G(\tilde{r})} \partial_{\tilde{r}} \left[\tilde{r}^{-1} G(\tilde{r}) h_{t\tilde{r}} \right] - \frac{\mu a^2}{\tilde{r}^4} \frac{a}{\tilde{r}^2 G(\tilde{r})} \partial_{\tilde{r}} \left[\tilde{r}^3 G(\tilde{r}) h_{t\tilde{r}} \right] \\ - \frac{\mu a^2}{\tilde{r}^6 G(\tilde{r})} \partial_{\tilde{r}} \left[\tilde{r}^3 G(\tilde{r}) h_{\tilde{r}3} \right] + 2h_{\tilde{r}3}, \quad (4.36f)$$

$$Z_{+-} = 2h_{+-} \quad (4.36g)$$

のように得る. そして他の成分は消失する. $Z_{\lambda\rho}$ のマスター変数は Z_{33} と Z_+ からなるゲージ不変変数と $h_{\lambda\rho}$ のマスター変数で記述されているので, ここでは, 式 (4.36c) 及び (4.36g) に注目する. 文献 [36] によると, 線形計量摂動 $h_{\lambda\rho}$ の場の方程式には $\delta G_{\tilde{r}3} = 0$ が含まれている. これは,

$$\frac{\mu a}{2\tilde{r}^3} \partial_t h_{\tilde{r}\tilde{r}} + \frac{1}{4G(\tilde{r})} \left(1 + \frac{\mu a^2}{\tilde{r}^4} \right) \partial_t^2 h_{\tilde{r}3} - \frac{\mu a}{\tilde{r}^5 G(\tilde{r})} \partial_t h_{+-} = 0 \quad (4.37)$$

である. t について両辺の積分を行うと,

$$\frac{\mu a}{2\tilde{r}^3} h_{\tilde{r}\tilde{r}} + \frac{1}{4G(\tilde{r})} \left(1 + \frac{\mu a^2}{\tilde{r}^4} \right) \partial_t h_{\tilde{r}3} - \frac{\mu a}{\tilde{r}^5 G(\tilde{r})} h_{+-} = 0 \quad (4.38)$$

となる. ここで, 不定積分によって現れる \tilde{r} の任意関数は, 各モードの時間依存性 $e^{-i\omega t}$ ($\omega \neq 0$) からゼロにおいた. そして, 式 (4.38) を式 (4.36c) へと適用すると

$$Z_{33} = -4 \left(1 - \frac{\mu a^2}{\tilde{r}^4} \right) h_{+-} \quad (4.39)$$

となる. それから, $h_{\lambda\rho}$ に課したゲージ条件を同様に $Z_{\lambda\rho}$ に適用する. ゲージ変換の結果 $Z_{\mu\nu}^g := Z_{\mu\nu} + \delta Z_{\mu\nu}$ が

$$Z_{tt}^g = 0, \quad Z_{t3}^g = 0, \quad Z_{33}^g = 0 \quad (4.40)$$

を満足することを要請すると、ゲージ変換はゲージ場 ξ_μ

$$\xi_{\tilde{r}} = -\left(2\tilde{r}G(\tilde{r})\right)^{-1} \left(1 - \frac{\mu a^2}{\tilde{r}^4}\right)^{-1} Z_{33} = 4\left(2\tilde{r}G(\tilde{r})\right)^{-1} h_{+-} \quad (4.41)$$

によって与えられる。連動して、 Z_{+-}^g は

$$Z_{+-}^g = Z_{+-} + 2\tilde{r}G(\tilde{r})\xi_{\tilde{r}} = 6h_{+-} \quad (4.42)$$

となる。 $Z_{\lambda\rho}^g$ に対するマスター変数 Φ_0^Z は $h_{\lambda\rho}$ と同じ表式で与えられるため、式 (4.42) は

$$\Phi_0^Z = 6\Phi_0 \quad (4.43)$$

となる。結局、 $(J, K, M) = (0, 0, 0)$ をもつ線形計量摂動に対する symmetry operator \mathcal{S} は定数倍 6 を除いて $(J, K, M) = (0, 0, 0)$ モードを自身に移す。

4.3.2 $(J, K, M) = (0, 1, 0)$ モード

式 (4.24) より、2 階の対称テンソル場の $(J, K, M) = (0, 1, 0)$ モードは

$$h = h_{K=1M=0}^{J=0} + h_{K=-1M=0}^{J=0} = 2h_{A+}(t, \tilde{r})\bar{\sigma}^A\bar{\sigma}^+ + 2h_{A-}(t, \tilde{r})\bar{\sigma}^A\bar{\sigma}^- \quad (4.44)$$

の形で与えられる。ここで $A \in \{t, \tilde{r}, 3\}$ である。成分 h_{A+} 及び h_{A-} は共に複素数値をとる関数であり、 $h_{A-} = h_{A+}^*$ の関係にある。ゲージ変換 $\delta h_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu$ の場合、 $(J, K, M) = (0, 1, 0)$ モードに対するゲージ場 $\xi = \xi_+(t, \tilde{r})\bar{\sigma}^+ + \xi_-(t, \tilde{r})\bar{\sigma}^-$ を満たす $\xi_- = \xi_+^*$ は、

$$\delta h_{t+} = \partial_t \xi_+ - \frac{2i\mu a}{\tilde{r}^4} \xi_+, \quad (4.45a)$$

$$\delta h_{\tilde{r}+} = \partial_{\tilde{r}} \xi_+ - \frac{2}{\tilde{r}} \xi_+, \quad (4.45b)$$

$$\delta h_{+3} = \frac{2i\mu a^2}{\tilde{r}^4} \xi_+ \quad (4.45c)$$

のように計算される。これより、

$$f_t := \frac{1}{\tilde{r}^2} \left(h_{t+} + \frac{i\tilde{r}^4}{2\mu a^2} \partial_t h_{+3} + a^{-1} h_{+3} \right), \quad (4.46a)$$

$$f_{\tilde{r}} := \frac{1}{\tilde{r}^2} \left(h_{\tilde{r}+} + \frac{i\tilde{r}^2}{2\mu a^2} \partial_{\tilde{r}} (\tilde{r}^2 h_{+3}) \right) \quad (4.46b)$$

によって定義される f_t 及び $f_{\tilde{r}}$ はゲージ不変である。ここで、ゲージ不変量 f_t 及び $f_{\tilde{r}}$ について、 h_{+3} を含む項が Schwarzschild 極限 $a = 0$ において発散することに留意しておかなければならない。 $(J, K, M) = (0, 1, 0)$ モードの Schwarzschild 極限をとっている付録 D.2.2 では、上のゲージ不変量を経由せずに極限を解析しているため、本稿において問題はない。以降の計算の中で、式 (4.46a) 及び (4.46b) から導かれる

$$\partial_t f_{\tilde{r}} - \partial_{\tilde{r}} f_t = \partial_t (\tilde{r}^{-2} h_{\tilde{r}+}) - \partial_{\tilde{r}} (\tilde{r}^{-2} h_{t+}) - a^{-1} \partial_{\tilde{r}} (\tilde{r}^{-2} h_{+3}) \quad (4.47)$$

という組み合わせが頻繁に現れる．詳細には，この系に対するマスター変数は文献 [36] において導出されているが，これは

$$\Phi_1 := \frac{\left(1 + \frac{\mu a^2}{\tilde{r}^4}\right)^{1/4}}{\tilde{r}^{5/2} \left(1 + \frac{\mu a^2}{\tilde{r}^4} + \frac{\mu^2 a^6}{4\tilde{r}^{10}}\right)^{1/2}} \pi_{\tilde{r}} \quad (4.48)$$

と与えられる．ここで， $\pi_{\tilde{r}}$ は $f_{\tilde{r}}^*$ の共役運動量（に比例する量）であり，

$$\pi_{\tilde{r}} := \tilde{r}^5 \left(1 + \frac{\mu a^2}{\tilde{r}^4}\right) (\partial_t f_{\tilde{r}} - \partial_{\tilde{r}} f_t) - 2i\mu a \tilde{r} f_{\tilde{r}} \quad (4.49)$$

と表される．

Symmetry Operator の作用

式 (4.44) を式 (4.26a)–(4.26b) へと代入して， $(J, K, M) = (0, 1, 0)$ モードに対する symmetry operator による変換 $Z_{\lambda\rho} = S h_{\lambda\rho}$ を

$$Z_{t+} = ia\partial_t h_{t+} - \frac{\mu a^2}{\tilde{r}^3} \partial_t h_{\tilde{r}+} + \frac{\mu a^2}{\tilde{r}} \partial_{\tilde{r}} (\tilde{r}^{-2} h_{t+}) - \frac{a}{\tilde{r}^3} \left(1 - \frac{\mu}{\tilde{r}^2}\right) \partial_{\tilde{r}} (\tilde{r}^2 h_{+3}) + 2h_{t+} + \frac{2i\mu a^3}{\tilde{r}^5} h_{\tilde{r}+} - \frac{4a}{\tilde{r}^2} h_{+3}, \quad (4.50a)$$

$$Z_{\tilde{r}+} = ia\partial_t h_{\tilde{r}+} - \frac{a}{\tilde{r}G(\tilde{r})} \partial_t h_{+3} + \frac{2i\mu a^3}{\tilde{r}^5 G(\tilde{r})} h_{t+} + 2h_{\tilde{r}+} + \frac{2i\mu a^2}{\tilde{r}^5 G(\tilde{r})} h_{+3}, \quad (4.50b)$$

$$Z_{+3} = a\tilde{r}^3 \left(1 + \frac{\mu a^2}{\tilde{r}^4}\right) \left\{ \tilde{r}^{-2} \partial_t h_{\tilde{r}+} - \partial_{\tilde{r}} (\tilde{r}^{-2} h_{t+}) \right\} + ia\partial_t h_{+3} - \frac{\mu a^2}{\tilde{r}} \partial_{\tilde{r}} (\tilde{r}^{-2} h_{+3}) - \frac{2i\mu a^2}{\tilde{r}^3} h_{\tilde{r}+} + 6h_{+3}, \quad (4.50c)$$

及び， $h_{\mu\nu}$ と同様に， Z_{A-} を Z_{A+} の複素共役として得る．その他の成分はゼロとなる． $h_{\lambda\rho}$ に関するゲージ不変量 f_t 及び $f_{\tilde{r}}$ は式 (4.46a) 及び (4.46b) によって与えたが， $Z_{\lambda\rho}$ についてのゲージ不変量 f_t^Z 及び $f_{\tilde{r}}^Z$ も同様の形で

$$f_t^Z := \frac{1}{\tilde{r}^2} \left(Z_{t+} + \frac{i\tilde{r}^4}{2\mu a^2} \partial_t Z_{+3} + a^{-1} Z_{+3} \right), \quad (4.51a)$$

$$f_{\tilde{r}}^Z := \frac{1}{\tilde{r}^2} \left(Z_{\tilde{r}+} + \frac{i\tilde{r}^2}{2\mu a^2} \partial_{\tilde{r}} (\tilde{r}^2 Z_{+3}) \right) \quad (4.51b)$$

と与えられる． $Z_{\lambda\rho}$ についてのマスター変数 Φ_1^Z は式 (4.48) において与えられている $h_{\lambda\rho}$ についてのマスター変数 Φ_1^Z と同じ形で与えられ，そのため， $(f_{\tilde{r}}^Z)^*$ の共役運動量（に比例する量）である

$$\pi_{\tilde{r}}^Z := \tilde{r}^5 \left(1 + \frac{\mu a^2}{\tilde{r}^4}\right) (\partial_t f_{\tilde{r}}^Z - \partial_{\tilde{r}} f_t^Z) - 2i\mu a \tilde{r} f_{\tilde{r}}^Z \quad (4.52)$$

から構成される．

$\pi_{\tilde{r}}^Z$ を Φ_1 で表す式は, $\pi_{\tilde{r}}$ の表式からすぐに得られる. そこで, 式 (4.52) の右辺を書き換えてみよう. 式 (4.50a)–(4.50c) を式 (4.51a) 及び (4.51b) に代入すると,

$$f_t^Z = \frac{i\tilde{r}^5}{2\mu a} \left(1 + \frac{\mu a^2}{\tilde{r}^4}\right) \partial_t(\partial_t f_{\tilde{r}} - \partial_{\tilde{r}} f_t) + \tilde{r}(\partial_t f_{\tilde{r}} - \partial_{\tilde{r}} f_t) + ia\partial_t f_t + \tilde{r}\partial_t f_{\tilde{r}} + 2f_t - \frac{2ia}{\tilde{r}} \left(\frac{\mu}{\tilde{r}^2} - \frac{\mu a^2}{\tilde{r}^4}\right) f_{\tilde{r}}, \quad (4.53a)$$

$$f_{\tilde{r}}^Z = \partial_{\tilde{r}} \left[\frac{i\tilde{r}^5}{2\mu a} \left(1 + \frac{\mu a^2}{\tilde{r}^4}\right) (\partial_t f_{\tilde{r}} - \partial_{\tilde{r}} f_t) \right] + ia\partial_t f_{\tilde{r}} + \tilde{r}\partial_{\tilde{r}} f_{\tilde{r}} + \frac{2i\tilde{r}^3}{\mu a G(\tilde{r})} \left(\frac{\mu a^2}{\tilde{r}^4}\right)^2 f_t + 3f_{\tilde{r}} \quad (4.53b)$$

という $(f_t, f_{\tilde{r}})$ と $(f_t^Z, f_{\tilde{r}}^Z)$ の間の関係が得られる. また, 式 (4.53a) 及び (4.53b) より,

$$\begin{aligned} \partial_t f_{\tilde{r}}^Z - \partial_{\tilde{r}} f_t^Z &= ia\partial_t(\partial_t f_{\tilde{r}} - \partial_{\tilde{r}} f_t) - \tilde{r}\partial_{\tilde{r}}(\partial_t f_{\tilde{r}} - \partial_{\tilde{r}} f_t) + (\partial_t f_{\tilde{r}} - \partial_{\tilde{r}} f_t) \\ &\quad + \frac{2i\tilde{r}^3}{\mu a G(\tilde{r})} \left(\frac{\mu a^2}{\tilde{r}^4}\right)^2 \partial_t f_t + \partial_{\tilde{r}} \left[\frac{2ia}{\tilde{r}} \left(\frac{\mu}{\tilde{r}^2} - \frac{\mu a^2}{\tilde{r}^4}\right) f_{\tilde{r}} \right] \end{aligned} \quad (4.54)$$

を得る. 計算は, 式 (4.53b) 及び (4.54) を式 (4.52) へと代入し, $(f_t, f_{\tilde{r}})$ の系についての Euler-Lagrange 方程式を適用し, そして式 (4.49) を用いて全ての項を変形することによって完了する. 計算の詳細については付録 C.2 を参照されたし. 結果として,

$$\pi_{\tilde{r}}^Z = (ia\partial_t + 6) \pi_{\tilde{r}} \quad (4.55)$$

を得て, そして,

$$\Phi_1^Z = (ia\partial_t + 6) \Phi_1 \quad (4.56)$$

を得る. 結局, symmetry operator \mathcal{S} による線形計量摂動の $(J, K, M) = (0, 1, 0)$ の変換は恒等変換と位相シフトの線型結合として与えられる. ここで, 位相シフトは振動数の虚部によって与えられることに言及しておく; 式 (4.56) に $\Phi_1(t, \tilde{r}) = e^{-i\omega t} \Phi_1(\tilde{r})$ を代入すると,

$$\begin{aligned} \Phi_1^Z &= (a\omega + 6) \Phi_1(t, \tilde{r}) \\ &= \left\{ (a\omega_{\text{Re}} + 6) e^{-i\omega_{\text{Re}} t} + a\omega_{\text{Im}} e^{-i(\omega_{\text{Re}} t - \frac{\pi}{2})} \right\} e^{\omega_{\text{Im}} t} \Phi_1(\tilde{r}) \end{aligned} \quad (4.57)$$

となる. ここで, $\omega = \omega_{\text{Re}} + i\omega_{\text{Im}}$ である.

4.3.3 $K = J + 2$ モード

式 (4.24) より, 2 階の対称テンソル場の $(J, K = J + 2, M = 0)$ モードは

$$h = h_{K=J+2M}^J = h_{++}(t, \tilde{r}) \mathbb{D}_{K=JM=0}^J \bar{\sigma}^+ \bar{\sigma}^+ + h_{--}(t, \tilde{r}) \mathbb{D}_{K=-JM=0}^J \bar{\sigma}^- \bar{\sigma}^- \quad (4.58)$$

の形をとる. ここで, h_{--} は h_{++} の複素共役によって与えられる. また, h についてのマスター変数は h_{++} によって表される.

$h_{\lambda\rho}$ と同様に, $Z_{\lambda\rho} = \mathcal{S}h_{\lambda\rho}$ の非ゼロ成分は Z_{++} と $Z_{--} = (Z_{++})^*$ である. 式 (4.26d) より,

$$Z_{++} = 2(ia\partial_t + i\bar{\sigma}_3 + 3)h_{++} \quad (4.59)$$

を得て, よって,

$$\Phi_{K=J+2}^Z = 2(ia\partial_t + i\bar{\sigma}_3 + 3)\Phi_{K=J+2} \quad (4.60)$$

を得る. 結論として, $K = J + 2$ モードを持つ線形計量摂動の symmetry operator \mathcal{S} は, 恒等変換と位相シフトの組み合わせとして与えられる. ここで, 周波数の虚数部が位相シフトを誘発することに注意されたし. $\Phi_{K=J+2} = e^{-i\omega t}\mathbb{D}_{K=JM=0}^J\Phi_{K=J+2}(\tilde{r})$ を式 (4.60) に代入し, $i\bar{\sigma}_3 = 2W_3$ を適用すると,

$$\begin{aligned} \Phi_{K=J+2}^Z &= 2(a\omega + 2J + 3)\Phi_{K=J+2} \\ &= 2\left\{(a\omega_{\text{Re}} + 2J + 3)e^{-i\omega_{\text{Re}}t} + a\omega_{\text{Im}}e^{-i(\omega_{\text{Re}}t - \frac{\pi}{2})}\right\}e^{\omega_{\text{Im}}t}\mathbb{D}_{K=JM=0}^J\Phi_{K=J+2}(\tilde{r}) \end{aligned} \quad (4.61)$$

を得る. ここで, $\omega = \omega_{\text{Re}} + i\omega_{\text{Im}}$ である.

第5章 結論と議論

等角運動量を持つ 5 次元 Myers-Perry ブラックホール時空の線形計量摂動に対して, Killing-Yano 3-計量から構築された symmetry operator を調べた. Schwarzschild の場合と有限等角運動量の場合を考えた.

5 次元 Schwarzschild 時空における解析では, symmetry operator はスカラー型摂動に作用すると, これを抹消する. また, ベクトル型摂動に対しては symmetry operator は演算 $\hat{\star}\hat{d}$ のように振る舞い, テンソル型摂動に対しても symmetry operator は同様に振る舞う. ここで, $\hat{\star}$ と \hat{d} はそれぞれ, 3 次元単位球面上の Hodge 演算子及び外微分である. ベクトルハーモニクスは, 同じ整数ラベル (k, ℓ, m) を持つ, より詳細な 3 クラス $(\mathbb{V}^{(0)}, \mathbb{V}^{(1)}, \mathbb{V}^{(2)})$ に分類され, 同様に, テンソルハーモニクスは同じ整数ラベル (k, ℓ, m) を持つより詳細な 6 クラス $(\mathbb{T}^{(0)}, \mathbb{T}^{(1)}, \mathbb{T}^{(2)}, \mathbb{T}^{(3)}, \mathbb{T}^{(4)}, \mathbb{T}^{(5)})$ に分類される [32, 33]. Symmetry operator は, $\mathbb{V}^{(0)}, \mathbb{T}^{(0)}, \mathbb{T}^{(3)}$ を消去する. また, symmetry operator は各々のペア $(\mathbb{V}^{(1)}, \mathbb{V}^{(2)}), (\mathbb{T}^{(1)}, \mathbb{T}^{(2)})$ 及び $(\mathbb{T}^{(4)}, \mathbb{T}^{(5)})$ について, 片方のハーモニクスを別のハーモニクスに変換する. さらに, 各ペアに関して線型結合 $\mathbb{V}^{(1)} \pm \mathbb{V}^{(2)}, \mathbb{T}^{(1)} \pm \mathbb{T}^{(2)}, \mathbb{T}^{(4)} \pm \mathbb{T}^{(5)}$ をとると, これらは $\mathbb{V}^{(0)}, \mathbb{T}^{(0)}, \mathbb{T}^{(3)}$ と合わせて Laplace 演算子と symmetry operator の両方に対して固有ベクトルまたは固有テンソルであるようなハーモニクスである. 上で示した各モードに対して, symmetry operator は高々恒等演算子として振る舞う. ここでは, 場の方程式を適用していないこと, つまり, 上記の結果は, 5 次元 Schwarzschild 時空の任意の 2 階の対称テンソル場に適用されることに注意されたし.

有限等角運動量をもつ 5 次元 Myers-Perry 時空における解析では, 文献 [35, 36] に従って, 時空のもつ $U(1) \times SU(2)$ 対称性に対する group-theoretical な手法に基づいて, 2 階の対称テンソル場のモード分解を実行した. そして, 愚直に計算することによって, symmetry operator は整数または半整数 (J, K, M) でラベルされるモードを同じラベルを持つテンソルへと移すことを示した. このことは, symmetry operator \mathcal{S} と $U(1) \times SU(2)$ を由来とする Lie 微分演算子 $(\mathcal{W}_3, \mathcal{L}_i)$ が可換であることに対応している. 次に, 場の方程式を課すことによって対称テンソル場を線形計量摂動へと限定し, symmetry operator の線形計量摂動への作用をさらに詳細に解析した. 結果として, 少なくとも我々が解析した範囲では, symmetry operator は高々, 恒等変換と Lie 微分演算子の線型結合で与えられる程度であることを示した; $(J, K, M) = (0, 0, 0), (J, K, M) = (0, 1, 0), K = J + 2$ モードのマスター変数 (4.43), (4.56) および (4.60) を参照されたし.

以上の結果を端的に表現すると, Killing-Yano 3-形式から構築された symmetry operator が線形計量摂動に対してどのように作用するかを明示した. Symmetry operator が時空の等長変換が与える Lie 微分と交換し, さらに各モードに関してより詳細に行った計算においては, 等長変換からの寄与の線型結合として与えられることを示した. 全てのモードを調べたわけではないが, 本稿において扱われなかったその他のモードに対して, symmetry

operator は各モードについて等長変換に付随した Lie 微分の組み合わせとして与えられると予想することは妥当であろう。第 1 章にて述べたように、我々の主な関心は、Killing-Yano 3-形式から構築される symmetry operator がモード間の遷移を与える昇降演算子として重力摂動に作用するかどうかを調べることにあった。それに対する結果として、本稿において調べた各モードに対して、symmetry operator は高々等長変換と恒等変換の線型結合として振る舞うことを明らかにした。即ち、少なくとも等角運動量を持つ 5 次元 Myers-Perry 時空においては、Killing-Yano 3-形式は昇降演算子を提供しない。

5 次元 Schwarzschild 時空および等角運動量 Myers-Perry 時空の両方において symmetry operator による重力摂動の解の変換を求める計算を完遂できた背景には、これらの時空が十分な数の対称性を持つことから Killing-Yano 3-形式とは独立に変数の分離およびモード分解が行われた、という事情がある。ではさらに対称性の低い時空では Killing-Yano 3-形式が重力摂動方程式の変数分離性に寄与するかというと、以下の理由から、そうではなさそうだと予想される。まず、本稿において考えた系においては symmetry operator は恒等変換や等長変換に帰着することを明示的に示したが、この結果は、より一般的な場合にも当てはまると予想することは自然である。次に、4 次元 Kerr 時空においては重力摂動の変数分離性は 2 階 symmetry operator によって保証されていることが示されていることから、高次元時空においても同様に 2 次の symmetry operator が非自明な変数分離性を保証するであろうことが予想される。さらに、等長変換に加えて Killing-Yano 3-形式を勘定に入れたとしても、symmetry operator が一つ加えられたところで高次元時空における分離可能性を実現するためには分離定数の数が足りない。

依然として Killing-Yano 3-形式によって構成される symmetry operator の振る舞いは一瞥して理解できるものではなく、一般の高次元時空における symmetry operator による解の変換の詳細を理解するためには、さらなる計算が必要とされる。

謝辞

指導教員である柳 哲文 講師には、大変暖かいご指導を賜りました。また、野尻 伸一 教授、南部 保貞 准教授、および私がこれまで関わった私以外の学生にも、暖かく接していただきました。この場を借りて御礼申し上げます。

付録 A 準備

時空のもつ対称性についての説明を与える。付録 A.1 において、テンソル場に対して定義される様々な微分を導入し、2.1 において各種対称性の概念を導入する。ここで、時空は計量符号 $(1, D-1)$ の D -次元擬 Riemannian 多様体であるが、微分および対称性の概念はより一般の擬 Riemannian 多様体に対して定義できるものである。

A.1 時空上の微分

時空の対称性および時空上の場の方程式を記述するために、時空上においてテンソル場に作用する微分をいくつか導入する。

Lie 微分

ベクトル場による可微分関数（スカラー場）の Lie 微分とは、各点における方向微分である。具体的には、時空上のある点 p におけるベクトル場 X による可微分関数 F の Lie 微分は

$$\mathcal{L}_X F|_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(\phi_t(p)) - F(p)}{t} \quad (\text{A.1})$$

によって与えられる。ここで、 ϕ はフローと呼ばれ、 p を通るベクトル場 X の積分曲線であり、実数 t によってパラメータ付けされたものを与える。局所座標系 x^α において、式 (A.1) は

$$\mathcal{L}_X F = X^\beta \partial_\beta F \quad (\text{A.2})$$

と書き直される。 X によるベクトル場およびテンソル場の Lie 微分は、式 (A.1) で与えられた F の Lie 微分の定義と同じ具合で定義される。 X によるベクトル場 Y の Lie 微分は

$$\mathcal{L}_X Y|_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\phi_{-t})_* [Y_{\phi_t(p)}] - Y_p}{t} \quad (\text{A.3})$$

によって定義される。ここで、 $(\phi_{-t})_*$ は ϕ_{-t} によるベクトル場の押し出し（push-forward）である。局所座標系 x^α において、式 (A.3) は

$$\mathcal{L}_X Y = (X^\beta \partial_\beta Y^\alpha - Y^\beta \partial_\beta X^\alpha) \partial_\alpha \quad (\text{A.4})$$

のように書き直される。また、コベクトル場の Lie 微分は、ベクトル場との内積の Lie 微分に Leibniz 則を適用することによって得られる。コベクトル場を ω として、ベクトル場 Y との内積を $Y \cdot \omega$ と表すことにする。この記法は内積を計量テンソル g によって行

なっていることを念頭に置いている．この Lie 微分 $\mathcal{L}_X[Y \cdot \omega]$ に Leibniz 則を適用すると，ベクトル場 X によるコベクトル場 ω の Lie 微分を

$$\mathcal{L}_X \omega = (X^\beta \partial_\beta \omega_\alpha + \omega_\beta \partial_\alpha X^\beta) dx^\alpha \quad (\text{A.5})$$

のように得る．同じ方法によって，任意のテンソル場の Lie 微分の表式を得る．つまり， X による (p, q) 型のテンソル場 $T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}$ の Lie 微分は

$$\mathcal{L}_X T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} = X^\gamma \partial_\gamma T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} - \sum_i T^{\alpha_1 \dots \gamma \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} \partial_\gamma X^{\alpha_i} + \sum_j T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \gamma \dots \beta_q} \partial_{\beta_j} X^\gamma \quad (\text{A.6})$$

のように与えられる．ここで，式 (A.6) にて与えられたテンソル場 T の Lie 微分の局所座標表示は，基底込みで書いた

$$T = T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} \partial_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\alpha_p} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \dots \otimes dx^{\beta_q} \quad (\text{A.7})$$

に対して座標変換 $x^\alpha \mapsto x^\alpha + X^\alpha$ を施すことで得られることに留意されたし．

共変微分

与えられた時空の計量テンソル g に対して，定数倍を除いて共変微分が定義され，これは metricity 条件および torsion-free 条件を満たす．具体的には， X, Y および Z をベクトル場として，上の2つの条件は

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = 0, \quad \mathcal{L}_X Y - \nabla_X Y + \nabla_Y X = 0 \quad (\text{A.8})$$

によって与えられる．共変微分は，曲線に沿った平行移動に付随する概念である．ベクトル場による可微分関数の共変微分は，Lie 微分に帰着する．つまり，ベクトル場および関数を X および F として，

$$\nabla_X F = \mathcal{L}_X F \quad (\text{A.9})$$

となる．局所座標系において， X によるベクトル場 Y の共変微分は

$$\nabla_X Y = X^\beta (\partial_\beta Y^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} Y^\gamma) \partial_\alpha \quad (\text{A.10})$$

によって与えられる．ここで， $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ は Christoffel 係数と呼ばれ，

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{g^{\alpha\delta}}{2} (\partial_\beta g_{\delta\gamma} + \partial_\gamma g_{\delta\beta} - \partial_\delta g_{\beta\gamma}) \quad (\text{A.11})$$

と与えられる．式 (A.8) に示した torsion-free 条件は Christoffel 係数の添字の交換に対する対称性 $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}$ と等価である．コベクトル場の共変微分は，Lie 微分のときと同様に，ベクトル場との内積の共変微分に Leibniz 則を適用して得られる．ベクトル場 Y とコベクトル場 ω について， $\nabla_X[Y \cdot \omega]$ に Leibniz 則を適用することで

$$\nabla_X \omega = X^\beta (\partial_\beta \omega_\alpha - \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} \omega^\gamma) dx^\alpha \quad (\text{A.12})$$

を得る. 続いて, (p, q) 型のテンソル場 T の共変微分についても,

$$\nabla_X T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} = X^\gamma \left(\partial_\gamma T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} + \sum_i \Gamma^{\alpha_i}_{\gamma \delta} T^{\alpha_1 \dots \delta \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} - \sum_j \Gamma^\delta_{\gamma \beta_j} T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \delta \dots \beta_q} \right) \quad (\text{A.13})$$

と得られる. このように定義したベクトル場およびテンソル場の共変微分の表式を式 (A.6) に反映すると, Lie 微分と共変微分の関係を

$$\mathcal{L}_X T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} = X^\gamma \nabla_\gamma T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} - \sum_i T^{\alpha_1 \dots \gamma \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} \nabla_\gamma X^{\alpha_i} + \sum_j T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \gamma \dots \beta_q} \nabla_{\beta_j} X^\gamma \quad (\text{A.14})$$

のように得る. 特に, T としてベクトル場 Y を考えた場合, これは式 (A.8) に示した torsion-free 条件に帰着する.

外微分

まず, テンソル場の足に対する添字の対称化および反対称化を表す記法を導入する. ある階数 p のテンソル場に対して, $k \leq p$ として, k 個の下付き添字 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ についての対称化および反対称化を

$$T_{(\alpha_1 \dots \alpha_k)} := \frac{1}{k!} \left\{ T_{\alpha_1 \dots \alpha_k} + (\text{sum over permutation of } \alpha_1, \dots, \alpha_k) \right\}, \quad (\text{A.15})$$

$$T_{[\alpha_1 \dots \alpha_k]} := \frac{1}{k!} \left\{ T_{\alpha_1 \dots \alpha_k} + (\text{alternating sum over permutation of } \alpha_1, \dots, \alpha_k) \right\} \quad (\text{A.16})$$

によって与える. ここで, 上の表式において, テンソル場 T のもつ他の添字は見やすさのため省略されている. また, 上付き添字に対しても上の記法を適用する. ある階数 p のテンソル S が完全対称であるとは, S が $S_{(\alpha_i \dots \alpha_p)} = S_{\alpha_i \dots \alpha_p}$ を満たすことをいう. ある階数 p のテンソル場 A が完全反対称であるとは, A が $A_{[\alpha_i \dots \alpha_p]} = A_{\alpha_i \dots \alpha_p}$ を満たすことをいう. その階数 p は $p \leq D$ を満たす.

次に, 完全反対称テンソル場に着目し, 微分形式としての表式を改めて与える. 楔積 \wedge を用いて, 階数 p の完全反対称テンソル場 $A = A_{\alpha_1 \dots \alpha_p} dx^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes dx^{\alpha_p}$ を

$$A = \frac{1}{p!} A_{\alpha_1 \dots \alpha_p} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p} \quad (\text{A.17})$$

と表す. ここで, 基底 dx^α に対する楔積 \wedge は

$$\begin{aligned} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p} &= dx^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes dx^{\alpha_p} + (\text{alternating sum over permutation of } \alpha_1, \dots, \alpha_k) \\ &= \sum_{\beta_i} \text{sgn} \begin{bmatrix} \beta_1 & \dots & \beta_p \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_p \end{bmatrix} dx^{\beta_1} \otimes \dots \otimes dx^{\beta_p} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

のように与えられている. $\text{sgn}[\dots]$ は添字 $(\beta_1, \dots, \beta_p)$ から $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ への交代に伴う交代符号を表し, これは Levi-Civita 記号と

$$\epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_D} = \text{sgn} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_D \\ 1 & \dots & D \end{bmatrix}, \quad \epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_D} = -\text{sgn} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_D \\ 1 & \dots & D \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

のように関係する． $\epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_D}$ につく負符号は時空の計量符号 $(1, D-1)$ からくるものであり，Levi-Civita テンソルを定義するとき計量テンソルによる添字の上げ下げと無矛盾になるために必要とされる．局所座標表示における計量テンソルの行列式は

$$\det g = \frac{1}{D!} \epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_D} \epsilon^{\beta_1 \dots \beta_D} g_{\alpha_1 \beta_1} \dots g_{\alpha_D \beta_D}, \quad (\text{A.20})$$

のように与えられ，これと式 (A.19) で導入した Levi-Civita 記号を組み合わせることで，Levi-Civita テンソルを

$$\varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_D} = \sqrt{-\det g} \epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_D}, \quad \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_D} = \frac{1}{\sqrt{-\det g}} \epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_D} \quad (\text{A.21})$$

のように得る． $g^{\alpha\beta}$ を用いて $\varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_D}$ の添字を上げることで期待通り $\varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_D}$ を得ることができ，同様に $g_{\alpha\beta}$ を用いて $\varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_D}$ から $\varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_D}$ を得る．ここで，Levi-Civita テンソルは公式

$$\nabla_{\alpha_0} \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_D} = 0 \quad (\text{A.22})$$

を満たし，Levi-Civita テンソルは

$$\omega_g = \frac{1}{D!} \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_D} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_D} \quad (\text{A.23})$$

のように時空の体積形式 ω_g と関係する．

次に， p -形式を $(D-p)$ -形式へと移す Hodge 演算子 \star を導入する．Hodge 演算子は p -形式基底に対して，

$$\star [dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p}] = \frac{1}{(D-p)!} \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_p \beta_1 \dots \beta_{D-p}} dx^{\beta_1} \wedge \dots \wedge dx^{\beta_{D-p}} \quad (\text{A.24})$$

のように作用する．よって，Hodge 演算子は p -形式 A を

$$\star A = \frac{1}{p!(D-p)!} A_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_p \beta_1 \dots \beta_{D-p}} dx^{\beta_1} \wedge \dots \wedge dx^{\beta_{D-p}} \quad (\text{A.25})$$

のように $(D-p)$ -形式へと移す．式 (A.25) より，式 $\star \star A = (-)^{p(D-p)+1} A$ という公式を得る．これは具体的に計算して次のように得られる；Levi-Civita テンソルについての公式 $\varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_p \beta_1 \dots \beta_{D-p}} \varepsilon^{\beta_1 \dots \beta_{D-p} \gamma_1 \dots \gamma_p} = (-)^{p(D-p)+1} (D-p)! p! \delta^{\alpha_1}_{[\gamma_1} \dots \delta^{\alpha_p}_{\gamma_p]}$ を応用して，

$$\begin{aligned} \star \star A &= \frac{1}{p!(D-p)!} A_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_p \beta_1 \dots \beta_{D-p}} \star [dx^{\beta_1} \wedge \dots \wedge dx^{\beta_{D-p}}] \\ &= \frac{1}{(p!)^2 (D-p)!} A_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_p \beta_1 \dots \beta_{D-p}} \varepsilon^{\beta_1 \dots \beta_{D-p} \gamma_1 \dots \gamma_p} dx^{\gamma_1} \wedge \dots \wedge dx^{\gamma_{D-p}} \\ &= \frac{(-)^{p(D-p)+1}}{p!} A_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \left(\delta^{\alpha_1}_{[\gamma_1} \dots \delta^{\alpha_p}_{\gamma_p]} dx^{\gamma_1} \wedge \dots \wedge dx^{\gamma_{D-p}} \right) \\ &= (-)^{p(D-p)+1} A \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

を得る．

いよいよ、ここまでで導入した微分形式および Hodge 演算子を用いて、外微分および余微分を導入する。微分 p -形式 A の外微分は

$$\begin{aligned} dA &= \frac{1}{p!} \partial_\beta A_{\alpha_1 \dots \alpha_p} dx^\beta \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p} \\ &= \frac{1}{p!} \nabla_\beta A_{\alpha_1 \dots \alpha_p} dx^\beta \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p} \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

と定義される。ここで、式 (A.27) において偏微分を共変微分に書き直すときに、Christoffel 係数の添字についての対称性 $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}$ を用いた。また、 A の余微分は

$$\delta A = -\star d\star A \quad (\text{A.28})$$

と定義される。

A.2 Einstein 方程式

曲率

X, Y, Z をベクトル場として、Riemann 曲率テンソルは

$$\text{Riem}(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{\mathcal{L}_X Y} Z \quad (\text{A.29})$$

と定義される。局所座標系において、Riemann 曲率テンソルは

$$\text{Riem}(X, Y)Z = R^\alpha_{\beta\gamma\delta} Z^\beta X^\gamma Y^\delta \partial_\alpha \quad (\text{A.30})$$

と表され、 $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ を

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} Z^\beta = (\nabla_\gamma \nabla_\delta - \nabla_\delta \nabla_\gamma) Z^\alpha \quad (\text{A.31})$$

のように得る。これをさらに書き換えると、

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^\alpha_{\gamma\epsilon} \Gamma^\epsilon_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\delta\epsilon} \Gamma^\epsilon_{\beta\gamma} \quad (\text{A.32})$$

となる。ここで、足を全て下付きにした Riemann 曲率テンソル $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\epsilon} R^\epsilon_{\beta\gamma\delta}$ は

$$R_{(\alpha\beta)\gamma\delta} = 0, \quad R_{\alpha\beta(\gamma\delta)} = 0, \quad R_{\alpha\beta\gamma\delta} - R_{\gamma\delta\alpha\beta} = 0, \quad (\text{A.33})$$

$$R_{[\alpha\beta\gamma]\delta} = 0, \quad \nabla_{[\epsilon} R_{\alpha\beta]\gamma\delta} = 0 \quad (\text{A.34})$$

に従うことに言及しておく。最後の2つの式はそれぞれ第1および第2 Bianchi 恒等式として知られているものである。Ricci テンソルは、計量テンソルによる Riemann 曲率テンソルのトレースとして定義される。つまり、

$$R_{\beta\delta} = g^{\alpha\gamma} R_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (\text{A.35})$$

である。さらに Ricci テンソルのトレースをとることによって、スカラー曲率

$$R = g^{\beta\delta} R_{\beta\delta} \quad (\text{A.36})$$

を得る。

Einstein 方程式

時空の曲率と時空上の物質場の分布は、Einstein 方程式

$$G_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta} \quad (\text{A.37})$$

によって対応している。ここで、テンソル $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2}g_{\alpha\beta}$ は Einstein テンソルと呼ばれる。本項では、高々宇宙項のみを含む Einstein 方程式を考える。Einstein 方程式は

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.38})$$

である。高々宇宙項を含む Einstein 方程式を導く作用は Einstein-Hilbert 作用と呼ばれ、

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^D x \sqrt{-\det g} (R - 2\Lambda) \quad (\text{A.39})$$

によって与えられる。

A.3 線形計量摂動方程式

時空の計量摂動とは、他の時空 (\tilde{M}, \tilde{g}) への滑らかな微分同相写像 $\phi: M \rightarrow \tilde{M}$ から誘導される計量テンソルの変換 $\phi_*\tilde{g} = g + \Delta g$ に現れる 2 階の対称テンソル $h = \Delta g$ である。ここで、摂動をとる前の計量テンソル g 及び摂動をとった後の計量テンソル \tilde{g} をそれぞれ背景計量テンソル及び全計量テンソルと呼ぶ。

計量摂動 h の従う方程式及びこれを導く作用は、背景計量テンソル g の従う Einstein 方程式及び Einstein-Hilbert 作用の変分より得られる。これらを導出するための準備として、線形計量摂動 h に伴う逆計量テンソル及び曲率の変分を計算する。ここで、本稿では線形計量摂動を考えることから、作用を得るために諸々の h についての 2 次迄の摂動が必要である。

逆計量テンソル g^{-1} の 2 次までの摂動は、 g 及び \tilde{g} の従う関係式

$$\tilde{g}_{\alpha\gamma}\tilde{g}^{\gamma\beta} = g_{\alpha\gamma}g^{\gamma\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta} \quad (\text{A.40})$$

に $\tilde{g}^{-1} = g^{-1} + \Delta g^{-1}$ を代入して導かれる。ここで、逆計量テンソルの摂動 Δg^{-1} は h の次数毎に $\Delta g^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} {}^{(i)}\Delta g^{-1}$ と展開される。実際に 1 次及び 2 次の摂動を計算すると、

$${}^{(1)}\Delta g^{\alpha\beta} = -h^{\alpha\beta}, \quad {}^{(2)}\Delta g^{\alpha\beta} = h^{\alpha\gamma}h^{\beta}_{\gamma} \quad (\text{A.41})$$

となる。ここで、 h の足の上げ下げは背景計量テンソル g によって行われている。以下では、計量テンソルの行列式、Christoffel 記号、Riemann 曲率テンソル、Ricci テンソル及びスカラー曲率の摂動を計算する。

- 計量テンソルの行列式は式 (A.20) によって与えられている。この摂動は、：

$${}^{(1)}\sqrt{-g} = \frac{\sqrt{-g}}{2} h^{\gamma}_{\gamma}, \quad {}^{(2)}\sqrt{-g} = \frac{\sqrt{-g}}{4} \left(\frac{h^{\gamma}_{\gamma}{}^2}{2} - h^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta} \right) \quad (\text{A.42})$$

と計算される。

- Christoffel 記号は式 (A.11) によって与えられている。これの摂動は

$${}^{(1)}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}(\nabla_\beta h_{\gamma}^\alpha + \nabla_\gamma h_{\beta}^\alpha - \nabla^\alpha h_{\beta\gamma}), \quad {}^{(2)}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = -\frac{1}{2}h^{\alpha\delta}(\nabla_\beta h_{\gamma\delta} + \nabla_\gamma h_{\beta\delta} - \nabla_\delta h_{\beta\gamma}) \quad (\text{A.43})$$

と計算される。余談として、これらの表式を用いて 2 次までの摂動のもとで全計量テンソル \tilde{g} は metricity 条件 $\tilde{\nabla}_\mu \tilde{g}_{\nu\rho} = 0$ を満足することを確認できる。

- Riemann 曲率テンソルは式 (A.32) において与えられている。これの摂動は

$$\begin{aligned} {}^{(1)}R^\alpha_{\beta\gamma\delta} &= 2\nabla_{[\gamma} {}^{(1)}\Gamma^\alpha_{\delta]\beta} \\ &= \frac{1}{2}({}^{(0)}R^\alpha_{\epsilon\gamma\delta} h^\epsilon_\beta - {}^{(0)}R^\epsilon_{\beta\gamma\delta} h^\alpha_\epsilon) + \nabla_{[\gamma}(\nabla_\beta h^\alpha_{|\delta]} - \nabla^\alpha h_{|\delta]\beta}), \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

及び

$$\begin{aligned} {}^{(2)}R^\alpha_{\beta\gamma\delta} &= 2(\nabla_{[\gamma} {}^{(2)}\Gamma^\alpha_{\delta]\beta} + {}^{(1)}\Gamma^\alpha_{\epsilon[\gamma} {}^{(1)}\Gamma^\epsilon_{\delta]\beta}) \\ &= 2(-\nabla_{[\gamma}(h^\alpha_{\lambda} {}^{(1)}\Gamma^\lambda_{\delta]\beta}) + {}^{(1)}\Gamma^\alpha_{\epsilon[\gamma} {}^{(1)}\Gamma^\epsilon_{\delta]\beta}) \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

と計算される。

- Ricci テンソルの摂動は

$$\begin{aligned} {}^{(1)}R_{\beta\delta} &= {}^{(1)}R^\alpha_{\beta\alpha\delta} = 2\nabla_{[\alpha} {}^{(1)}\Gamma^\alpha_{\delta]\beta} \\ &= \nabla^\alpha \nabla_{(\beta} h_{\delta)\alpha} - \frac{1}{2}(\nabla \cdot \nabla h_{\beta\delta} + \nabla_\beta \nabla_\delta h) \\ &= {}^{(0)}R_{\lambda(\beta} h^\lambda_{\delta)} - {}^{(0)}R_{\alpha\beta\gamma\delta} h^{\alpha\gamma} + \nabla_{(\beta} \nabla^\alpha h_{\delta)\alpha} - \frac{1}{2}(\nabla_\beta \nabla_\delta h - \nabla \cdot \nabla h_{\beta\delta}), \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

及び

$${}^{(2)}R_{\beta\delta} = {}^{(2)}R^\alpha_{\beta\gamma\delta} - h_{\alpha\mu} h^{\mu\gamma} {}^{(0)}R^\alpha_{\beta\gamma\delta} \quad (\text{A.47})$$

と計算される。余談として、式 (A.46) における表式 $\delta R_{\beta\delta} = 2\nabla_{[\alpha} \delta \Gamma^\alpha_{\delta]\beta}$ は Palatini 恒等式として知られている。

- スカラー曲率の摂動は

$${}^{(1)}R = \nabla_\alpha \nabla_\beta h^{\alpha\beta} - \nabla \cdot \nabla h - h^{\beta\delta} {}^{(0)}R_{\beta\delta}, \quad (\text{A.48})$$

及び

$$\begin{aligned} {}^{(2)}R &= g^{\beta\delta} {}^{(2)}R_{\beta\delta} - h^{\beta\delta} {}^{(1)}R_{\beta\delta} \\ &= -2{}^{(1)}\Gamma_{\epsilon[\alpha} {}^{(1)}\Gamma^{\epsilon\delta}_{\delta]\beta} - 2(g^{\beta\delta} h^\alpha_\epsilon \nabla_{[\alpha} + h^{\beta\delta} \nabla_{[\epsilon}) {}^{(1)}\Gamma^\epsilon_{\delta]\beta} - h^{\beta\epsilon} h^\delta_\epsilon {}^{(0)}R_{\beta\delta} \\ &= \frac{3}{4}\nabla_\alpha h_{\beta\gamma} \nabla^\alpha h^{\beta\gamma} - \frac{1}{2}\nabla_\alpha h_{\beta\gamma} \nabla^\gamma h^{\alpha\beta} - \nabla^\alpha h_{\alpha\lambda} \nabla_\beta h^{\beta\lambda} + \nabla^\alpha h_{\alpha\lambda} \nabla^\lambda h - \frac{1}{4}\nabla_\lambda h \nabla^\lambda h \\ &\quad + h^{\alpha\lambda} (-2\nabla_\delta \nabla_\alpha h^\delta_\lambda + \nabla_\alpha \nabla_\lambda h + \nabla \cdot \nabla h_{\alpha\lambda}) + {}^{(0)}R_{\alpha\beta\gamma\delta} h^{\alpha\gamma} h^{\beta\delta} \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

と計算される。

上で計算した2次までの計量及び曲率の摂動された量が得られると、 h に関する場の方程式及び線形計量摂動の作用を得る。線形計量摂動の従う方程式およびこれを生成する汎関数はそれぞれ

$${}^{(1)}G_{\mu\nu} + \Lambda h_{\mu\nu} = 8\pi G {}^{(1)}T_{\mu\nu} \quad (\text{A.50})$$

及び

$${}^{(2)}\delta S_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^m x \left[{}^{(0)}\sqrt{-g} {}^{(2)}R + {}^{(1)}\sqrt{-g} {}^{(1)}R + {}^{(2)}\sqrt{-g} ({}^{(0)}R - 2\Lambda) \right] \quad (\text{A.51})$$

と与えられる。これらを計算すると、

$$\begin{aligned} {}^{(1)}G_{\beta\delta} + \Lambda h_{\beta\delta} &= {}^{(0)}R_{\lambda(\beta} h^{\lambda}_{\delta)} - {}^{(0)}R_{\alpha\beta\gamma\delta} h^{\alpha\gamma} + \nabla_{(\beta} \nabla^{\alpha} h_{\delta)\alpha} - \frac{1}{2} (\nabla_{\beta} \nabla_{\delta} h - \nabla \cdot \nabla h_{\beta\delta}) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\nabla_{\alpha} \nabla_{\gamma} h^{\alpha\gamma} - \nabla \cdot \nabla h - h^{\beta\delta} {}^{(0)}R_{\beta\delta}) g_{\beta\delta} - \frac{1}{2} ({}^{(0)}R - 2\Lambda) h_{\alpha\beta} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

及び

$$\begin{aligned} S_{\text{EH}}^{(2)} &= \frac{1}{32\pi G} \int d^m x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} \nabla^{\alpha} h^{\beta\gamma} \nabla_{\alpha} h_{\beta\gamma} + \nabla^{\alpha} h_{\alpha\gamma} \nabla_{\beta} h^{\beta\gamma} - \nabla_{\alpha} h \nabla_{\beta} h^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \nabla_{\alpha} h \nabla^{\alpha} h \right. \\ &\quad \left. + ({}^{(0)}R_{\alpha\beta\gamma\delta} h^{\alpha\gamma} h^{\beta\delta} + {}^{(0)}R_{\alpha\gamma} (-h^{\alpha\gamma} h + h^{\alpha}_{\beta} h^{\beta\gamma}) + \frac{1}{2} ({}^{(0)}R - 2\Lambda) \left(\frac{h^2}{2} - h^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

を得る。ここで、 $S_{\text{EH}}^{(2)}$ について、全微分項は落とした。これらは

$${}^{(1)}G_{\alpha\beta} = -\frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S^{(2)}}{\delta h^{\alpha\beta}} \quad (\text{A.54})$$

の関係にある。

付録 B 球面調和関数

各種座標系における 3 次元単位球面 S^3 上の Killing ベクトル場及び球面調和関数をここにまとめる。第 3 章では, hyperspherical 座標系 $(\chi, \vartheta, \varphi)$ における球面調和関数を \mathbb{S} とおき, スカラーハーモニクスと呼んだ。また, 第 4 章では, $SU(2) \times SU(2)$ と相性の良い座標系 $(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi})$ における球面調和関数を \mathbb{D} と表し, これを Wigner \mathbb{D} 関数と呼んだ。本章においてはこれら 2 種類の座標系に加え Hopf 座標系も扱うため, 面倒なので, 異なる記号を用いることによる座標系の区別を撤廃し, 球面調和関数を統一的に \hat{Y} と表す。

いずれの座標系にも共通する事項を先にまとめておく。4 次元 Euclidean 座標系における Cartesian 座標系を (x_1, x_2, x_3, x_4) と表す。3 次元単位球面 S^3 は

$$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{E}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\} \quad (\text{B.1})$$

と定義される。 S^3 上の計量テンソルは, Euclidean 計量テンソルを S^3 上に制限することによって,

$$\gamma = (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2)^\perp \quad (\text{B.2})$$

と得られる。

S^3 上の Killing ベクトル場は $SO(4)$ の生成子であり, 6 種類の独立な Killing ベクトル場を

$$\xi_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a, \quad a, b \in \{1, 2, 3, 4\} \quad (\text{B.3})$$

と得る。

各節において, S^3 上の各種座標系について, 球面調和関数 \hat{Y} の従う固有値方程式

$$\hat{\Delta} \hat{Y} = -E \hat{Y} \quad (\text{B.4})$$

を解く。ここで, $\hat{\Delta} = \hat{D}^i \hat{D}_i$ は S^3 上の Laplace 演算子であり, E は定数である。 S^3 上のとある座標系 z^i について, $\hat{\Delta}$ は

$$\hat{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{\det \gamma}} \partial_i \left[\sqrt{\det \gamma} \gamma^{ij} \partial_j \right] \quad (\text{B.5})$$

により導出できる。

B.1 Hyperspherical 座標系

S^3 上の hyperspherical 座標系 $(\chi, \vartheta, \varphi)$ は

$$x_1 = \cos \chi, \quad x_2 = \sin \chi \cos \vartheta, \quad x_3 = \sin \chi \sin \vartheta \cos \varphi, \quad x_4 = \sin \chi \sin \vartheta \sin \varphi \quad (\text{B.6})$$

より与えられる。座標の定義域は $0 \leq \chi \leq \pi, 0 \leq \vartheta \leq \pi$ 及び $0 \leq \varphi < 2\pi$ である。

B.1.1 計量テンソル

上の座標変換の式より, hyperspherical 座標系に伴うコベクトル基底は Cartesian 座標系と

$$dx_1 = -\sin \chi d\chi, \quad (\text{B.7a})$$

$$dx_2 = \cos \chi \cos \vartheta d\chi - \sin \chi \sin \vartheta d\vartheta, \quad (\text{B.7b})$$

$$dx_3 = \cos \chi \sin \vartheta \cos \varphi d\chi + \sin \chi \cos \vartheta \cos \phi d\vartheta - \sin \chi \sin \vartheta \sin \varphi d\varphi, \quad (\text{B.7c})$$

$$dx_4 = \cos \chi \sin \vartheta \sin \varphi d\chi + \sin \chi \cos \vartheta \sin \varphi d\vartheta + \sin \chi \sin \vartheta \cos \phi d\varphi \quad (\text{B.7d})$$

のように関係する. S^3 の計量テンソル γ

$$\gamma = d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (\text{B.8})$$

と表される, 行列式は $\det \gamma = \sin^4 \chi \sin^2 \vartheta$ となる.

B.1.2 Killing ベクトル場

Hyperspherical 座標系に伴うベクトル基底は

$$\partial_\chi = -\sin \chi \partial_1 + \cos \chi \cos \vartheta \partial_2 + \cos \chi \sin \vartheta \cos \varphi \partial_3 + \cos \chi \sin \vartheta \sin \varphi \partial_4, \quad (\text{B.9a})$$

$$\partial_\vartheta = -\sin \chi \sin \vartheta \partial_2 + \sin \chi \cos \vartheta \cos \varphi \partial_3 + \sin \chi \cos \vartheta \sin \varphi \partial_4, \quad (\text{B.9b})$$

$$\partial_\varphi = -\sin \chi \sin \vartheta \sin \varphi \partial_3 + \sin \chi \sin \vartheta \cos \varphi \partial_4 \quad (\text{B.9c})$$

である. 式 (B.9b) 及び (B.9c) より得られる補助的な式

$$\sin \chi \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \chi} + \cos \chi \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} = -\sin^2 \chi \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin \chi \cos \chi \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial x_3} + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x_4} \right), \quad (\text{B.10a})$$

$$\sin \chi \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \chi} - \cos \chi \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} = -\sin^2 \chi \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin \chi \cos \chi \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (\text{B.10b})$$

を経由して, S^3 上の Killing ベクトル場の表式を

$$\xi_{13} = \sin \vartheta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \chi} + \cot \chi \cos \vartheta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \cot \chi \sec \vartheta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (\text{B.11a})$$

$$\xi_{14} = \sin \vartheta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \chi} + \cot \chi \cos \vartheta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \cot \chi \sec \vartheta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (\text{B.11b})$$

$$\xi_{12} = \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \chi} - \cot \chi \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \quad (\text{B.11c})$$

$$\xi_{23} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \cot \vartheta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (\text{B.11d})$$

$$\xi_{42} = -\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \cot \vartheta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (\text{B.11e})$$

$$\xi_{34} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (\text{B.11f})$$

のように得る.

B.1.3 球面調和関数

S^2 上の球面調和関数

のちに示すように、 S^3 上の球面調和関数 \hat{Y} の従う固有値方程式を変数分離すると、座標 (ϑ, φ) 方向の微分方程式はまさに 2 次元単位球面 S^2 上の球面調和関数に対する固有値方程式となる。よって、 S^3 上の球面調和関数を解くことの準備として、 S^2 上の球面調和関数を解く。

球座標系を (ϑ, φ) として、 S^2 上の球面調和関数 $Y(\vartheta, \varphi)$ の従う固有値方程式

$$\hat{\Delta}_{S^2} Y = -FY \quad (\text{B.12})$$

を解く。ここで、 F はとある定数であり、 $\hat{\Delta}_{S^2}$ は

$$\hat{\Delta}_{S^2} = \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left[\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \quad (\text{B.13})$$

によって与えられる S^2 上の Laplace 演算子である。 Y の変数分離 $Y(\vartheta, \varphi) = \Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)$ を行くと、固有値方程式 (B.13) は

$$\left[\sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \right) + F \sin^2 \vartheta \right] \Theta = G\Theta, \quad (\text{B.14a})$$

$$-\frac{d^2}{d\varphi^2} \Phi = G\Phi \quad (\text{B.14b})$$

と分解される。ここで G は変数分離定数である。常微分方程式 (B.14b) の一般解を $\Phi \propto e^{\pm i\sqrt{G}\varphi}$ の重ね合わせとして得る。 Φ は S^1 上の関数であることから周期的境界条件 $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ に従うため、 m を整数として解は $Y \propto e^{-im\varphi}$ に制限され、また、変数分離定数 G の値は $G = m^2$ に制限される。ここまでの結果より、球面調和関数は $Y = \sum_m \Theta_m(\vartheta)e^{-im\varphi}$ と展開される。これを式 (B.14a) へと代入すると、 Θ_m の従う常微分方程式を

$$\left[\sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \right) + F \sin^2 \vartheta \right] \Theta_m = m^2 \Theta_m \quad (\text{B.15})$$

のように得る。微分方程式 (B.15) は $\sin \vartheta = 0$ となる ϑ に特異点を持つ。 $\sin \vartheta = 0$ 付近において、微分方程式は

$$\left[\sin \vartheta \frac{d}{d(\sin \vartheta)} \left(\sin \vartheta \frac{d}{d(\sin \vartheta)} \right) + F \sin^2 \vartheta - m^2 \right] \Theta_m \simeq 0 \quad (\text{B.16})$$

と近似されることから、 $\sin \vartheta = 0$ 付近における Θ_m の振る舞いを $\Theta_m \propto \sin^{(|m|)} \vartheta$ と得る。このことから、 Θ_m を改めて $\Theta_m = \sin^{(|m|)} \vartheta f_{|m|}$ と置き、これを式 (B.15) へと代入すると、 $f_{|m|}$ の従う微分方程式を

$$\left[(1 - \cos^2 \vartheta) \frac{d^2}{d(\cos \vartheta)^2} - 2(|m| + 1) \cos \vartheta \frac{d}{d(\cos \vartheta)} - |m|(|m| + 1) + F \right] f_{|m|} = 0 \quad (\text{B.17})$$

のように得る. $f_{|m|}$ の冪級数展開 $f_{|m|} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cos^i \vartheta$ に対し, 常微分方程式は

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left[a_{i+2}(i+2)(i+1) - a_i \left((i+|m|)(i+|m|+1) - F \right) \right] \cos^i \vartheta = 0, \quad (\text{B.18})$$

と変形され, 則ち特性方程式

$$a_{i+2} = \frac{(i+|m|)(i+|m|+1) - F}{(i+2)(i+1)} a_i \quad (\text{B.19})$$

に帰着する. $f_{|m|}$ が次数 $i \in \mathbb{N}_0$ の有限多項式であるとき, $a_{i+2} = 0$ 及び $a_i \neq 0$ より, 変数分離定数 F の値は $F = (i+|m|)(i+|m|+1)$ に定まる. 非負整数 ℓ は $\ell := k + |m|$ によって導入すると, $F_\ell = \ell(\ell+1)$ となる.

S^3 上の球面調和関数

球面調和関数 \hat{Y} の従う固有値方程式 $\hat{\Delta}\hat{Y} = -E\hat{Y}$ を hyperspherical 座標系 $(\chi, \vartheta, \varphi)$ において解く. 式 (B.4) より Laplace 演算子 $\hat{\Delta}$ は

$$\hat{\Delta} = \frac{1}{\sin^2 \chi} \left[\frac{\partial}{\partial \chi} \left(\sin^2 \chi \frac{\partial}{\partial \chi} \right) + \hat{\Delta}_{S^2} \right] \quad (\text{B.20})$$

と表される. 式 (B.20) が含む $\hat{\Delta}_{S^2}$ は S^2 上の Laplace 演算子であり, 式 (B.13) において与えられている. 球面調和関数 \hat{Y} の変数分離 $\hat{Y}(\chi, \vartheta, \varphi) = H(\chi)Y(\vartheta, \varphi)$ を行うと, 固有値方程式は

$$\left[\frac{d}{d\chi} \left(\sin^2 \chi \frac{d}{d\chi} \right) + E \sin^2 \chi \right] H = FH, \quad (\text{B.21a})$$

$$-\hat{\Delta}_{S^2} Y = FY \quad (\text{B.21b})$$

と書き直される. ここで F は変数分離に伴う定数である. 式 (B.21b) は S^2 上の球面調和関数に対する固有値方程式であり, 上で既に解いた. 結果としては, $\ell \geq 0$ 及び $|m| \leq \ell$ を満足する整数 ℓ 及び m について Y は $Y = \sum_{\ell, m} Y^{\ell m}$ と展開されることを得, また, 各 $Y^{\ell m}$ に対して変数分離定数は $F_\ell = \ell(\ell+1)$ と定められることを得た. このことから, S^3 上の球面調和関数 \hat{Y} は $\hat{Y} = \sum_{\ell, m} H^\ell(\chi)Y^{\ell m}(\vartheta, \varphi)$ と展開され, 式 (B.21a) より $H^\ell(\chi)$ の従う常微分方程式を

$$\left[\frac{d}{d\chi} \left(\sin^2 \chi \frac{d}{d\chi} \right) + E \sin^2 \chi \right] H^\ell = \ell(\ell+1)H^\ell \quad (\text{B.22})$$

のように得る. この微分方程式は $\sin \chi = 0$ となる χ に特異点をもつ. $\sin \chi = 0$ 付近において, 微分方程式は

$$\left[\sin \chi \frac{d}{d(\sin \chi)} \left(\sin \chi \frac{d}{d(\sin \chi)} \right) + \sin \chi \frac{d}{d(\sin \chi)} + E \sin^2 \chi - \ell(\ell+1) \right] H^\ell \simeq 0 \quad (\text{B.23})$$

と近似されることより, $\sin \chi = 0$ 付近における H^ℓ の振る舞いを $H^\ell \propto \sin^\ell \chi$ のように得る. 改めて $H^\ell = \sin^\ell \chi f_\ell(\chi)$ を式 (B.22) へと代入すると, $f_\ell(\chi)$ の従う常微分方程式を

$$\left[(1 - \cos^2 \chi) \frac{d^2}{d(\cos \chi)^2} - (2\ell + 3) \cos \chi \frac{d}{d(\cos \chi)} - \ell(\ell + 2) + E \right] f_\ell = 0 \quad (\text{B.24})$$

のように得る. これに冪級数展開 $f_\ell = \sum_i a_i \cos^i \chi$ を代入すると,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left[a_{i+2}(i+2)(i+1) - a_i \left((i+l)(i+l+2) - E \right) \right] \cos^i \chi = 0 \quad (\text{B.25})$$

となり, 即ち特性方程式

$$a_{i+2}(i+2)(i+1) - a_i \left((i+l)(i+l+2) - E \right) = 0 \quad (\text{B.26})$$

を得る. f_ℓ が次数 i の有限多項式であるとき, $a_{i+2} = 0$ 及び $a_i \neq 0$ より, 変数分離定数 E は $E = (i+l)(i+l+2)$ と定められる. $k := i+l$ として $E = k(k+2)$ を得る.

結局, $k \geq 0, k \geq \ell \geq 0$ 及び $|m| \leq \ell$ を満足する整数 k, ℓ 及び m について, S^3 上の球面調和関数 \hat{Y} は $\hat{Y} = \sum_{k,\ell,m} \hat{Y}^{k\ell m}$ と展開される. k をある非負整数に固定したとき, とりうる (k, ℓ, m) の個数は $(k+1)^2$ 個である.

B.2 Hopf 座標系

S^3 上の Hopf 座標系 (θ, ϕ, ψ) は

$$x_1 = \sin \theta \cos \phi, \quad x_2 = \sin \theta \sin \phi, \quad x_3 = \cos \theta \cos \psi, \quad x_4 = \cos \theta \sin \psi \quad (\text{B.27})$$

のように与えられる. 定義域は $\theta \in [0, \pi/2]$ 及び $\phi, \psi \in [0, 2\pi)$ である.

B.2.1 計量テンソル

上の座標変換より直ちに

$$dx_1 = \cos \theta \cos \phi d\theta - \sin \theta \sin \phi d\phi, \quad (\text{B.28a})$$

$$dx_2 = \cos \theta \sin \phi d\theta + \sin \theta \cos \phi d\phi, \quad (\text{B.28b})$$

$$dx_3 = -\sin \theta \cos \psi d\eta - \cos \theta \sin \psi d\psi, \quad (\text{B.28c})$$

$$dx_4 = -\sin \theta \sin \psi d\eta + \cos \theta \cos \psi d\psi \quad (\text{B.28d})$$

が得られる. S^3 の計量テンソル γ は Hopf 座標系 (θ, ϕ, ψ) において

$$g = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 + \cos^2 \theta d\psi^2 \quad (\text{B.29})$$

と得られる.

B.2.2 Killing ベクトル場

Hopf 座標系 (θ, ϕ, ψ) に伴うベクトル基底は

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \cos \theta \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin \phi \frac{\partial}{\partial x_2} \right) - \sin \theta \left(\cos \psi \frac{\partial}{\partial x_3} + \sin \psi \frac{\partial}{\partial x_4} \right), \quad (\text{B.30a})$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = -\sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad (\text{B.30b})$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} = -\cos \theta \sin \psi \frac{\partial}{\partial x_3} + \cos \theta \cos \psi \frac{\partial}{\partial x_4} \quad (\text{B.30c})$$

と与えられる。Killing ベクトル場は

$$\xi_{13} = -\cos \phi \cos \psi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \eta \sin \phi \cos \psi \frac{\partial}{\partial \phi} - \tan \eta \cos \phi \sin \psi \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad (\text{B.31a})$$

$$\xi_{41} = \cos \phi \sin \psi \frac{\partial}{\partial \eta} - \cot \theta \sin \phi \sin \psi \frac{\partial}{\partial \phi} - \tan \theta \cos \phi \cos \psi \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad (\text{B.31b})$$

$$\xi_{12} = \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (\text{B.31c})$$

$$\xi_{23} = -\sin \phi \cos \psi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \cos \phi \cos \psi \frac{\partial}{\partial \phi} - \tan \theta \sin \phi \sin \psi \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad (\text{B.31d})$$

$$\xi_{42} = \sin \xi_1 \sin \psi \frac{\partial}{\partial \eta} + \cot \theta \cos \phi \sin \psi \frac{\partial}{\partial \phi} - \tan \theta \sin \phi \cos \psi \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad (\text{B.31e})$$

$$\xi_{34} = \frac{\partial}{\partial \psi} \quad (\text{B.31f})$$

と表される。

球面調和関数

球面調和関数 Y の従う固有値方程式 $\hat{\Delta}Y = -EY$ を Hopf 座標系において解く。式 (B.5) より, Laplace 演算子 $\hat{\Delta}$ は

$$\hat{\Delta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right] \quad (\text{B.32})$$

と計算される。変数分離 $Y = H(\theta)\Xi_1(\phi)\Xi_2(\psi)$ により, 固有値方程式 $\hat{\Delta}Y = -EY$ は

$$\left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + (\sin \theta \cos \theta)E - \frac{\cos \theta}{\sin \theta}F - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}G \right] H = 0, \quad (\text{B.33a})$$

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - F \right) \Xi_1 = 0, \quad (\text{B.33b})$$

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial \psi^2} - G \right) \Xi_2 = 0 \quad (\text{B.33c})$$

と分解される。ここで F 及び G は変数分離に伴う定数である。式 (B.33b) 及び (B.33c) の一般解は, それぞれ $\Xi_1 \propto e^{\pm i\sqrt{F}\phi}$ 及び $\Xi_2 \propto e^{-i\sqrt{G}\psi}$ である。境界条件 $\Xi_1(\phi+2\pi) = \Xi_1(\phi)$

及び $\Xi_2(\psi + 2\pi) = \Xi_2(\psi)$ を考慮すると, m_1 及び m_2 を整数として, 解はそれぞれ $\Xi_1 \propto e^{-im_1\phi}$ 及び $\Xi_2 \propto e^{-im_2\psi}$ に制限され, 変数分離定数は $F = m_1^2$ 及び $G = m_2^2$ に制限される. 以上より, 球面調和関数 Y は各モード (m_1, m_2) の重ね合わせとして $Y = \sum_{m_1, m_2 \in \mathbb{Z}} H_{m_1, m_2}(\theta) e^{-im_1\phi} e^{-im_2\psi}$ と表される. これを式 (B.33a) へと代入すると, H_{m_1, m_2} の従う方程式を

$$\left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + (\sin \theta \cos \theta) E + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} m_1^2 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} m_2^2 \right] H_{m_1, m_2} = 0 \quad (\text{B.34})$$

のように得る. この常微分方程式は, $\sin \theta \cos \theta = 0$ となる θ に特異点を持つ. 近似を含んだ計算を行うと, H_{m_1, m_2} は $\sin \theta = 0$ 付近において $H_{m_1, m_2} \propto \sin^{|m_1|} \theta$ のように振る舞い, また, $\cos \theta = 0$ 付近において $H_{m_1, m_2} \propto \cos^{|m_2|} \theta$ のように振る舞う. 改めて, $H_{m_1, m_2} = \sin^{|m_1|} \theta \cos^{|m_2|} \theta f_{|m_1|, |m_2|}(\theta)$ を式 (B.34) へと代入すると, $f_{|m_1|, |m_2|}$ の従う常微分方程式を

$$\left[\frac{d^2}{d\theta^2} + \left\{ (2|m_1| + 1) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - (2|m_2| + 1) \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right\} \frac{d}{d\theta} + \left\{ -(|m_1| + |m_2|) (|m_1| + |m_2| + 2) + E \right\} \right] f_{|m_1|, |m_2|} = 0 \quad (\text{B.35})$$

のように得る. これはさらに

$$\left[(1 - \cos^2 2\theta) \frac{d^2}{d(\cos 2\theta)^2} - \left\{ |m_1| - |m_2| + (|m_1| + |m_2| + 2) \cos 2\theta \right\} \frac{d}{d(\cos 2\theta)} + \frac{1}{4} \left\{ -(|m_1| + |m_2|) (|m_1| + |m_2| + 2) + E \right\} \right] f_{|m_1|, |m_2|} = 0 \quad (\text{B.36})$$

と変形される. $f_{|m_1|, |m_2|} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cos^i 2\theta$ を代入して, 特性方程式を

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left[a_{i+2} (i+2)(i+1) - a_{i+1} (i+1) (|m_1| - |m_2|) - \frac{1}{4} a_i \left\{ (2i + |m_1| + |m_2|) (2i + |m_1| + |m_2| + 2) - E \right\} \right] \cos^i 2\theta = 0 \quad (\text{B.37})$$

のように得る. $f_{|m_1|, |m_2|}$ が i 次の有限多項式であり, また, i に応じて偶数または奇数次の項しか有さないとすると, $a_{i+2} = a_{i+1} = 0$ 及び $a_i \neq 0$ より変数分離定数 E として許される値は $E = (2i + |m_1| + |m_2|) (2i + |m_1| + |m_2| + 2)$ に制限される. さらに $k := 2i + |m_1| + |m_2|$ とおくと, $E = k(k+2)$ を得る. k は自然数である. また, k の偶奇と $|m_1| + |m_2|$ の偶奇は対応する.

B.3 $SU(2) \times SU(2)$ と相性の良い座標系

Hopf 座標系における S^3 の計量テンソルの表式 (B.29) は

$$\gamma = d\theta^2 + \sin^2 \theta \cos^2 \theta (-d\phi + d\psi)^2 + (\sin^2 \theta d\phi + \cos^2 \theta d\psi)^2 \quad (\text{B.38})$$

と書き直される.

別の座標系 $(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi})$ を

$$\tilde{\theta} = 2\theta, \quad \tilde{\psi} = -\phi + \psi, \quad \tilde{\phi} = \phi + \psi \quad (\text{B.39})$$

によって導入する. もしくは,

$$\theta = \frac{1}{2}\tilde{\theta}, \quad \phi = \frac{1}{2}(\tilde{\phi} - \tilde{\psi}), \quad \psi = \frac{1}{2}(\tilde{\phi} + \tilde{\psi}) \quad (\text{B.40})$$

である. 座標 $(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi})$ のとる定義域は, $\tilde{\theta} \in [0, \pi]$ に加え, 例えば $\tilde{\psi} \in [0, 2\pi]$ 及び $\tilde{\phi} \in [0, 4\pi]$ ととれる.

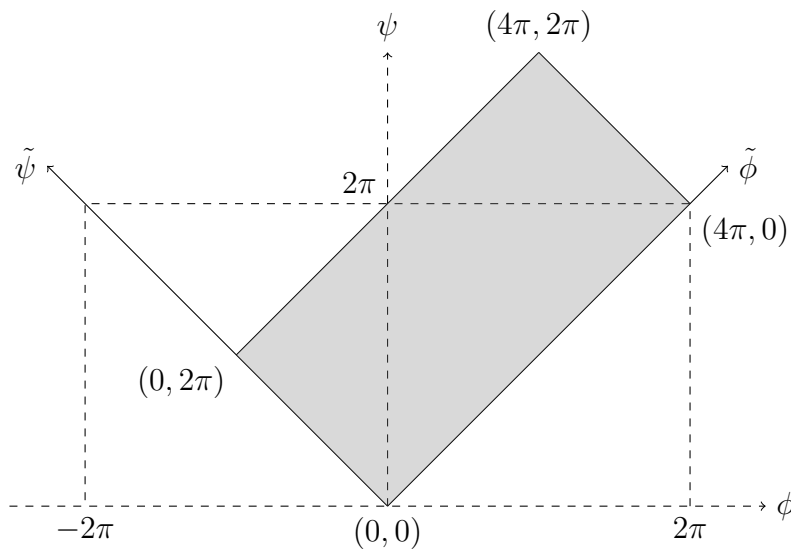


図 B.1: 座標 $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})$ の定義域

B.3.1 計量テンソル

座標系 $(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi})$ において, 計量テンソルは

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{4} \left\{ d\tilde{\theta}^2 + \sin^2 \tilde{\theta} d\tilde{\psi}^2 + (d\tilde{\phi} + \cos \tilde{\theta} d\tilde{\psi})^2 \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(d\tilde{\theta}^2 + d\tilde{\phi}^2 + 2 \cos \tilde{\theta} d\tilde{\phi} d\tilde{\psi} + d\tilde{\psi}^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

と表される. 行列式は $\det \gamma = \frac{1}{4} \sin^2 \tilde{\theta}$ と計算される. 逆計量テンソルは

$$\gamma^{-1} = 4 \left\{ (\partial_{\tilde{\theta}})^2 + \frac{1}{\sin^2 \tilde{\theta}} \left((\partial_{\tilde{\phi}})^2 - 2 \cos \tilde{\theta} \partial_{\tilde{\phi}} \partial_{\tilde{\psi}} + (\partial_{\tilde{\psi}})^2 \right) \right\} \quad (\text{B.42})$$

と計算される.

B.3.2 Killing ベクトル場

ベクトル基底は

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 2 \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}}, \quad (\text{B.43a})$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = -\frac{\partial}{\partial \tilde{\psi}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}}, \quad (\text{B.43b})$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} = \frac{\partial}{\partial \tilde{\psi}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}} \quad (\text{B.43c})$$

と計算される．よって， S^3 上の Killing ベクトルは

$$\xi_{14} + \xi_{23} = 2 \left\{ -\sin \tilde{\phi} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} - \cot \tilde{\theta} \cos \tilde{\phi} \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}} + \csc \tilde{\theta} \cos \tilde{\phi} \frac{\partial}{\partial \tilde{\psi}} \right\}, \quad (\text{B.44a})$$

$$\xi_{13} + \xi_{42} = 2 \left\{ -\cos \tilde{\phi} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} + \cot \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi} \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}} - \csc \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi} \frac{\partial}{\partial \tilde{\psi}} \right\}, \quad (\text{B.44b})$$

$$\xi_{34} + \xi_{12} = 2 \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}}, \quad (\text{B.44c})$$

$$\xi_{14} - \xi_{23} = 2 \left\{ -\sin \tilde{\psi} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} + \csc \tilde{\theta} \cos \tilde{\psi} \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}} - \cot \tilde{\theta} \cos \tilde{\psi} \frac{\partial}{\partial \tilde{\psi}} \right\}, \quad (\text{B.44d})$$

$$\xi_{13} - \xi_{42} = 2 \left\{ -\cos \tilde{\psi} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} - \csc \tilde{\theta} \sin \tilde{\psi} \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}} + \cot \tilde{\theta} \sin \tilde{\psi} \frac{\partial}{\partial \tilde{\psi}} \right\}, \quad (\text{B.44e})$$

$$\xi_{34} - \xi_{12} = 2 \frac{\partial}{\partial \tilde{\psi}} \quad (\text{B.44f})$$

と表現される．本編との対応は，

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} (\xi_{14} + \xi_{23}), \quad \sigma_2 = \frac{1}{2} (\xi_{13} + \xi_{42}), \quad \sigma_3 = \frac{1}{2} (\xi_{34} + \xi_{12}), \quad (\text{B.45})$$

$$\xi_1 = \frac{1}{2} (\xi_{14} - \xi_{23}), \quad \xi_2 = \frac{1}{2} (\xi_{13} - \xi_{42}), \quad \xi_3 = \frac{1}{2} (\xi_{34} - \xi_{12}) \quad (\text{B.46})$$

である．また，

$$\bar{\sigma}_1 = \xi_{14} + \xi_{23}, \quad \bar{\sigma}_2 = \xi_{13} + \xi_{42}, \quad \bar{\sigma}_3 = \xi_{34} + \xi_{12} \quad (\text{B.47})$$

である．

球面調和関数

球面調和関数 Y の従う固有値方程式 $\Delta Y = -EY$ を座標系 $(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi})$ において解く．Laplace 演算子は

$$\Delta = \frac{4}{\sin^2 \tilde{\theta}} \left[\sin \tilde{\theta} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(\sin \tilde{\theta} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\phi}^2} - 2 \cos \tilde{\theta} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\phi} \partial \tilde{\psi}} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\psi}^2} \right] \quad (\text{B.48})$$

と計算される. Hopf 座標系 (θ, ϕ, ψ) において, 球面調和関数 Y は

$$Y = \sum_{m_1, m_2 \in \mathbb{Z}} H_{m_1, m_2}(\theta) e^{-im_1\phi} e^{-im_2\psi} \quad (\text{B.49})$$

と展開されたが, 一方, 座標系 $(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi})$ では, \tilde{m}_1 及び \tilde{m}_2 を定数として, Y を

$$Y = \sum_{\tilde{m}_1, \tilde{m}_2} \tilde{H}_{\tilde{m}_1, \tilde{m}_2}(\tilde{\theta}) e^{-i\tilde{m}_1\tilde{\phi}} e^{-i\tilde{m}_2\tilde{\psi}} \quad (\text{B.50})$$

と展開する. 2つの異なる座標系における Y の展開を比較して,

$$\tilde{H}_{\tilde{m}_1, \tilde{m}_2}(\tilde{\theta}) = H_{m_1, m_2}(\theta), \quad \tilde{m}_1 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2), \quad \tilde{m}_2 = \frac{1}{2}(-m_1 + m_2) \quad (\text{B.51})$$

という関係を得る. $m_1 + m_2$ の偶奇と $-m_1 + m_2$ の偶奇は対応することから, \tilde{m}_1 と \tilde{m}_2 の両方が整数であることと $m_1 + m_2$ が偶数であることは対応し, また, \tilde{m}_1 と \tilde{m}_2 の両方が半整数であることと $m_1 + m_2$ が奇数であることは対応する.

付録C 式の導出の詳細

C.1 式 (3.29a), (3.29b) 及び (3.30) の導出

$Z_{\mu\nu}$ 及び $h_{\mu\nu}$ のそれぞれが含むスカラー型、ベクトル型及びテンソル型摂動による寄与について、これらの関係は式 (3.29a), (3.29b) 及び (3.30) のようにまとめられるが、本節においてこれを導出する。本節において、 S^3 上の体積形式 $\hat{\varepsilon}_{ijk}$ と共変微分 \hat{D}_i についての公式

$$\hat{D}_m \hat{\varepsilon}_{ikl} = 0 \quad (\text{C.1})$$

を用いる。また、 S^3 は定曲率空間であり、 S^3 上の Riemann 曲率テンソル \hat{R}_{ijkl} は

$$\hat{R}_{ijkl} = \gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk} \quad (\text{C.2})$$

と与えられることを使う。

C.1.1 (a, i) 成分

h_{ai} を用いて Z_{ai} を表した表式は、式 (3.25b) において示されており、そして、 Z_{ai} 及び h_{ai} をスカラー型及びベクトル型摂動による寄与の和として表した表式はそれぞれ式 (3.9b) 及び (3.26a) において与えられている。 Z_{ai} を S^3 上のベクトルと見做し、これの発散を計算すると、

$$\hat{D}^i Z_{ai} = \hat{\varepsilon}_i{}^{kl} \left(\hat{D}^i \hat{D}_k h_{al} \right) = \frac{1}{2} \hat{\varepsilon}_i{}^{kl} \left([\hat{D}^i, \hat{D}_k] h_{al} \right) = \frac{1}{2} \hat{\varepsilon}_i{}^{kl} \left(\hat{R}_l{}^{mi}{}_k h_{am} \right) = 0 \quad (\text{C.3})$$

となる。最後の式変形において \hat{R}_{ijkl} の表式 (C.2) を用いた。これより $Z_a = 0$ を得る。次に、 $Z_{ai}[h_a]$ を

$$Z_{ai}[h_a] = \hat{\varepsilon}_i{}^{kl} \hat{D}_k \hat{D}_l h_a = 0 \quad (\text{C.4})$$

のように評価できることから、 Z_{ai} が含む寄与は $Z_{ai} = Z_{T ai}[h_{T ai}]$ のみである。

C.1.2 (i, j) 成分

h_{ij} によって Z_{ij} を表した表式は式 (3.25c) によって与えられており、また、 Z_{ij} 及び h_{ij} をスカラー型、ベクトル型及びテンソル型摂動による寄与の和として表した表式はそれぞれ式 (3.9c) 及び (3.26b) において与えられている。 Z_{ij} のトレースを計算すると

$$\gamma^{ij} Z_{ij} = 0 \quad (\text{C.5})$$

であることから, 即ち $Z_L = 0$ である. $h_{ij} = h_L \gamma_{ij}$ を Z_{ij} へと代入すると,

$$\begin{aligned} Z_{ij}[h_L] &= \hat{\varepsilon}_i^{kl} \hat{D}_k (h_L \gamma_{jl}) + \hat{\varepsilon}_j^{kl} \hat{D}_k (h_L \gamma_{il}) \\ &= -\hat{\varepsilon}_{ij}^l \hat{D}_l h_L + \hat{\varepsilon}_{ij}^l \hat{D}_l h_L = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

となる. $h_{ij} = \hat{L}_{ij} h_T$ を Z_{ij} へと代入すると

$$\begin{aligned} Z_{ij}[h_T] &= 2\varepsilon_{(i}^{kl} \hat{D}_{|k|} (\hat{L}_{j)l} h_T) \\ &= 2\varepsilon_{(i}^{kl} \hat{D}_{|k|} \left[\left(\hat{D}_{j)} \hat{D}_l - \frac{1}{3} \gamma_{j)l} \hat{\Delta} \right) h_T \right] \\ &= \varepsilon_{(i}^{kl} [\hat{D}_k, \hat{D}_l] \hat{D}_{j)} h_T \\ &= \varepsilon_{(i}^{kl} \hat{R}_{j)}^m{}_{kl} \hat{D}_m h_T = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

となる. ここまで, h_{ij} が含む零でない可能性がある寄与は $Z_{ij} = Z_{ij}[h_T{}_{ij}] + Z_{ij}[h_T{}_i]$ である. S^3 上において片足 i に関する Z_{ij} の発散を計算すると,

$$\begin{aligned} \hat{D}^i Z_{ij} &= 2\hat{D}^i \left(\hat{\varepsilon}_{(i}^{kl} \hat{D}_{|k|} h_{j)l} \right) \\ &= \frac{1}{2} \hat{\varepsilon}_i^{kl} [\hat{D}^i, \hat{D}_k] h_{jl} + \hat{\varepsilon}_j^{kl} [\hat{D}^i, \hat{D}_k] h_{il} + \hat{\varepsilon}_j^{kl} \hat{D}_k \hat{D}^i h_{il} \\ &= \frac{1}{2} \hat{\varepsilon}_i^{kl} \left(\hat{R}_j{}^{mi}{}_k h_{ml} + \hat{R}_l{}^{mi}{}_k h_{jm} \right) + \hat{\varepsilon}_j^{kl} \left(\hat{R}_i{}^{mi}{}_k h_{ml} + \hat{R}_l{}^{mi}{}_k h_{im} \right) + \hat{\varepsilon}_j^{kl} \hat{D}_k \hat{D}^i h_{il} \\ &= \hat{\varepsilon}_j^{kl} \hat{D}_k \hat{D}^i h_{il} \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

を得る. これに $h_T{}_{ij}$ を代入すると即座に $\hat{D}^i Z_{ij}[h_T{}_{ij}] = 0$ を得ることから, $\hat{D}^i Z_{ij}$ が含む寄与は $h_T{}_i$ によるもののみである. 即ち

$$\begin{aligned} \hat{D}^i Z_{ij} &= \hat{D}^i Z_{ij}[h_T{}_i] = \hat{\varepsilon}_j^{kl} \hat{D}_k \hat{D}^i \left(2\hat{D}_{(i} h_{T)l} \right) \\ &= \hat{\varepsilon}_j^{kl} \hat{D}_k \hat{D}^i \left(\hat{D}_i h_{Tl} + \hat{D}_l h_{Ti} \right) \\ &= \hat{\varepsilon}_j^{kl} \hat{D}_k \left(\hat{D}^i \hat{D}_i h_{Tl} + \frac{\hat{R}}{3} h_{Tl} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

である. 式 (C.9) より, $\hat{D}^j \hat{D}^i Z_{ij}$ が消えることは具体計算によって

$$\begin{aligned} \hat{D}^j \hat{D}^i Z_{ij} &= \hat{\varepsilon}_j^{kl} \hat{D}^j \hat{D}_k \left(\hat{D}^i \hat{D}_i h_{Tl} + \frac{\hat{R}}{3} h_{Tl} \right) \\ &= \frac{1}{2} \hat{\varepsilon}_j^{kl} [\hat{D}^j, \hat{D}_k] \left(\hat{D}^i \hat{D}_i h_{Tl} + \frac{\hat{R}}{3} h_{Tl} \right) \\ &= \frac{1}{2} \hat{\varepsilon}_j^{kl} \hat{R}_l{}^{mj}{}_k \left(\hat{D}^i \hat{D}_i h_{Tm} + \frac{\hat{R}}{3} h_{Tm} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

と確かめられる. 他方, Z_{ij} の分解 (3.26b) 及びこれが満足する性質 (3.27) より, $\hat{D}^j \hat{D}^i Z_{Tij} = 0$ を得, そして

$$\begin{aligned} \hat{D}^j \hat{D}^i \left(2\hat{D}_{(i} Z_{T)j} \right) &= \hat{D}^j \hat{D}^i \left(\hat{D}_i Z_{Tj} + \hat{D}_j Z_{Ti} \right) \\ &= \left\{ \left([\hat{D}^j, \hat{D}^i] \hat{D}_i + \hat{D}^i [\hat{D}^j, \hat{D}_i] \right) Z_{Tj} + \left(D^j [\hat{D}^i, \hat{D}_j] \right) Z_{Ti} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

を得る。即ち $\hat{D}^j \hat{D}^i Z_{ij}$ が含む寄与は Z_T によるもののみである。つまり、

$$\hat{D}^j \hat{D}^i Z_{ij} = \hat{D}^j \hat{D}^i \left(\hat{L}_{ij} Z_T \right) \quad (\text{C.12})$$

である。式 (C.10) と (C.12) を比較して、 $Z_T = 0$ を得る。改めて $\hat{D}^i Z_{ij}$ を考える。式 (C.10) をさらに変形して

$$\begin{aligned} \hat{D}^i Z_{ij} &= \hat{\varepsilon}_j^{kl} \hat{D}_k \left(\hat{D}^i \hat{D}_i h_{Tl} + \frac{\hat{R}}{3} h_{Tl} \right) \\ &= \hat{\varepsilon}_j^{kl} \left\{ \left([\hat{D}_k, \hat{D}^i] \hat{D}_i + \hat{D}^i [\hat{D}_k, \hat{D}_i] + \hat{D}^i \hat{D}_i \hat{D}_k \right) h_{Tl} + \frac{\hat{R}}{3} \hat{D}_k h_{Tl} \right\} \\ &= \hat{\varepsilon}_j^{kl} \left\{ \left([\hat{D}_k, \hat{D}^i] \hat{D}_i + \hat{D}^i [\hat{D}_k, \hat{D}_i] \right) h_{Tl} + \left(\hat{D}^i \hat{D}_i + \frac{\hat{R}}{3} \right) \hat{D}_k h_{Tl} \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

とする。これの第一項が零となることは

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_j^{kl} \left([\hat{D}_k, \hat{D}^i] \hat{D}_i + \hat{D}^i [\hat{D}_k, \hat{D}_i] \right) h_{Tl} &= \hat{\varepsilon}_j^{kl} \left\{ -\hat{R}^m{}_k \hat{D}_m h_{Tl} + \hat{R}_l{}^m{}_k \hat{D}_i h_{Tm} + \hat{D}^i \left(\hat{R}_l{}^m{}_{ki} h_{Tm} \right) \right\} \\ &= \hat{\varepsilon}_j^{kl} \left(-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{\hat{R}}{3} \hat{D}_k h_{Tl} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

のように確かめられる。即ち

$$\hat{D}^i Z_{ij} = \hat{\varepsilon}_j^{kl} \left(\hat{D}^i \hat{D}_i + \frac{\hat{R}}{3} \right) \hat{D}_k h_{Tl} \quad (\text{C.15})$$

を得る。他方、式 (3.27) に示されているように、 Z_{Tij} にはその発散が零である。再掲すると、 Z_{Tij} は $\hat{D}^i Z_{Tij} = 0$ を満足する。これにより、 $\hat{D}^i Z_{ij}$ が含む寄与は Z_{Ti} による寄与に限られる。即ち、

$$\begin{aligned} \hat{D}^i Z_{ij} &= \hat{D}^i \left(2\hat{D}_{(i} Z_{Tj)} \right) \\ &= \hat{D}^i \hat{D}_i Z_{Tj} + [\hat{D}^i, \hat{D}_j] Z_{Ti} \\ &= \hat{D}^i \hat{D}_i Z_{Tj} + \frac{\hat{R}}{3} Z_{Tj} \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

である。式 (C.15) と (C.16) を比較すると、 $Z_{Tj} = \hat{\varepsilon}_j^{kl} \hat{D}_k h_{Tl}$ を得る。最後に、

$$\begin{aligned} Z_{Tij} &= Z_{ij} - 2\hat{D}_{(i} Z_{Tj)} \\ &= 2\varepsilon_{(i}{}^{kl} \hat{D}_{|k|} \left(h_{Tj)l} + \hat{D}_j h_{Tl} + \hat{D}_l h_{Tj} \right) - 2\hat{\varepsilon}_{(i}{}^{kl} \hat{D}_j \hat{D}_k h_{Tl} \\ &= 2\varepsilon_{(i}{}^{kl} \hat{D}_{|k|} h_{Tj)l} + \varepsilon_{(i}{}^{kl} [\hat{D}_k, \hat{D}_l] h_{Tj)} - 2\hat{\varepsilon}_{(i}{}^{kl} [\hat{D}_j, \hat{D}_k] h_{Tl} \\ &= 2\varepsilon_{(i}{}^{kl} \hat{D}_{|k|} h_{Tj)l} \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

を得る。

C.2 式 (4.55) の導出

$(f_t, f_{\tilde{r}})$ 系についての正準方程式は文献 [36] において導出されている。本節において、正準方程式を書き下し、これを式 (4.52) において与えられている $\pi_{\tilde{r}}^Z$ へと適用し、そして $\pi_{\tilde{r}}$ によって $\pi_{\tilde{r}}^Z$ を表した表式 (4.55) を導出する。

C.2.1 Hamiltonian system

$(f_t, f_{\tilde{r}})$ の系についての正準方程式は文献 [36] の付録 B において導出されている、文献 [36] に従い、¹

$$\begin{aligned} e^{\mathcal{A}} &:= \tilde{r}^5 \left(1 + \frac{\mu a^2}{\tilde{r}^4} \right), & e^{\mathcal{B}} &:= \frac{4\tilde{r}^3}{G(\tilde{r})} \left(\frac{\mu a^2}{\tilde{r}^4} \right)^2, & e^{\mathcal{C}} &:= \frac{4\mu a^2}{\tilde{r}} \left(\frac{\mu}{\tilde{r}^2} - \frac{\mu a^2}{\tilde{r}^4} \right), \\ e^{\mathcal{D}} &:= -2\mu a \tilde{r}, & e^{\mathcal{E}} &:= -8\mu a \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

という記法を導入すると、 $(J, K, M) = (0, 1, 0)$ モードについての作用は

$$S \propto \int dt d\tilde{r} \left\{ e^{\mathcal{A}} |\partial_t f_{\tilde{r}} - \partial_{\tilde{r}} f_t|^2 + e^{\mathcal{B}} |f_t|^2 + e^{\mathcal{C}} |f_{\tilde{r}}|^2 + 2 \operatorname{Im} \left[e^{\mathcal{D}} (\partial_t f_{\tilde{r}} - \partial_{\tilde{r}} f_t) f_{\tilde{r}}^* - e^{\mathcal{E}} f_t f_{\tilde{r}}^* \right] \right\} \quad (\text{C.19})$$

と与えられる。 $f_{\tilde{r}}^*$ の共役運動量 $\pi_{\tilde{r}}$ は式 (4.49) のように定義できて、これは

$$\pi_{\tilde{r}} = e^{\mathcal{A}} (\partial_t f_{\tilde{r}} - \partial_{\tilde{r}} f_t) + i e^{\mathcal{D}} f_{\tilde{r}} \quad (\text{C.20})$$

のように書き直される。また、 f_t に対する拘束方程式及び $(f_{\tilde{r}}, \pi_{\tilde{r}})$ に対する正準方程式は

$$e^{\mathcal{B}} f_t = -\partial_{\tilde{r}} \pi_{\tilde{r}} + i e^{\mathcal{C}} f_{\tilde{r}}, \quad (\text{C.21a})$$

$$\partial_t f_{\tilde{r}} + i e^{\mathcal{D}-\mathcal{A}} f_{\tilde{r}} = e^{-\mathcal{A}} \pi_{\tilde{r}} - \partial_{\tilde{r}} (e^{-\mathcal{B}} \partial_{\tilde{r}} \pi_{\tilde{r}}) + i \partial_{\tilde{r}} (e^{\mathcal{E}-\mathcal{B}} f_{\tilde{r}}), \quad (\text{C.21b})$$

$$\partial_t \pi_{\tilde{r}} = -(e^{2\mathcal{E}-\mathcal{B}} - e^{\mathcal{C}} + e^{2\mathcal{D}-\mathcal{A}}) f_{\tilde{r}} - i e^{\mathcal{E}-\mathcal{B}} \partial_{\tilde{r}} \pi_{\tilde{r}} - i e^{\mathcal{D}-\mathcal{A}} \pi_{\tilde{r}} \quad (\text{C.21c})$$

と導出される。

C.2.2 式 (4.55) の導出

上で導入した記法を用いて $\pi_{\tilde{r}}$ が式 (C.20) のように書き直されたのと同様に、式 (4.52) において与えられている $(f_{\tilde{r}}^Z)^*$ の共役運動量 $\pi_{\tilde{r}}^Z$ は

$$\pi_{\tilde{r}}^Z = e^{\mathcal{A}} (\partial_t f_{\tilde{r}}^Z - \partial_{\tilde{r}} f_t^Z) + i e^{\mathcal{D}} f_{\tilde{r}}^Z \quad (\text{C.22})$$

¹ $e^{\mathcal{D}}$ 及び $e^{\mathcal{E}}$ は a の値に依存して負の値をとりうるため、この意味で、ここで導入した記法は適切でない。しかしながら、この点は本質的ではないため、甘んじて文献 [36] の記法を同様に使用することを優先する。

と変形される. 式 (4.53a), (4.53b) 及び (4.54) も同様に

$$f_t^Z = -4i e^{\mathcal{A}-\mathcal{E}} \partial_t (\partial_t f_{\tilde{r}} - \partial_{\tilde{r}} f_t) + \tilde{r} (\partial_t f_{\tilde{r}} - \partial_{\tilde{r}} f_t) + ia \partial_t f_t + \tilde{r} \partial_t f_{\tilde{r}} + 2f_t + 4i e^{\mathcal{E}-\mathcal{E}} f_{\tilde{r}}, \quad (\text{C.23a})$$

$$f_{\tilde{r}}^Z = -4i e^{-\mathcal{E}} \partial_{\tilde{r}} [e^{\mathcal{A}} (\partial_t f_{\tilde{r}} - \partial_{\tilde{r}} f_t)] + ia \partial_t f_{\tilde{r}} + \tilde{r} \partial_{\tilde{r}} f_{\tilde{r}} - 4i e^{\mathcal{B}-\mathcal{E}} f_t + 3f_{\tilde{r}} \quad (\text{C.23b})$$

及び

$$\partial_t f_{\tilde{r}}^Z - \partial_{\tilde{r}} f_t^Z = ia \partial_t (\partial_t f_{\tilde{r}} - \partial_{\tilde{r}} f_t) - \tilde{r} \partial_{\tilde{r}} (\partial_t f_{\tilde{r}} - \partial_{\tilde{r}} f_t) + (\partial_t f_{\tilde{r}} - \partial_{\tilde{r}} f_t) - 4i e^{\mathcal{B}-\mathcal{E}} \partial_t f_t - \partial_{\tilde{r}} [4i e^{\mathcal{E}-\mathcal{E}} f_{\tilde{r}}] \quad (\text{C.24})$$

と書き直される.

正準方程式 (C.21a)–(C.21c) を用いて式 (C.22) を書き直そう. まず, 式 (C.23b) 及び (C.24) を式 (C.22) へと代入すると,

$$\begin{aligned} \pi_{\tilde{r}}^Z = e^{\mathcal{A}} \left\{ ia \partial_t (\partial_t f_{\tilde{r}} - \partial_{\tilde{r}} f_t) - \tilde{r} \partial_{\tilde{r}} (\partial_t f_{\tilde{r}} - \partial_{\tilde{r}} f_t) + (\partial_t f_{\tilde{r}} - \partial_{\tilde{r}} f_t) - 4i e^{\mathcal{B}-\mathcal{E}} \partial_t f_t - \partial_{\tilde{r}} [4i e^{\mathcal{E}-\mathcal{E}} f_{\tilde{r}}] \right\} \\ - i e^{\mathcal{D}} \left\{ 4i e^{-\mathcal{E}} \partial_{\tilde{r}} [e^{\mathcal{A}} (\partial_t f_{\tilde{r}} - \partial_{\tilde{r}} f_t)] - ia \partial_t f_{\tilde{r}} - \tilde{r} \partial_{\tilde{r}} f_{\tilde{r}} + 4i e^{\mathcal{B}-\mathcal{E}} f_t - 3f_{\tilde{r}} \right\} \quad (\text{C.25}) \end{aligned}$$

となる. 式 (C.20) を用いて式 (C.25) を書き直すと

$$\begin{aligned} \pi_{\tilde{r}}^Z = ia \partial_t \pi_{\tilde{r}} + e^{\mathcal{A}} \left\{ -\tilde{r} \partial_{\tilde{r}} [e^{-\mathcal{A}} (\pi_{\tilde{r}} - i e^{\mathcal{D}} f_{\tilde{r}})] + e^{-\mathcal{A}} (\pi_{\tilde{r}} - i e^{\mathcal{D}} f_{\tilde{r}}) - 4i e^{\mathcal{B}-\mathcal{E}} \partial_t f_t - \partial_{\tilde{r}} [4i e^{\mathcal{E}-\mathcal{E}} f_{\tilde{r}}] \right\} \\ - i e^{\mathcal{D}} \left\{ 4i e^{-\mathcal{E}} (\partial_{\tilde{r}} \pi_{\tilde{r}} + e^{\mathcal{D}} f_t) - 2f_{\tilde{r}} \right\} \quad (\text{C.26}) \end{aligned}$$

を得る. 式 (C.21a) を適用して, 式 (C.26) から f_t を抹消する. 結果として,

$$\begin{aligned} \pi_{\tilde{r}}^Z = ia \partial_t \pi_{\tilde{r}} \\ + e^{\mathcal{A}} \left\{ -\tilde{r} \partial_{\tilde{r}} [e^{-\mathcal{A}} (\pi_{\tilde{r}} - i e^{\mathcal{D}} f_{\tilde{r}})] + e^{-\mathcal{A}} (\pi_{\tilde{r}} - i e^{\mathcal{D}} f_{\tilde{r}}) - 4i e^{-\mathcal{E}} \partial_t (-\partial_{\tilde{r}} \pi_{\tilde{r}} + i e^{\mathcal{E}} f_{\tilde{r}}) - \partial_{\tilde{r}} [4i e^{\mathcal{E}-\mathcal{E}} f_{\tilde{r}}] \right\} \\ + 6i e^{\mathcal{D}} f_{\tilde{r}} \quad (\text{C.27}) \end{aligned}$$

を得る. 式 (C.21b) を適用して, 式 (C.27) から $\partial_t f_{\tilde{r}}$ を消し去る. 結果として,

$$\begin{aligned} \pi_{\tilde{r}}^Z = ia \partial_t \pi_{\tilde{r}} \\ + e^{\mathcal{A}} \left\{ -\tilde{r} \partial_{\tilde{r}} (e^{-\mathcal{A}} \pi_{\tilde{r}}) + 5e^{-\mathcal{A}} \pi_{\tilde{r}} + 4i e^{-\mathcal{E}} \partial_{\tilde{r}} [\partial_t \pi_{\tilde{r}} + (e^{2\mathcal{E}-\mathcal{B}} - e^{\mathcal{E}} + e^{2\mathcal{D}-\mathcal{A}}) f_{\tilde{r}} + i e^{\mathcal{E}-\mathcal{B}} \partial_{\tilde{r}} \pi_{\tilde{r}}] \right\}. \quad (\text{C.28}) \end{aligned}$$

最後に, 式 (C.28) の最後の項に対して式 (C.21c) を適用すると, 式 (4.55) 迄辿り着く.

付録D Schwarzschild 極限

第4章で扱った $(J, K, M) = (0, 0, 0)$, $(J, K, M) = (0, 1, 0)$ 及び $K = J + 2$ モードの Schwarzschild 極限をとると, 第3章で扱ったベクトル, テンソルハーモニクス \mathbb{V} , \mathbb{T} との整合性が見られ, これは Killing ベクトル場の観点からよく理解できる.

D.1 S^3 上の Killing ベクトル場とハーモニクスの関係

K を S^3 上の Killing ベクトル場とすると, K は Killing 方程式 $\hat{D}_i K_j + \hat{D}_j K_i = 0$ に従い, よって K は発散がないことを示す $\hat{D}^i K_i = 0$ を満たす. また, すでに述べたように, S^3 上の Riemann 曲率テンソルは式 (C.2) で与えられ, S^3 上の Ricci テンソルは $\hat{R}_{ij} = 2\gamma_{ij}$ として与えられる. 以上の Killing ベクトル場および Ricci テンソルの性質を用いて, Laplace 演算子 $\hat{\Delta} = \hat{D}^i \hat{D}_i$ の K への作用を

$$\begin{aligned} \hat{\Delta} K_i &= \hat{D}^j \hat{D}_j K_i = -\hat{D}^j \hat{D}_i K_j \\ &= -[\hat{D}^j, \hat{D}_i] K_j - \hat{D}_i \hat{D}^j K_j \\ &= -\hat{R}^k{}_i K_k \\ &= -2K_i \end{aligned} \tag{D.1}$$

のように計算することができる. したがって, S^3 上の任意の Killing ベクトル場は固有値 -2 を持つ S^3 上の Laplace 演算子の固有ベクトルであるため, 文献 [33] に基づいて導入した, ベクトルハーモニクスの3つのクラス (3.21a)–(3.21c) のとある線形結合で表されるはずである. ここで, 文献 [33] において, 各ラベル $(\underline{k}, \underline{\ell}, \underline{m})$ についての $\mathbb{V}^{(0)}$, $\mathbb{V}^{(1)}$, $\mathbb{V}^{(2)}$ の固有値及び発散が

$$\hat{\Delta} \mathbb{V}^{(0)} = \left(2 - \underline{k}(\underline{k} + 2)\right) \mathbb{V}^{(0)}, \tag{D.2a}$$

$$\hat{\Delta} \mathbb{V}^{(1)} = \left(1 - \underline{k}(\underline{k} + 2)\right) \mathbb{V}^{(1)}, \tag{D.2b}$$

$$\hat{\Delta} \mathbb{V}^{(2)} = \left(1 - \underline{k}(\underline{k} + 2)\right) \mathbb{V}^{(2)}, \tag{D.2c}$$

及び

$$\hat{D} \cdot \mathbb{V}^{(0)} = -\sqrt{\underline{k}(\underline{k} + 2)} \mathbb{V}^{(0)}, \tag{D.3a}$$

$$\hat{D} \cdot \mathbb{V}^{(1)} = 0, \tag{D.3b}$$

$$\hat{D} \cdot \mathbb{V}^{(2)} = 0 \tag{D.3c}$$

であると示されている．上式から，Killing ベクトル場をベクトルハーモニクスの線形結合として同定することができ，具体的に以下の 3 点の着目点がある．第一に，固有値方程式に着目すると，固有値 -2 を持つベクトルハーモニクスは $\underline{k} = 1$ をラベルに持つ $\mathbb{V}^{(1)}$ 及び $\mathbb{V}^{(2)}$ のみである．第二に，発散の値に着目すると， $\mathbb{V}^{(1)}$ と $\mathbb{V}^{(2)}$ の両方の発散が零をとっており，このことは Killing ベクトル場が発散の値をもたないことと整合する．第三に， $\underline{k} = 1$ をラベルに持つ独立なベクトルハーモニクス $\mathbb{V}^{(1)}$ 及び $\mathbb{V}^{(2)}$ が 6 つあり，これは S^3 上の独立な Killing ベクトル場の数と一致する．その内訳としては， $(\underline{\ell}, \underline{m}) = (1, \pm 1), (1, 0)$ のそれぞれについて，2 つのベクトルハーモニクスを数えた結果であり，また，同時に， $(\underline{\ell}, \underline{m}) = (0, 0)$ をラベルに持つスカラーハーモニクスは $\mathbb{S} \propto \cos \chi$ と与えられるため， $(\underline{\ell}, \underline{m}) = (0, 0)$ をラベルにもつ $\mathbb{V}^{(1)}$ 及び $\mathbb{V}^{(2)}$ が消滅することを考慮している．ここで， $\mathbb{V}^{(1)}$ と $\mathbb{V}^{(2)}$ のクラスは，演算子 $\hat{\star}d$ によって

$$\hat{\star}d\mathbb{V}^{(1)} = (\underline{k} + 1)\mathbb{V}^{(2)}, \quad \hat{\star}d\mathbb{V}^{(2)} = (\underline{k} + 1)\mathbb{V}^{(1)} \quad (\text{D.4})$$

と互いに写像されていることを思い出そう．第 4.1 節で述べたように， S^3 上のコベクトル場 $\bar{\sigma}^i$ は $d\bar{\sigma}^i = -\epsilon^i{}_{jk}\bar{\sigma}^j \wedge \bar{\sigma}^k$ に従い，また，第 4.2 節において S^3 上の計量テンソル γ の表式 (4.17) を示した．演算子 $\hat{\star}d$ は $\bar{\sigma}^i$ に

$$\hat{\star}d\bar{\sigma}^i = -\epsilon^i{}_{jk}\epsilon^{jk}{}_l\bar{\sigma}^l = -2\bar{\sigma}^i \quad (\text{D.5})$$

のように作用する．式 (D.4) 及び (D.5) を比較すると，3 種類のコベクトル場 $\bar{\sigma}^i$ は， $(\underline{k}, \underline{\ell}, \underline{m}) = (1, 1, \pm 1), (1, 1, 0)$ をラベルに持つ 3 種類のベクトル $\mathbb{V}^{(1)} - \mathbb{V}^{(2)}$ の重ね合わせとして表されるはずである．ここで留意すべきは， (S^3, γ) 上には $\bar{\sigma}_i$ に加えもう 3 本の Killing ベクトル場 ξ^i が存在し，これらは $(\underline{k}, \underline{\ell}, \underline{m}) = (1, 1, \pm 1), (1, 1, 0)$ のラベルを持つ 3 本のベクトル $\mathbb{V}^{(1)} + \mathbb{V}^{(2)}$ の重ね合わせとして表されるはずで，即ち Laplace 演算子に対して固有値 2 を持つ；このことは例えば文献 [39] において言及されている．

このようにベクトルハーモニクスの観点から Killing ベクトル場を理解できたところで，今度は S^3 上の Killing ベクトル場とテンソルハーモニクスとの関係に言及する．便宜上，symmetry operator を \hat{S} と表す．ここで，symmetry operator \hat{S} は， S^3 上の 2 階の対称テンソル T を $\hat{S}T_{ij} = 2\hat{\epsilon}_{(i}{}^{kl}\hat{D}_{|k}T_{j)l}$ に移すことを思い出そう． \hat{S} が $\bar{\sigma}^i$ の対称テンソル積 $\bar{\sigma}^i\bar{\sigma}^j = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}^i \otimes \bar{\sigma}^j + \bar{\sigma}^j \otimes \bar{\sigma}^i)$ に対して

$$\hat{S}[\bar{\sigma}^i\bar{\sigma}^j] = -2\delta^{ij}(\bar{\sigma}^1\bar{\sigma}^1 + \bar{\sigma}^2\bar{\sigma}^2 + \bar{\sigma}^3\bar{\sigma}^3) + 6\bar{\sigma}^i\bar{\sigma}^j \quad (\text{D.6})$$

のように作用する．式 (D.6) より，symmetry operator \hat{S} に対する 6 本の固有テンソル場を，

$$-2\bar{\sigma}^i\bar{\sigma}^i + \sum_{j \neq i} \bar{\sigma}^j\bar{\sigma}^j \quad (\text{not summed over } i), \quad \bar{\sigma}^i\bar{\sigma}^j \quad (i \neq j) \quad (\text{D.7})$$

のように得，その固有値は 6 である．ただし，これらは対称トレースレスであることから分かるように，式 (D.7) において線型独立であるのは 6 本中 5 本である．以降，便宜上，式 (D.6) に示されているテンソル場をまとめて Σ_{ij} と書き表す． Σ_{ij} は transverse 及び traceless である，つまり， Σ_{ij} は $\Sigma^i{}_i = 0$ 及び $\hat{D}_i\Sigma_{ij} = 0$ を満たす．留意すべきは，公式 $\hat{D} \otimes \bar{\sigma}^i (=:\hat{D}_j(\bar{\sigma}^i)_k) = -\frac{1}{2}\epsilon^i{}_{jk}\bar{\sigma}^j \wedge \bar{\sigma}^k$ が Σ_{ij} が transverse である性質を示す際に有用

である. Σ_{ij} のもつこれらの性質を利用して, symmetry operator \hat{S} を Σ_{ij} に 2 度作用させると,

$$\hat{S}^2 \Sigma_{ij} = 4(3 - \hat{\Delta}) \Sigma_{ij} \quad (\text{D.8})$$

を得る. したがって, Σ_{ij} は Laplace 演算子 $\hat{\Delta}$ に対して固有テンソルであり, その固有値は -6 である. 次に, Σ_{ij} を S^3 上のテンソルハーモニクスの 6 クラス (3.22a)–(3.22f) の観点から identify する. 文献 [33] において, テンソルハーモニクスの 6 クラスに対する $\hat{\Delta}$ についての固有値方程式及び発散が

$$\hat{\Delta} \mathbb{T}^{(0)} = -\underline{k}(\underline{k} + 2) \mathbb{T}^{(0)}, \quad (\text{D.9a})$$

$$\hat{\Delta} \mathbb{T}^{(1)} = (5 - \underline{k}(\underline{k} + 2)) \mathbb{T}^{(1)}, \quad (\text{D.9b})$$

$$\hat{\Delta} \mathbb{T}^{(2)} = (5 - \underline{k}(\underline{k} + 2)) \mathbb{T}^{(2)}, \quad (\text{D.9c})$$

$$\hat{\Delta} \mathbb{T}^{(3)} = (6 - \underline{k}(\underline{k} + 2)) \mathbb{T}^{(3)}, \quad (\text{D.9d})$$

$$\hat{\Delta} \mathbb{T}^{(4)} = (2 - \underline{k}(\underline{k} + 2)) \mathbb{T}^{(4)}, \quad (\text{D.9e})$$

$$\hat{\Delta} \mathbb{T}^{(5)} = (2 - \underline{k}(\underline{k} + 2)) \mathbb{T}^{(5)}, \quad (\text{D.9f})$$

及び

$$\hat{D} \cdot \mathbb{T}^{(0)} = \frac{\sqrt{\underline{k}(\underline{k} + 2)}}{\sqrt{3}} \mathbb{V}^{(0)}, \quad (\text{D.10a})$$

$$\hat{D} \cdot \mathbb{T}^{(1)} = -\frac{\sqrt{(\underline{k} - 1)(\underline{k} + 3)}}{\sqrt{2}} \mathbb{V}^{(1)}, \quad (\text{D.10b})$$

$$\hat{D} \cdot \mathbb{T}^{(2)} = -\frac{\sqrt{(\underline{k} - 1)(\underline{k} + 3)}}{\sqrt{2}} \mathbb{V}^{(2)}, \quad (\text{D.10c})$$

$$\hat{D} \cdot \mathbb{T}^{(3)} = -\frac{\sqrt{2(\underline{k} - 1)(\underline{k} + 3)}}{\sqrt{3}} \mathbb{V}^{(0)}, \quad (\text{D.10d})$$

$$\hat{D} \cdot \mathbb{T}^{(4)} = 0, \quad (\text{D.10e})$$

$$\hat{D} \cdot \mathbb{T}^{(5)} = 0 \quad (\text{D.10f})$$

のように示されている. 他方, Σ_{ij} が $\hat{\Delta} \Sigma = -6 \Sigma$ 及び $\hat{D} \cdot \Sigma = 0$ を満足することは既に述べたが, このことから, Σ_{ij} は $\underline{k} = 2$ をラベルに持つテンソルハーモニクス $\mathbb{T}^{(4)}$ 及び $\mathbb{T}^{(5)}$ の何らかの線型結合であるはずである. 式 (3.22f) より, 同じラベル $(\underline{k}, \underline{\ell}, \underline{m})$ を持つ $\mathbb{T}^{(4)}$ 及び $\mathbb{T}^{(5)}$ は

$$\hat{S} \mathbb{T}^{(4)} = 2(\underline{k} + 1) \mathbb{T}^{(5)}, \quad \hat{S} \mathbb{T}^{(5)} = 2(\underline{k} + 1) \mathbb{T}^{(4)} \quad (\text{D.11})$$

のように互いに移される. そして, 文献 [33] によれば, $\underline{k} = 2$ に対して非零の $\mathbb{T}^{(4)}$ 及び $\mathbb{T}^{(5)}$ を与えるのは $\underline{\ell} = 2$ のみである. したがって, Σ_{ij} は $(\underline{k}, \underline{\ell}, \underline{m}) = (2, 2, \pm 2), (2, 2, \pm 1), (2, 2, \pm 0)$ のいずれかをラベルに持つ $\mathbb{T}^{(4)} + \mathbb{T}^{(5)}$ の線型結合として表されるはずである. ここで, ラベル $(\underline{k}, \underline{\ell}, \underline{m})$ の数が式 (D.7) にある 2 階の対称トレースレステンソル Σ_{ij} のうち互いに独立であるものの数と一致することに言及しておく. また, 上で述べた Killing ベクトル場とベクトルハーモニクスの関係の場合と同様の具合で, $\mathbb{T}^{(4)} - \mathbb{T}^{(5)}$ は Killing ベクトル場 ξ^i により構築される対称トレースレステンソルと対応する.

D.2 各モードの Schwarzschild 極限

D.2.1 $(J, K, M) = (0, 0, 0)$ モード

2 階対称テンソル場 $h_{\lambda\rho}$ の $(J, K, M) = (0, 0, 0)$ モードに対する symmetry operator による変換は式 (4.36a)–(4.36g) において与えられているが、これは Schwarzschild 極限 $a = 0$ では

$$Z_{\bar{r}3} = 2h_{\bar{r}3}, \quad Z_{33} = -4h_{+-}, \quad Z_{+-} = 2h_{+-} \quad (\text{D.12})$$

とずいぶん簡単になる。特に、摂動方程式の一部である式 (4.37) が Schwarzschild 極限では $Z_{\bar{r}3} = h_{\bar{r}3} = 0$ を $h_{\lambda\rho}$ に課すことから、結局、

$$\begin{aligned} Z &= 2h_{+-} (2\bar{\sigma}^+\bar{\sigma}^- - 2\bar{\sigma}^3\bar{\sigma}^3) \\ &= 2h_{+-} (\bar{\sigma}^1\bar{\sigma}^1 + \bar{\sigma}^2\bar{\sigma}^2 - 2\bar{\sigma}^3\bar{\sigma}^3) \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

となる。即ち、 $(J, K, M) = (0, 0, 0)$ モードは $(\underline{k}, \underline{\ell}) = (2, 2)$ をラベルに持つ $\mathbb{T}^{(4)} + \mathbb{T}^{(5)}$ の族に属する。

D.2.2 $(J, K, M) = (0, 1, 0)$ モード

2 階の対称テンソル場 $h_{\lambda\rho}$ の $(J, K, M) = (0, 1, 0)$ モードに対する symmetry operator による変換 $Z_{\lambda\rho}$ は式 (4.50a)–(4.50c) において与えられているが、Schwarzschild 極限 $a = 0$ では、これは、

$$Z_{t+} = 2h_{t+}, \quad Z_{\bar{r}+} = 2h_{\bar{r}+}, \quad Z_{+3} = 6h_{+3} \quad (\text{D.14})$$

と簡素化される。また、今考えているモードはいわゆるベクトルハーモニクス of exceptional modes を考えているため、摂動方程式より $h_{t+} = h_{\bar{r}+} = 0$ となる (文献 [31] を参照のこと)。結局、

$$\begin{aligned} Z &= 6 (2h_{+3}\bar{\sigma}^+\bar{\sigma}^3 + 2h_{-3}\bar{\sigma}^-\bar{\sigma}^3) \\ &= 6 (2h_{13}\bar{\sigma}^1\bar{\sigma}^3 + 2h_{23}\bar{\sigma}^2\bar{\sigma}^3) \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

となる。ここで、

$$h_{13} = \frac{1}{\sqrt{2}}(h_{+3} + h_{-3}), \quad h_{23} = \frac{i}{\sqrt{2}}(h_{+3} - h_{-3}) \quad (\text{D.16})$$

である。したがって、 $(J, K, M) = (0, 1, 0)$ モードは $(\underline{k}, \underline{\ell}) = (2, 2)$ をラベルに持つ $\mathbb{T}^{(4)} + \mathbb{T}^{(5)}$ の族に属する。

D.2.3 $K = J + 2$ モード

2 階の対称テンソル場 $h_{\lambda\rho}$ の $K = J + 2$ モードは式 (4.58) の形で与えられるが, Schwarzschild 極限 $a = 0$ において, symmetry operator による $h_{\lambda\rho}$ の変換は式 (4.59) より

$$Z = \hat{S}h = 2(2J + 3)h \quad (\text{D.17})$$

となる. Laplace 演算子 $\hat{\Delta}$ についての h の固有値を評価しよう. これには, 公式 $\hat{D} \otimes \bar{\sigma}^\pm (= \hat{D}_i(\bar{\sigma}^\pm)_j = \pm i \bar{\sigma}^\pm \wedge \bar{\sigma}^3$ 及び Laplace 演算子 $\hat{\Delta}$ と Casimir 演算子 W^2 の間の関係式 $\hat{\Delta} = -4W^2$ を使う. ここでは, Wigner \mathbb{D} 関数を $\mathbb{D}_{\pm J} := \mathbb{D}_{K=\pm J M=0}^J$ と表すことによつて楽をする. $h_{\lambda\rho}$ に対する固有値方程式を

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}h &= \hat{\Delta} \left[\sum_{\pm} h_{\pm\pm}(t, \tilde{r}) \mathbb{D}_{\pm J} \bar{\sigma}^\pm \bar{\sigma}^\pm \right] \\ &= \sum_{\pm} h_{\pm\pm}(t, \tilde{r}) \left\{ (\hat{\Delta} \mathbb{D}_{\pm J}) \bar{\sigma}^\pm \bar{\sigma}^\pm + 2 \mathbb{D}_{\pm J} (\hat{\Delta} \bar{\sigma}^\pm) \bar{\sigma}^\pm + 2 \left[2(\hat{D}_i \mathbb{D}_{\pm J})(\hat{D}^i \bar{\sigma}^\pm) \bar{\sigma}^\pm + \mathbb{D}_{\pm J} (\hat{D}^i \bar{\sigma}^\pm) (\hat{D}^i \bar{\sigma}^\pm) \right] \right\} \\ &= \sum_{\pm} h_{\pm\pm}(t, \tilde{r}) \left\{ (-4W^2 \mathbb{D}_{\pm J}) \bar{\sigma}^\pm \bar{\sigma}^\pm - 4 \mathbb{D}_{\pm J} \bar{\sigma}^\pm \bar{\sigma}^\pm + 2 \left[\pm 2i(-\sqrt{2}i W_{\pm} \mathbb{D}_{\pm J}) \bar{\sigma}^3 \bar{\sigma}^\pm - \mathbb{D}_{\pm J} \bar{\sigma}^\pm \bar{\sigma}^\pm \right] \right\} \\ &= \sum_{\pm} h_{\pm\pm}(t, \tilde{r}) \left\{ -4J(J+2) \mathbb{D}_{\pm J} \bar{\sigma}^\pm \bar{\sigma}^\pm - 4 \mathbb{D}_{\pm J} \bar{\sigma}^\pm \bar{\sigma}^\pm - 2 \mathbb{D}_{\pm J} \bar{\sigma}^\pm \bar{\sigma}^\pm \right\} \\ &= \left(2 - (2J+2)(2J+4) \right) h \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

のように得る. ここで, スカラーハーマニクス $\mathbb{S}^{k'\ell'm'}$ の従う固有値方程式 $\hat{\Delta} \mathbb{S}^{k'\ell'm'} = -\underline{k}'(\underline{k}' + 2) \mathbb{S}^{k'\ell'm'}$ と Wigner \mathbb{D} 関数 \mathbb{D}_{KM}^J の従う式 $W^2 \mathbb{D}_{KM}^J = J(J+1) \mathbb{D}_{KM}^J$ を比較することにより, 2種類のラベル \underline{k}' 及び J は $\underline{k}' = 2J$ という関係にあることを得る. さて, テンソルハーマニクス \mathbb{T} と比べるためにラベル $\underline{k} := \underline{k}' + 2$ を導入すると, 上の方程式は

$$\hat{S}h = 2(\underline{k} + 1)h, \quad \hat{\Delta}h = (2 - \underline{k}(\underline{k} + 2))h \quad (\text{D.19})$$

と書き直される. したがって, $K = J + 2$ モードは $\underline{k} = \underline{k}' + 2$ をラベルに持つ $\mathbb{T}^{(4)} + \mathbb{T}^{(5)}$ の族に属する.

参考文献

- [1] B. Carter, Phys. Rev. **174**, 1559 (1968), *Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields*.
- [2] B. Carter, Commun. Math. Phys. **10**, 280 (1968), *Hamilton-Jacobi and Schrodinger separable solutions of Einstein's equations*.
- [3] M. Walker and R. Penrose, Commun. Math. Phys. **18**, 265 (1970), *On quadratic first integrals of the geodesic equations for type [2,2] spacetimes*.
- [4] S. Teukolsky, Phys. Rev. Lett. **29**, 1114 (1972), *Rotating black holes - separable wave equations for gravitational and electromagnetic perturbations*.
- [5] S. A. Teukolsky, Astrophys. J. **185**, 635 (1973), *Perturbations of a rotating black hole. 1. Fundamental equations for gravitational electromagnetic and neutrino field perturbations*.
- [6] S. Aksteiner and T. Bäckdahl, J. Math. Phys. **60**, 082501 (2019), arXiv:1609.04584, *Symmetries of linearized gravity from adjoint operators*.
- [7] B. Araneda, Class. Quant. Grav. **34**, 035002 (2017), arXiv:1610.00736, *Symmetry operators and decoupled equations for linear fields on black hole spacetimes*.
- [8] W. Unruh, Phys. Rev. Lett. **31**, 1265 (1973), *Separability of the Neutrino Equations in a Kerr Background*.
- [9] S. Chandrasekhar, Proc. Roy. Soc. Lond. A **349**, 571 (1976), *The Solution of Dirac's Equation in Kerr Geometry*.
- [10] D. N. Page, Phys. Rev. D **14**, 1509 (1976), *Dirac Equation Around a Charged, Rotating Black Hole*.
- [11] G. Silva-Ortigoza, J. Math. Phys. **36**, 6929 (1995), *Killing spinors and separability of Rarita-Schwinger's equation in type (2,2) backgrounds*.
- [12] L. Kegeles and J. Cohen, Phys. Rev. D **19**, 1641 (1979), *CONSTRUCTIVE PROCEDURE FOR PERTURBATIONS OF SPACE-TIMES*.
- [13] V. Frolov, P. Krtous, and D. Kubiznak, Living Rev. Rel. **20**, 6 (2017), arXiv:1705.05482, *Black holes, hidden symmetries, and complete integrability*.

- [14] O. Lunin, JHEP **12**, 138 (2017), arXiv:1708.06766, *Maxwell's equations in the Myers-Perry geometry.*
- [15] P. Krtouš, V. P. Frolov, and D. Kubizňák, Nucl. Phys. B **934**, 7 (2018), arXiv:1803.02485, *Separation of Maxwell equations in Kerr–NUT–(A)dS spacetimes.*
- [16] V. P. Frolov, P. Krtouš, D. Kubizňák, and J. E. Santos, Phys. Rev. Lett. **120**, 231103 (2018), arXiv:1804.00030, *Massive Vector Fields in Rotating Black-Hole Spacetimes: Separability and Quasinormal Modes.*
- [17] V. P. Frolov and P. Krtouš, Phys. Rev. D **99**, 044044 (2019), arXiv:1812.08697, *Duality and μ separability of Maxwell equations in Kerr–NUT–(A)dS spacetimes.*
- [18] T. Houri, N. Tanahashi, and Y. Yasui, Class. Quant. Grav. **37**, 015011 (2020), arXiv:1908.10250, *On symmetry operators for the Maxwell equation on the Kerr–NUT–(A)dS spacetime.*
- [19] A. Breev and A. Shapovalov, J. Phys. Conf. Ser. **670**, 012015 (2016), arXiv:1509.08612, *The Dirac equation in an external electromagnetic field: symmetry algebra and exact integration.*
- [20] V. P. Frolov, P. Krtouš, and D. Kubizňák, Phys. Rev. D **97**, 101701 (2018), arXiv:1802.09491, *Separation of variables in Maxwell equations in Plebański–Demiański spacetime.*
- [21] T. Houri, N. Tanahashi, and Y. Yasui, Class. Quant. Grav. **37**, 075005 (2020), arXiv:1910.13094, *Hidden symmetry and the separability of the Maxwell equation on the Wahlquist spacetime.*
- [22] O. Lunin, JHEP **10**, 030 (2019), arXiv:1907.03820, *Excitations of the Myers–Perry Black Holes.*
- [23] O. Açık and U. Ertem, Phys. Rev. D **98**, 066004 (2018), arXiv:1712.01594, *Spin raising and lowering operators for Rarita–Schwinger fields.*
- [24] V. Cardoso, T. Houri, and M. Kimura, Phys. Rev. D **96**, 024044 (2017), arXiv:1706.07339, *Mass Ladder Operators from Spacetime Conformal Symmetry.*
- [25] V. Cardoso, T. Houri, and M. Kimura, Class. Quant. Grav. **35**, 015011 (2018), arXiv:1707.08534, *General first-order mass ladder operators for Klein–Gordon fields.*
- [26] W. Mück, Phys. Rev. D **97**, 025011 (2018), arXiv:1710.01283, *Ladder operators for the Klein–Gordon equation with a scalar curvature term.*
- [27] Y. Michishita, Class. Quant. Grav. **36**, 055010 (2019), arXiv:1810.07923, *On quantum numbers for Rarita–Schwinger fields.*

- [28] Y. Michishita, Phys. Rev. **D100**, 124052 (2019), arXiv:1909.12439, *First Order Symmetry Operators for the Linearized Field Equation of Metric Perturbations*.
- [29] Y. Michishita, (2020), arXiv:2008.07156, *On First Order Symmetry Operators for the Field Equations of Differential Forms*.
- [30] M. Tsuchiya, T. Houri, and C.-M. Yoo, (2020), arXiv:2011.03973, *The First Order Symmetry Operator on Gravitational Perturbations in the 5-dimensional Myers-Perry Spacetime with Equal Angular Momenta*.
- [31] A. Ishibashi and H. Kodama, Prog. Theor. Phys. Suppl. **189**, 165 (2011), arXiv:1103.6148, *Perturbations and Stability of Static Black Holes in Higher Dimensions*.
- [32] V. D. Sandberg, Journal of Mathematical Physics **19**, 2441 (1978), <https://doi.org/10.1063/1.523649>, *Tensor spherical harmonics on S^2 and S^3 as eigenvalue problems*.
- [33] L. Lindblom, N. W. Taylor, and F. Zhang, Gen. Rel. Grav. **49**, 139 (2017), arXiv:1709.08020, *Scalar, Vector and Tensor Harmonics on the Three-Sphere*.
- [34] B. Hu, J. Math. Phys. **15**, 1748 (1974), *Separation of tensor equations in a homogeneous space by group theoretical methods*.
- [35] K. Murata and J. Soda, Class. Quant. Grav. **25**, 035006 (2008), arXiv:0710.0221, *A Note on separability of field equations in Myers-Perry spacetimes*.
- [36] K. Murata and J. Soda, Prog. Theor. Phys. **120**, 561 (2008), arXiv:0803.1371, *Stability of Five-dimensional Myers-Perry Black Holes with Equal Angular Momenta*.
- [37] T. Houri, T. Oota, and Y. Yasui, Class. Quant. Grav. **26**, 045015 (2009), arXiv:0805.3877, *Closed conformal Killing-Yano tensor and uniqueness of generalized Kerr-NUT-de Sitter spacetime*.
- [38] P. Krtous, V. P. Frolov, and D. Kubiznak, Phys. Rev. D **78**, 064022 (2008), arXiv:0804.4705, *Hidden Symmetries of Higher Dimensional Black Holes and Uniqueness of the Kerr-NUT-(A)dS spacetime*.
- [39] J. Ben Achour, E. Huguet, J. Queva, and J. Renaud, J. Math. Phys. **57**, 023504 (2016), arXiv:1505.03426, *Explicit vector spherical harmonics on the 3-sphere*.