

# 学位論文

ゲージ化された線形シグマ模型を用いた  
Taub-NUT 空間上の弦理論の解析

名古屋大学 理学研究科 素粒子宇宙物理学専攻

博士後期課程 3年 平賀 祐輝

2020年 12月 2日

## 概要

本研究では、弦理論的な物理として世界面インスタントン効果を捉える事を目的としている。KK5-ブレーンの背景時空である Taub-NUT 空間を標的空間とするゲージ化された線形シグマ模型 (GLSM) を用いる事で弦理論の立場からの解析が実現される。特に超対称局所化を適用する事により GLSM の球面分配関数を解析的に全て厳密に評価する。また得られた結果から世界面インスタントン効果について議論する。

超弦理論の低エネルギー有効理論という文脈における超重力理論レベルで、NS5-ブレーンや KK5 ブレーン等の 5-ブレーンの双対性の下での関係性や背景時空の構造について議論が行われよく理解されている。しかしこの文脈で議論された背景時空には弦理論の効果である世界面インスタントンの寄与が存在する事が知られている。故にこの事から超弦理論の有効理論としての超重力理論の解析は点粒子描像であり、弦理論的物理を捉える事が出来ない。つまり弦理論的物理を探る為には弦理論の立場からの解析が必要である。そこで粒子描像を超えた弦描像の立場からの解析を実現させる理論が GLSM である。GLSM とは興味のある多様体を標的空間とした世界面シグマ模型 (NLMS) の UV 理論として解釈される。さらに NLMS の標的空間は GLSM における超対称真空のモジュライ空間として実現され、この標的空間が Ricci 平坦である場合には共形対称性を獲得する事が知られる。したがって GLSM は超共形場理論としての側面を持ち、標的空間の幾何学的情報を世界面上の場の理論の言葉で理解する事が可能となる。

本研究では GLSM の球面分配関数に着目する。GLSM の球面分配関数を取り扱う動機は大きく 2 点挙げられる。1 つ目の動機は標的空間の情報を持つ点である。この意味は GLSM の球面分配関数が標空間のモジュライ空間上の Kähler ポテンシャルと密接に関係するという事である。Taub-NUT 空間は Ricci 平坦なハイパー Kähler 多様体なので世界面シグマ模型は超共形対称性を持つ。さらに共形対称性を維持した理論の変形を考える事が可能であるが、この操作は世界面シグマ模型の標空間の言葉では Ricci 平坦を維持した変形に対応する。つまり超共形場理論のモジュライ空間を介して Ricci 平坦な多様体のモジュライ空間を捉える事ができる。2 つ目は超対称局所化の適用により厳密に評価が可能だという点である。GLSM の球面分配関数は理論が持つ超対称性の恩恵を享受する事で、一般には解析が困難な経路積分を完全に実行する事が可能でありインスタントン配位が取り込まれる。この超対称性を用いた解析手法が超対称局所化である。また先行研究で議論された世界面インスタントンは、Taub-NUT 空間における  $S^1$  ファイバーの漸近的半径がゼロの領域に基づく。しかし幾何学的観点から、この制限は物理的に不明瞭である事や、漸近的半径が有限の領域における寄与が理解されていない事などに迫る為、この半径の有限領域における世界面インスタントンについて議論する。この目的に対して超対称局所化は漸近的半径の値に依存せず分配関数を評価する事が可能であり有効な手段となる。

# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>序論</b>	<b>1</b>
1.1	研究背景 . . . . .	1
1.2	構成 . . . . .	4
<b>第 2 章</b>	<b>超対称性</b>	<b>6</b>
2.1	超空間形式 . . . . .	6
2.2	超対称理論 . . . . .	9
2.3	R-対称性 . . . . .	11
<b>第 3 章</b>	<b>超共形場理論</b>	<b>15</b>
3.1	超共形代数 . . . . .	15
3.2	カイラル・プライマリー場 . . . . .	23
3.3	スペクトラル・フロー . . . . .	27
3.4	共形場理論のモジュライ空間 . . . . .	28
<b>第 4 章</b>	<b>超重力理論におけるブレーン解</b>	<b>32</b>
4.1	NS5-ブレーン / H-モノポール . . . . .	32
4.2	KK5-ブレーン . . . . .	33
<b>第 5 章</b>	<b>ゲージ化された線形シグマ模型 (GLSM)</b>	<b>36</b>
5.1	GLSM . . . . .	37
5.2	5-ブレーンを記述する GLSM . . . . .	54
5.3	T-双対変換 . . . . .	58
5.4	H-モノポールを記述する NLSM . . . . .	63
5.5	KK5-ブレーンを記述する NLSM . . . . .	67
<b>第 6 章</b>	<b>超対称局所化</b>	<b>70</b>
6.1	超対称局所化 . . . . .	71
6.2	曲がった多様体上の超対称性 . . . . .	74
6.3	共形 Killing スピノル . . . . .	76

6.4	共形平坦多様体上の超対称理論	78
6.5	$Q$ -完全変形	82
6.6	1-ループ行列式	84
6.6.1	カイラル多重項 $\Psi$	84
6.6.2	随伴表現カイラル多重項 $\Phi$	85
6.6.3	$U(1)$ 電荷を持つカイラル多重項 $\tilde{Q}, Q$	86
6.6.4	ゲージ多重項 $\Sigma$	89
6.6.5	Stückelberg 型カイラル多重項 $\Gamma$	93
6.7	GLSM 球面分配関数	98
<b>第 7 章</b>	<b>Kähler ポテンシャル/GLSM 球面分配関数</b>	<b>99</b>
7.1	Zamolodchikov 計量	99
7.2	Ricci 平坦モジュライ空間	101
7.2.1	コホモロジー類	103
7.2.2	モジュライ空間	104
7.3	Zamolodchikov 計量と GLSM 球面分配関数	106
<b>第 8 章</b>	<b>世界面インスタントン</b>	<b>110</b>
<b>第 9 章</b>	<b>結論</b>	<b>114</b>
付録 A	記法	117
付録 B	共形 Killing スピノル	119
付録 C	$S^2$ 球面調和関数	120
付録 D	超対称電荷	122
参考文献		124

# 第1章 序論

## 1.1 研究背景

弦理論には空間的に拡がりを持った膜、ブレーンと呼ばれる物体が多く含まれている。その中には D-ブレーンの様なスタンダードなブレーンやエキゾチックブレーンが存在する。これらのブレーンは互いに様々な双対性を通して関係付いている [1-3]。よく知られている関係に NS5-ブレーンと KK5-ブレーンの T-双対性が存在する。この関係は超重力理論におけるブレーン解を特徴付ける調和関数に注目する事で見出される [4-7]。この調和関数はブレーンの背景にあたる 4 次元空間上で定義される。NS5-ブレーンの背景である  $\mathbb{R}^4$  のうち 1 つをコンパクト化し、平均化 (smearing) を施した配位を H-モノポールという。この H-モノポール解から T-双対性変換 [8] によって構成される重力解が KK5-ブレーンに対応する。この KK5-ブレーンの 4 次元の背景時空は Taub-NUT 空間となる。この 4 次元空間は局所的に  $\mathbb{R}^3 \times S^1$  で記述されるが、正確には  $\mathbb{R}^3$  の底空間に  $S^1$  がファイバーされた空間となっている。また KK5-ブレーンの背景である Taub-NUT 空間のうち  $\mathbb{R}^3$  において、H-モノポールから KK5-ブレーンを得た T-双対性変換の手続きと同様の操作を行うとエキゾチック  $5_2^2$ -ブレーン時空を得る。この空間も  $\mathbb{R}^2$  の底空間に  $T^2$  がファイバーされた空間となっている [1, 2, 7, 9]。これらの議論は超弦理論の低エネルギー有効理論としての超重力理論レベルの議論、すなわち弦のスペクトラムの質量モードを切り離す極限による点粒子描像に基づいたものである。

実際には上記の背景時空は弦的な効果である世界面インスタントンによる補正を受ける事が議論された [5, 6, 10-13]。この弦的な補正を評価する為には点粒子描像ではなく弦理論の立場である世界面シグマ模型 (NLSM) の観点から時空構造を捉え直す必要がある。この世界面シグマ模型の観点からの解析を実現させるのがゲージ化された線形シグマ模型 (Gauged Linear Sigma Model, GLSM) である [14]。GLSM とは、弦理論の世界面シグマ模型の UV 理論として解釈される 2 次元の超対称ゲージ理論である。この UV 理論である GLSM は IR の NLSM の標的空間である超対称真空のモジュライ空間によって特徴付けられている。また GLSM は標的空間の幾何学情報を世界面上の場の理論として物理の言葉に翻訳する非常に有用な理論でもある。さらに標的空間が Ricci 平坦であれば NLSM は共形対称性を獲得する事が知られている。すなわち GLSM は超共形場理論の側面も持つ。NLSM の T-双対性に関しては UV 理論である GLSM のレベルにおいても超場形式で実現されている [16]。この T-双

対性変換を GLSM に適用する事によって H-モノポールや KK5-ブレーン、 $5_2^2$ -ブレーンの背景時空である 4 次元空間は GLSM の観点から再定式化する事が可能となった [5, 6, 10–13]。ここで重要な点は点粒子描像である超重力理論でのブレーン解を弦理論の立場から捉え直し再定式化した事にある。標的空間におけるブレーンの位置を司るモジュライは GLSM の言葉では FI 及びシータパラメーターとして導入される [10]。GLSM において、巻き付き数によって特徴付けられるインスタントンはボーテックス方程式を満たす配位として現れる [5, 14, 16, 18]。この様な寄与がまさに注目すべき弦理論的效果である。

本研究では GLSM の球面分配関数に着目する。GLSM の球面分配関数を取り扱う動機は大きく 2 点挙げられる。1 つ目は標的空間の情報を持つ事である。この意味は GLSM の球面分配関数が標的空間のモジュライ空間上の Kähler ポテンシャルと関係付くという事である。この関係は [19] によって指摘され、[20, 21] にて示された。超共形場理論は exactly marginal な変形を考える事が可能であり、この変形の下で超共形対称性は保たれる。この理論の変形は GLSM の有効理論の超対称 NLSM の標的空間の言葉では Ricci 平坦を維持した変形を意味する。即ち Ricci 平坦な多様体のモジュライ空間に対応するのである。故に共形多様体上の計量である Zamolodchikov 計量 [22] を介する事で GLSM の球面分配関数と標的空間のモジュライ空間上の Kähler ポテンシャルが密接に関係するのである [20, 21, 25]。

GLSM の球面分配関数は標的空間の情報を持つという点に加えてもう 1 つ利点がある。それは理論が持つ超対称性の恩恵を享受する事で全て解析的に経路積分を実行する事が可能という点である。ここで用いられる技術が超対称局所化である [26, 27]。一般に経路積分や相関関数を解析的に計算する事は非常に困難である。故に通常は摂動展開が可能な結合定数の領域において古典的な配位からの量子的揺らぎを評価する。しかし理論に超対称性が存在する場合には超対称性及び鞍点法の恩恵を最大に享受する事ができる。これが超対称局所化という手法である。超対称局所化を用いる為には理論が超対称性保つ必要がある。そこで理論を定義した多様体上で超対称性が保たれるかという議論が必要であり、これは大きく 2 つのアプローチに分かれる。1 つは超重力理論を用いた手法である [28–31]。この手法は、非常に一般的で系統的な議論が可能であるが、超重力理論を用いる等技術的に困難がある。もう 1 つは逐次的な Weyl 射影の手法である [32–34]。こちらは共形平坦の様なある程度限られた多様体に対して、共形 Killing スピノル方程式を満たす変換パラメータを用いた超対称変換を実行する事によって超対称不変なラグランジアンを構成する事が出来る。

超対称局所化においては経路積分に寄与する場の配位が鞍点上の配位のみを “局所化” されるのである。また揺らぎの積分に関しても 1-ループ完全となる。これが非常に強力なポイントであり、一般には無限次元の積分を取り扱う経路積分が有限次元の積分や和まで簡約され、超対称局所化が非摂動的な解析たる所以である。超対称局所化は鞍点の選び方によって理論の経路積分は Higgs ブランチ上の局所化  $Z_{\text{Higgs}}$  もしくは Coulomb ブランチ上の局所

化  $Z_{\text{Coulomb}}$  の表式を得る。これらの違いは鞍点の選び方なので見かけ上の表式は異なるが結果には依存せず等価  $Z_{\text{Higgs}} = Z_{\text{Coulomb}}$  である。Higgs ブランチにおける鞍点を定義する方程式にボーテックス方程式が含まれる事からボーテックス配位が取り込まれる。

本研究 [35] では KK5-ブレーンの背景時空である Taub-NUT 空間の量子論的側面を弦理論の立場からの解析を目的としている。GLSM の文脈においてセンターが 1 つの系における Taub-NUT 空間への世界面インスタントン補正が [6] で議論された。この世界面インスタントンに対する物理的解釈を与えたのが [10] である。[10] では多重センターに一般化した系で世界面インスタントンが議論され、多重センターの世界面インスタントンは 2 つのセンターによって定義される非自明な 2-サイクルに由来したインスタントンであると解釈された。この解釈を踏まえシングルセンターの世界面インスタントンはディスク・インスタントンであるとした [10]。これらの議論は Taub-NUT 空間の  $S^1$  ファイバーの漸近的半径  $g$  に対して  $g \rightarrow 0$  領域に制限されたものである。一方で幾何学的観点からはこの極限操作の物理的意味が不明瞭である事や、[10] で与えられたディスク・インスタントンの標的空間への世界面の埋め込み写像は任意の  $g$  で定義されている点、先行研究において  $g$  の有限領域における世界面インスタントンが理解されていない事等から、本研究では特にシングルセンター系に注目し、 $S^1$  ファイバーの漸近的半径が有限の領域における世界面インスタントンに迫る事を目的としている。この目的に対して超対称局所化はパラメーター  $g$  の値に依存せずに経路積分を評価する事が可能であり有効な手段となる。これらの観点から GLSM の立場において超対称局所化の技術を用いて球面分配関数を解析的に評価する。また局所化によって得られる結果の物理的な意味について先行研究の世界面インスタントンの結果及び解釈を用いて議論する。

## 1.2 構成

本論文は以下の様な構成である。特に本研究において得られた議論や結果等に関しては、主に第 6 章の超対称局所化及び第 8 章の世界面インスタントンにて記述する。

第 2 章では本論文全体で使用している超対称性を簡単に導入する。2 次元の超対称性は 4 次元の超対称性理論から 2 次元分の次元簡約を実行する事によって構成される。2 次元における超対称性に現れる特徴としては、2 種類のカイラル多重項を導入する事が可能であるという点である。また 2 種類のカイラル多重項が存在する事に付随してポテンシャル項も 2 種類書き下す事が可能となる。2 次元における超対称性のこの特徴によって超共形場理論において様々な興味深い事が議論可能となる。

第 3 章では超共形場理論について触れる。まず超共形場理論の基本的な事項を導入する。その後 GLSM の観点から超共形場理論に触れる。GLSM の低エネルギー有効理論である NLSM は、標的空間が Ricci 平坦である場合には共形対称性を獲得するので超共形場理論の側面を持つ。特に共形場理論は共形対称性を保つ様な理論の連続変形を議論する事が可能である。ここで超共形場理論では第 2 章で導入された 2 種類のカイラル多重項の存在によって 2 種類の独立な共形対称性を保つ理論の変形を考える事が可能となる。この変形によって超共形場理論のモジュライ空間としてカイラル型のモジュライ空間とツイストカイラル型のモジュライ空間から構成される共形多様体と呼ばれる超共形場理論のモジュライ空間が姿を現す。共形多様体は Kähler 多様体であり、多様体上の計量として Zamolodchikov 計量が導入される。この共形多様体上の Zamolodchikov 計量を通じて、超共形場理論のモジュライ空間と Ricci 平坦モジュライ空間が結び付く。

第 4 章では弦理論の低エネルギー有効理論としての超重力理論におけるブレーン解について触れる。超重力理論におけるラグランジアンから得られる運動方程式群を解く事によって、非自明な古典解としてブレーン解が得られる。特にここでは本論において中心的な対象物である KK5-ブレーン解について解説する事を目的とする。この解はまず NS5-ブレーン解から出発し、背景時空である 4 次元空間の 1 つをコンパクト化した  $S^1$  方向に対して T-双対性変換を実行する事で KK5-ブレーン解が得られる。また、この KK5-ブレーンの背景時空は Taub-NUT 空間である。上記の議論によって構成される解を用いて Taub-NUT 空間の  $\mathbb{R}^3$  の底空間への  $S^1$  ファイバーの構造について概観する。

第 5 章では本論の主な登場人物であるゲージ化された線形シグマ模型 (Gauged Linear Sigma Model, GLSM) について解説する。一般に GLSM は標的空間に採用する多様体によって特徴付けられる。特徴付けられるという意味は導入すべき場やゲージ対称性のチャージ等の場の理論としてのデータが決まる。特に本研究では標的空間として KK5-ブレーンの背景時空としての Taub-NUT 空間を採用している GLSM を用いる。したがって KK5-ブレー



ンを記述する GLSM について概観する。また GLSM は低エネルギー有効理論として標的空間を記述する世界面シグマ模型 (NLSM) を含む。この点についても触れる。ここで重要なポイントは超弦理論の有効理論としての超重力理論におけるブレーン解を再現している事である。つまり弦理論の立場から再定式化を実現している。

第 6 章は超対称局所化について解説する。この章が本研究で行った解析で GLSM の超対称局所化による厳密計算である。この点に関する実行した評価の議論は全てこの章の後半部分にて触れる。この章ではまず初めに超対称局所化そのものの解説から始める。その際には技術的な詳細には立ち入る事はせずに超対称局所化の思想や全体の流れについて概観する。その後、球面分配関数の超対称局所化を実行する為に理論をコンパクトな多様体上に定義する必要があるので、コンパクトな多様体上に超対称理論を定義する手法について解説する。この手法は大きく 2 つに大別され、1 つは超重力理論を使用する方法であり、もう一つは Weyl 変換を利用して共形平坦な多様体を取り扱う方法である。これらの議論から超対称局所化を実行する準備が整うので、本研究で行った計算を解説し最後に結果を書き下す。

第 7 章において GLSM の球面分配関数の物理的な意味について触れる。GLSM は低エネルギー有効理論として世界面シグマ模型である NLSM を含む。NLSM の大きな特徴として標的空間が Ricci 平坦である場合に共形対称性を獲得する事が知られている。つまり第 3 章で議論した超共形場理論のモジュライ空間は、GLSM の文脈では Ricci 平坦を保った変形に対応するモジュライ空間に対応しているのである。これらの関係を用いて GLSM の球面分配関数は標的空間のモジュライ空間上の Kähler ポテンシャルと結びつくのである。

第 8 章では本研究で行った超対称局所化により得られた GLSM の球面分配関数の結果について先行研究の解釈を用いて物理的側面について議論する。特にここではこの研究の目的であった弦理論的な物理である世界面インスタントンの効果に注目する。したがってまず初めにこれまでの先行研究における Taub-NUT 空間における世界面インスタントンの議論及び物理的解釈について解説する。その後本研究の議論や得られた結果の物理的な意味、特に標的空間の幾何と結び付け先行研究の結果を踏まえて議論する。

最後に第 9 章にて、本研究の全体としてのまとめ及び結論を述べる。

## 第2章 超対称性

ここでは [14, 16, 17] に基づいて本論文全体で使用する超対称性を導入する。

2次元  $\mathcal{N} = (2, 2)$  の超対称性は4次元  $\mathcal{N} = 1$  の超対称性理論から2次元分の次元簡約を実行する事によって構成される [14]。2次元における超対称性の特徴として挙げられる事は、2種類のカイラル多重項を導入する事が可能であるという点である。この2種類のカイラル多重項が存在する事に付随してF項であるポテンシャル項も2種類書き下す事が可能である。以下では具体的にゲージ化された線形シグマ模型 (Gauged Linear Sigma Model, GLSM) で基礎となる  $\mathcal{N} = (2, 2)$  超対称性を導入する。基本的な超空間におけるラグランジアン構成やR-対称性の性質は4次元の議論と同様である [36]。また4次元  $\mathcal{N} = 1$  の超場形式からR-対称性によって  $\mathcal{N} = 2$  の様な拡張された超対称性を構成する事が可能である様に、2次元  $\mathcal{N} = (2, 2)$  から  $\mathcal{N} = (4, 4)$  を構成することも可能である。

### 2.1 超空間形式

これから2次元の場の理論を考える。これはGLSMやNLSMを念頭に置いている。つまりある世界面  $\Sigma$  上の超対称場の理論である。本研究においては超対称局所化の章で解説する様に、この世界面を球面にとる事をする。しかし、曲がった多様体上の超対称性をここで考えてしまうと極めて煩雑なものになる為、この章の中では基本的に世界面  $\Sigma$  は平坦空間のみを考え超対称性を導入する。

ここでは世界面  $\Sigma$  上のMinkowski計量を  $\text{diag } \eta = (-1, 1)$  とし、超空間を構成する為にフェルミオンの座標として  $\theta^+, \theta^-, \bar{\theta}^+, \bar{\theta}^-$  を導入する。これらは複素数のフェルミオンの座標であり、互いに複素共役  $(\theta^\pm)^* = \bar{\theta}^\pm$  の関係である。2次元  $\mathcal{N} = (2, 2)$  の理論は4次元  $\mathcal{N} = 1$  の理論 [36] から2次元分の次元簡約をすることによって構成される [14]。まず一般の平坦時空上の2次元  $\mathcal{N} = (2, 2)$  超対称代数を記述しておく。4つの超対称性の電荷  $Q_\pm, \bar{Q}_\pm$ 、空間及び時間の並進  $P, H$ 、時空の回転  $M$ 、R-対称性の生成子  $F_V, F_A$  とすると一般の2次

元の超対称性代数は以下ようになる [16]:

$$Q_+^2 = Q_-^2 = \bar{Q}_+^2 = \bar{Q}_-^2 = 0, \quad (2.1)$$

$$\{Q_\pm, \bar{Q}_\pm\} = 2(H \pm P), \quad (2.2)$$

$$\{Q_+, Q_-\} = 2Z^*, \quad \{\bar{Q}_+, \bar{Q}_-\} = 2Z, \quad (2.3)$$

$$\{Q_+, \bar{Q}_-\} = 2\tilde{Z}^*, \quad \{\bar{Q}_+, Q_-\} = 2\tilde{Z}, \quad (2.4)$$

$$[M, Q_\pm] = \mp Q_\pm, \quad [M, \bar{Q}_\pm] = \mp \bar{Q}_\pm, \quad (2.5)$$

$$[F_V, Q_\pm] = -Q_\pm, \quad [F_V, \bar{Q}_\pm] = +\bar{Q}_\pm, \quad (2.6)$$

$$[F_A, Q_\pm] = \mp Q_\pm, \quad [F_A, \bar{Q}_\pm] = \pm \bar{Q}_\pm. \quad (2.7)$$

ここで超対称性の電荷は  $Q_\pm^\dagger = \bar{Q}_\pm$  であり、 $Z, \tilde{Z}$  は全ての生成子と可換なセントラルチャージ (中心電荷) である。一般に  $R_V$  が保たれていれば  $Z = 0$  であり、一方で  $R_A$  が保たれていれば  $Z^* = 0$  である。特に、 $Z = \tilde{Z} = 0$  の超対称性代数は 4次元  $\mathcal{N} = 1$  の次元簡約で得られる [16]。以下ではこの超対称代数を用いる。 $\mathcal{N} = (2, 2)$  よりも低い  $\mathcal{N} = (1, 1)$  や  $\mathcal{N} = (0, 2)$  等の超対称性は上記の超対称性から  $\theta$  依存性を落とす等の簡約操作によって構成する事ができる。

4次元の  $R$ -対称性は  $R$ -電荷を  $q$  として

$$\mathcal{R}F(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{2inq} F(x, e^{-iq\theta}, e^{+iq\bar{\theta}}), \quad (2.8)$$

と変換する。2次元に次元簡約した後では

$$\text{Weyl 2 comp} : \theta \xrightarrow{2d} \text{Weyl 1 comp} : (\theta^+, \theta^-), \quad (2.9)$$

$$\text{Weyl 2 comp} : \bar{\theta} \xrightarrow{2d} \text{Weyl 1 comp} : (\bar{\theta}^+, \bar{\theta}^-), \quad (2.10)$$

となる。つまり 4次元の  $R$ -対称性は 2次元の言葉では  $R_V$ -対称性といい、 $R_V$ -電荷を  $q_V$  として以下のように変換する:

$$F(x, \theta, \bar{\theta}) \xrightarrow{2d} F(x, \theta^+, \theta^-, \bar{\theta}^+, \bar{\theta}^-), \\ e^{inF_V} F(x, \theta^+, \theta^-, \bar{\theta}^+, \bar{\theta}^-) = e^{2i\alpha q_V} F(x, e^{-i\alpha\theta^+}, e^{-i\alpha\theta^-}, e^{+i\alpha\bar{\theta}^+}, e^{+i\alpha\bar{\theta}^-}), \quad (2.11)$$

また、4次元  $\mathcal{N} = 1$  の理論から 2次元分の次元簡約することによって  $\mathcal{N} = (2, 2)$  になった超対称性電荷を回す  $R$ -対称性が加わる。この  $R$ -対称性を  $R_A$ -対称性といい、 $R_A$ -電荷を  $q_A$  として以下のように変換する:

$$e^{inF_A} F(x, \theta^+, \theta^-, \bar{\theta}^+, \bar{\theta}^-) = e^{2i\alpha q_A} F(x, e^{-i\alpha\theta^+}, e^{+i\alpha\theta^-}, e^{+i\alpha\bar{\theta}^+}, e^{-i\alpha\bar{\theta}^-}). \quad (2.12)$$

理論が与えられた時に常に 2つの  $R$ -対称性が存在するわけではない。しかし、超共形場理論の場合は 2つが存在しなければならない。これは直感的に理解するには、超共形場理

論では  $U(1)_L / U(1)_R$  が存在するので、この時の超対称性において  $U(1)_V / U(1)_A$  が存在する必要がある。また、この超共形場理論における  $U(1)_L / U(1)_R$  と超対称理論における  $U(1)_V / U(1)_A$  の関係については次の超共形場理論の章において触れる。 $U(1)_V(U(1)_A)$  が対称性である理論は  $Z(\bar{Z})$  は常にゼロでなければならない。

超場は超空間  $x^0, x^1, \theta^\pm, \bar{\theta}^\pm$  の関数である。超対称性電荷  $Q_\pm, \bar{Q}_\pm$  は超場に対して微分演算子として作用する:

$$Q_\pm = \frac{\partial}{\partial \theta^\pm} + i\bar{\theta}^\pm \left( \frac{\partial}{\partial x^0} \pm \frac{\partial}{\partial x^1} \right), \quad \bar{Q}_\pm = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\pm} - i\theta^\pm \left( \frac{\partial}{\partial x^0} \pm \frac{\partial}{\partial x^1} \right). \quad (2.13)$$

この時超対称共変微分演算子は以下のようになる:

$$D_\pm = \frac{\partial}{\partial \theta^\pm} - i\bar{\theta}^\pm \left( \frac{\partial}{\partial x^0} \pm \frac{\partial}{\partial x^1} \right), \quad \bar{D}_\pm = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\pm} + i\theta^\pm \left( \frac{\partial}{\partial x^0} \pm \frac{\partial}{\partial x^1} \right). \quad (2.14)$$

ここで  $m = 0, 1$  である。微分に関しては  $\partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_0 \pm \partial_1)$  としている。

ここで超場は 4 次元の物を 2 次元に次元簡約し、4 次元の  $(x^0, x^3)$  を 2 次元の  $(x^0, x^1)$  と再定義している。また、4 次元の Weyl フェルミオンは 2 次元の Dirac フェルミオンなので次元簡約した後は  $\psi$  は Dirac フェルミオンである。そしてそのスピノルの成分を  $\psi^+, \psi^-$  としているので、それぞれが 2 次元の Weyl フェルミオンである。

超対称性の表現としてはカイラル多重項とツイステッドカイラル多重項である。これらの超場の成分場は複素スカラー場と Dirac フェルミオン及び補助場である。カイラル超場は以下を満たす [16]:

— カイラル多重項 —

$$\bar{D}_\pm \Phi(y^\pm) = 0 \iff \Phi = \phi(y^\pm) + \sqrt{2}\theta^\alpha \psi_\alpha(y^\pm) + 2\theta^+ \theta^- F(y^\pm). \quad (2.15)$$

この種類のカイラル超場は 4 次元においても同様に定義され、理論に導入される。

次に、2 次元における超対称性の特徴の一つである、カイラル超場とは別のカイラル多重項であるツイステッドカイラル多重項を導入する。ツイステッドカイラル多重項は以下を満たす [16]:

— ツイステッドカイラル多重項 —

$$\bar{D}_+ Y = D_- Y = 0 \iff Y = y(\bar{y}^\pm) + \sqrt{2}\theta^+ \bar{\chi}_+(\bar{y}^\pm) + \sqrt{2}\bar{\theta}^- \chi_-(\bar{y}^\pm) + 2\theta^+ \bar{\theta}^- G(\bar{y}^\pm). \quad (2.16)$$

$G$  は複素数の補助場である。

次にベクトル (ゲージ) 多重項を導入する。ベクトル多重項の成分場はゲージ群の下で随伴表現として振る舞い、ゲージ場  $A_m$ 、Dirac フェルミオン  $\lambda_\pm, \bar{\lambda}_\pm$ 、複素スカラー場  $\sigma$  である。Wess-Zumino ゲージを施した後のベクトル多重項において成分場展開すると以下の様になる [16]:

— ベクトル多重項 —

$$\begin{aligned}
V = & \theta^- \bar{\theta}^- (A_0 - A_1) + \theta^+ \bar{\theta}^+ (A_0 + A_1) - \theta^- \bar{\theta}^+ \sigma - \theta^+ \bar{\theta}^- \bar{\sigma} \\
& - \sqrt{2} i \theta^+ \theta^- (\bar{\theta}^- \bar{\lambda}_- + \bar{\theta}^+ \bar{\lambda}_+) + \sqrt{2} i \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- (\theta^- \lambda_- + \theta^+ \lambda_+) + 2\theta^+ \theta^- \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- D,
\end{aligned} \tag{2.17}$$

となる。これは4次元  $\mathcal{N} = 1$  のベクトル多重項の2次元への次元簡約で得られる。元々の  $A_m$  の0,3成分を新たに  $A_0, A_1$  とし、2,3成分はPauli行列の  $i$  を利用して複素スカラー場として  $\sigma$  を構成している。 $D$  は実数の補助場である。ゲージ群の下で共変的な超対称共変微分を

$$\mathcal{D}_\pm = e^{-V} D_\pm e^V, \quad \bar{\mathcal{D}}_\pm = e^V \bar{D}_\pm e^{-V}, \tag{2.18}$$

と定義すると場の強さを以下のように定義できる (可換群の場合  $\mathcal{D} = D$ ):

$$\begin{aligned}
\Sigma = & \frac{1}{2} \bar{\mathcal{D}}_+ \mathcal{D}_- V \\
= & \sigma + i\sqrt{2} \theta^+ \bar{\lambda}_+ - i\sqrt{2} \bar{\theta}^- \lambda_- + 2\theta^+ \theta^- (D - iF_{01}) + \dots,
\end{aligned} \tag{2.19}$$

ここで  $F_{01}$  はゲージ場  $A$  から構成されるゲージ曲率である。これは  $Y$  と  $\Sigma$  は  $\theta$  の構造が同じである。また  $\Sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\mathcal{D}}_+ \mathcal{D}_- V$  なので同じ成分で2回微分すると

$$\bar{\mathcal{D}}_+ \Sigma = \mathcal{D}_- \Sigma = 0, \tag{2.20}$$

なのでツイステッドカイラル多重項の拘束条件を満たすのである。

2次元においてベクトル多重項は、ベクトル多重項  $V$  としてそのまま取り扱うよりも上記のツイステッドカイラル多重項  $\Sigma$  の表現を頻繁に用いる。実際ベクトル多重項に関する運動項も4次元の取り扱いとは異なり、2次元ではベクトル多重項をツイステッドカイラル多重項  $\Sigma$  として取り扱い、Kählerポテンシャルとして運動項を導入する。2次元における様々な超対称多重項に関しては [15] で議論されている。

## 2.2 超対称理論

ここでは簡単にはあるが、今導入した2次元の超対称性の下で不変な理論を書き下す事を目的とする。簡単の為に2種類のカイラル多重項について触れる。最後にゲージ多重項としてのカイラル多重項についても触れる。

以下で定義される超対称性変換の下で不変な作用を構成する [16]:

$$\delta = \epsilon_+ Q_- - \epsilon_- Q_+ - \bar{\epsilon}_+ \bar{Q}_- + \bar{\epsilon}_- \bar{Q}_+ \tag{2.21}$$

まずカイラル多重項  $\Phi$  に注目する。このラグランジアンは 4 次元における議論と全く同様にして構成する事が出来る。Kähler ポテンシャルは D-項として与えられる。これは超対称性変換を実行すると全微分項になる事から、この構成によるラグランジアンは超対称不変となる。カイラル超場に関する運動項は反カイラルとカイラルの組み合わせによって与えられる:

$$S_{\Phi} = \int d^2x d^4\theta \bar{\Phi}\Phi. \quad (2.22)$$

実際  $\bar{\Phi}\Phi$  の  $\theta^4$  の項を見て見ると

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}\Phi \Big|_{\theta^4} &= -\bar{\phi}\partial_+\partial_-\phi + \partial_+\bar{\phi}\partial_-\phi + \partial_-\bar{\phi}\partial_+\phi - \partial_+(\partial_-\bar{\phi})\phi \\ &\quad + i\bar{\psi}_+\partial_-\psi_+ - i(\partial_-\bar{\psi}_+)\psi_+ + i\bar{\psi}_-\partial_+\psi_- - i(\partial_+\bar{\psi}_-)\psi_- + |F|^2 \\ S_{\Phi} &= \int d^2x (|\partial_0\phi|^2 - |\partial_1\phi|^2 + i\bar{\psi}_-(\partial_0 + \partial_1)\psi_- + i\bar{\psi}_+(\partial_0 + \partial_1)\psi_+ + |F|^2) \end{aligned} \quad (2.23)$$

となる。これはスカラー場  $\phi$ 、Dirac フェルミオン  $\psi_{\pm}, \bar{\psi}_{\pm}$ 、補助場  $F$  である。

同様にツイステッドカイラル超場に関する運動項も以下のように与えられる:

$$S_{\text{kin}} = - \int d^2x d^4\theta \bar{Y}Y. \quad (2.24)$$

ここでカイラル多重項とツイステッドカイラル多重項の運動項の符号について言及する。ツイステッドカイラル超場の場合は、カイラルと比べてマイナスの符号が付くことに注意する。これはツイステッドカイラル超場の D-項の運動項の符号をカノニカルにするために必要である。これらの関係を調べる為に、まず具体的にカイラル超場とツイステッドカイラル超場の成分場展開を比較してみる:

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\pm}\Phi(y^{\pm}) = 0 &\iff \Phi = \phi(y^{\pm}) + \sqrt{2}\theta^+\psi_+(y^{\pm}) + \sqrt{2}\theta^-\psi_-(y^{\pm}) + 2\theta^+\theta^-F(y^{\pm}), \\ \bar{D}_+Y = D_-Y = 0 &\iff Y = y(\bar{y}^{\pm}) + \sqrt{2}\theta^+\bar{\chi}_+(\bar{y}^{\pm}) + \sqrt{2}\theta^-\bar{\chi}_-(\bar{y}^{\pm}) + 2i\theta^+\theta^-G(\bar{y}^{\pm}). \end{aligned}$$

この成分場展開から、読み取れる様にカイラル超場とツイステッドカイラル超場  $\theta^-$  と  $\bar{\theta}^-$  の入れ替えで関係付いている事がわかる [17]。このことからカイラル超場の D-項からツイステッドカイラル超場の D-項が得られる:

$$\int d\theta^+ d\theta^- d\bar{\theta}^+ d\bar{\theta}^- |\Phi|^2 \iff \int d\theta^+ d\bar{\theta}^- d\bar{\theta}^+ d\theta^- |Y|^2 = - \int d\theta^+ d\theta^- d\bar{\theta}^+ d\bar{\theta}^- |Y|^2.$$

次に超ポテンシャル以下のように与えられる:

$$S_W = \int d^2x d^2\theta W(\Phi) + (c.c), \quad d^2\theta := \frac{1}{2}d\theta^+ d\theta^-. \quad (2.25)$$

$$S_{\tilde{W}} = \int d^2x d^2\bar{\theta} \tilde{W}(Y) + (c.c), \quad d^2\bar{\theta} := \frac{1}{2}d\theta^+ d\bar{\theta}^-. \quad (2.26)$$

ここまではゲージ対称性を含まない理論について記述してきたが、最後に先程書き下した Kähler ポテンシャルをゲージ理論に格上げして改めて書き下す:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Phi = & -D_m \bar{\phi} D^m \phi + i\bar{\psi}_-(D_0 + D_1)\psi_- + i\bar{\psi}_+(D_0 - D_1)\psi_+ + |F|^2 \\ & - |\sigma|^2 |\phi|^2 - \bar{\psi}_+ \bar{\sigma} \psi_- - \bar{\psi}_- \sigma \psi_+ + D|\phi|^2 \\ & - i\bar{\phi}(\psi_- \lambda_+ - \psi_+ \lambda_-) - i\phi(\bar{\psi}_- \bar{\lambda}_+ - \bar{\psi}_+ \bar{\lambda}_-), \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Sigma = & -\frac{1}{2e^2} \int d^4\theta \bar{\Sigma} \Sigma \\ = & \frac{1}{2e^2} \left[ -|\partial_\mu \sigma|^2 + i\bar{\lambda}_+(\partial_0 - \partial_1)\lambda_+ + i\lambda_-(\partial_0 + \partial_1)\bar{\lambda}_- + F_{01}^2 + D^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.28)$$

## 2.3 R-対称性

ここで超ポテンシャルに関して R-対称性を議論しておく。2次元の  $\mathcal{N} = (2, 2)$  の理論にはカイラル超場とツイステッドカイラル超場が存在するので、それぞれからカイラル超場の holomorphic な超ポテンシャル  $W(\Phi)$  とツイステッドカイラル超場に関する holomorphic ツイステッド超ポテンシャル  $\widetilde{W}(Y)$  を構成することができる。

まず2つの R-対称性 — ベクトルの R-対称性・軸性 R-対称性 — の変換性を確認する:

$$\begin{aligned} F(x, \theta^+, \theta^-, \bar{\theta}^+, \bar{\theta}^-) & \implies e^{2i\alpha q_V} F(x, e^{-i\alpha}\theta^+, e^{-i\alpha}\theta^-, e^{+i\alpha}\bar{\theta}^+, e^{+i\alpha}\bar{\theta}^-), \\ F(x, \theta^+, \theta^-, \bar{\theta}^+, \bar{\theta}^-) & \implies e^{2i\alpha q_A} F(x, e^{-i\alpha}\theta^+, e^{+i\alpha}\theta^-, e^{+i\alpha}\bar{\theta}^+, e^{-i\alpha}\bar{\theta}^-). \end{aligned}$$

カイラル多重項に対して上の変換をさせる。まずベクトルの R-対称性から行う。変換性を見る為には  $\theta$  の最低次だけに注目すれば良い。

$$\begin{aligned} \Phi & \implies e^{2i\alpha q_V} (\phi + \sqrt{2}e^{-i\alpha}\theta^+\psi_+ + \sqrt{2}e^{-i\alpha}\theta^-\psi_- + 2e^{-2i\alpha}\theta^+\theta^-F + \dots) \\ & = e^{2i\alpha q_V} \phi + \sqrt{2}e^{i(q_V-1)\alpha}\theta^+\psi_+ + \sqrt{2}e^{i(q_V-1)\alpha}\theta^-\psi_- + 2e^{i(q_V-2)\alpha}\theta^+\theta^-F + \dots, \end{aligned} \quad (2.29)$$

このように成分場が変換する。次に軸性 R-対称性を調べると

$$\begin{aligned} \Phi & \implies e^{2i\alpha q_A} (\phi + \sqrt{2}e^{-i\alpha}\theta^+\psi_+ + \sqrt{2}e^{+i\alpha}\theta^-\psi_- + 2\theta^+\theta^-F + \dots) \\ & = e^{2i\alpha q_A} \phi + \sqrt{2}e^{i(q_A-1)\alpha}\theta^+\psi_+ + \sqrt{2}e^{i(q_V+1)\alpha}\theta^-\psi_- + 2e^{iq_A\alpha}\theta^+\theta^-F + \dots, \end{aligned} \quad (2.30)$$

と変換する。したがってカイラル超場の成分場の変換性をまとめると以下ようになる:

カイラル多重項 R-電荷

$R_V$ symmetry	$R_A$ symmetry	
$\phi \rightarrow e^{2i\alpha q_V} \phi$	$\phi \rightarrow e^{2i\alpha q_A} \phi$	
$\psi_+ \rightarrow e^{i(q_V-1)\alpha} \psi_+$	$\psi_+ \rightarrow e^{i(q_A-1)\alpha} \psi_+$	(2.31)
$\psi_- \rightarrow e^{i(q_V-1)\alpha} \psi_-$	$\psi_- \rightarrow e^{i(q_A+1)\alpha} \psi_-$	
$F \rightarrow e^{i(q_V-2)\alpha} F$	$F \rightarrow e^{iq_A\alpha} F$	

同様にツイステッドカイラル超場に関して変換性を求める。Y に対してまずベクトルの R-対称性の変換を実行すると

$$\begin{aligned}
 Y &\Longrightarrow e^{2i\alpha q_V} (y + \sqrt{2}e^{-i\alpha}\theta^+ \bar{\chi}_+ + \sqrt{2}e^{+i\alpha}\bar{\theta}^- \chi_- + 2\theta^+ \bar{\theta}^- G + \dots) \\
 &= e^{2i\alpha q_V} y + \sqrt{2}e^{i(q_V-1)\alpha}\theta^+ \bar{\chi}_+ + \sqrt{2}e^{i(q_V+1)\alpha}\bar{\theta}^- \chi_- + 2e^{iq_V\alpha}\theta^+ \bar{\theta}^- G + \dots, \quad (2.32)
 \end{aligned}$$

となる。次に軸性 R-対称性について調べると

$$\begin{aligned}
 Y &\Longrightarrow e^{2i\alpha q_A} (y + \sqrt{2}e^{-i\alpha}\theta^+ \bar{\chi}_+ + \sqrt{2}e^{+i\alpha}\bar{\theta}^- \chi_- + 2e^{-2i\alpha}\theta^+ \bar{\theta}^- G + \dots) \\
 &= e^{2i\alpha q_A} y + \sqrt{2}e^{i(q_A-1)\alpha}\theta^+ \bar{\chi}_+ + \sqrt{2}e^{i(q_V+1)\alpha}\bar{\theta}^- \chi_- + 2e^{i(q_A-2)\alpha}\theta^+ \bar{\theta}^- G + \dots, \quad (2.33)
 \end{aligned}$$

となる。したがってツイステッドカイラル超場の成分場の変換性をまとめると以下のようになる:

ツイステッドカイラル多重項 R-電荷

$R_V$ symmetry	$R_A$ symmetry	
$y \rightarrow e^{2i\alpha q_V} y$	$y \rightarrow e^{2i\alpha q_A} y$	
$\bar{\chi}_+ \rightarrow e^{i(q_V-1)\alpha} \bar{\chi}_+$	$\bar{\chi}_+ \rightarrow e^{i(q_A-1)\alpha} \bar{\chi}_+$	(2.34)
$\chi_- \rightarrow e^{i(q_V+1)\alpha} \chi_-$	$\chi_- \rightarrow e^{i(q_A-1)\alpha} \chi_-$	
$G \rightarrow e^{iq_V\alpha} G$	$G \rightarrow e^{i(q_A-2)\alpha} G$	



最後に2次元  $\mathcal{N} = (2, 2)$  理論の一般的なラグランジアンは Kähler ポテンシャル  $K$  と超ポテンシャル  $W$  とツイステッド超ポテンシャル  $\widetilde{W}$  によって構成される:

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta K(\Phi, \bar{\Phi}, Y, \bar{Y}) + \int d^2\theta W(\Phi) + \text{h.c.} + \int d^2\bar{\theta} \widetilde{W}(Y) + \text{h.c.} \quad (2.35)$$

ここで Kähler ポテンシャルの積分測度は  $d\theta^4$  なので2つの R-対称性の下で不変である:

$$\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^- \xrightarrow{U(1)_V, U(1)_A} \theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-. \quad (2.36)$$

よって  $K$  は2つの R-対称性の下で電荷がゼロとなるように構成しなければならない。一方で  $W$  と  $\widetilde{W}$  に関しては

$$W(\Phi) : \theta^+\theta^- \xrightarrow{U(1)_V} e^{-2i\alpha}\theta^+\theta^-, \quad \theta^+\theta^- \xrightarrow{U(1)_A} \theta^+\theta^-, \quad (2.37)$$

$$\widetilde{W}(Y) : \theta^+\bar{\theta}^- \xrightarrow{U(1)_V} \theta^+\bar{\theta}^-, \quad \theta^+\bar{\theta}^- \xrightarrow{U(1)_A} e^{-2i\alpha}\theta^+\bar{\theta}^-, \quad (2.38)$$

と変換する。

したがって Kähler ポテンシャル  $K$  と超ポテンシャル  $W$  とツイステッド超ポテンシャル  $\widetilde{W}$  に関するもとめると以下ようになる:

$K, W, \widetilde{W}$  R-電荷

$R_V$ symmetry	$R_A$ symmetry
$K \rightarrow K$	$K \rightarrow K$
$W \rightarrow e^{2i\alpha}W$	$W \rightarrow W$
$\widetilde{W} \rightarrow \widetilde{W}$	$\widetilde{W} \rightarrow e^{2i\alpha}\widetilde{W}$

(2.39)

D-項から構成される Kähler ポテンシャルの  $\theta^4$  は常に2つの R-対称性の下で不変である。したがって、Kähler ポテンシャル  $K(\Phi^i, \bar{\Phi}^{\bar{j}})$  がベクトルの R-対称性と軸性 R-対称性について電荷がゼロであれば、つまり  $K(\Phi^i, \bar{\Phi}^{\bar{i}}) = \Phi^i \bar{\Phi}^{\bar{i}}$  という関数であれば、常に R-対称性の下で不変である。

次に F-項から構成される超ポテンシャルについて議論する。超ポテンシャルは  $\theta^2$  で積分されるが、 $\theta^2$  はカイラリティが逆のものについて同じ方向に回すベクトルの R-対称性については電荷  $-2$  を持つ。一方でカイラリティが逆のものに対して逆方向に回す軸性 R-対称性については電荷  $0$  である。したがって、超ポテンシャルがベクトルの R-対称性に関して電荷

+2 を持ち軸性 R-対称性に関して 0 であれば不変になる。この議論は超ポテンシャル  $W(\Phi)$  の形に依存する。上記の議論が可能である関数のことを準斉次 (*quasi-homogeneous*) と言う。つまり各カイラル超場  $\Phi^i$  ごとに電荷もしくはウェイトを付けて  $\lambda^{q^i} \Phi^i$  のような変換をした時に

$$W(\lambda^{q^i} \Phi^i) = \lambda^n W(\Phi^i), \quad (2.40)$$

となる関数である。また、全ての変数について同じウェイトで変換した時に以下のような性質を満たす関数を次数  $d$  斉次 (*homogeneous*) と言う:

$$G(\Phi^1, \dots, \Phi^n) \mapsto G(\lambda \Phi^1, \dots, \lambda \Phi^n) = \lambda^d G(\Phi^1, \dots, \Phi^n). \quad (2.41)$$

R-対称性

軸性  $U(1)_A$  とベクトルの  $U(1)_V$  R-対称性は  $\theta^4$  が不変なので、これらの変換の下で Kähler ポテンシャルの電荷が 0 であれば良い:

$$K(\Phi, \bar{\Phi}) : U(1)_A \text{ charge} = 0, \quad U(1)_V \text{ charge} = 0. \quad (2.42)$$

また超ポテンシャル  $W$  に関しては、 $\theta^2$  が  $U(1)_A$  の下では不変で  $U(1)_V$  の下で電荷  $-2$  である。よって  $W$  の R-電荷が  $U(1)_A$  の下で 0 で、 $U(1)_V$  の下で  $+2$  であれば不変になる。ツイステッド超ポテンシャル  $\widetilde{W}$  の場合は逆の議論で  $\tilde{\theta}^2$  が  $U(1)_A$  の下では  $-2$  で  $U(1)_V$  の下で不変である。よって  $\widetilde{W}$  の R-電荷が  $U(1)_A$  の下で  $+2$  で、 $U(1)_V$  の下で 0 であれば不変になる。

$$W(\Phi) : U(1)_A \text{ charge} = 0, \quad U(1)_V \text{ charge} = +2, \quad (2.43)$$

$$\widetilde{W}(\Sigma) : U(1)_A \text{ charge} = +2, \quad U(1)_V \text{ charge} = 0. \quad (2.44)$$

## 第3章 超共形場理論

この章では超共形場理論 (SCFT) の基本的な性質等を本研究に關係するゲージ化された線形シグマ模型 (Gauged Linear Sigma Model, GLSM) の観点からまとめる事を目的とする。GLSM の文脈において低エネルギー有効理論である超対称世界面シグマ模型 (NLSM) は、標的空間が Ricci 平坦で与えられる時に共形場理論になる事が知られている。また共形場理論は共形対称性を保った理論の変形を考える事が可能である。これは超共形場理論においても同様である。この時、2章で導入した2次元の超対称性における特徴の1つとして挙げた2種類のカイラル多重項が存在する事によって、2種類の独立な変形を与える事が可能である。超対称世界面シグマ模型の観点から見た共形場理論は、標的空間の Ricci 平坦性と密接に關係していた事から超共形場理論の共形対称性を保った理論の変形、すなわち SCFT のモジュライ空間である共形多様体と Ricci 平坦を保つ様な計量の変形に関するモジュライ空間が密接に關係している事が知られている。この様な關係がある為に Zamolodchikov 計量を通して標的空間のモジュライ空間上の Kähler ポテンシャルと球面分配間の間に関係を見出す事ができ、GLSM の分配関数から標的空間の幾何学的情報を引き出す事が可能となるのである。

### 3.1 超共形代数

ここでは超共形代数を導入する訳だが、通常の CFT におけるエネルギー運動量テンソルもしくは Virasoro 代数から始める。この共形代数に対して超対称電荷を1つずつ加える事によって、超対称性が組み込まれていない通常の Virasoro 代数を超対称に拡張する事で  $\mathcal{N} = 2$  超共形代数を構築する方針で進める [37–39]。したがってまず超対称性を含まない理論の通常の共形場理論における Virasoro 代数から始める事にする。以下では holomorphic (left-moving) セクターのみに注目して超共形代数を記述していく。一方で anti-holomorphic (right-moving) セクターに関しては、holomorphic (left-moving) セクターと全く同様の構造を有するので省略する。必要な際には適宜補足及び記述する。またここでは holomorphic (left-moving) / anti-holomorphic (right-moving) とは、場の引数  $\phi(z), \phi(\bar{z})$  に関して言及する事にする。

共形対称性とは、Weyl 変換の因子を  $\sigma(x)$  とすると以下で与えられる共形 Killing ベクトルによって生成される変換による対称性である:

$$\nabla_m v_n(x) + \nabla_n v_m(x) = \sigma(x) g_{mn}(x). \quad (3.1)$$

この関係式は、一般座標変換の中で Weyl 変換と組み合わせて計量を不変に保つ変換を意味している。この式でトレースを取ると次のように書き換わる:

$$\nabla_m v_n(x) + \nabla_n v_m(x) = \frac{2}{d} \nabla^l v_l(x) g_{mn}(x). \quad (3.2)$$

この方程式を共形 Killing 方程式と呼び、この方程式を満たすベクトル  $v_m$  を共形 Killing ベクトルという。この共形 Killing 方程式を解く事によって並進、回転、スケール変換、特殊共形変換を含む事がわかる。一般の  $d$  次元の場合には、並進の変換パラメーターが  $d$  個、回転の変換パラメーターが  $\frac{d(d-1)}{2}$  個、スケール変換のパラメーターが 1 個、特殊共形変換のパラメーターが  $d$  個である。これは、この変換が  $SO(1, d+1)$  に同型である事を意味している。実際に、回転の生成子  $\mathcal{P}_m$ 、回転を  $\mathcal{L}_{mn}$ 、スケール変換  $\mathcal{D}$ 、特殊共形変換  $\mathcal{K}_m$  とすると以下の共形代数を成す [40]:

$$[\mathcal{D}, \mathcal{P}_m] = i\mathcal{P}_m, \quad (3.3)$$

$$[\mathcal{D}, \mathcal{K}_m] = -i\mathcal{K}_m, \quad (3.4)$$

$$[\mathcal{K}_m, \mathcal{P}_n] = 2i(\eta_{mn}\mathcal{D} - \mathcal{L}_{mn}), \quad (3.5)$$

$$[\mathcal{K}_m, \mathcal{L}_{nl}] = i(\eta_{mn}\mathcal{K}_l - \eta_{ml}\mathcal{K}_n), \quad (3.6)$$

$$[\mathcal{P}_m, \mathcal{L}_{nl}] = i(\eta_{mn}\mathcal{P}_l - \eta_{ml}\mathcal{P}_n), \quad (3.7)$$

$$[\mathcal{L}_{mn}, \mathcal{L}_{lk}] = i(\eta_{nl}\mathcal{L}_{mk} - \eta_{ml}\mathcal{L}_{nk} - \eta_{km}\mathcal{L}_{ln} - \eta_{ml}\mathcal{L}_{nk}). \quad (3.8)$$

同じ事であるが、これは Poincare 対称性にスケール対称性及び特殊共形対称性が加わったものである。

次に 2 次元では上記の議論に加えて特別な事が起こる。上記で記述される共形 Killing 方程式は具体的に成分を見る事で Cauchy-Riemann 方程式と等価である事が直ちにわかる:

$$\partial_m v_n + \partial_n v_m = \frac{2}{d} \partial^l v_l \delta_{mn} \iff \partial_1 v_1 = \partial_2 v_2, \quad \partial_2 v_1 = -\partial_1 v_2. \quad (3.9)$$

この事から複素で書き直す事によって holomorphic なベクトルであれば常に共形 Killing 方程式を満たす事がわかる。したがって 2 次元の場合では共形対称性は無限次元の対称性へと拡大し、これに伴って共形代数も無限次元の代数に拡大する事が知られており、この代数の事を Virasoro 代数と呼ぶ。以下では 2 次元の共形代数にのみ注目する事にする。

•  $\mathcal{N} = 0$  CFT

CFT は複素座標  $z, w$  としてストレステンソルの OPE によって以下の関係式が与えられる:

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{z-w} + \dots \quad (3.10)$$

CFT の代数は OPE による記述と等価のモード展開の係数によって与えられる交換関係による記述がある:

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{L_n}{z^{n+2}}, \quad (3.11)$$

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0}, \quad (3.12)$$

$$[L_n, c] = [c, c] = 0. \quad (3.13)$$

この代数構造を Virasoro 代数と呼ぶ。ここで  $L_n$  は Virasoro 演算子であり、 $c$  はセントラルチャージで全ての Virasoro 演算子及びセントラルチャージ自身と可換である。またこの代数は最初に触れた並進、回転、スケール変換、特殊共形変換からなる部分代数を持つ。具体的には Virasoro 演算子の内の  $\{L_{-1}, L_0, L_1\}$  によって構成される Virasoro 代数の部分代数を持つ事が上記の代数構造からすぐにわかる。これは共形 Killing 方程式の際に言及した様に、2次元の共形代数は Cauchy-Riemann 方程式によって無限次元の代数に拡大するが、 $\{P_m, \mathcal{L}_{mn}, D, K_m\}$  の代数構造を含んでいる事を反映している。

この Virasoro の表現を与える為には共形不変な真空を定義する必要がある。従って共形不変な真空を以下の様に定義する:

$$L_n|0\rangle = 0, \quad (-1 \leq n). \quad (3.14)$$

これはストレステンソルを作用させて正則に振る舞う様に定義される。次にプライマリー場を導入する。これは共形変換の下で以下の様に振る舞う場として定義される:

$$\phi(z, \bar{z}) = \phi'(z', \bar{z}') \left( \frac{dz'}{dz} \right)^h \left( \frac{d\bar{z}'}{d\bar{z}} \right)^{\bar{h}}. \quad (3.15)$$

ここで  $h, \bar{h}$  は holomorphic (left-moving) / anti-holomorphic (right-moving) に対する共形ウェイトである。Virasoro 演算子の内の  $\{L_{-1}, L_0, L_1\}$  によって構成される部分代数に対してのみ上記の変換性を示すものは準プライマリー場という。次にプライマリー状態として以下を定義する:

$$|\phi\rangle := \lim_{z \rightarrow 0} \phi(z)|0\rangle. \quad (3.16)$$

この定義をする事によってストレステンソルとプライマリー場の OPE から、Virasoro 演算子に対してウェイト  $h_\phi$  を持つプライマリー状態  $|\phi\rangle$  は以下を満たす:

$$L_0|\phi\rangle = h_\phi|\phi\rangle, \quad L_{n>0}|\phi\rangle = 0, \quad (L_n)^\dagger = L_{-n}. \quad (3.17)$$

この様な状態を最高ウェイト状態という。  $0 < n$  に対して  $L_n$  は消滅演算子であり、逆に  $n < 0$  に対して  $L_n$  は生成演算子である。これは交換関係  $[L_0, L_n] = -nL_n$  からわかる。つまり  $0 < n$  の  $L_n$  は  $L_0$  の固有値を下げる演算子となる。Virasoro 演算子は無限個存在し、これらを作用させる事によって様々な状態を構成することが可能である:

$$L_{-n_1}L_{-n_2}\cdots L_{-n_i}|\phi\rangle. \quad (3.18)$$

この時に  $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_i$  をレベルと呼ばれる。具体的にいくつか書き上げてみると、レベル 0 はプライマリー状態そのものである  $|\phi\rangle$ 。レベル 1 は  $L_{-1}|\phi\rangle$ 、レベル 2 は  $L_{-2}|\phi\rangle$  及び  $L_{-1}L_{-1}|\phi\rangle$ 、レベル 3 は  $L_{-3}|\phi\rangle$ 、 $L_{-1}L_{-2}|\phi\rangle$ 、 $L_{-1}L_{-1}L_{-1}|\phi\rangle$ 、 $\cdots$  と構成する事が出来る。

#### • $\mathcal{N} = 1$ CFT

次に今見てきた超対称性の含まない共形代数を  $\mathcal{N} = 1$  に拡張する事を考えたい。この拡張のためにストレステンソルの (世界面上の) 超対称パートナーである超対称カレント  $G(z)$  を導入する。  $T(z)$  の共形ウェイト 2 に対し、  $G(z)$  は  $\frac{3}{2}$  を持つ。先程と同様に  $T(z)$  同士の OPE は以下で与えられていた:

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{z-w} + \cdots. \quad (3.19)$$

さらに  $\mathcal{N} = 1$  超共形代数にはこれに加えて  $T(z)$  と  $G(z)$  の OPE 及び  $G(z)$  同士の OPE が組み込まれる。これらは以下で与えられる:

$$T(z)G(w) = \frac{3/2}{(z-w)^2}G(w) + \frac{\partial_w G(w)}{z-w} + \cdots, \quad (3.20)$$

$$G(z)G(w) = \frac{2c/3}{(z-w)^3} + \frac{2T(w)}{z-w} + \cdots. \quad (3.21)$$

ここでカレントは次のようにモード展開される:

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{L_n}{z^{n+2}}, \quad G(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} \frac{G_r}{z^{r+\frac{3}{2}}}. \quad (3.22)$$

ここで超対称カレントは R-セクターでは  $r \in \mathbb{Z}$ 、NS-セクターでは  $r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$  である。この

モード展開によって  $\mathcal{N} = 1$  超共形代数は以下で与えられる:

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2 - 1)\delta_{n+m,0}, \quad (3.23)$$

$$[L_m, G_r] = \left(\frac{m}{2} - r\right)G_{m+r}, \quad (3.24)$$

$$\{G_r, G_s\} = 2L_{r+s} + \frac{c}{3}\left(r^2 - \frac{1}{4}\right)\delta_{r+s,0}. \quad (3.25)$$

この代数を  $\mathcal{N} = 1$  super-Virasoro 代数と呼ぶ。ここでも超対称性を含まない CFT と同じ様にユニタリー表現はエルミート共役を要請する:

$$(L_n)^\dagger = L_{-n}, \quad (G_r)^\dagger = G_{-r}. \quad (3.26)$$

次に最高ウェイト状態を超対称性を含まない CFT のものに付加的に制限を課す事で定義する。すなわち  $\mathcal{N} = 1$  Virasoro 代数におけるプライマリー状態  $|\phi\rangle$  は以下を満たす:

$$L_0|\phi\rangle = h_\phi|\phi\rangle, \quad L_{n>0}|\phi\rangle = 0, \quad G_{r>0}|\phi\rangle = 0. \quad (3.27)$$

これらを満たす状態がプライマリー状態 / 場である。NS / R-セクターにおける表現空間は以下のディセダントで張られる:

$$\text{NS-sector} : L_{-n_1}L_{-n_2}\cdots G_{-m_1+\frac{1}{2}}G_{-m_2+\frac{1}{2}}\cdots|\phi\rangle, \quad (3.28)$$

$$\text{R-sector} : L_{-n_1}L_{-n_2}\cdots G_{-m_1}G_{-m_2}\cdots|\phi\rangle. \quad (3.29)$$

またユニタリー性により任意の状態の共形ウェイトに対して

$$0 \leq h, \quad (3.30)$$

が成り立つ。さらに  $h = 0$  のプライマリー状態 — NS 真空 — は次の条件を満たす:

$$\|L_{-1}|0\rangle\|^2 - \|L_1|0\rangle\|^2 = \langle 0|[L_1, L_{-1}]|0\rangle = \langle 0|L_0|0\rangle = 0 \implies L_{-1}|0\rangle = 0, \quad (3.31)$$

$$\|G_{-\frac{1}{2}}|0\rangle\|^2 + \|G_{+\frac{1}{2}}|0\rangle\|^2 = \langle 0|\{G_{\frac{1}{2}}, G_{-\frac{1}{2}}\}|0\rangle = \langle 0|2L_0|0\rangle = 0 \implies G_{-\frac{1}{2}}|0\rangle = 0. \quad (3.32)$$

一方で R-セクターはゼロモードが存在するので注意が必要である。super-Virasoro 代数より  $[L_0, G_0] = 0$  となっているので

$$L_0|\phi\rangle = h_\phi|\phi\rangle, \quad L_0(G_0|\phi\rangle) = h_\phi(G_0|\phi\rangle), \quad (3.33)$$

であり  $|\phi\rangle, G_0|\phi\rangle$  が縮退している事が分かる。しかし

$$G_0|\phi\rangle = 0, \quad (3.34)$$

を満たす状況が存在しこれは Ramond 真空と呼ばれる。この状態のノルムを計算すると

$$0 \leq \|G_0|\phi\rangle\|^2 = \langle \phi|\{G_0, G_0\}|\phi\rangle = \langle \phi|\left(2h_\phi - \frac{c}{12}\right)|\phi\rangle \implies \frac{c}{24} \leq h_\phi, \quad (3.35)$$

を得る。これより以下の事が結論付けられる:

- $\frac{c}{24} < h$  : R-セクターの状態はパートナー  $G_0|\phi\rangle$  を持つ。
- $\frac{c}{24} = h$  : R-セクターの状態は縮退せず  $G_0|\phi\rangle = 0$  となる。

•  $\mathcal{N} = 2$  CFT

さらに上記の  $\mathcal{N} = 1$  SCA を  $\mathcal{N} = 2$  に拡張したい。故に超対称カレントをもう 1 つ導入すれば良い。先程の  $\mathcal{N} = 1$  では超対称カレントは 1 つだったが、ここでは 2 つになるので超対称カレントにラベルをつける。よって  $\mathcal{N} = 1$  の超対称カレント  $G^1(z)$  に加えて  $G^2(z)$  を導入する。したがって  $G^1(z)$  と  $G^2(z)$  の演算子積展開 (OPE) が新たな構造として加わる:

$$G^1(z)G^2(w) = \frac{2c/3}{(z-w)^3} + \frac{2T(w)}{z-w} + i \left( \frac{2J(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w J(w)}{z-w} \right) \dots \quad (3.36)$$

ここで  $\mathcal{N} = 2$  SCA は  $T, G^{1,2}$  だけでは閉じずに  $J$  というカレントが必要になる。これは先ほどの  $\mathcal{N} = 1$  の場合と比較して、 $\mathcal{N} = 1$  の場合は超対称性によって  $T$  と  $G$  が結び付いていた。一方で  $\mathcal{N} = 2$  では超対称性が 2 つ存在するので、 $T$  と  $G$  に加えて  $G$  のパートナーが存在する必要がある。このパートナーが  $J$  である。これは上記の代数から分かる様に共形ウェイト 1 を持つ。これは  $U(1)_R$  対称性に対するカレントとして解釈出来る。 $\mathcal{N} = (2, 2)$  SCA の文脈であれば  $U(1)_V, U(1)_A$  を複素に組み直した holomorphic (left-moving) セクターすなわち  $U(1)_L$  に対応する。したがって上記に加えてさらに以下の OPE があたえられる:

$$T(z)J(w) = \frac{J(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w J(w)}{z-w} + \dots, \quad (3.37)$$

$$J(z)G^1(w) = \frac{iG^2(w)}{z-w} + \dots, \quad (3.38)$$

$$J(z)G^2(w) = \frac{-iG^1(w)}{z-w} + \dots, \quad (3.39)$$

$$J(z)J(w) = \frac{c/3}{(z-w)^2} + \dots \quad (3.40)$$

$T(z)J(w)$  の OPE から  $J$  が共形ウェイト 1 を持ったカイラルプライマリーである事が読み取れる。さらに  $G^{1,2}$  との OPE から  $U(1)$  カレントによって  $G^{1,2}$  を回し、それぞれの電荷が読み取れる。通常  $G^{1,2}$  を複素に組み直した超対称カレントを用いる:

$$G^\pm(z) := \frac{1}{\sqrt{2}}(G^1 \pm iG^2). \quad (3.41)$$

ここで注意が必要である。元々の超対称カレントに対応するカレントは  $G^{1,2}$  であるので、 $G^\pm$  は通常の超対称代数で用いるものではない。これに伴って、 $U(1)$  カレントも  $U(1)_L(z), U(1)_R(\bar{z})$  であって  $U(1)_V, U(1)_A$  では無い。

以上の議論を用いる事により改めて  $\mathcal{N} = 2$  SCA を与える。 $\mathcal{N} = (2, 2)$  SCFT において holomorphic (left moving) セクターカレント  $\{T(z), G^\pm(z), J(z)\}$ 、anti-holomorphic (right



moving) セクターカレント  $\{\bar{T}(\bar{z}), \bar{G}^\pm(\bar{z}), \bar{J}(\bar{z})\}$  とする。ここで  $\mathcal{N} = 2$  超共形代数 (SCA) を与える。これは共形ウェイト 2 のエネルギー運動量テンソル  $T(z)$ 、共形ウェイト  $\frac{3}{2}$  の 2 つの反交換な超対称カレント  $G^\pm(z) := \frac{1}{\sqrt{2}}(G^1 \pm iG^2)$  と  $U(1)$  カレント  $J(z)$  によって構成される。これらの演算子間の演算子積展開 (OPE) は以下で与えられる [38, 39]:

$$G^\pm(z)G^\mp(w) = \frac{2c/3}{(z-w)^3} \pm \frac{2J(w)}{(z-w)^2} + \frac{2T(w) \pm \partial_w J(w)}{z-w} + \dots, \quad (3.42)$$

$$J(z)G^\pm(w) = \pm \frac{G^\pm(w)}{z-w} + \dots, \quad (3.43)$$

$$J(z)J(w) = \frac{c/3}{(z-w)^2} + \dots, \quad (3.44)$$

$$T(z)J(w) = \frac{J(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w J(w)}{z-w} + \dots, \quad (3.45)$$

$$T(z)G^\pm(w) = \frac{3G^\pm(w)/2}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w G^\pm(w)}{z-w} + \dots, \quad (3.46)$$

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{z-w} + \dots. \quad (3.47)$$

$c$  はセントラルチャージ (中心電荷) である。超対称カレントに対する境界条件は

$$G^\pm(e^{2\pi i} z) = -e^{\mp 2\pi a i} G^\pm(z), \quad (3.48)$$

とし、これは  $a = 0$  で反周期的となり R-セクター、 $a = \frac{1}{2}$  で周期的となり NS-セクターに対応する。次にカレントを次のようにモード展開する:

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{L_n}{z^{n+2}}, \quad J(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{J_n}{z^{n+1}}, \quad G^\pm(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} \frac{G_r^\pm}{z^{r+\frac{3}{2}}}. \quad (3.49)$$

ここで R-セクターでは  $r \in \mathbb{Z}$ 、NS-セクターでは  $r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$  である。 $\mathcal{N} = 2$  超共形代数はカレントの OPE で表現された。また別の表現方法として、これらのモード展開の係数が従うの交換関係も  $\mathcal{N} = 2$  超共形代数を与え以下のようなになる:

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}, \quad (3.50)$$

$$[J_m, J_n] = \frac{c}{3}m\delta_{m+n,0}, \quad (3.51)$$

$$[L_n, J_m] = -mJ_{m+n}, \quad (3.52)$$

$$[L_n, G_r^\pm] = \left(\frac{n}{2} - r\right)G_{n+r}^\pm, \quad (3.53)$$

$$[J_n, G_r^\pm] = \pm G_{n+r}^\pm, \quad (3.54)$$

$$\{G_r^+, G_s^-\} = 2L_{r+s} + (r-s)J_{r+s} + \frac{c}{3}\left(r^2 - \frac{1}{4}\right)\delta_{r+s,0}. \quad (3.55)$$

ここで超対称カレントに対する交換関係に注目する:

$$\{G_r^-, G_s^+\} = 2L_{r+s} - (r-s)J_{r+s} + \frac{c}{3}\left(r^2 - \frac{1}{4}\right)\delta_{r+s,0}. \quad (3.56)$$

ユニタリー表現はエルミート共役を要請する:

$$(L_n)^\dagger = L_{-n}, \quad (J_n)^\dagger = J_{-n}, \quad (G_r^\pm)^\dagger = G_{-r}^\mp. \quad (3.57)$$

次に最高ウェイト状態を超対称性の含まない CFT のものに付加的に制限を課す事で定義する。すなわち  $\mathcal{N} = 2$  Virasoro 代数におけるプライマリー状態  $|\phi\rangle$  は以下を満たす:

$$L_0|\phi\rangle = h_\phi|\phi\rangle, \quad J_0|\phi\rangle = q_\phi|\phi\rangle, \quad L_{n>0}|\phi\rangle = 0, \quad J_{n>0}|\phi\rangle = 0, \quad G_{r>0}^\pm|\phi\rangle = 0. \quad (3.58)$$

先程と同様に R-セクターにおいてはゼロモード  $G_0^\pm$  が存在するので注意しなければならない。これらによって消える真空を考える:

$$G_0^\pm|\phi\rangle = 0. \quad (3.59)$$

この Ramond 真空のノルムを計算すると

$$0 \leq \left\| G_0^+|\phi\rangle \right\|^2 + \left\| G_0^-|\phi\rangle \right\|^2 = \langle \phi | \{G_0^-, G_0^+\} | \phi \rangle = \langle \phi | \left( 2h_\phi - \frac{c}{12} \right) | \phi \rangle \implies \frac{c}{24} \leq h_\phi, \quad (3.60)$$

を得る。したがって  $\mathcal{N} = 1$  同様に  $\frac{c}{24} = h$  の状態が真空に対応する。

- NS-セクター

NS-セクター  $r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$  に注目すると  $L_0$  の固有値と  $J_0|\phi\rangle = q_\phi|\phi\rangle$  を用いてラベルを付ける事が出来る。NS-セクターに関してはこの後もう少し踏み込んで議論する。

- R-セクター

R-セクター  $r \in \mathbb{Z}$  に注目すると、 $L_0, J_0$  に加えて  $G_0^\pm$  が存在する。これらに対し  $G_0^\pm|\phi\rangle = 0$  を満たす状態は  $h_\phi = \frac{c}{24}$  で特徴付けられる。これを Ramond 真空 (*Ramond ground state*) という。この時  $U(1)$  カレント  $J$  の電荷に依存しない事に注意。

また今手に入れた  $\mathcal{N} = 2$  超共形代数の大域的部分すなわち有限次元の部分代数に注目する。これは超対称性の含まない共形場理論の Virasoro 代数における部分代数に対応して、 $\mathcal{N} = 2$  超共形場理論における部分代数である。超共形代数における holomorphic (left-moving) 部分が  $\{L_0, L_1, L_{-1}, J_0; G_{\pm\frac{1}{2}}^+, G_{\pm\frac{1}{2}}^-\}$  とすると、anti-holomorphic (right-moving) 部分も全く同

じ代数構造を持ち以下で与えられる [25, 41, 42]:

$$[L_0, G_{+\frac{1}{2}}^\pm] = -\frac{1}{2}G_{+\frac{1}{2}}^\pm, \quad [L_0, G_{-\frac{1}{2}}^\pm] = +\frac{1}{2}G_{-\frac{1}{2}}^\pm, \quad (3.61)$$

$$[L_1, G_{+\frac{1}{2}}^\pm] = +G_{+\frac{1}{2}}^\pm, \quad [L_{-1}, G_{+\frac{1}{2}}^\pm] = -G_{+\frac{1}{2}}^\pm, \quad (3.62)$$

$$[J_0, G_{+\frac{1}{2}}^\pm] = \pm G_{+\frac{1}{2}}^\pm, \quad [J_0, G_{-\frac{1}{2}}^\pm] = \pm G_{-\frac{1}{2}}^\pm, \quad (3.63)$$

$$[L_0, L_{\pm 1}] = \mp L_{\pm 1}, \quad [L_{-1}, L_1] = -2L_0, \quad (3.64)$$

$$\{G_{\pm\frac{1}{2}}^+, G_{\pm\frac{1}{2}}^-\} = 2L_{\pm 1}, \quad \{G_{\pm\frac{1}{2}}^+, G_{\mp\frac{1}{2}}^-\} = 2L_0 \pm J_0. \quad (3.65)$$

### 3.2 カイラル・プライマリー場

ここではまずカイラルプライマリー場及びこれらが成すカイラルリングについて触れる [39]。今から holomorphic 部分すなわち left-moving の NS-セクターのみに注目する。ここで改めて言葉の定義について触れておく。先程は holomorphic (left-moving) / anti-holomorphic (right-moving) とは、場の引数  $\phi(z)/\phi(\bar{z})$  に関して言及していた。一方で超共形場理論においてカイラル / 反カイラルという言葉が使われるが、ここでは場に関して  $\phi(z, \bar{z})/\bar{\phi}(z, \bar{z})$  言及する事にする。

$\mathcal{N} = 2$  の SCA の超対称カレントに対する交換関係は以下で与えられていた:

$$\{G_r^-, G_s^+\} = 2L_{r+s} - (r-s)J_{r+s} + \frac{c}{3} \left( r^2 - \frac{1}{4} \right) \delta_{r+s,0}. \quad (3.66)$$

また  $\mathcal{N} = 2$  Virasoro におけるプライマリー場 — *superconformal primary field* — は以下で定義されていた:

$$L_0|\phi\rangle = h_\phi|\phi\rangle, \quad J_0|\phi\rangle = q_\phi|\phi\rangle, \quad L_{n>0}|\phi\rangle = 0, \quad J_{n>0}|\phi\rangle = 0, \quad G_{r>0}^\pm|\phi\rangle = 0. \quad (3.67)$$

この  $\mathcal{N} = 2$  SCA において現れるプライマリー場に対してさらにカイラル条件 (より正確には left chiral 拘束条件) を課したプライマリー場 — *chiral primary field* — を以下で定義する:

$$\text{(left) chiral : } G_{-\frac{1}{2}}^+|\phi\rangle = 0. \quad (3.68)$$

プライマリー状態の言葉では  $G_{-\frac{1}{2}}^+$  で不変な状態であり、OPE の言葉では  $G^+(z)$  との OPE が正則である。

同様の方法で反カイラルプライマリー場 — *anti-chiral primary field* (正確には left anti-chiral) — を定義する事ができる:

$$\text{(left) anti-chiral : } G_{-\frac{1}{2}}^-|\phi\rangle = 0. \quad (3.69)$$

今 holomorphic セクターに対してカイラル / 反カイラルを定義したが、anti-holomorphic セクター  $\phi(\bar{z})$  に対しても同様に定義する事が出来、right chiral :  $\overline{G}_{-\frac{1}{2}}^+|\phi\rangle = 0$ 、right anti-chiral :  $\overline{G}_{-\frac{1}{2}}^-|\phi\rangle = 0$ 。

上記を満たす様なカイラル / 反カイラルプライマリー状態を改めてまとめる:

$$\text{chiral primary : } L_0|\phi_c\rangle = h_{\phi_c}|\phi_c\rangle, \quad L_{n+1}|\phi_c\rangle = G_{n\mp\frac{1}{2}}^\pm|\phi_c\rangle = 0 \quad (0 \leq n), \quad (3.70)$$

$$\text{anti-chiral primary : } L_0|\phi_a\rangle = h_{\phi_a}|\phi_a\rangle, \quad L_{n+1}|\phi_a\rangle = G_{n\pm\frac{1}{2}}^\pm|\phi_a\rangle = 0 \quad (0 \leq n). \quad (3.71)$$

超共形代数を用いる事で以下の事が導かれる:

$$0 \leq \left\| G_{-\frac{1}{2}}^+|\phi_c\rangle \right\|^2 + \left\| G_{+\frac{1}{2}}^-|\phi_c\rangle \right\|^2 = \langle \phi_c | \left\{ G_{+\frac{1}{2}}^-, G_{-\frac{1}{2}}^+ \right\} | \phi_c \rangle = \langle \phi_c | (2L_0 - J_0) | \phi_c \rangle, \quad (3.72)$$

$$0 \leq \left\| G_{-\frac{1}{2}}^-|\phi_a\rangle \right\|^2 + \left\| G_{+\frac{1}{2}}^+|\phi_a\rangle \right\|^2 = \langle \phi_a | \left\{ G_{+\frac{1}{2}}^+, G_{-\frac{1}{2}}^- \right\} | \phi_a \rangle = \langle \phi_a | (2L_0 + J_0) | \phi_a \rangle. \quad (3.73)$$

これは SCA より  $\{G_{\frac{1}{2}}^-, G_{-\frac{1}{2}}^+\} = (2L_0 - J_0)$  が言え、カイラルプライマリー状態は  $G_{-\frac{1}{2}}^+|\phi_c\rangle = 0$ 、 $(G_{-\frac{1}{2}}^+)^{\dagger} = G_{+\frac{1}{2}}^-$ 、反カイラルプライマリー状態は  $G_{+\frac{1}{2}}^+|\phi_a\rangle = 0$  を満たす。  $G_{+r}$  で消滅する事は自明である。この関係からカイラル / 反カイラルプライマリー状態の共形ウェイトと R-電荷は

$$\frac{1}{2}q_{\phi_c} = h_{\phi_c}, \quad -\frac{1}{2}q_{\phi_a} = h_{\phi_a}, \quad (3.74)$$

となる。カイラルプライマリーでは無い状態に対しては  $\frac{1}{2}q_{\phi} \leq h_{\phi}$ 、 $-\frac{1}{2}q_{\phi} \leq h_{\phi}$  となる。同様にして超共形代数から

$$0 \leq \left\| G_{-\frac{3}{2}}^+|\phi_c\rangle \right\|^2 + \left\| G_{+\frac{3}{2}}^-|\phi_c\rangle \right\|^2 = \langle \phi_c | \left\{ G_{+\frac{3}{2}}^-, G_{-\frac{3}{2}}^+ \right\} | \phi_c \rangle = \langle \phi_c | \left( 2L_0 - 3J_0 + \frac{3}{2}c \right) | \phi_c \rangle, \quad (3.75)$$

$$0 \leq \left\| G_{-\frac{3}{2}}^-|\phi_a\rangle \right\|^2 + \left\| G_{+\frac{3}{2}}^+|\phi_a\rangle \right\|^2 = \langle \phi_a | \left\{ G_{-\frac{3}{2}}^-, G_{+\frac{3}{2}}^+ \right\} | \phi_a \rangle = \langle \phi_a | \left( 2L_0 + 3J_0 + \frac{3}{2}c \right) | \phi_a \rangle. \quad (3.76)$$

したがって上記の共形ウェイトと R-電荷の関係を用いることでカイラル / 反カイラルに対して共形ウェイトが制限される:

$$0 \leq 2h_{\phi_{c,a}} \mp 3q_{\phi_{c,a}} + \frac{3}{2}c = -4h_{\phi_{c,a}} + \frac{3}{2}c \implies h_{\phi_{c,a}} \leq \frac{c}{6}. \quad (3.77)$$

次にカイラル / 反カイラル プライマリー状態  $\phi_i^{c,a}(z)$  同士の OPE を考える [37, 39]。一般に OPE は  $\phi_i(z)$  を積を取った  $\phi_j(0)$  に近づけた時の特異的な部分に注目する:

$$\phi_i(z)\phi_j(0) \simeq \sum_k \frac{C_{ij}^k}{z^{h_i+h_j-h_k}} \mathcal{O}_k. \quad (3.78)$$

しかしカイラルプライマリー場の場合は加算的な  $U(1)_R$ -電荷によって OPE が非特異である事が保証される:

$$\phi_i^c(z)\phi_j^c(0) = \sum_k C_{ij}^k \phi_k(0) + (\text{non-singular term}). \quad (3.79)$$

この時 RHS の  $\phi^k$  は共形ウェイト  $h_k = h_i + h_j$  となる。カイラルプライマリー場  $\{\phi_i\}$  は積に関して結合性 (associativity)  $(\phi_i\phi_j)\phi_k = \phi_i(\phi_j\phi_k)$  及び可換性 (commutativity)  $\phi_i\phi_j = \phi_j\phi_i$  を満たすのでリング構造を成し、*chiral ring*  $\mathcal{R}_z$  と呼び次の様に定義される:

$$\mathcal{R}_z := \mathcal{P}[\phi_i^c]/\mathcal{J}. \quad (3.80)$$

ここで  $\mathcal{P}[\phi_i]$  は  $\phi$  に関する多項式であり  $\mathcal{J}$  は “vanishing relation” と呼ばれ、 $\Phi$  に関する運動方程式によって与えられる。これによって同値関係を導入している。正確にいうと holomorphic (left-moving) カイラルリングである。カイラルプライマリー場の数は有限である。同様に反カイラルプライマリー場についても *anti-chiral ring*  $\overline{\mathcal{R}}_z$  が定義される:

$$\overline{\mathcal{R}}_z := \mathcal{P}[\phi_i^a]/\mathcal{J}. \quad (3.81)$$

ここでもこれは正確には holomorphic (left-moving) セクターにおける反カイラルプライマリー場に対して反カイラルリング  $\overline{\mathcal{R}}_z$  である。また anti-holomorphic (right-moving) セクターに対してもそれぞれカイラル / 反カイラル リングを定義する事ができる  $\mathcal{R}_z, \overline{\mathcal{R}}_z$ 。さらにこれらの holomorphic / anti-holomorphic とカイラル / 反カイラルから 4 つの状態が得られる:

$$\begin{aligned} (c, c) \text{ primary} : \phi_i \in \mathcal{R}_z \otimes \mathcal{R}_{\bar{z}}, & & (a, a) \text{ primary} : \bar{\phi}_i \in \overline{\mathcal{R}}_z \otimes \overline{\mathcal{R}}_{\bar{z}}, \\ (c, a) \text{ primary} : \sigma_a \in \mathcal{R}_z \otimes \overline{\mathcal{R}}_{\bar{z}}, & & (a, c) \text{ primary} : \bar{\sigma}_a \in \overline{\mathcal{R}}_z \otimes \mathcal{R}_{\bar{z}}. \end{aligned}$$

カイラルと反カイラルの組み合わせのものをツイステッドカイラルと呼ぶ。上記の定義から明らかな様に、 $(c, c)$  と  $(a, a)$  及び  $(c, a)$  と  $(a, c)$  は互いに複素共役の関係にある。

ここからカイラルリングとツイステッドカイラルリングにおけるスカラー演算子  $\phi_i^{(c,c)} \in \mathcal{R}_z \otimes \mathcal{R}_{\bar{z}}$  (もしくは簡略化の為に  $\phi_i \in \mathcal{R}_{(c,c)}$ ) と  $\sigma_a^{(c,a)} \in \mathcal{R}_z \otimes \overline{\mathcal{R}}_{\bar{z}}$  (もしくは簡略化の為に  $\sigma_a \in \mathcal{R}_{(c,a)}$ ) を考える ( $c, \bar{c}$  は省略する)。 $\phi$  と  $\sigma$  の holomorphic / anti-holomorphic セクターの共形ウェイト  $(h, \bar{h})$  と  $(\tilde{h}, \tilde{\bar{h}})$  はスカラー演算子よりスピンのゼロとなるので以下の様になる:

$$h = \bar{h} : \phi_i \in \mathcal{R}_{(c,c)}, \quad \tilde{h} = \tilde{\bar{h}} : \sigma_a \in \mathcal{R}_{(c,a)}. \quad (3.82)$$

ここまでは超共形場理論のカイラル / ツイステッドカイラルに関して見てきたが、注意しなければならない事はこれらの記法は超共形場理論の言葉であって超対称性理論の言葉

では無いという点である。もう少し具体的には超共形場理論における  $U(1)$  対称性のカレントは holomorphic  $U(1)_L : J_L(z)$  / anti-holomorphic  $U(1)_R : J_R(\bar{z})$  である。一方で超対称性における  $U(1)$  対称性のカレントはベクトル  $U(1)$  / 軸性  $U(1)$  R-対称性 —  $U(1)_V / U(1)_A$  — である。したがって超対称性における R-対称性と超共形場理論におけるカレントを繋ぐ為に  $U(1)_V$  と  $U(1)_A$  を  $U(1)_L$  と  $U(1)_R$  カレントの holomorphic  $U(1)_L : J_L(z)$  / anti-holomorphic  $U(1)_R : J_R(\bar{z})$  セクターの線形結合によって以下の様に定義する\*:

$$J_V = J_L(z) + \bar{J}_R(\bar{z}), \quad J_A = J_L(z) - \bar{J}_R(\bar{z}). \quad (3.83)$$

すると  $\phi$  と  $\sigma$  の holomorphic / anti-holomorphic セクターにおける R-電荷  $(q_L, \bar{q}_R)$ 、 $(\tilde{q}_L, \tilde{\bar{q}}_R)$  と次の関係にある:

$$h = \frac{q_L}{2} \in \mathcal{R}_z, \quad \bar{h} = \frac{\bar{q}_R}{2} \in \mathcal{R}_{\bar{z}}, \quad \tilde{h} = \frac{\tilde{q}_L}{2} \in \mathcal{R}_z, \quad \tilde{\bar{h}} = -\frac{\tilde{\bar{q}}_R}{2} \in \bar{\mathcal{R}}_{\bar{z}} \quad (3.84)$$

$\sigma$  の anti-holomorphic セクターは反カイラルである事からマイナス符号が現れる。この V-A 記法においてカイラル  $\phi_i \in \mathcal{R}_{(c,c)}$  / ツイステッドカイラル  $\sigma_a \in \mathcal{R}_{(c,a)}$  の R-電荷は以下の様になる ( $h = \bar{h}, \tilde{h} = \tilde{\bar{h}}$ ):

$$\Delta_\phi = h + \bar{h} = \frac{q_L}{2} + \frac{\bar{q}_R}{2} =: \frac{q_V}{2}, \quad \frac{q_L}{2} - \frac{\bar{q}_R}{2} =: \frac{q_A}{2} \stackrel{h=\bar{h}}{=} 0, \quad (3.85)$$

$$\Delta_\sigma = \tilde{h} + \tilde{\bar{h}} = \frac{\tilde{q}_L}{2} - \frac{\tilde{\bar{q}}_R}{2} =: \frac{q_A}{2}, \quad \frac{q_L}{2} - \left(-\frac{\bar{q}_R}{2}\right) =: \frac{q_V}{2} \stackrel{\tilde{h}=\tilde{\bar{h}}}{=} 0 \quad (3.86)$$

ここで  $\Delta$  はスケーリング次元である。これらはラグランジアンを持つ場の理論の言葉に翻訳すると以下の様になる:

$$(\phi, \psi, \mathcal{O}) \in \Phi \quad \mathcal{N} = (2, 2) \text{ chiral multiplet} . \quad (3.87)$$

R-電荷に関して  $\Phi$  が  $(q_V, q_A) = (2, 0)$  である時に、スカラー場  $\phi \in \Phi$  は  $(q_V, q_A) = (2, 0)$  を持つのでスケーリング次元  $\Delta = 1, h = \frac{q_L}{2}, \bar{h} = \frac{\bar{q}_R}{2}$  を満たしカイラルプライマリー場であると解釈される。またカイラル多重項の  $F$ -項は R-電荷が中性であり次元が 2 なので共形場理論を変形する marginal な演算子として使用される。同様にツイステッドカイラルプライマリーは以下の様になる:

$$(\sigma, \lambda, \tilde{\mathcal{O}}) \in \Sigma \quad \mathcal{N} = (2, 2) \text{ twisted chiral multiplet} . \quad (3.88)$$

$\sigma \in \Sigma$  は  $(q_V, q_A) = (0, 2)$  を持ち  $\Delta = 1, h = \frac{q_L}{2}, \bar{h} = -\frac{\bar{q}_R}{2}$  のツイステッドカイラルプライマリー場と解釈される。またツイステッドカイラル多重項に対する超ポテンシャルである G-項は R-電荷が中性であり次元が 2 で marginal な演算子として理解される。

\* [43] では  $J_R = \frac{1}{2}(J_A - J_V)$  で定義されている。

### 3.3 スペクトラル・フロー

ここでは NS-セクターと R-セクターの関係について議論する。実は NS-セクターと R-セクターの間にはスペクトラルフローという向き付けされた写像が存在し、その“向き”はフリーパラメーターが司っている。この写像によって NS-セクターの状態と R-セクターの状態の間に対応関係が与えられる。

NS-セクターにおける超共形代数と R-セクターにおける超共形代数は同型である。2つのカレントの集合  $\{L_n, G_r^\pm, J_n\}$ ,  $\{L'_n, G'_r^\pm, J'_n\}$  を考える。これらの間には以下の様な関係 (map) が存在する [38, 39]:

$$L'_n = L_n + \eta J_n + \frac{c}{6}\eta^2\delta_{n,0}, \quad (3.89)$$

$$J'_n = J_n + \frac{c}{3}\eta\delta_{n,0}, \quad (3.90)$$

$$G'_r{}^\pm = G_{r\pm\eta}^\pm. \quad (3.91)$$

ここで  $\eta \in \frac{\mathbb{Z}}{2}$  である。この写像によって  $G^\pm$  の整数モードである Ramond セクターと半整数モードである NS セクターを入れ替える事に対応する。すなわちこのスペクトラルフローはユニタリー表現をユニタリー表現に射影する事を意味する。上記の変換をより正確に書き下すと以下の様になる:

$$L_0|\phi\rangle = h|\phi\rangle, \quad J_0|\phi\rangle = q|\phi\rangle, \quad (3.92)$$

$$L'_n = U_\eta L_n U_\eta^{-1} = L_n + \eta J_n + \frac{c}{6}\eta^2\delta_{n,0}, \quad (3.93)$$

$$J'_n = U_\eta J_n U_\eta^{-1} = J_n + \frac{c}{3}\eta\delta_{n,0}, \quad (3.94)$$

$$G'_r{}^\pm = U_\eta G_r^\pm U_\eta^{-1} = G_{r\pm\eta}^\pm, \quad (3.95)$$

$$|\phi_\eta\rangle := U_\eta|\phi\rangle, \quad L_0|\phi_\eta\rangle = \left(h + \eta q + \frac{c}{6}\eta^2\right)|\phi\rangle, \quad J_0|\phi\rangle = \left(q + \frac{c}{3}\eta\right)|\phi\rangle. \quad (3.96)$$

すぐ後で見る様にスペクトラルフローを特徴付ける  $\eta = \pm\frac{1}{2}$  の時は NS-セクターと R-セクターを関係付ける。一方でこのパラメーターが  $\eta = \pm 1$  の時は NS-セクター間を繋ぐ。後者に関してもう少し正確に言及するとカイラルリング  $\mathcal{R}$  と反カイラルリング  $\bar{\mathcal{R}}$  を繋ぐ。

具体的に holomorphic セクターに注目し NS-セクターにおけるカイラルプライマリー状態は  $(h, q) = (\frac{q}{2}, q \leq \frac{c}{3})$  は以下を定義より満たす:

$$G_{-\frac{1}{2}}^+|\phi\rangle = G_{+\frac{1}{2}}^-|\phi\rangle = 0. \quad (3.97)$$

スペクトラルフロー  $\eta = \frac{1}{2}$  によって  $G_r^\pm \rightarrow G_{r\pm\eta}^\pm$  となるので

$$0 = G_{-\frac{1}{2}}'^+ |\phi_{\eta=\frac{1}{2}}\rangle = G_0^+ |\phi_{\eta=\frac{1}{2}}\rangle, \quad 0 = G_{+\frac{1}{2}}'^- |\phi_{\eta=\frac{1}{2}}\rangle = G_0^- |\phi_{\eta=\frac{1}{2}}\rangle, \quad (3.98)$$

よりこれらは Ramond 真空そのものである。また R-真空をスペクトラルフロー  $\eta = -\frac{1}{2}$  を実行すると

$$0 = G_0'^+ |\phi_{\eta=-\frac{1}{2}}\rangle = G_{-\frac{1}{2}}^+ |\phi_{\eta=\frac{1}{2}}\rangle, \quad 0 = G_0'^- |\phi_{\eta=-\frac{1}{2}}\rangle = G_{+\frac{1}{2}}^- |\phi_{\eta=-\frac{1}{2}}\rangle, \quad (3.99)$$

を得る。これは NS-セクターにおけるカイラルプライマリーである。一方でもう一度スペクトラルフロー  $\eta = \frac{1}{2}$  を実行すると

$$0 = G_0'^+ |\phi_{\eta=\frac{1}{2}}\rangle = G_{\frac{1}{2}}^+ |\phi_{\eta=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\rangle, \quad 0 = G_0'^- |\phi_{\eta=\frac{1}{2}}\rangle = G_{-\frac{1}{2}}^- |\phi_{\eta=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\rangle, \quad (3.100)$$

これは NS-セクターにおける反カイラルプライマリー状態そのものである。

つまり上記で言及した事をまとめると、スペクトラルフローは以下の様な関係になっている事がわかる:

$$\text{chiral primary in NS} \xrightarrow{\eta=\frac{1}{2}} \text{vacuum in R} \xrightarrow{\eta=\frac{1}{2}} \text{anti-chiral primary in NS} \quad (3.101)$$

これは全く同様の議論によって逆向きのスペクトラルフローも見ることができる:

$$\text{chiral primary in NS} \xleftarrow{\eta=-\frac{1}{2}} \text{vacuum in R} \xleftarrow{\eta=-\frac{1}{2}} \text{anti-chiral primary in NS} \quad (3.102)$$

また、上記の議論から明らかな様に  $\eta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$  によって NS-セクター同士が直接結びついている:

$$\text{chiral primary in NS} \xleftrightarrow{\eta=\pm 1} \text{anti-chiral primary in NS} \quad (3.103)$$

### 3.4 共形場理論のモジュライ空間

一般に  $d$  次元の場の理論において、ある operator  $\mathcal{O}$  はそのスケーリング次元  $\Delta_{\mathcal{O}}$  を用いて *irrelevant*, *relevant*, *marginal* の 3 種類に大別することができる。スケーリング次元  $\Delta_{\mathcal{O}}$  は共形場理論においては共形次元と呼ばれ、場の holomorphic (left-moving) / anti-holomorphic (right-moving) 共形ウェイト  $(h, \bar{h})$  を用いて  $\Delta_{\mathcal{O}} := h + \bar{h}$  と与えられる。一般の  $d$  次元の場合で以下の様に分類される:

1. irrelevant :  $\Delta_{\mathcal{O}} = h_{\mathcal{O}} + \bar{h}_{\mathcal{O}} > d$

irrelevant 演算子による変形を理論に実行する事を考える事が出来る。irrelevant 演算子に付随する結合定数などのパラメーターは IR 方向への RG フローによって小さく



なり、この変形は効かなくなる。すなわち、固定点から変形したとしても同じ固定点にフローする。逆に RG フローの方向を変えれば relevant や irrelevant 等の意味は入れ替わる。

$$2. \text{ relevant : } \Delta_{\mathcal{O}} = h_{\mathcal{O}} + \bar{h}_{\mathcal{O}} < d$$

relevant 演算子による変形を理論に実行する事を考える事が出来る。relevant 演算子に付随するパラメーターは IR 方向への RG フローすると、IR 方向に行くに連れて大きくなりこの変形による寄与が blow up する。

$$3. \text{ marginal : } \Delta_{\mathcal{O}} = h_{\mathcal{O}} + \bar{h}_{\mathcal{O}} = d$$

marginal 演算子による変形を理論に実行する事を考える事が出来る。marginal 演算子に付随する変形のパラメーターはさらに3つクラスに分かれる。これは marginally relevant、marginally irrelevant、exactly marginal となる。特に exactly marginal な場合は、元々の固定点から連続的に繋がる新たな固定点への変形に対応する。連続的という意味は、変形のパラメーターを十分小さくする極限をとる事で元々の固定点と繋がる。

これらの演算子によって CFT が変形され IR に向かってフローした際に振る舞いが異なる。irrelevant 演算子では IR 固定点に影響を与えない。言い換えると、RG フローにおける演算子の係数がゼロとなる。つまり高次元演算子である。この様な演算子は次元解析からカットオフスケールで抑制される。relevant 演算子の場合、同じ議論から IR で支配的となる。しかし実際にはこの様な場合 IR では自明な CFT となる事が多い。したがって我々が興味のある理論の変形は marginal 演算子である。特にスピンのゼロ  $s = 0 = h - \bar{h}$ 、 $h = \bar{h} = 1$  のスカラー演算子である。この marginal な変形によって得られる理論は元々の CFT と同じセントラルチャージを持つ新たな CFT である。つまりこの種の変形は CFT の族を成し共形場理論のモジュライ空間を形成する。

最も簡単な物理的な具体例は自由コンパクトボソンである [38]。この理論は実スカラーが 1 つなので  $c = 1$  で、作用は以下で与えられる:

$$S_{R_0} = \int d^2z \partial X \bar{\partial} X, \quad X \simeq X + 2\pi R_0. \quad (3.104)$$

この  $S_{R_0}$  を  $(h, \bar{h}) = (1, 1)$  演算子  $\mathcal{O} = \partial X \bar{\partial} X$  で変形する事を考える (2次元ではスカラー場は質量次元がゼロなので微分項となっている)。ここで出発点の理論は共形対称性を持っており、上記の演算子による変形後の全体の理論も共形対称性を保つ事を要請することで

marginal な演算子でなければならない。これによって  $(h, \bar{h}) = (1, 1)$  で共形次元が 2 である:

$$\begin{aligned}
 S_{R_0} &\rightarrow S_R = S_{R_0} + \epsilon \int d^2z \partial X \bar{\partial} X \\
 &= (1 + \epsilon) \int d^2z \partial X \bar{\partial} X \\
 &= \int d^2z \partial(\sqrt{(1 + \epsilon)}X) \bar{\partial}(\sqrt{(1 + \epsilon)}X) \\
 &= \int d^2z \partial \tilde{X} \bar{\partial} \tilde{X}.
 \end{aligned} \tag{3.105}$$

するとこの理論は次の様に再定義する事が出来る:

$$\tilde{X} := \sqrt{(1 + \epsilon)}X, \quad \tilde{X} \simeq \tilde{X} + 2\pi\sqrt{(1 + \epsilon)}R_0, \tag{3.106}$$

この変形によって理論は標的空間の  $S^1$  の半径が  $R_0 \rightarrow \sqrt{(1 + \epsilon)}R_0$  と変形される。こうして得られた  $S_R$  もセントラルチャージ  $c = 1$  の CFT であり、これらは  $\epsilon$  に関する 1-パラメーターファミリーである。このモジュライ空間は自明で  $\mathcal{M}_{\text{CFT}} = \mathbb{R}_+$  である。ここで注意として、任意の CFT が同じ方法で変形できる訳では無い。一般に変形した理論が相互作用をしていれば、変形された CFT において  $(1, 1)$  演算子は  $(1, 1)$  からズレてしまう [44]。こうした演算子は共形対称性を壊してしまう。一方で量子論のレベルで CFT を保つ演算子を exactly (truly) marginal 演算子という。

[45] において、一般の 4 次元  $\mathcal{N} = 1$  の超共形場理論における exactly marginal 演算子に関する議論がなされている。ここでは理論が持つ大域的対称性、但し R-対称性では無い対称性の下で不変な任意の marginal 演算子は exactly marginal でなければならないという主張がなされており、3 次元  $\mathcal{N} = 2$  や 2 次元  $\mathcal{N} = (2, 2)$  の状況においても拡張可能であると言及されている。しかし、ここでは一般の超共形場理論における exactly marginal 演算子の議論は触れない事にして、本研究に関連してゲージ化された線形シグマ模型 (GLSM) の観点から言及する事にする。GLSM の章においても言及するが、この文脈における 2 次元の超対称ゲージ理論にはカイラル多重項による超ポテンシャルとツイステッドカイラル多重項によるツイステッド超ポテンシャルが存在する。一般に GLSM における FI-パラメーターは繰り込みを受ける。しかしこの繰り込みの因子はゲージ群の下で電荷を持つカイラル多重項のゲージ電荷  $Q_i$  の和  $\sum_i Q_i$  に比例する構造を持つ。したがって  $\sum_i Q_i = 0$  の状況では FI-パラメーターはフリーパラメーターであり続ける。この様に標的空間が Ricci 平坦である様な NLSM を IR に持つ GLSM では、theta パラメーターによって複素化された FI パラメーターは理論のモジュライとなり繰り込みを受けず exactly marginal となる。

次に SCFT における exactly marginal 演算子による CFT の摂動を考える。まず  $d$  次元の CFT  $S_0$  に対して exactly marginal 演算子  $\mathcal{O}_i$  を用いて元々の CFT を変形する:

$$S_0 \implies S_{\text{total}} = S_0 + \delta S, \quad \delta S = \int d^d x \lambda^i \mathcal{O}_i(x). \tag{3.107}$$

ここで  $\{\lambda^i\}$  は exactly marginal な結合定数である。演算子が exactly marginal なので、結合定数  $\lambda^i$  も全て質量次元がゼロで且つ  $\beta$ -関数がゼロである  $\beta_{\lambda^i} = 0$  つまり上記の CFT の族は exactly marginal な結合定数  $\{\lambda^i\}$  によってパラメーター付けされる。言い換えると CFT がモジュライ空間を持つ事を意味しており、この空間上の座標が  $\{\lambda^i\}$  で張られるモジュライ空間を共形多様体  $\mathcal{M}_{\text{CFT}}$  という。さらにこの  $\mathcal{M}_{\text{CFT}}$  上には *Zamolodchikov* 計量が定義される [22]:

$$\langle \mathcal{O}_i(x) \mathcal{O}_j(y) \rangle = \frac{g_{ij}(\lambda)}{|x-y|^{2d}}. \quad (3.108)$$

SCFT を考えるとカイラル多重項  $\Phi_i$  の  $\theta$  に関して最高次の成分  $\mathcal{O}_i$  とツイステッドカイラル多重項  $\Sigma_a$  の最高次の成分  $\tilde{\mathcal{O}}_a$  の別々の 2 種類の exactly marginal な変形が存在する。これらを超空間の形式で記述すると次の様になる

$$S_0 \implies S_{\text{total}} = S_0 + \int d^2x d^2\theta \tau^i \Phi_i + \int d^2x d^2\tilde{\theta} \tilde{\tau}^a \Sigma_a + (c.c.). \quad (3.109)$$

$$(c, c) \text{ type deformation} : \int d^2x d^2\theta \tau^i \Phi_i, \quad (3.110)$$

$$(a, c) \text{ type deformation} : \int d^2x d^2\tilde{\theta} \tilde{\tau}^a \Sigma_a. \quad (3.111)$$

この理論の変形からわかる様に 2 次元の超共形場理論のモジュライ空間は局所的に直積構造になる事が知られている:

$$\mathcal{M}_{\text{CFT}} \simeq \mathcal{M}_{(c,c)}(\tau, \bar{\tau}) \times \mathcal{M}_{(a,c)}(\tilde{\tau}, \bar{\tilde{\tau}}). \quad (3.112)$$

またそれぞれに対応する Zamolodchikov 計量は以下で与えられる [22]:

$$\langle \mathcal{O}_i(x) \bar{\mathcal{O}}_{\bar{j}}(y) \rangle = \frac{g_{i\bar{j}}(\tau, \bar{\tau})}{|x-y|^4}, \quad \langle \tilde{\mathcal{O}}_a(x) \bar{\tilde{\mathcal{O}}}_{\bar{b}}(y) \rangle = \frac{g_{a\bar{b}}(\tilde{\tau}, \bar{\tilde{\tau}})}{|x-y|^4}. \quad (3.113)$$

## 第4章 超重力理論におけるブレーン解

ここでは本論における中心的な対象物である KK5-ブレーンに関する解説を弦理論の低エネルギー有効理論としての超重力理論の立場から行う。一般に超重力理論におけるブレーン解は、素朴に超重力理論のラグランジアンから導かれる Einstein 方程式等の運動方程式を解く事によって得られる。特に KK5-ブレーン解は、超重力理論の運動方程式を解く事で得られる NS5-ブレーン解から T-双対性変換を実行する事で構成することが可能である。したがってここではまず NS5-ブレーンの時空解から出発し、T-双対性変換を実行する事で KK5-ブレーン解を見る事にする。ここで本論における言葉の定義として背景時空と言及した際は下記の  $x^6, x^7, x^8, x^9$  ( $\tilde{x}^9$ ) の 4次元空間を指すものとする。最後にここで考えている 5-ブレーンの配位を 10次元時空として以下にまとめる:

dim	$x^0$	$x^1$	$x^2$	$x^3$	$x^4$	$x^5$	$x^6$	$x^7$	$x^8$	$x^9$
NS5/H	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	-	-	-	*
KK5	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	-	-	-	$\tilde{*}$

表 4.1: ブレーンが広がる方向: ⊙、コンパクト方向 ( $S^1$ ) / T-双対方向 ( $\tilde{S}^1$ ): \*,  $\tilde{*}$

### 4.1 NS5-ブレーン / H-モノポール

まず NS5-ブレーンの時空構造を議論するために、超重力理論におけるブレーン解として NS5-ブレーンの背景時空を与える計量を書き下す。このブレーン解は背景時空である 4次元空間  $\mathbb{R}_{6789}$  における Laplace 方程式の解である調和関数  $H(r)$  によって特徴付けられている。NS5-ブレーンにおける調和関数は 4次元空間の座標  $x^6, x^7, x^8, x^9$  に依存している。ここから目標である KK5-ブレーン解を得るために、T-双対性変換を実行したい。この為には 1つの方向をコンパクト化し、その方向にアイソメトリーを獲得させる必要がある。したがって 4次元空間の座標  $x^6, x^7, x^8, x^9$  のうち  $x^9$  方向をコンパクト化する事を考える。このままでは調和関数  $H$  は  $x^9$  の関数であるので、平均化する (smearing) 事で座標依存性が消える。この様にして得られた調和関数  $H$  によって特徴付けられる物体を NS5-ブレーンと区別して H-モノポールと呼ばれる。

まず出発点である NS5-ブレーン解は以下のように与えられる [23]:

$$\begin{aligned} ds_{\text{NS5}}^2 &= dx_{012345}^2 + H(\vec{r}) \left( (dx^6)^2 + (dx^7)^2 + (dx^8)^2 + (dx^9)^2 \right), \\ e^{2\phi} &= H(\vec{r}), \quad H_{mnp} = \varepsilon_{mnp}{}^q \partial_q \log H(\vec{r}), \\ H(\vec{r}) &= 1 + \sum_a \frac{\alpha'}{|\vec{r} - \vec{r}_p|^2}, \quad \vec{r} \in \mathbb{R}_{6789}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

これは  $x^0, \dots, x^5$  方向に NS5-ブレーンが広がり、ブレーンと直行する空間が  $x^6, \dots, x^9$ 、 $p$  はブレーンの位置すなわちセンターを意味し、 $H$  は 3-形式  $H_3 = dB_2$  とした。ここで  $x^9$  方向を半径  $R_9$  で  $S^1$  コンパクト化する。但し、議論を簡単にする為にセンターが 1 の状況を考え、かつセンターが原点にある状況にしてシンプルな形にする。すると調和関数  $H$  が

$$H(r, \theta) = 1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha'}{r^2 + (\theta - 2\pi R_9 n)^2}, \quad (4.2)$$

となる [6]。ここで  $\vec{r} \in \mathbb{R}_{678}$ 、 $\theta = x^9$  である。この無限和を実行すると以下の様になる [5-7, 24]\*:

$$\begin{aligned} H(r, \theta) &= 1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha'}{r^2 + (\theta - 2\pi R_9 n)^2} \\ &= 1 + \frac{\alpha'}{2rR_9}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

この操作を smearing もしくは delocalize — コンパクト方向の依存性の平均化 — という。先ほど述べた様にこの手続きによって時空計量、より具体的にはブレーン解を特徴付ける調和関数  $H(r)$  がコンパクト方向に依存しない。このようなブレーンの解を H-モノポールという。

## 4.2 KK5-ブレーン

次に、KK5-ブレーンの解を書き下したい。今見た様に NS5-ブレーンに直行する空間  $x^6, x^7, x^8, x^9$  のうち  $x^9$  方向を  $S^1$  コンパクト化し、さらに smearing を実行する事によって得た H-モノポールは  $S^1$  方向にアイソメトリーが存在する。したがってこの H-モノポール解に Buscher の変換則を用いて T-双対変換を実行する事が出来る [8]:

$$g'_{99} = \frac{1}{g_{99}}, \quad g'_{9\mu} = \frac{B_{9\mu}}{g_{99}}, \quad \phi' = \phi - \frac{1}{2} \log g_{99}, \quad (4.4)$$

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{g_{9\mu}g_{9\nu} - B_{9\mu}B_{9\nu}}{g_{99}}, \quad B'_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + \frac{B_{9\mu}g_{9\nu} - g_{9\mu}B_{9\nu}}{g_{99}}. \quad (4.5)$$

\*正確にはコンパクト化半径  $R_9 \rightarrow 0$  とする事で和を積分として実行する。

ここで  $g', B', \phi'$  の様に記述した場は変換後の場を表している。これによって得られるブレーン配位は、KK5-ブレーンが  $x^0, \dots, x^5$  方向にのびており、 $\tilde{x}^9$  方向は  $x^9$  に対する双対座標である。ここで Buscher 則によってクロスターム  $g'_{9\mu}$  が生成され、 $\phi$  と  $B$  が消える。KK5-ブレーンの背景時空である  $x^6, x^7, x^8, \tilde{x}^9$  は局所的に  $\mathbb{R}_{678}^3 \times S^1_9$  である。したがって KK5-ブレーンに対する解は以下のように与えられる [46]:

$$ds^2 = dx_{012345}^2 + H(\vec{r}) \left( (dx^6)^2 + (dx^7)^2 + (dx^8)^2 \right) + \frac{1}{H(\vec{r})} (d\tilde{x}^9 - \Omega)^2, \quad (4.6)$$

$$H(\vec{r}) = 1 + \sum_p H_p(\vec{r}), \quad H_p(\vec{r}) = \frac{\tilde{R}_9}{2|\vec{r} - \vec{r}_p|}.$$

ここで  $p$  は先ほどと同様にこの 4 次元空間における KK5-ブレーンのセンターを表す。また注目すべきポイントは  $\tilde{x}^9$  方向の計量が T-双対変換前と比較して逆数で現れている事である。これは物理的にはコンパクト化された  $S^1$  の半径が逆数となっている事を意味する。まさに T-双対変換の特徴である。また KK-ベクトル  $\Omega$  は  $\mathbb{R}_{678}$  上のベクトルであり、係数は省略し  $\nabla \times \Omega = \nabla H = \nabla(\frac{1}{r})$  を満たす。詳細な表式は (5.97) を参照されたい。ここで  $\tilde{R}_9$  は  $\tilde{x}^9$  方向の半径を表す。

この超重力理論の解は KK5-ブレーンに対応し、直行する 4 次元空間  $x^6, x^7, x^8, \tilde{x}^9$  は Taub-NUT 空間として知られている。以下ではこの 4 次元空間のみに注目し簡略化した 4 次元空間の計量でこの空間の構造を簡単に解説する。計量が以下で与えられる 4 次元多様体の構造について見る:

$$ds^2 = H dx_{678}^2 + \frac{1}{H} (d\tilde{x}^9 - \Omega)^2, \quad H(\vec{r}) = \frac{1}{g^2} + \frac{1}{4\pi} \sum_p \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_p|}.$$

ここで最終表式の係数がシンプルになる様に係数を付けており、後の GLSM における議論との繋がりを意識して  $\tilde{R}_9 = g^2$  とした。

まず Taub-NUT 空間上のセンターから充分遠方における Taub-NUT 空間に注目する。すなわち  $|\vec{r}_p| \ll |\vec{r}| \rightarrow \infty$  の場合を考える。この領域における調和関数は  $H \simeq 1/g^2$  となるため、4 次元の多様体としては  $\mathbb{R}^3 \times S^1$  となる。ここで無限遠における  $S^1$  の半径は  $g$  である。

次に Taub-NUT 空間上のセンター近傍における構造に注目する。すなわち調和関数が発散する点  $\vec{r} \simeq \vec{r}_p$  の近傍の振る舞いを見る。但しここではセンターが重なっていないような状況を考える事にする。議論を簡単にする為にセンターが原点に来るように 3 次元空間の座標をとり、極座標を次の様に導入する:

$$(x^6, x^7, x^8) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta).$$

原点近傍での調和関数は  $H = \frac{1}{4\pi r}$  のように振る舞う。  $\nabla \times \Omega = \nabla(\frac{1}{r})$  を満たすベクトルポテ

ンシャルは以下で与えられる:

$$\Omega = \frac{1}{4\pi} \cos \theta d\phi. \quad (4.7)$$

また  $S^1$  方向の座標の代わりに  $\psi = 4\pi\tilde{x}^9$  を導入する [47]。これを先ほどの計量に代入すると以下の様書き換えられることが分かる:

$$\begin{aligned} ds^2 &= H d\mathbf{r}^2 + \frac{1}{H} (d\tilde{x}^9 - \Omega)^2 = \frac{1}{4\pi r} d\mathbf{r}^2 + 4\pi r \left( d\tilde{x}^9 - \frac{1}{4\pi} \cos \theta d\phi \right)^2 \\ &= \frac{1}{4\pi r} \left( dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right) + \frac{r}{4\pi} \left( d\psi - \cos \theta d\phi \right)^2 \\ &= \frac{1}{4\pi r} \left( dr^2 + r^2 \{ d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 + (d\psi - \cos \theta d\phi)^2 \} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi r} \left( dr^2 + r^2 d\Omega_3^2 \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left( d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_3^2 \right) \quad \left( r = \frac{\rho^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

したがってこれは平坦な  $\mathbb{R}^4$  の計量となる。ここで  $d\Omega_3$  は  $S^3$  である。このように一見するとセンター近傍ではこの Taub-NUT 計量特異的な振る舞いをする様に見えるが、実際は適当な座標変換によっては特異ではない事がわかる。つまり Taub-NUT 空間はセンターを含めて滑らかな 4次元多様体である。より正確には  $R^3$  の底空間に  $S^1$  がファイバーされた空間である。



## 第5章 ゲージ化された線形シグマ模型 (GLSM)

ここでは本研究における中心的な役割を担う理論について触れる。ゲージ化された線形シグマ模型 (Gauged Linear Sigma Model, 以下 GLSM) とは、超対称性を保つ真空のモジュライ空間によって特徴付けられる 2 次元の超対称ゲージ理論である [14]。またこの GLSM は、ある多様体を標的空間として記述する世界面シグマ模型の UV 理論として解釈される。

超弦理論の低エネルギー有効理論としての超重力理論は、弦の質量スペクトラムのうち質量モードを切り離す極限  $\alpha' \rightarrow 0$  によって実現される。ここで  $\alpha'$  は超弦理論を特徴付ける量であり、 $\alpha' \propto l_s^2$  の様に弦の長さであるスケールによって与えられる。即ち超弦理論の低エネルギー極限とは点粒子極限であると解釈できる。したがって、この文脈における超重力理論の古典解としてのブレーン等の解析は点粒子描像に立った議論であると言えるだろう。

この超弦理論の低エネルギー有効理論としての超重力理論に対して、[14] において構成された GLSM は弦理論的な観点、すなわち弦描像からの解析を実現させる。GLSM の低エネルギー極限によって現れる世界面シグマ模型の標的空間は、GLSM における超対称性を保つ真空のモジュライ空間として実現される。この GLSM における標的空間の解析では弦理論的な効果である非摂動的補正として世界面インスタントンを捉える事が可能となる [14, 16, 18]。

ここでは本研究において取り扱う GLSM for KK5-ブレーンについて触れる事が目的である。H-モノポール ( $S^1$  コンパクト化された NS5-ブレーン) や KK5-ブレーン (KK-モノポール)、 $5_2^2$ -ブレーンは T-双対の関係である事が知られている [1, 2]。これらの超重力理論における解は、先行研究によって既に GLSM の文脈で再定式化されている [5, 6, 10, 11, 13]。[5] では、NS5-ブレーンを  $S^1$  でコンパクト化し、コンパクト方向に対し平均化の操作 (smearing) を施しアイソメトリーを獲得した H-モノポールの背景時空を標的空間として実現する GLSM が構築された。この GLSM for H-モノポールは直行方向である 4 次元空間を IR の NLSM の標的空間として記述している。ここで、GLSM の IR 理論である NLSM における T-双対性変換は Buscher 則として知られている [8]。この T-双対性変換は [16] において、GLSM の文脈で実現されている。したがって、[5] によって構成された GLSM for H-モノポールに T-双対性変換を実行する事で KK5-ブレーンに対する GLSM が構築された [6]。この関係については下記の図 5.1 にまとめた。[10] では、[5, 6] によって得られた各 GLSM に対し、ある拡張を行った。その拡張とは、標的空間におけるブレーンの位置を指定するパラメーター



を理論に導入する事である。2次元の超対称ゲージ理論の言葉では、モジュライとして複素数の FI 及び FI-theta パラメーターが導入された事を意味する。さらには、この拡張によって4次元空間におけるセンターの位置は  $U(1)$  ゲージ対称性によってラベルされる事から、ゲージ対称性を  $U(1)^k$  とする事によってシングルセンターから多重センターへと自然に拡張される。

また [11] では、超重力理論において知られているエキゾチックブレーンに対して同様の議論が行われた。これは GLSM for KK5-ブレーンに対して新たにコンパクト方向を構成し T-双対性変換を実行する事で GLSM for  $5_2^2$  を構築した。

ここで「超重力理論における解の GLSM の文脈における再定式化」が重要なポイントである事を強調しておく。既に粒子描像において調べられているブレーン解等の結果を、弦描像において記述し直す事によって整合性が取れた記述になっており、この記述からの弦的な効果を捉える事で初めて粒子描像を超えた物理である事を意味するのである。

GLSM の標的空間及びブレーンの配位に関して混乱が起きない様に以下でまとめる。GLSM の標的空間としてはブレーンが広がっていない背景時空としての4次元空間を採用している:

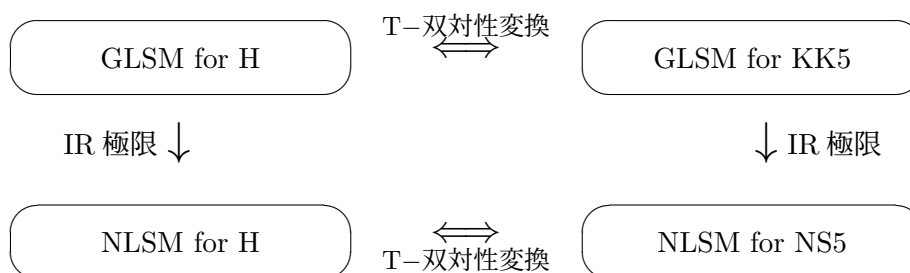


図 5.1: GLSM における T-双対及び NLSM における Buscher 則

この章では、まず [14] において導入された GLSM についての概要を説明した後に、 $\mathcal{N} = (4, 4)$  GLSM for 5-ブレーン [5, 6, 10] について解説する事を目標にする。

## 5.1 GLSM

ここではまず [14] において導入された GLSM をシンプルな具体例を用いて概観する。標的空間として Kähler 多様体上の非線形シグマ模型 (non-linear sigma model NLSM) をゲージ化された線形シグマ模型 (gauged linear sigma model, GLSM) として理解する。ここでは最も簡単な例としてゲージ電荷を持ったカイラル超場に対する超ポテンシャルがない状況のみを考える。これは  $\mathbb{C}P^{N-1}$  上の NLSM を考える事に相当する。そのあとに、超ポテンシ

ルを入れた理論で議論する。これは  $\mathbb{CP}^{N-1}$  の部分多様体上のシグマ模型を与える。

### • 質量次元

ここでは混乱を回避する為に2次元における場の質量次元について言及しておく。4次元ではスカラー場の質量次元は1として慣れ親しんでいるがこれは次元に依存したものである。素朴に2次元ではラグランジアン運動項からスカラー場は質量次元を持たない事がわかる。したがってまず初めに場の質量次元についてまとめることにする。代表的なものとしてカイラル多重項及びベクトル多重項に関して言及する。

カイラル多重項：  $\Phi$

$$\text{複素スカラー場 } \phi \quad [\phi] = 0$$

$$\text{スピノル場 } \psi \quad [\psi] = \frac{1}{2}$$

$$\text{複素補助場 } F \quad [F] = 1.$$

ベクトル多重項：  $V$

$$\text{複素スカラー場 } \sigma \quad [\sigma] = 0$$

$$\text{スピノル場 } \lambda \quad [\lambda] = \frac{1}{2}$$

$$\text{ベクトル場 } A \quad [A] = 0$$

$$\text{実補助場 } D \quad [D] = 1.$$

ベクトル多重項：  $\frac{1}{e^2} \bar{\Sigma} \Sigma$  ( $V' = eV$ )

$$\text{複素スカラー場 } \sigma \quad [\sigma] = 1$$

$$\text{スピノル場 } \lambda \quad [\lambda] = \frac{3}{2}$$

$$\text{ベクトル場 } A \quad [A] = 1$$

$$\text{実補助場 } D \quad [D] = 2.$$

この質量次元を用いてこれから議論を進める。

まず最もシンプルな理論として  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{N-1}$  シグマ模型から始める。  $N$  個のカイラル超場  $\Phi_i$  の  $U(1)$  ゲージ理論を考える。各カイラル超場  $\Phi_i$  のゲージ電荷は  $Q_i = 1$  である。この時ラグランジアンは以下で与えられる:

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta \left( \sum_{i=1}^N \bar{\Phi}_i e^{Q_i V} \Phi_i - \frac{1}{2e^2} \bar{\Sigma} \Sigma \right) + \frac{1}{2} \left( -t \int d^2\tilde{\theta} \Sigma + c.c. \right). \quad (5.1)$$

ここでは複素化された FI-パラメーターを  $t = r - i\theta$  としている\*。F-項はツイステッド超ポテンシャルである。このラグランジアンを成分場形式で記述すると次のようになる†:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Phi = \sum_i \left[ -D_\mu \bar{\phi}_i D^\mu \phi_i + i\bar{\psi}_{-,i}(D_0 + D_1)\psi_{-,i} + i\bar{\psi}_{+,i}(D_0 - D_1)\psi_{+,i} + |F_i|^2 \right. \\ \left. - |\sigma|^2 |\phi_i|^2 - \bar{\psi}_{+,i} \bar{\sigma} \psi_{-,i} - \bar{\psi}_{-,i} \sigma \psi_{+,i} + D |\phi_i|^2 \right. \\ \left. - i\bar{\phi}_i (\psi_{-,i} \lambda_+ - \psi_{+,i} \lambda_-) - i\phi_i (\bar{\psi}_{-,i} \bar{\lambda}_+ - \bar{\psi}_{+,i} \bar{\lambda}_-) \right], \quad (5.2) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_\Sigma = \frac{1}{2e^2} \left[ -|\partial_\mu \sigma|^2 + i\bar{\lambda}_+(\partial_0 - \partial_1)\lambda_+ + i\lambda_-(\partial_0 + \partial_1)\bar{\lambda}_- + F_{01}^2 + D^2 \right], \quad (5.3)$$

$$\mathcal{L}_{\text{FI}} = -\frac{1}{2} \left[ (r - i\theta)(D - iF_{01}) + (r + i\theta)(D + iF_{01}) \right] = -rD + \theta F_{01}. \quad (5.4)$$

注意として、2次元の記法では光円錐座標を意識してフェルミオンの運動項は2次元の Clifford と微分の縮約  $\gamma^\mu \partial_\mu$  を取った形で記述する。各超対称多重項の補助場  $D, F_i$  の運動方程式

$$F_i = 0, \quad D = -e^2 \left( \sum_i |\phi_i|^2 - r \right), \quad (5.5)$$

及び運動方程式を用いて得られる式

$$\begin{aligned} D|\phi_i|^2 + \frac{1}{2e^2} D^2 - rD &= -e^2 (|\phi_i|^2 - r) |\phi_i|^2 + \frac{1}{2e^2} (e^2)^2 (|\phi_i|^2 - r)^2 + re^2 (|\phi_i|^2 - r) \\ &= -\frac{e^2}{2} \left( \sum_{i=1}^N |\phi_i|^2 - r \right)^2, \end{aligned}$$

\*本研究 [35] ではこの定義は採用せず、 $t := \frac{1}{\sqrt{2}}(t^1 + it^2)$  を使用している [10]。

†ここではツイステッドカイカル多重項  $\Sigma$  の複素数のスカラー成分を  $\sigma$  としているが、この後で解説する 5-ブレンを記述する GLSM においてはこの複素スカラー場は使用せず、実スカラー場 2 つ  $\sigma, \eta$  で記述している。

によって積分を実行した後の成分場展開のラグランジアンは

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \sum_i \left[ -D_\mu \bar{\phi}_i D^\mu \phi_i + i\bar{\psi}_{-,i}(D_0 + D_1)\psi_{-,i} + i\bar{\psi}_{+,i}(D_0 - D_1)\psi_{+,i} \right. \\ \left. - |\sigma|^2 |\phi_i|^2 - \bar{\psi}_{+,i} \bar{\sigma} \psi_{-,i} - \bar{\psi}_{-,i} \sigma \psi_{+,i} - i\bar{\phi}_i (\psi_{-,i} \lambda_+ - \psi_{+,i} \lambda_-) - i\phi_i (\bar{\psi}_{-,i} \bar{\lambda}_+ - \bar{\psi}_{+,i} \bar{\lambda}_-) \right] \\ + \frac{1}{2e^2} \left( -|\partial_\mu \sigma|^2 + i\bar{\lambda}_+ (\partial_0 - \partial_1) \lambda_+ + i\lambda_- (\partial_0 + \partial_1) \bar{\lambda}_- + F_{01}^2 \right) + \theta F_{01} - \frac{e^2}{2} \left( \sum_{i=1}^N |\phi_i|^2 - r \right)^2, \end{aligned}$$

となる。

スカラーポテンシャルに注目すると

$$U = |\sigma|^2 \sum_{i=1}^N |\phi_i|^2 + \frac{e^2}{2} \left( \sum_{i=1}^N |\phi_i|^2 - r \right)^2, \quad (5.6)$$

であり、これがゼロとなるような真空の場の配位において超対称性を保つ真空が与えられる。

i)  $0 < r$

この場合、 $U = 0$  は以下の条件を要請する:

$$\begin{array}{c} \text{----- } U = 0 \text{ 条件 \text{-----}} \\ \sigma = 0, \quad \sum_{i=1}^N |\phi_i|^2 = r. \end{array} \quad (5.7)$$

ii)  $0 = r$

$r = 0$  の場合は以下の条件を要請する:

$$\begin{array}{c} \text{----- } U = 0 \text{ 条件 \text{-----}} \\ \phi_1 = \phi_2 = \cdots = \phi_N = 0, \quad \sigma = \text{free}, \end{array} \quad (5.8)$$

iii)  $r < 0$

$r < 0$  の場合は  $U > 0$  になってしまい、超対称性は破れる。

GLSM はある多様体を理論の超対称性を保つ真空のモジュライ空間として記述することで幾何構造を解析する事を可能にする。GLSM のパラメーターとして FI-パラメーター  $r$  の値が理論の振る舞いを決めている。また、 $r$  は超対称真空のモジュライ空間の半径に対応する。一般に、FI-パラメーターは繰り込まれるので RG フローする。したがって、FI-パラメーターの値の変化による超対称真空のモジュライ空間の変化を調べたい。以降では最も簡単な  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{N-1}$  模型と Calabi-Yau 模型を考える。

GLSM をカットオフスケール  $\Lambda_{UV}$  における理論と見なした際に、低エネルギーに RG フローさせる事を考える。カットオフスケールは最後に無限大にとる。そこでまず低エネルギー有効理論の議論をする際の FI-パラメーターの振る舞いを議論しておく。以下で実際に計算するが 1-ループ繰り込みによって FI-パラメーターの RG フローは以下で与えられる：

$$r(\mu) = \sum_i Q_i \log\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right). \quad (5.9)$$

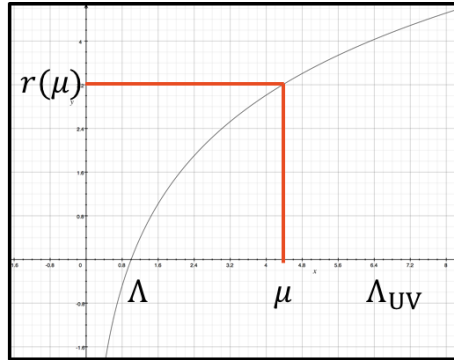


図 5.2: FI-パラメーター (UV カットオフ  $\Lambda_{UV}$ , ダイナミカルスケール  $\Lambda$ )

ここで図の様に繰り込まれていない FI-パラメーターは  $0 < r_0$  とし、低エネルギー有効理論のカットオフを  $\mu$ ,  $r = 0$  となるダイナミカルスケールを  $\Lambda$  とした。 $\mathbb{C}\mathbb{P}^{N-1}$  模型は  $0 < \sum_i Q_i = N$ 、Calabi-Yau 模型は  $\sum_i Q_i = 0$  である。したがって  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{N-1}$  模型は、最初に  $\mu = \Lambda_{UV}$  から始めて、低エネルギー方向に RG フローさせると上図のように  $r$  は小さくなる。 $\mu = \Lambda$  のエネルギースケールにおいて  $r = 0$  となり、さらにフローすると  $r < 0$  となる。一方、Calabi-Yau 模型の場合、繰り込まれた FI-パラメーターは上記の式からわかるように  $U(1)$  ゲージ対称性の電荷の和に比例しており、これがゼロとなる。したがって FI-パラメーターは RG フローしないので量子論に移行しても自由なパラメーターとして維持される。

$0 < r$  における低エネルギー有効理論は超対称性を保つ真空のモジュライ空間を標的空間とした超対称 NLSM が実現される。この時 FI-パラメーターは標的空間の半径すなわち

Kähler モジュライに対応する。しかし RG フローによって  $r(\mu)$  は  $r = 0$  となり  $r < 0$  となるので、モジュライ空間が一見潰れる様に思えるが、実際には後の議論から分かる様に理論が破綻する事なく  $r$  の全ての領域が滑らかに繋がる。したがって  $r = 0$  から  $r < 0$  にかけて超対称性を保つ真空のモジュライ空間がどのような振る舞いを見せるのかを議論する。

また注意しなければならない事として、古典的な理論と量子論的な理論の境界線である。なぜなら、2次元には Coleman の定理が存在する。これは量子論においてはゼロ質量のスカラール場のプロパゲーターが IR 発散を含んでいるのでうまく定義されていないではない事から導かれる。すなわち常に古典的な理論と量子論的な理論を意識して、ゼロ質量のスカラール場を注意深く扱う必要がある。Calabi-Yau 模型の場合は  $\sum_i^N Q_i = 0$  なので 1-ループ補正を受けないが、 $\mathbb{C}P^{N-1}$  模型については量子補正を受ける。基本的な議論の精神としては、Wilsonian の処方に対して、 $\mu \leq k \leq \Lambda_{UV}$  の高エネルギーの運動量モードについては経路積分を実行しているので、積分を実行している領域に関しては量子論を議論している。一方で、カットオフを  $\Lambda_{UV}$  から  $\mu$  まで Wilsonian の処方で行った低エネルギー有効理論は高エネルギーの運動量モードの量子補正を受けた  $\mu$  以下、すなわち低エネルギーの運動量モードについての古典論である。この時カットオフ  $\mu$  における理論のパラメーターは FI-パラメーター  $r(\mu)$  である。この  $r(\mu)$  はエネルギースケールを変化させた理論間に関係を付けているだけであって、量子論を議論しているわけではない。したがって、Coleman の定理を議論すべきは経路積分を実行するモードである。

次に FI-パラメーター  $r$  の繰り込みの議論をする。簡単のために  $U(1)$  のゲージ電荷  $+1$  を持った 1つのカイラル超場が存在する超対称ゲージ理論を考える。ある有限のエネルギースケール  $\mu$  での低エネルギー有効理論が存在するとする。これは Wilsonian の処方によって  $\mu \leq |k| \leq \Lambda_{UV}$  の部分を経路積分を実行することによって得ることができる。ラグランジアン  $D$  場に注目すると以下の項が存在する:

$$\frac{1}{2e^2} D^2 + D(|\phi_0|^2 - r_0). \quad (5.10)$$

ここで  $r_0, \phi_0$  はカットオフスケールにおける FI-パラメーターとスカラール場すなわち繰り込まれていない量である。補助場  $D$  は運動項が存在しないので波動関数繰り込みは考えない。実際に高エネルギーの運動量モードを積分する。  $|\phi|^2$  の項を  $\phi^\dagger(x)\phi(x)$  のように  $\phi$  の 1-ループダイアグラムと見る事で運動量モードを  $0 \leq k \leq \mu$  と  $\mu \leq k \leq \Lambda_{UV}$  の様に分ける:

$$|\phi_0|^2 = (\phi_R + \hat{\phi})^2 = |\phi_R|^2 + |\hat{\phi}|^2 \quad (5.11)$$

ここでクロスタームは運動量モードを分けたことによって Fourier 成分が直交しているので消える。この時  $D$  との相互作用によってゲージ電荷を拾う。  $\phi$  のプロパゲーターは作用の

$|D_m \phi|^2$  から読み取ることができる。したがって高エネルギーの運動量モードを積分する。

$$\int \mathcal{D}\phi_R \mathcal{D}\hat{\phi} e^{-\int \mathcal{L}(\phi_R, \hat{\phi})} = \int \mathcal{D}\phi_R e^{-\int \mathcal{L}(\phi_R)} \int D\hat{\phi} e^{-\int d^2x D|\hat{\phi}|^2}, \quad (5.12)$$

この積分  $D\hat{\phi}$  が運動量モードの積分に対応する。ゼロ質量スカラー場  $\phi$  の 1-ループは以下で与えられる:

$$\langle \phi^\dagger(x) \phi(x) \rangle = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} 1 \cdot \frac{2\pi}{k^2}. \quad (5.13)$$

ここで 1 を頭に記述したのはゲージ電荷を拾っていることを強調した。つまりカイラル超場  $\Phi$  を  $N$  個入れたような状況や、 $U(1)$  を  $k$  個入れたような状況を考えるとゲージ電荷として

$$D \sum Q_{i,a} |\phi_i|^2, \quad (5.14)$$

となる。ループ積分を実行すると

$$\langle |\phi|^2 \rangle = \int_{\mu \leq |k| \leq \Lambda_{UV}} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2\pi}{k^2} = \int_{\mu \leq |k| \leq \Lambda_{UV}} \frac{dk \cdot kd\theta}{(2\pi)^2} \frac{2\pi}{k^2} = \log\left(\frac{\Lambda_{UV}}{\mu}\right), \quad (5.15)$$

となる。したがって経路積分は

$$\int \mathcal{D}\phi_R \mathcal{D}\hat{\phi} e^{-\int L(\phi_R, \hat{\phi})} = \int \mathcal{D}\phi_R e^{-\int L(\phi_R)} e^{-\int d^2x D \log\left(\frac{\Lambda_{UV}}{\mu}\right)}, \quad (5.16)$$

となるので繰り込みスケール  $\mu$  における  $D$  依存する項は  $\phi$  の高エネルギーの運動量モードを経路積分することによって以下で与えられる:

$$\frac{1}{2e^2} D^2 + D \left( |\phi_R|^2 + \log\left(\frac{\Lambda_{UV}}{\mu}\right) - r_0 \right). \quad (5.17)$$

$\Lambda_{UV} \rightarrow \infty$  の極限で  $\log$  発散するので、低エネルギー有効理論を有限にするためには FI-パラメーターの繰り込みを  $r_0 = r_R + \delta_r$  として

$$\delta_r = \log\left(\frac{\Lambda_{UV}}{\mu}\right), \quad (5.18)$$

としなければならない。これは VEV すなわち場の 1 点関数がずれないという物理的要請である。したがって繰り込まれていない FI-パラメーターは

$$r_0 = r_R + \log\left(\frac{\Lambda_{UV}}{\mu}\right), \quad (5.19)$$

となる。ここで  $r_R(\mu)$  は繰り込みスケール  $\mu$  における FI-パラメーターである。したがって繰り込まれた FI パラメーターは

$$r_R(\mu) = r_0 - \log\left(\frac{\Lambda_{UV}}{\mu}\right) = r_0 + \log\left(\frac{\mu}{\Lambda_{UV}}\right), \quad (5.20)$$

となる。つまり  $r_R(\Lambda_{UV}) = r_0$  である。この時、 $\log$  の振る舞いをしているので、 $r_R = 0$  となるエネルギースケールが存在することが分かる。この特徴的なエネルギースケールを  $\Lambda$  とすると

$$0 = r_R(\Lambda) = r_0 - \log\left(\frac{\Lambda_{UV}}{\Lambda}\right) \iff r_0 = \log\left(\frac{\Lambda_{UV}}{\Lambda}\right), \quad (5.21)$$

となり、繰り込まれていない FI-パラメーターは繰り込みスケールに依存していない。ここから繰り込まれた FI-パラメーターは

$$\begin{aligned} r_0 &= r_R + \log\left(\frac{\Lambda_{UV}}{\mu}\right) \\ \log\left(\frac{\Lambda_{UV}}{\Lambda}\right) &= r_R + \log\left(\frac{\Lambda_{UV}}{\mu}\right) \\ \implies r_R(\mu) &= \log\left(\frac{\Lambda_{UV}}{\Lambda}\right) - \log\left(\frac{\Lambda_{UV}}{\mu}\right) = \log\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right), \end{aligned} \quad (5.22)$$

となることがわかる。上記の議論の一般の場合は以下の様になる:

$$r(\mu) = \sum_i Q_i \log\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right). \quad (5.23)$$

ここで  $\Lambda$  は FI-パラメーターの繰り込み群の下でフローを決定する質量次元を持ったパラメーターである。このように、量子補正によってエネルギースケール  $\Lambda$  がダイナミカルに生成される。この現象のことを *dimensional transmutation* と呼び、 $\Lambda$  を *dynamical scale* と呼ぶ。また上記の式から  $\sum_i Q_i = 0$  を満たす時には FI-パラメーターは繰り込みを受けない事がわかる。故にこの時 FI-パラメーターは自由パラメーターを維持する。

### i) $0 < r$

まず  $0 < r$  の場合から議論する。スカラーポテンシャルのゼロ点は上記の場の配位  $\sigma = 0$ ,  $\sum_i |\phi_i|^2 = r$  を満たす。したがって、この超対称性を保つ真空はカイラル多重項のスカラー場が VEV を持つ真空、Higgs ブランチである。 $\sum_i |\phi_i|^2 = r$  は複素射影空間を構成する際と同値関係の部分的な固定に対応し、同値関係の残った位相回転は  $U(1)$  ゲージ対称性と解釈することができる。こうして構成された超対称真空のモジュライ空間は複素射影空間を形成する:

$$\mathbb{CP}^{N-1} = \left\{ (\phi_1, \dots, \phi_N) \mid \sum_i |\phi_i|^2 = r \right\} / U(1). \quad (5.24)$$

上記の式から分かるように  $r$  は超対称真空の半径すなわちモジュライ空間のサイズの役割を担っているため Kähler モジュライに対応する。 $\mathbb{CP}^{N-1}$  の座標はカイラル超場のスカラー成



分  $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$  によって構成される。さらに、 $0 < r$  なので質量項が負であるので自発的対称性の破れが起こる。超対称性真空のモジュライ空間より  $\sum_i |\phi_i|^2 = r$  から、超対称性真空多様体に対する並行モード  $\phi_i$  はゼロ質量であるで直行するモードは質量を持つ。今の状況では半径の方向のモードのみ質量を獲得し、他のモードはゼロ質量のままである。また、これによってベクトル多重項の随伴表現のスカラー場が質量を獲得するようになる。超対称性が保たれているので超対称パートナーも質量を持つ。また、 $r = 0$  の場合は質量項が存在しないので全てゼロ質量になり、 $r < 0$  の場合は  $r|\phi_i|^2$  となるので安定であり、全て質量を獲得するようになる。

質量モードを分離させるためには低エネルギー極限

$$e \longrightarrow \infty, \quad (5.25)$$

の極限操作をとることで実現する。これは全ての質量モードの質量が理論に存在する唯一の質量次元を持つパラメーターであるゲージ結合定数  $e$  に比例しており、質量を無限に重くすることに対応する。したがって、この極限操作で得られる低エネルギー有効理論の立場ではゼロ質量のモードのみになる。このようにして、理論は超対称性真空の多様体  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{N-1}$  上の非線形シグマモデル I を実現する。古典論のレベルで、最終的に得られた理論はベクトル多重項の運動項が無い、すなわちフリーズアウトするものと同じである。この時のベクトル多重項の成分場は非力学的自由度となるのでこれらの運動方程式は単に代数的な制限を与えるだけである。

### $\mathbb{C}\mathbb{P}^{N-1}$ 超対称非線形シグマモデル (NLSM)

次に低エネルギー有効理論が超対称 NLSM を再現することを確認する。質量モードの質量を無限大に飛ばすこと  $e \rightarrow \infty$  によってベクトル多重項の運動項が消えるのでフリーズアウトする。この時にカイラル多重項のラグランジアンに残ったベクトル多重項の成分場は理論にとっては補助場として解釈される。したがって、これらの補助場としてのベクトル多重項の運動方程式によってカイラル多重項の成分場に代数的な制限が課される。この結果として超対称 NLSM が実現する。

#### ・ $\lambda$ に関する運動方程式

まず低エネルギー極限  $e \rightarrow \infty$  の後のラグランジアンに対して  $\sigma, \lambda$  の運動方程式は以下で与えられる:

$$\sum_{i=1}^N \bar{\phi}_i \psi_{i,\pm} = 0, \quad \sum_{i=1}^N \phi_i \bar{\psi}_{i,\pm} = 0. \quad (5.26)$$

これはベクトル  $\bar{\phi}$  とベクトル  $\psi_{\pm}$  の内積がゼロ、同様にベクトル  $\phi$  とベクトル  $\bar{\psi}_{\pm}$  の内積がゼロであるので、 $\psi_i$  が真空多様体  $\mathbb{CP}^{N-1}$  の接ベクトルである事を意味する。

・  $\sigma$  に関する運動方程式

次に  $\sigma$  に対する運動方程式は以下のようになる:

$$\sigma = -\frac{\sum_{i=1}^N \bar{\psi}_{i,+} \psi_{i,-}}{\sum_{i=1}^N |\phi_i|^2}. \quad (5.27)$$

これは超対称 NLSM の曲率項を与える。実際この運動方程式をラグランジアンに代入するとカイラル多重項のフェルミオンの 4 次の項になる事がわかる。

・  $A_{\mu}$  に関する運動方程式

最後にベクトル  $v_{\mu}$  に関する運動方程式は以下のようになる:

$$A_{\mu} = \frac{i \sum_{i=1}^N (\bar{\phi}_i \partial_{\mu} \phi_i - \partial_{\mu} \bar{\phi}_i \phi_i)}{\sum_{i=1}^N |\phi_i|^2}, \quad (5.28)$$

この運動方程式は非常に重要で、低エネルギー有効理論のスカラール場の運動項の前の因子を与える。すなわちこれが標的空間上の計量を与えるのである。これは実際に計算してみるとスカラール場の運動項は  $\sum_{i=1}^N |D\phi_i|^2$  なので、このゲージ共変な微分の中のゲージ場に代入すると (添字は省略する)

$$\sum_{i=1}^N |D\phi_i|^2 = r \frac{\sum_{i=1}^{N-1} |dz_i|^2}{1 + \sum_{i=1}^{N-1} |z_i|^2} - r \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \bar{z}_i dz_i \sum_{i=1}^N z_i d\bar{z}_i}{\left(1 + \sum_{i=1}^{N-1} |z_i|^2\right)^2} = rg^{\text{FS}}, \quad (5.29)$$

となる。これは  $\mathbb{CP}^{N-1}$  の Fubini-Study 計量である。

ii )  $r = 0$

次に FI-パラメーター  $r = 0$  の理論の振る舞いを調べる。この場合は古典論的に超対称真空が存在し Coulomb ブランチが実現していた。これに対し量子補正を考えることでどのような振る舞いを見せるかを調べる。まずツイステッドカイラル超場  $\Sigma$  の最低次の成分である複素スカラール場  $\sigma$  に注目する。ゲージ電荷を持つカイラル超場  $\Phi$  の運動項における  $\sigma$  依存する項は

$$-|\sigma|^2 |\phi|^2 - \bar{\psi}_- \sigma \psi_+ - \bar{\psi}_+ \sigma \psi_-, \quad (5.30)$$

である。これを見るとカイラル超場に対して  $\sigma$  は質量の役割を担っている。もともと 2次元のカイラル超場に含まれるフェルミオンは Dirac フェルミオンなので質量項も Dirac 質量で

ある。したがって、 $\sigma$  の VEV を十分大きくする事でカイラル超場が非常に重くなりフリーズアウトする。

FI-パラメーター  $r = 0$  の場合の古典的な超対称真空を実現する場の配位は以下であった:

$U = 0$  条件

$$\phi_1 = \phi_2 = \cdots = \phi_N = 0, \quad \sigma = \text{free}, \quad (5.31)$$

ここではベクトル多重項のスカラー場が VEV を持つ真空、Coulomb ブランチが実現される。 $\sigma$  の VEV を  $\mu \ll \langle \sigma \rangle$  のように十分大きくとるとカイラル超場が非常に重くなるので、 $\mu$  における低エネルギー有効理論はベクトル多重項  $\Sigma$  だけの理論となる。

まず  $r = 0$  を気にせずに素朴にベクトル多重項のみの自由場の理論の真空エネルギーを見積もる。この時真空エネルギーには2つの寄与があり1つは補助場  $D$  からの寄与であり、運動方程式を課すことによってポテンシャルは以下ようになる:

$$U_r = \frac{e^2}{2} r^2. \quad (5.32)$$

もう1つの寄与は  $\theta$ -項からの寄与で作用のベクトル場依存する寄与は以下である:

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2x \left( \frac{1}{2e^2} F_{01}^2 + \theta F_{01} \right). \quad (5.33)$$

よって  $A_\mu$  からの寄与による真空エネルギーは以下で与えられる:

$$U = \frac{e^2}{2} \theta^2. \quad (5.34)$$

したがって全体の真空エネルギーは FI-パラメーターからの寄与と  $\theta$ -項からの寄与の和で与えられる

$$U = \frac{e^2}{2} (r^2 + \theta^2) = \frac{e^2}{2} |t|^2, \quad (5.35)$$

となる。すなわちツイステッド超ポテンシャル  $\widetilde{W} = -t\Sigma$  によって

$$\left| \frac{\partial \widetilde{W}(\sigma)}{\partial \sigma} \right|^2 \quad (5.36)$$

と与えられる [14]。ここで FI- $\theta$ -パラメーターとして  $t \equiv r - i\theta$  を定義した (実際は  $\theta$  に関して  $2n\pi$  のシフトの寄与が存在する)。したがって、 $r = 0$  の真空エネルギーは FI- $\theta$  パラメーターによって与えられるので、低エネルギー有効理論における有効 FI- $\theta$  パラメーターによって有効真空エネルギーが与えられる。

$\sigma$  に  $\mu \ll \langle \sigma \rangle$  となるような VEV を持たせることによってカイラル超場が質量を獲得するので  $0 \leq k \leq \mu$  を経路積分を実行し、 $\Sigma$  についても  $\mu \leq k \leq \Lambda_{UV}$  モードを経路積分実行することによって低エネルギー有効理論を得る。しかし、実際には  $\Sigma$  の高エネルギー運動量モードは有効超ポテンシャルの補正には効かない。したがって、具体的には質量を持ったカイラル超場の経路積分を実行する:

$$\int \mathcal{D}\Phi e^{-S[\Phi]},$$

$$S[\Phi] = \int d^2x \left( |D_\mu \phi|^2 + |\sigma|^2 |\phi|^2 - D|\phi|^2 - 2i\bar{\psi}_- D_z \psi_- + 2i\bar{\psi}_+ D_z \psi_+ + \bar{\psi}_- \sigma \phi_+ + \bar{\psi}_+ \sigma \phi_- \right),$$

この経路積分を実行すると有効ツイステッド超ポテンシャルとして以下のように与えられる [17]:

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{\text{eff}}(\Sigma) &= -t\Sigma - \sum_i Q_i \Sigma \left( \log \frac{Q_i \Sigma}{\mu} - 1 \right) \\ &= -t\Sigma - N\Sigma \left( \log \frac{\Sigma}{\mu} - 1 \right) \end{aligned} \quad (5.37)$$

1項目は元々存在した FI- $\theta$  項を与える項で、2項目が 1-ループ補正である。この形を見てわかるように、 $\sum_i^N Q_i = 0$  の時は量子補正を受けない事がわかる。ここで超対称性を保っているので非線り込み定理から超ポテンシャルの関数形が変わらないはずである。したがって元々の FI- $\theta$  パラメーターが  $-t\Sigma$  だったので、有効 FI- $\theta$  パラメーターを以下で定義する:

$$t_{\text{eff}} := -\partial_\sigma W_{\text{eff}}(\sigma). \quad (5.38)$$

実際に  $t_{\text{eff}}$  を計算すると

$$\begin{aligned} t_{\text{eff}}(\sigma) &= -\partial_\sigma W_{\text{eff}}(\sigma) \\ &= t + N \left( \log \frac{\sigma}{\mu} - 1 \right) + N\sigma \cdot \frac{\mu}{\sigma} \cdot \frac{1}{\mu} \\ &= t(\mu) + N \log \left( \frac{\sigma}{\mu} \right) \\ &= \left[ N \log \left( \frac{\mu}{\Lambda} \right) - i\theta \right] + N \log \left( \frac{\sigma}{\mu} \right) \\ &= N \log \left( \frac{\sigma}{\Lambda} \right) - i\theta, \end{aligned} \quad (5.39)$$

となる。これによって有効ツイステッド超ポテンシャルは以下ようになる:

$$\widetilde{W}_{\text{eff}}(\Sigma) = -t_{\text{eff}} \Sigma. \quad (5.40)$$

したがって有効真空エネルギーは

$$U_{\text{eff}} = \frac{e^2}{2} \left| \frac{\partial W_{\text{eff}}(\sigma)}{\partial \sigma} \right|^2, \quad (5.41)$$

で与えられるので、 $r = 0$  ( $\mu = \Lambda$ ) における超対称真空はこれがゼロになるところで実現される。 $t_{\text{eff}}$  の2項目の  $\mu$  に気をつけて調べると

$$t_{\text{eff}} = -i\theta + N \log\left(\frac{\sigma}{\Lambda}\right) = 0, \quad (5.42)$$

となる。今ツイステッドカイラルのみの理論なので、これを  $\sigma$  について解くと超対称真空を実現する場の配位が得られる。

また実はこれらの議論は  $\mu < \Lambda$  に RG フローしても上記を満たす。具体的に計算してみると、 $r < 0$  ( $\mu < \Lambda$ ) の真空エネルギーは同じように  $U_{\text{eff}} = \frac{e^2}{2}|t_{\text{eff}}|^2$  で与えられる。超対称真空は  $t_{\text{eff}} = 0$  より

$$\begin{aligned} t_{\text{eff}} &= N \log\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right) - i\theta + N \log\left(\frac{\sigma}{\mu}\right) \\ &= -i\theta + N \log\left(\frac{\sigma}{\Lambda}\right) = 0, \end{aligned} \quad (5.43)$$

となる。これは  $r = 0$  ( $\mu = \Lambda$ ) における方程式と同じである。したがって、古典的には超対称真空は  $0 \leq r$  の領域にしか存在せず、物理的な描像では  $r$  は NLSM の標的空間としての  $\mathbb{CP}^{N-1}$  のサイズの役割を担っていた。しかし、1-ループ量子補正を考慮すると  $r$  が負の領域にフローしても超対称真空が存在するのである。したがって、 $\mathbb{CP}^{N-1}$  模型は  $0 < r$  から  $r < 0$  まで超対称真空のモジュライ空間は滑らかに繋がっている。

### $\mathbb{CP}^{N-1}$ 内の超曲面

ここまでは  $\mathbb{CP}^{N-1}$  模型を用いて  $F$ -項 (超ポテンシャル) が存在しないゲージ理論を見てきた。その状況では低エネルギー有効理論においてある多様体上の超対称 NLSM を得ることができた。次にこの理論に超ポテンシャルを入れた理論において議論する。これは超ポテンシャル由来の制限が新たに課される事によって、超ポテンシャルがない状況の  $\mathbb{CP}^{N-1}$  の部分多様体を標的空間とした超対称 NLSM を得ることができる。ここでは具体的に、標的空間として  $\mathbb{CP}^{N-1}$  内の超曲面に注目する。 $\mathbb{CP}^{N-1}$  模型の  $U(1)$  ゲージ電荷が  $+1$  のカイラル超場を  $N$  個入れた理論の場合は FI-パラメーターが 1-ループ繰り込みによって RG フローしていた。ここでは  $U(1)$  ゲージ電荷が  $+1$  のカイラル超場が  $N$  個と  $U(1)$  電荷が  $-N$  のカイラル超場を 1 つ導入する事で RG フローしなくなる。これは Calabi-Yau シグマ模型を実現する。

$\phi_i$  に関して次数  $d$  の多項式  $G(\phi_i)$  を考える。ただしこの  $G$  に対して以下を要請する:

$$\frac{\partial G}{\partial \phi_1} = \dots = \frac{\partial G}{\partial \phi_N} = 0 \implies \phi_1 = \dots = \phi_N = 0. \quad (5.44)$$

これは  $G$  として原点のみでこの条件を満たすものを考えるという事である。これは  $G = 0$  によって定義される Calabi-Yau 多様体と関連付けるために導入している。一般には斉次というだけでは多項式の係数をうまく選ぶと平坦な方向が存在する  $G$  を含んでしまうので上記の条件を要請する事で取り除いている。 $dG = 0$  に関して言及しておく、全ての変数の偏微分がゼロすなわち  $dG = 0$  はその点におけるただ 1 つの接空間が定義できず、その点を特異点であるという。したがって  $G = 0$  は滑らかな多様体を定義しないことになってしまう。なので、この要請をすることによって  $G = 0$  によって定義される  $\mathbb{CP}^{N-1}$  上の超曲面は原点のみに特異点を持つ。原点は  $\mathbb{CP}^{N-1}$  内の点ではないので超曲面上は非特異になるので、 $\mathbb{CP}^{N-1}$  上の部分多様体を定義できる。

$$G(\phi_1, \dots, \phi_N) = 0. \quad (5.45)$$

これは  $\mathbb{CP}^{N-1}$  なので  $\mathbb{C}^N$  から 1 変数減った  $(N-1)$  次元において上記の制限をかけるので、さらに 1 つ変数が減って  $(N-2)$  次元の多様体である。 $\mathbb{CP}^{N-1}$  の Kähler 形式を引き継いで  $M$  上に Kähler 形式が存在する。一般の  $N$  次元複素射影空間における次数  $d$  の斉次多項式  $G = 0$  によって定義される超曲面  $M$  の第一 Chern 類は  $(N-d)$  に比例し、 $d = N$  の場合にゼロとなり  $M$  は Calabi-Yau 多様体となる [17]。これは GLSM の言葉では、 $U(1)$  ゲージ対称性の電荷の和に比例すると言い換えることが出来る。以降は  $d = N$  の Calabi-Yau の場合のみを考える。

ここから  $N+1$  個のカイラル超場  $\Phi_1, \dots, \Phi_N, P$  が存在する  $U(1)$  ゲージ理論を考える。ここでカイラル超場の  $U(1)$  電荷は和がゼロとなる様に  $1, \dots, 1, -N$  としている。この時超ポテンシャルはゲージ不変性より以下の形に書き下される:

$$W = PG(\phi_1, \dots, \phi_N). \quad (5.46)$$

したがってこの理論に対するラグランジアンは以下で与えられる:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \int d^4\theta \left( \sum_{i=1}^N \bar{\Phi}_i e^{Q_i V} \Phi_i + \bar{P} e^{-dV} P - \frac{1}{2e^2} \bar{\Sigma} \Sigma \right) \\ + \frac{1}{2} \left( -t \int d^2\tilde{\theta} \tilde{\Sigma} + (c.c.) \right) + \frac{1}{2} \left( \int d^2\theta PG(\Phi_1, \dots, \Phi_N) + (c.c.) \right). \end{aligned} \quad (5.47)$$

ここで各超場とスカラー場の対応を記述しておく:

$$\Phi_i \ni \phi_i, \quad P \ni p, \quad \Sigma \ni \sigma. \quad (5.48)$$

この理論では  $\sum_i Q_i = 0$  より FI-パラメーターは RG フローしない。また、このラグランジアンのスカラーポテンシャルは以下の様になる:

$$U = |\sigma|^2 \sum_{i=1}^N 1 \cdot |\phi_i|^2 + |\sigma|^2 N^2 |p|^2 + \frac{e^2}{2} \left( \sum_{i=1}^N 1 \cdot |\phi_i|^2 - N|p|^2 - r \right)^2 + \frac{1}{4} |G(\phi_i)|^2 + \frac{1}{4} |p|^2 \sum_{i=1}^N |\partial_{\phi_i} G|^2. \quad (5.49)$$

- ゲージ電荷について補足

ここで  $U(1)$  電荷が全て同じであった  $\mathbb{CP}^{N-1}$  の状況と比較すると  $U(1)$  電荷を顕に記述した。スカラーポテンシャルの項

$$D = -e^2 \left( \sum_i |\phi_i|^2 - r \right),$$

であるが、 $D$  で変分してこの運動方程式が得られているという事を思い出すと  $\sum_i |\phi_i|^2 D$  という項からの寄与であり、非可換群の状況も思い出すと生成子  $T^a$  として

$$D^a = -e^2 \left( \sum_i \bar{\phi}_i T^a \phi_i - r^a \right),$$

となるべきである。即ち  $\phi_i$  に対するゲージ電荷が寄与している事を忘れてはならない。したがって上記の様なポテンシャル項が現れるのである。

このスカラーポテンシャルから超対称真空を探し、超対称真空を実現する場の配位によって低エネルギー有効理論を調べる。超対称真空の構造は  $\mathbb{CP}^{N-1}$  模型と同様に FI-パラメーターの領域によって全く異なる振る舞いする。

i)  $0 < r$

$U = 0$  は  $(\sum_{i=1}^N 1 \cdot |\phi_i|^2 - N|p|^2 - r)^2$  から少なくとも1つは  $\phi_i \neq 0$  を要求するので、 $|\sigma| \sum_{i=1}^N 1 \cdot |\phi_i|^2 + |\sigma|^2 N^2 |p|^2$  をゼロにする為には  $\sigma = 0$  となる。また、 $p \neq 0$  の場合、 $U = 0$  は  $\partial G = 0$  を要求するので、これは仮定より全ての  $\phi_i = 0$  となる。しかしながら、これはいくつかの  $\phi_i \neq 0$  に反するので、 $p = 0$  でなければならない。したがって、 $0 < r$  の場合に  $U = 0$  は以下の場の配位を要求する:

—  $U = 0$  条件 —

$$\sigma = p = 0, \quad \sum_{i=1}^N |\phi_i|^2 = r, \quad G(\phi_1, \dots, \phi_N) = 0. \quad (5.50)$$

真空多様体は  $U(1)$  ゲージ群の作用によって導かれ、これらの方程式に従う  $\phi_i$  の集合である。これは  $\mathbb{CP}^{N-1}$  の中に超曲面  $M$  を定義する。

多様体  $M$  に対して接線方向はゼロ質量であり、直行するモードと  $p$  は質量を獲得する。ここで  $p$  はポテンシャルの最後の項  $|p|^2 \sum_{i=1}^N |\partial_{\phi_i} G|^2$  から質量を獲得する。 $\sigma$  は 1 項目から獲得する。また、ゲージ場は Higgs 機構によって質量を獲得するので超対称パートナーであるゲージノも同じ質量を獲得する。質量を無限大に飛ばすこと  $e \rightarrow \infty$  で全ての質量モードは分離され、低エネルギー有効理論は超曲面  $M$  上の超対称 NLSM に帰着する。したがって標的空間は以下のようになる:

$$\left\{ (\phi_1, \dots, \phi_N) \mid \sum_i |\phi_i|^2 = r, G = 0 \right\} / U(1) = \text{Calabi-Yau (N-2)-fold}. \quad (5.51)$$

NLSM の 1-ループのベータ関数は Ricci テンソルに比例するので、標的空間が Ricci 平坦の場合は CFT であることがわかる。したがって、 $0 < r$  の低エネルギー有効理論は超共形場理論となる。

ii)  $r < 0$

$U = 0$  は  $(\sum_{i=1}^N 1 \cdot |\phi_i|^2 - N|p|^2 - r)^2$  より  $p \neq 0$  を要求する。したがって  $|\sigma|^2 N^2 |p|^2$  をゼロにする為に  $\sigma = 0$  でなければならない。さらに  $p \neq 0$  なので  $\sum_{i=1}^N |p|^2 |\partial_{\phi_i} G|^2$  をゼロにする為には  $\partial_{\phi_i} G = 0$  となり、これは仮定より全ての  $\phi_i = 0$  を要求する。したがって、 $(\sum_{i=1}^N 1 \cdot |\phi_i|^2 - N|p|^2 - r)^2$  より  $|p| = \sqrt{-r/N}$  となる。したがって、 $r < 0$  の場合に  $U = 0$  は以下の場の配位を要求する:

—  $U = 0$  条件 —

$$\sigma = 0, \quad \phi_i = 0, \quad p = \sqrt{-r/N}. \quad (5.52)$$

これは真空多様体が 1 点になっている。この時の超対称真空のモジュライ空間は以下のようになる:

$$\mathcal{M} = \left\{ (\phi_1, \dots, \phi_N) \mid \phi_i = 0 \right\} / U(1). \quad (5.53)$$

$p$  の VEV の取り方  $\langle p \rangle = \sqrt{-r/N}$  は  $U(1)$  ゲージ対称性を壊す。 $\sigma$  は 2 項目から獲得し、 $p$  は  $\frac{1}{2e^2} D^2$  の中の項で  $(\langle p \rangle \hat{p})^2$  から質量を獲得する。ここで注意として多項式  $G$  の次数が  $d \leq 2$  であれば  $|p|^2 |\partial_i G|^2$  から  $\Phi$  が全て質量を獲得する事になってしまうので、次数は  $3 \leq d$  であるとする。 $e \rightarrow \infty$  とすると、低エネルギー有効理論は  $\Phi_i$  のみの理論に帰着する。超ポテン



シャルとして

$$W = \langle p \rangle G(\Phi_1, \dots, \Phi_N), \quad (5.54)$$

を持つ *Landau-Ginzburg* 理論となる。

ここで一般に *Landau-Ginzburg* 理論とは、超ポテンシャルによって決定される古典的な超対称真空が存在し、ポテンシャルを適切に調節した際に非自明な IR 固定点を持つ理論のことである [14, 41]。ここで言う適切にと言う意味についてだが、一般に LG 理論は CFT ではない。しかしそこで理論に対してスケール変換を実行し、これに対して超ポテンシャルに対してスケール不変性を要請する事でスケール変換に関するウェイトを決定をすることができる。もう少し言及する。超ポテンシャルに注目し、具体的にスケール変換  $z \rightarrow \lambda z, \theta \rightarrow \lambda^{-\frac{1}{2}}\theta$  を考えると Kähler ポテンシャルはすでに不変であり、 $d^2 z d^2 \theta \rightarrow \lambda d^2 z d^2 \theta$  となる。よってスケール変換の下で不変である為にはウェイトが  $-1$  である必要がある。さらに簡単な具体的に  $W = \Phi^n$  の状況を考えて、 $d^2 z d^2 \theta \rightarrow \lambda d^2 z d^2 \theta$  及び  $\Phi \rightarrow \lambda^{-\frac{1}{n}}\Phi$  の下で不変である事が直ちに分かる。また、 $\Phi^n$  より高次の項が存在する場合  $W = \Phi^n + \Phi^m$  はスケール変換の下で  $\Phi^n + \Phi^m \rightarrow \lambda^{-1}(\Phi^n + \lambda^{1-\frac{m}{n}}\Phi^m)$  となる。 $1 - \frac{m}{n} < 0$  より IR 極限  $\lambda \rightarrow \infty$  で  $\Phi^m$  は irrelevant となる。したがって、この議論を用いる事でこの *Landau-Ginzburg* 理論は RG フローで IR 固定点に帰着し SCFT となる事が知られる。

斉次多項式  $G$  を導入する際に、 $\mathbb{CP}^{N-1}$  の部分多様体を定義するために  $G$  に対して要請をしている。その要請によって、 $dG = 0$  を満たすのは  $\phi_i = 0$  の原点のみであるので、停留点が全て原点である様な超ポテンシャルを持ち、 $G = 0$  の真空を持つ。

話を戻す。ここで  $\langle p \rangle$  は  $p$  の VEV を意味する。ここで注意すべきことは  $p$  の値を選んだことによって  $U(1)$  ゲージ対称性は完全に破れていない事である。 $p$  は  $U(1)$  電荷として  $-N$  を持っているので、離散部分群  $\mathbb{Z}_N \subset U(1)$  は保たれる。これは簡単な超ポテンシャルとして  $G = \sum_i^N \Phi_i^N$  を考えると確認できる。 $\Phi \rightarrow e^{i\alpha}\Phi$  のようにゲージ変換すると  $G \rightarrow e^{iN\alpha}G$  となるので、離散的ゲージ対称性  $\mathbb{Z}_N$  が残ることがわかる。この離散部分群は電荷  $+1$  のゼロ質量モード  $\Phi_i$  に低エネルギー有効理論のゲージ対称性として作用する。このように *Landau-Ginzburg* 理論は  $\mathbb{Z}_N$  ゲージ対称性を持つのである。このようなゲージ理論は通常 *orbifolding* 理論と呼ばれ、今考えている状況で低エネルギー有効理論は *Landau-Ginzburg orbifold* と呼ばれる。

ここで orbifold とは、多様体  $\mathcal{M}$  に離散群  $\Gamma$  によって同値関係を入れることで定義される商空間  $\mathcal{M}/\Gamma$  である。orbifold は単位元以外の全ての元に対して固定点を持たない場合のみ滑らかな多様体となるが、一般には  $\Gamma$  のある元において特異点を持つ。この直感的な理解としては、 $S^1$  を  $\mathbb{Z}_2$  で割る事を考えると分かりやすい。素朴に  $S^1/\mathbb{Z}_2$  を考えるとこれは  $S^1/\mathbb{Z}_2 \simeq S^1$  となってしまう。したがって単位元の部分に固定点を残すと  $S^1/\mathbb{Z}_2$  は orbifold となる。 $\mathcal{M}$  を標的空間とする NLSM が CFT になる場合に、orbifold  $\mathcal{M}/\Gamma$  を標的空間とす

る NLSM を構成することができ、この理論のことを orbifold CFT と言う。

iii)  $r = 0$

$U = 0$  は  $(\sum_{i=1}^N 1 \cdot |\phi_i|^2 - N|p|^2 - r)^2$  より  $\sum_{i=1}^N 1 \cdot |\phi_i|^2 = N|p|^2$  となる。 $p \neq 0$  の場合、少なくとも 1 つは  $\phi_i \neq 0$  である。しかしながら、 $p \neq 0$  だと  $\sum_{i=1}^N |p|^2 |\partial_{\phi_i} G|^2$  をゼロにするために  $\partial G = 0$  となり、これは仮定より  $\phi_1 = \dots = \phi_N = 0$  となる。したがって  $p = 0$  でなければならない。 $p = 0$  なので  $\sum_{i=1}^N 1 \cdot |\phi_i|^2 = N|p|^2$  より  $\phi_i = 0$  となる。 $p = \phi_i = 0$  の時  $|\sigma| \sum_{i=1}^N 1 \cdot |\phi_i|^2 + |\sigma|^2 N^2 |p|^2$  から、 $\sigma$  は任意となる。 $\phi_i = 0$  なので  $G(\phi_1, \dots, \phi_N) = 0$  になり  $U = 0$  となる。ベクトル多重項  $\Sigma$  は常にゼロ質量である。 $\sigma \neq 0$  とすると、他の場は質量を獲得する。これらの場合も  $\sigma = 0$  でゼロ質量になる。したがって、 $r < 0$  の場合に  $U = 0$  は以下の場の配位を要求する:

$U = 0$  条件

$$\phi_i = p = 0, \quad \sigma = \text{free.} \quad (5.55)$$

$0 < r$  の Calabi-Yau を実現する相と  $r < 0$  の Landau-Ginzberg 相においてモジュライ  $r$  は質量を司る。したがって低エネルギー有効理論である CY シグマ模型と LG orbifold は質量モードを積分した理論なので、 $r = 0$  では質量モードとして積分したモードがゼロ質量になり低エネルギー有効理論が正しい記述を与えない。当然ゲージ対称性も回復する。したがってこの意味で  $r = 0$  は超対称真空のモジュライ空間の特異点であると言う。

## 5.2 5-ブレーンを記述する GLSM

まず [5, 11, 46, 48–50] に基づいて  $\mathcal{N} = (4, 4)$   $U(1)^k$  ゲージ理論を  $\mathcal{N} = (2, 2)$  超対称多重項の言葉で書き直すことによって構成する。これは 4 次元  $\mathcal{N} = 2$  を  $\mathcal{N} = 1$  の多重項で記述することと同じである。ただしその場合もそうであるように、単に  $\mathcal{N} = 1$  の言葉で書き下してもそれは  $\mathcal{N} = 1$  の多重項を複数入れた理論になるだけであって、 $\mathcal{N} = 2$  を再現しない。ここで重要なのは  $1 \leq \mathcal{N}$  超対称代数に存在する R-対称性である。この R-対称性を課すことによって  $\mathcal{N} = 2$  を再現する。2 次元  $\mathcal{N} = (2, 2)$  は 4 次元  $\mathcal{N} = 1$  ( $U(1)$  R-対称性) から次元簡約によって構成されるので、 $\mathcal{N} = (4, 4)$  は 4 次元  $\mathcal{N} = 2$  を考えれば理解しやすい。

$\mathcal{N} = (4, 4)$  ベクトル (ゲージ) 多重項

$\mathcal{N} = (4, 4)$  ベクトル多重項はゲージ場  $A_m$ 、2つの Dirac フェルミオン  $\lambda, \tilde{\lambda}$ 、2つ実スカラー場及び1つの複素スカラー場  $\sigma, \eta, \phi$  を含む。これは4次元  $\mathcal{N} = 2$  のベクトル多重項を2次元に次元簡約しても現れる。これらの成分場は  $\mathcal{N} = (2, 2)$  の言葉ではベクトル多重項  $V$  と随伴表現カイラル多重項  $\Phi$  を用いる事で記述できる。これをまとめると以下の様になる:

- 2次元  $\mathcal{N} = (4, 4)$  ベクトル多重項

ベクトル場:  $A_m$ , 実スカラー場:  $\sigma, \eta$ , Dirac スピノル:  $\lambda, \tilde{\lambda}$ , 複素スカラー場:  $\phi$

- 2次元  $\mathcal{N} = (2, 2)$  ベクトル多重項  $V \rightarrow$  ツイステッドカイラル多重項  $\Sigma$

ベクトル場:  $A_m$ , 複素スカラー場:  $\sigma$ , Dirac スピノル:  $\lambda$ , (補助場:  $D$ )

- 2次元  $\mathcal{N} = (2, 2)$  随伴表現カイラル多重項  $\Phi$

複素スカラー場:  $\phi$ , Dirac スピノル:  $\tilde{\lambda}_{\pm}$ , (補助場:  $D_{\Phi}$ )

したがって、 $\mathcal{N} = (2, 2)$  の言葉でラグランジアンを記述すると以下のようになる:

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = \int d^4\theta \frac{1}{e^2} \left( -\bar{\Sigma}\Sigma + \bar{\Phi}\Phi \right). \quad (5.56)$$

ここでゲージ結合定数  $e$  を導入した。さらに、2つの複素化された FI-パラメーターを以下で定義する:

$$s \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(s^1 + is^2), \quad t \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(t^1 + it^2). \quad (5.57)$$

これを用いて FI-term が記述できる:

$$\mathcal{L}_{\text{FI}} = \sqrt{2} \int d^2\tilde{\theta} t\Sigma + (h.c.) + \sqrt{2} \int d^2\theta s\Phi + (h.c.). \quad (5.58)$$

ここで  $t$  は複素化された Fayet-Iliopoulos パラメーターといい、 $t\Sigma$  は  $\mathcal{N} = (2, 2)$  FI-項とトポロジカルな  $\theta$ -項を記述する。また  $t^1$  と  $s^1, s^2$  は補助場  $D$  に付随するので FI-パラメーターに対応する。

 $\mathcal{N} = (4, 4)$  ゲージ電荷を持つハイパー多重項

次にハイパー多重項を導入する。ここではゲージ電荷を持ったハイパー多重項とゲージ群の下で中性なハイパー多重項を考える。まず電荷を持つハイパー多重項から始める。 $\mathcal{N} = (4, 4)$

ハイパー多重項は2つの複素スカラー場  $q, \tilde{q}$ 、2つの Dirac スピノル  $\psi, \tilde{\psi}$  を含む。これは4次元の  $\mathcal{N} = 2$  ハイパー多重項の2次元への次元簡約によっても得られ、2次元  $\mathcal{N} = (2, 2)$  の言葉では2つのカイラル多重項  $Q, \tilde{Q}$  で記述できる。これをまとめると以下の様になる:

- 2次元  $\mathcal{N} = (4, 4)$  ハイパー多重項

Dirac スピノル:  $\psi, \tilde{\psi}$ , 複素スカラー場:  $q, \tilde{q}$

- 2次元  $\mathcal{N} = (2, 2)$  カイラル多重項  $Q$

複素スカラー場:  $q$ , Dirac スピノル:  $\psi$ , (補助場:  $F$ )

- 2次元  $\mathcal{N} = (2, 2)$  カイラル多重項  $\tilde{Q}$

複素スカラー場:  $\tilde{q}$ , Dirac スピノル:  $\tilde{\psi}$ , (補助場:  $\tilde{F}$ )

したがって、 $U(1)$  ゲージ電荷が  $-1$  且つ  $U(1)$  フレーバ対称性の電荷が  $-1$  の  $Q$  と  $U(1)$  ゲージ電荷が  $+1$  且つ  $U(1)$  フレーバ対称性の電荷が  $+1$  の  $\tilde{Q}$  の  $\mathcal{N} = (2, 2)$  の言葉でラグランジアンを記述すると以下のようなになる:

$$\mathcal{L}_{\text{CHM}} = \int d^4\theta \left\{ \bar{Q} e^{-2V} Q + \bar{\tilde{Q}} e^{+2V} \tilde{Q} \right\} + \sqrt{2} \int d^2\theta \left\{ \tilde{Q} \Phi Q + (h.c.) \right\}. \quad (5.59)$$

### $\mathcal{N} = (4, 4)$ ゲージ中性なハイパー多重項

最後にゲージ群の下で中性なハイパー多重項を導入する。 $\mathcal{N} = (4, 4)$  ゲージ中性なハイパー多重項は2つの複素スカラー場 (4つの実スカラー場)  $r^1, r^2, r^3, \theta$ 、2つの Dirac スピノル  $\chi, \tilde{\chi}$  を含む。これは4次元の  $\mathcal{N} = 2$  ハイパー多重項の2次元への次元簡約によっても得られ、2次元  $\mathcal{N} = (2, 2)$  の言葉ではカイラル多重項  $\Psi$  とツイステッドカイラル多重項  $\Theta$

で記述できる。これをまとめると以下の様になる:

- 2次元  $\mathcal{N} = (4, 4)$  ハイパー多重項

$$\text{Dirac スピノル} : \chi, \tilde{\chi}, \quad \text{複素スカラー場} : A = \frac{1}{\sqrt{2}}(r^1 + ir^2), \tilde{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}(r^3 + i\theta)$$

- 2次元  $\mathcal{N} = (2, 2)$  カイラル多重項  $\Psi$

$$\text{複素スカラー場} : A = \frac{1}{\sqrt{2}}(r^1 + ir^2), \quad \text{Dirac スピノル} : \chi, \quad (\text{補助場} : G)$$

- 2次元  $\mathcal{N} = (2, 2)$  ツイステッドカイラル多重項  $\Theta$

$$\text{複素スカラー場} : \tilde{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}(r^3 + i\theta), \quad \text{Dirac スピノル} : \tilde{\chi}, \quad (\text{補助場} : \tilde{G})$$

したがって、結合定数  $g$  を導入して  $\mathcal{N} = (2, 2)$  の言葉でラグランジアンを記述すると以下のようなになる:

$$\mathcal{L}_{\text{NHM}} = \int d^4\theta \frac{1}{g^2} (-\bar{\Theta}\Theta + \bar{\Psi}\Psi). \quad (5.60)$$

ダイナミカルな FI-項は以下で与えられる:

$$\mathcal{L}_{\text{FI2}} = -\sqrt{2} \int d^2\tilde{\theta} \{\Theta\Sigma + (h.c.)\} - \sqrt{2} \int d^2\theta \{\Psi\Phi + (h.c.)\}. \quad (5.61)$$

FI-項の構造から、 $r^4$  が  $2\pi$  の周期であると仮定し、他の  $(r^1, r^2, r^3)$  は  $\mathbb{R}^3$  に値を持つ。

最後に全体のラグランジアンを記述しておく:

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = \int d^4\theta \frac{1}{g^2} (-\bar{\Theta}\Theta + \bar{\Psi}\Psi) + \sum_{a=1}^k \left\{ \frac{1}{e^2} (-\bar{\Sigma}_a \Sigma_a + \bar{\Phi}_a \Phi_a) + \bar{Q}_a e^{-2V_a} Q_a + \tilde{\bar{Q}}_a e^{+2V_a} \tilde{Q}_a \right\}, \quad (5.62)$$

$$\mathcal{L}_W = \sqrt{2} \int d^2\theta \sum_{a=1}^k \left\{ \tilde{Q}_a \Phi_a Q_a + (s_a - \Psi) \Phi_a \right\}, \quad (5.63)$$

$$\mathcal{L}_{\tilde{W}} = \sqrt{2} \int d^2\tilde{\theta} \sum_{a=1}^k (t_a - \Theta) \Sigma_a. \quad (5.64)$$

この  $\mathcal{N} = (4, 4)$  GLSM for 5-ブレーンは [5] によって構成され  $SU(2)_R$  対称性をマニフェストにした理論となっている。後で見る様に上記の GLSM は IR 極限  $e \rightarrow \infty$  によって H-モノポール (NS5-ブレーン on  $S^1$ ) 背景時空を記述する世界面シグマ模型 (NLMS) を実現する。また、GLSM for 5-ブレーンの文脈では、 $F / G$  項  $(s_a - \Psi)\Phi_a$ 、 $(t_a - \Theta)\Sigma_a$  の構造から  $s_a, t_a$  を FI 及び theta パラメーターと呼び、 $\Psi, \Theta$  をダイナミカル FI-theta パラメーター

という。同じ事であるが標的空間の幾何学的な言葉では  $s_a, t_a$  はセンターの位置を意味しており、 $\Psi, \Theta$  は標的空間の座標の役割を担っている。

このゲージ群の下で中性なハイパー多重項のスカラー場が超対称真空のモジュライ空間を記述している。この超対称真空は Higgs ブランチである。また、この GLSM の作用の規格化因子は世界面シグマ模型に基づいている。この意味は、GLSM は超対称真空を調べる事で、低エネルギー極限  $e \rightarrow 0$  を実行しその超対称真空のモジュライ空間を標的空間として持つ NLSM となる。すなわちこの理論は世界面シグマ模型である。したがってこの理論の規格化因子は

$$\frac{1}{2\pi} \int d^2\mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{kin}} + \mathcal{L}_W + \mathcal{L}_{\tilde{W}}, \quad (5.65)$$

としている [5]。

### 5.3 T-双対変換

ここでは [16, 51] に基づいて超場形式における T-双対性変換を議論する。取り扱うのは先ほど導入した  $k$  個の複素数の FI パラメーター  $(s_a, t_a)$  を持つ  $U(1)^k$  超対称ゲージ理論は次で与えられる:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H = & \int d^4\theta \frac{1}{g^2} (-\bar{\Theta}\Theta + \bar{\Psi}\Psi) + \int d^4\theta \sum_{a=1}^k \left\{ \frac{1}{e_a^2} (-\bar{\Sigma}_a \Sigma_a + \bar{\Phi}_a \Phi_a) + \bar{Q}_a e^{-2V_a} Q_a + \bar{\tilde{Q}}_a e^{+2V_a} \tilde{Q}_a \right\} \\ & + \sum_{a=1}^k \left\{ \sqrt{2} \int d\theta^+ d\theta^- \left( \tilde{Q}_a \Phi_a Q_a + (s_a - \Psi) \Phi_a \right) + (h.c.) \right\} \\ & + \sum_{a=1}^k \left\{ \sqrt{2} \int d\theta^+ d\bar{\theta}^- (t_a - \Theta) \Sigma_a + (h.c.) \right\}. \end{aligned} \quad (5.66)$$

ここで  $a$  は  $U(1)$  のラベルである。この後に見る様に、この GLSM の低エネルギー極限  $e_a \rightarrow \infty$  を取ると、超対称真空のモジュライ空間として H-モノポール (smear された NS5-ブレーン) 背景時空を標的空間とした超対称 NLSM となる。この時 NLSM の計量は以下の調和関数によって特徴付けられる:

$$H = \frac{1}{g^2} + \frac{1}{\sqrt{2}R}, \quad R_a = \sqrt{(r^1 - s_a^1)^2 + (r^2 - s_a^2)^2 + (r^3 - t_a^1)^2}. \quad (5.67)$$

この構造から読み取れる様に、ゲージ対称性の下で中性なハイパー多重項の 2 つの複素スカラー場すなわち 4 つの実スカラー場は  $\mathbb{R}^3 \times S^1$  方向を記述する。同様に複素数の FI パラメーターも実で 4 つ存在し  $(s_a, t_a)$  は H-モノポールの位置 (センター) を意味する。つまりこの標的空間の情報を GLSM の超場形式で言い直すとツイステッドカイラル超場  $\Theta$  とカイラル超場  $\Psi$  のスカラー成分がダイナミカルな FI-パラメーターすなわち超対称真空のモジュ

ライ空間の座標に対応している。したがって、この超場に対して T-双対性変換を議論する事となる。

ここでゲージ中性ハイパー多重項のツイステッドカイラル多重項  $\bar{D}_+\Theta = D_-\Theta = 0$  に注目する。 $\Theta$  のラグランジアンは運動項と F-項である。これを次のように変形する<sup>‡</sup>:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\Theta &= - \int d^4\theta \frac{1}{g^2} \bar{\Theta}\Theta - \sum_{a=1}^k \left\{ \sqrt{2} \int d\theta^+ d\bar{\theta}^- \Theta \Sigma_a + (h.c.) \right\} \\
&= - \int d^4\theta \frac{1}{2g^2} (\bar{\Theta} + \Theta)^2 - \sum_{a=1}^k \left\{ \sqrt{2} \int d\theta^+ d\bar{\theta}^- \Theta \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{D}_+ D_- V_a + \int d\bar{\theta}^+ d\theta^- \bar{\Theta} \frac{1}{\sqrt{2}} D_+ \bar{D}_- V_a \right\} \\
&= - \int d^4\theta \frac{1}{2g^2} (\bar{\Theta} + \Theta)^2 - \sum_{a=1}^k \left\{ \int d\theta^+ d\bar{\theta}^- \bar{D}_+ D_- (\Theta V_a) + \int d\bar{\theta}^+ d\theta^- D_+ \bar{D}_- (\bar{\Theta} V_a) \right\} + \sqrt{2} \epsilon^{mn} \partial_m (\theta A_n) \\
&= - \int d^4\theta \frac{1}{2g^2} (\bar{\Theta} + \Theta)^2 - \sum_{a=1}^k \left\{ 2 \int d^4\theta (\Theta + \bar{\Theta}) V_a \right\} + \sqrt{2} \epsilon^{mn} \partial_m (\theta A_n) \\
&= - \int d^4\theta \left\{ \frac{1}{2g^2} (\bar{\Theta} + \Theta)^2 + \sum_{a=1}^k 2(\Theta + \bar{\Theta}) V_a \right\} + \sqrt{2} \epsilon^{mn} \partial_m (\theta A_n). \tag{5.68}
\end{aligned}$$

超対称性に対して共変な微分  $D$  の中の  $\partial_x$  は作用において  $\int d^d x$  が存在するので常に全微分になるので  $D = \int d\theta$  であることを思い出す。また  $\sqrt{2} \epsilon^{mn} \partial_m (\theta A_n)$  の項に関して言及しておく、元々位相項  $r^4 F$  が存在していたが F-項を D-項に書き換える際に全微分に書き換わっている。ここでツイステッドカイラル多重項の 2 乗の  $\theta$  に関して 4 次はゼロになることが成分場をみるとわかる:

$$Y^2 = \theta^+ \bar{\theta}^+ \theta^- \bar{\theta}^- (y \partial_+ \partial_- y + \partial_+ y \partial_- y) = 0 \text{ (up to surface term)}$$

次に、変形したラグランジアンを以下のように実補助超場  $\bar{B} = B$  と補助カイラル超場  $\bar{D}_\pm \Gamma = 0$  を導入して以下のように記述する:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= - \int d^4\theta \left\{ \frac{1}{2g^2} (\bar{\Theta} + \Theta)^2 + \sum_{a=1}^k 2(\Theta + \bar{\Theta}) V_a \right\} \\
&= \int d^4\theta \left\{ -\frac{1}{2g^2} B^2 - \sum_{a=1}^k 2B V_a - (\Gamma + \bar{\Gamma}) B \right\}. \tag{5.69}
\end{aligned}$$

これから T-双対性変換を超場形式のレベルで実行していくが、その際の注意点について言及しておく。この T-双対性変換の具体的な手続きにおいて超場を積分する事によって双対な理論に移る事が出来る。この積分の操作とは具体的には運動方程式を課す事である。やる事は通常通りに超場に関する変分をして運動方程式を課せば良いのだが、超場形式の場合

<sup>‡</sup>ここで  $d^2\theta = \frac{1}{2}d\theta d\theta'$ ,  $d^4\theta = \frac{1}{4}d\theta d\theta' d\theta'' d\theta'''$  を使用している。

には素朴に変分すると  $\delta\mathcal{L} = \int d^4\theta\bar{\Phi}\delta\Phi \iff \bar{\Phi} = 0$  の様に自明な物になってしまう。これはカイラル超場やツイステッドカイラル超場などの超場が満たすべき拘束条件を考慮していない事に由来する [52]。したがってこの点に注意して適切に拘束条件を加味しながら運動方程式を議論しなければならない。具体例としてカイラル超場の場合を考えてみると、先程の問題を回避する為には D-項を F-項に書き直す:

$$\int d^4\theta\bar{\Phi}\Phi = d^2\theta\bar{D}^2(\bar{\Phi}\Phi) = d^2\theta(\bar{D}^2\bar{\Phi})\Phi \iff \bar{D}^2\bar{\Phi} = 0. \quad (5.70)$$

超場形式レベルで議論する際は上記の様な操作を介して初めて超場が満たすべき拘束条件を考慮した正しい運動方程式を導出する事が出来る。

先ほどのラグランジアンに話を戻す。ここで  $\Gamma$  を積分 (運動方程式を課す) する<sup>§</sup>:

$$\begin{aligned} 2 \int d^4\theta(\Gamma + \bar{\Gamma})B &= \int d\theta^+d\theta^-\bar{D}_+\bar{D}_-(\Gamma B) + \int d\bar{\theta}^+d\bar{\theta}^-D_+D_-(\bar{\Gamma}B) \\ &= \int d\theta^+d\theta^-\Gamma\bar{D}_+\bar{D}_-B + \int d\bar{\theta}^+d\bar{\theta}^-\bar{\Gamma}D_+D_-B \\ &\rightarrow \int d\theta^+d\theta^-\delta\Gamma(\bar{D}_+\bar{D}_-B) + \int d\bar{\theta}^+d\bar{\theta}^-\delta\bar{\Gamma}(D_+D_-B) \\ &\quad \bar{D}_+\bar{D}_-B = 0, \quad D_+D_-B = 0. \end{aligned} \quad (5.71)$$

これを解くには

$$\{D_\alpha, D_\beta\} = \{\bar{D}_\alpha, \bar{D}_\beta\} = 0, \quad (5.72)$$

であることに注意すれば

$$B = \Theta + \bar{\Theta}, \quad (5.73)$$

であることがわかる。実際確認すると:

$$\begin{aligned} \bar{D}_-B &= \bar{D}_-(\Theta + \bar{\Theta}) = \bar{D}_-\Theta, \\ \bar{D}_+\bar{D}_-B &= \bar{D}_+\bar{D}_-\Theta = -\bar{D}_-\bar{D}_+\Theta = 0, \\ D_-B &= D_-(\Theta + \bar{\Theta}) = D_-\bar{\Theta}, \\ D_+D_-B &= D_+D_-\bar{\Theta} = -D_-\bar{D}_+\bar{\Theta} = 0. \end{aligned}$$

したがって、 $B = \Theta + \bar{\Theta}$  を代入すると

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int d^4\theta \left\{ -\frac{1}{2g^2}B^2 - \sum_{a=1}^k 2BV_a - (\Gamma + \bar{\Gamma})B \right\} \\ &\stackrel{\Gamma}{=} \int d^4\theta \left\{ -\frac{1}{2g^2}(\Theta + \bar{\Theta})^2 - \sum_{a=1}^k 2(\Theta + \bar{\Theta})V_a \right\}, \end{aligned}$$

<sup>§</sup> $d^4\theta \rightarrow d^2\theta$  の時に 1/2 が付くので払っている



となるので出発点のラグランジアンに戻ることが確認できる。

一方で、 $\Gamma$  の代わりに  $B$  を積分する事を考えてみる:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \int d^4\theta \left\{ -\frac{1}{g^2} B \delta B - \sum_{a=1}^k 2(\delta B) V_a - (\Gamma + \bar{\Gamma}) \delta B \right\} \\ &= \int d^4\theta \left\{ -\frac{1}{g^2} B - \sum_{a=1}^k 2V_a - (\Gamma + \bar{\Gamma}) \right\} \delta B \\ \frac{1}{g^2} B &= - \sum_{a=1}^k 2V_a - (\Gamma + \bar{\Gamma}),\end{aligned}\tag{5.74}$$

この時  $B$  と  $\Gamma$  の満たすべき運動方程式を通して双対性関係式を得ることができる。よって超場は以下を満たす:

$$\Theta + \bar{\Theta} = - \sum_{a=1}^k 2g^2 V_a - g^2 (\Gamma + \bar{\Gamma}).\tag{5.75}$$

これによって  $\Theta$  と  $\Gamma$  の実部が一致し、虚数部分が T-双対性変換が実行される。この双対性関係式から成分場に関する関係式として以下が読み取れる:

$$r^3 = -g^2 \gamma^3,\tag{5.76}$$

$$\pm \partial_{\pm} r^4 = -g^2 \partial_{\pm} \gamma^4 + g^2 v_{\pm}.\tag{5.77}$$

したがって大まかにいうと、標的空間を記述するツイステッドカイラル超場  $\Theta$  のスカラー場  $r^3 + ir^4$  がカイラル超場  $\Gamma$  のスカラー場  $r^3 + i\gamma^4$  となる。これの結果を代入すると

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \int d^4\theta \left\{ -\frac{1}{2g^2} B^2 - \sum_{a=1}^k 2BV_a - (\Gamma + \bar{\Gamma})B \right\} \\ &\stackrel{\text{B}}{=} \int d^4\theta \left\{ -\frac{1}{2g^2} B^2 - \left( \sum_{a=1}^k 2V_a + \Gamma + \bar{\Gamma} \right) B \right\} \\ &= \int d^4\theta \left\{ -\frac{g^2}{2} \left( \sum_{a=1}^k 2V_a + \Gamma + \bar{\Gamma} \right)^2 + g^2 \left( \sum_{a=1}^k 2V_a + \Gamma + \bar{\Gamma} \right)^2 \right\} \\ &= \int d^4\theta \frac{g^2}{2} \left( \sum_{a=1}^k 2V_a + \Gamma + \bar{\Gamma} \right)^2,\end{aligned}\tag{5.78}$$

となる。この時に全体のラグランジアンは以下のようになる:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_H &= \int d^4\theta \frac{1}{g^2} (-\bar{\Theta}\Theta + \bar{\Psi}\Psi) + \int d^4\theta \sum_{a=1}^k \left\{ \frac{1}{e_a^2} (-\bar{\Sigma}_a \Sigma_a + \bar{\Phi}_a \Phi_a) + \bar{Q}_a e^{-2V_a} Q_a + \bar{\tilde{Q}}_a e^{+2V_a} \tilde{Q}_a \right\} \\
&\quad + \sum_{a=1}^k \left\{ \sqrt{2} \int d\theta^+ d\theta^- \left( \tilde{Q}_a \Phi_a Q_a + (s_a - \Psi) \Phi_a \right) + (h.c.) \right\} \\
&\quad + \sum_{a=1}^k \left\{ \sqrt{2} \int d\theta^+ d\bar{\theta}^- (t_a - \Theta) \Sigma_a + (h.c.) \right\} \\
\stackrel{\text{T-dual}}{\longrightarrow} \mathcal{L}_{\text{KK}} &= \int d^4\theta \frac{1}{g^2} \bar{\Psi}\Psi + \int d^4\theta \sum_{a=1}^k \left\{ \frac{1}{e_a^2} (-\bar{\Sigma}_a \Sigma_a + \bar{\Phi}_a \Phi_a) + \bar{Q}_a e^{-2V_a} Q_a + \bar{\tilde{Q}}_a e^{+2V_a} \tilde{Q}_a \right\} \\
&\quad + \sum_{a=1}^k \left\{ \sqrt{2} \int d\theta^+ d\theta^- \left( \tilde{Q}_a \Phi_a Q_a + (s_a - \Psi) \Phi_a \right) + (h.c.) \right\} \\
&\quad + \sum_{a=1}^k \left\{ \sqrt{2} \int d\theta^+ d\bar{\theta}^- t_a \Sigma_a + (h.c.) \right\} \\
&\quad + \int d^4\theta \frac{g^2}{2} \left( \sum_{a=1}^k 2V_a + \Gamma + \bar{\Gamma} \right)^2 + \sqrt{2} \epsilon^{mn} \sum_{a=1}^k \partial_m (\theta A_{n,a}), \tag{5.79}
\end{aligned}$$

上記の様な T-双対性変換によって得られた GLSM は、H-モノポールの T-双対である KK5-ブレーン (KK-モノポール) に対応する GLSM である。特徴としては、H-モノポールの GLSM において標的空間の座標は  $\Psi, \Theta$  が担っていた。今実際に行った T-双対性変換の操作によってコンパクトな  $S^1$  方向を記述していた  $\Theta$  の最低次成分  $\theta$  が双対場  $\gamma^4$  となった。これは T-双対性変換は標的空間のコンパクトな  $S^1$  半径に関して

$$\text{T-duality} \quad : \quad R \quad \longrightarrow \quad \frac{\alpha'}{R} \tag{5.80}$$

の様に変換する事を意味する。この幾何学的な描像は  $\Theta$  の双対超場である  $\Gamma$  の前の因子が逆数となっている事に現れている。

## 5.4 H-モノポールを記述する NLSM

ここでは [46] に基づいて H-モノポールに対応する GLSM

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_H = & \int d^4\theta \frac{1}{g^2} (-\bar{\Theta}\Theta + \bar{\Psi}\Psi) + \int d^4\theta \sum_{a=1}^k \left\{ \frac{1}{e_a^2} (-\bar{\Sigma}_a \Sigma_a + \bar{\Phi}_a \Phi_a) + \bar{Q}_a e^{-2V_a} Q_a + \bar{\tilde{Q}}_a e^{+2V_a} \tilde{Q}_a \right\} \\
& + \sum_{a=1}^k \left\{ \sqrt{2} \int d\theta^+ d\theta^- \left( \tilde{Q}_a \Phi_a Q_a + (s_a - \Psi) \Phi_a \right) + (h.c.) \right\} \\
& + \sum_{a=1}^k \left\{ \sqrt{2} \int d\theta^+ d\bar{\theta}^- (t_a - \Theta) \Sigma_a + (h.c.) \right\}, \tag{5.81}
\end{aligned}$$

から出発して低エネルギー有効理論である超対称 NLSM の標的空間が H-モノポールの背景時空になっている事を確認する。計算が非常に煩雑な為、NLSM の計量をみる事を目的としてボソン部分のみに注目して計算する。文献によって記法や係数因子が異なるのでここでは全て [46] に合わせる事とする。

まず、先ほどの超場形式を成分場展開した際のボソン部分のラグランジアンは補助場を積分すると以下の様に与えられる:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{kin}} = & \sum_a \frac{1}{e_a^2} \left[ \frac{1}{2} (F_{01,a})^2 - |\partial_m \sigma_a|^2 - |\partial_m \phi|^2 \right] \\
& - \sum_a \left( |D_m q_a|^2 + |D_m \tilde{q}_a|^2 \right) - \frac{1}{2g^2} \left[ (\partial_m \vec{r})^2 + (\partial_m r^4)^2 \right], \\
\mathcal{L}_{\text{potential}} = & \sum_a \left[ -\frac{e^2}{2} (|q_a|^2 - |\tilde{q}_a|^2 - \sqrt{2}(r^3 - t_a^3))^2 - e^2 |\sqrt{2} q_a \tilde{q}_a + (r^1 + ir^2) - (s_a^1 + is_a^2)|^2 \right. \\
& \left. - 2(|\phi_a|^2 + |\sigma_a|^2)(|q_a|^2 + |\tilde{q}_a|^2 + g^2) \right], \\
\mathcal{L}_{\text{topological}} = & \sqrt{2} \sum_a (r^4 - t_a^4) F_{01,a}.
\end{aligned}$$

次にこの理論の低エネルギー有効理論を考える。まず超対称性を保つ真空はポテンシャルのゼロ点を探す事で求まるので、超対称真空の拘束条件は以下の方程式で決まる:

$$\sigma_a = \phi_a = 0, \tag{5.82}$$

$$|q_a|^2 - |\tilde{q}_a|^2 - \sqrt{2}(r^3 - t_a^3) = 0, \tag{5.83}$$

$$\sqrt{2} q_a \tilde{q}_a + (r^1 + ir^2) - (s_a^1 + is_a^2) = 0. \tag{5.84}$$

ここから以下の2本に注目する:

$$|q_a|^2 - |\tilde{q}_a|^2 - \sqrt{2}(r^3 - t_a^3) = 0,$$

$$\sqrt{2} q_a \tilde{q}_a + (r^1 + ir^2) - (s_a^1 + is_a^2) = 0.$$

これから1本目の2乗すると

$$\begin{aligned} \left(|q_a|^2 - |\tilde{q}_a|^2\right)^2 &= 2(r^3 - t_a^3)^2 \\ (|q_a|^2)^2 - 2|q_a|^2|\tilde{q}_a|^2 + (|\tilde{q}_a|^2)^2 &= 2(r^3 - t_a^3)^2, \end{aligned}$$

となるのでこれに2本目の $|q_a|^2|\tilde{q}_a|^2$ (大きさの2乗であることに注意)を代入すると

$$\begin{aligned} (|q_a|^2)^2 - \left|(r^1 + ir^2) - (s_a^1 + is_a^2)\right|^2 + (|\tilde{q}_a|^2)^2 &= 2(r^3 - t_a^3)^2 \\ (|q_a|^2)^2 + (|\tilde{q}_a|^2)^2 &= \left|(r^1 - s_a^1) + i(r^2 - s_a^2)\right|^2 + 2(r^3 - t_a^3)^2 \\ (|q_a|^2)^2 + (|\tilde{q}_a|^2)^2 &= (r^1 - s_a^1)^2 + (r^2 - s_a^2)^2 + 2(r^3 - t_a^3)^2 \end{aligned} \quad (5.85)$$

を得る。次に $(|q_a|^2 + |\tilde{q}_a|^2)^2$ を計算すると

$$\begin{aligned} (|q_a|^2 + |\tilde{q}_a|^2)^2 &= (|q_a|^2)^2 + 2|q_a|^2|\tilde{q}_a|^2 + (|\tilde{q}_a|^2)^2 \\ (|q_a|^2 + |\tilde{q}_a|^2)^2 &= 2|q_a|^2|\tilde{q}_a|^2 + (r^1 - s_a^1)^2 + (r^2 - s_a^2)^2 + 2(r^3 - t_a^3)^2 \\ (|q_a|^2 + |\tilde{q}_a|^2)^2 &= 2(r^1 - s_a^1)^2 + 2(r^2 - s_a^2)^2 + 2(r^3 - t_a^3)^2, \end{aligned} \quad (5.86)$$

となるので、最終的に

$$\frac{1}{2}(|q_a|^2 + |\tilde{q}_a|^2) = |R_a| \equiv \sqrt{(r^1 - s_a^1)^2 + (r^2 - s_a^2)^2 + (r^3 - t_a^3)^2}, \quad (5.87)$$

を得ることができる。これを満たす $q_a, \tilde{q}_a$ の形が[6, 46]記述され、以下の様に与えられる<sup>¶</sup>:

$$q_a = \frac{i}{2^{1/4}} e^{i\alpha_a(x)} \sqrt{R_a + r^3 - t_a^3}, \quad \tilde{q}_a = \frac{i}{2^{1/4}} e^{-i\alpha_a(x)} \frac{(r^1 - s_a^1) + i(r^2 - s_a^2)}{\sqrt{R_a + r^3 - t_a^3}}, \quad (5.88)$$

これを用いて計算すると

$$\begin{aligned} D_m q_a &= \partial_m q_a - iA_m q_a \\ &= \frac{e^{i\alpha_a(x)}}{2^{1/4}} \left[ (A_{a,m} - \partial_m \alpha_a) \sqrt{R_a + r^3 - t_a^3} - \frac{i}{2} \frac{\partial_m (R_a + r^3)}{\sqrt{R_a + r^3 - t_a^3}} \right], \end{aligned} \quad (5.89)$$

$$\begin{aligned} D_m \tilde{q}_a &= \partial_m \tilde{q}_a + iA_m \tilde{q}_a \\ &= \frac{e^{-i\alpha_a(x)}}{2^{1/4} \sqrt{R_a + r^3 - t_a^3}} \left[ \partial_m \alpha_a \left\{ (r^1 - s_a^1) + i(r^2 - s_a^2) \right\} + (\partial_m r^1 - i\partial_m r^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{(r^1 - s_a^1) + i(r^2 - s_a^2)}{(R_a + r^3 - t_a^3)} - A_{m,a} \left\{ (r^1 - s_a^1) + i(r^2 - s_a^2) \right\} \right], \end{aligned} \quad (5.90)$$

<sup>¶</sup>実際には符号など異なるが[6]ここでは[46]に合わせる

となるので、ゲージ電荷を持つハイパー多重項に属するスカラー場の運動項は以下の様になる:

$$\begin{aligned}
 |D_m q_a|^2 + |D_m \tilde{q}_a|^2 &= \frac{1}{2\sqrt{2}R_a} \left[ (\partial_m r^1)^2 + (\partial_m r^2)^2 + (\partial_m r^3)^2 \right] \\
 &\quad + \sqrt{2}R_a \left( \partial_m \alpha_a - A_{a,m} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{-(r^1 - s_a^1)\partial_m r^2 + (r^2 - s_a^2)\partial_m r^1}{\sqrt{2}R_a(R_a + r^3 - t_a^3)} \right)^2,
 \end{aligned} \tag{5.91}$$

次に質量モードを分離させる低エネルギー極限  $e \rightarrow \infty$  をとると

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= - \sum_a \left[ \frac{1}{2\sqrt{2}R_a} \left[ (\partial_m r^1)^2 + (\partial_m r^2)^2 + (\partial_m r^3)^2 \right] \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{2}R_a \left( \partial_m \alpha_a - A_{a,m} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{-(r^1 - s_a^1)\partial_m r^2 + (r^2 - s_a^2)\partial_m r^1}{\sqrt{2}R_a(R_a + r^3 - t_a^3)} \right)^2 \right] \\
 &\quad - \frac{1}{2g^2} \left[ (\partial_m \vec{r})^2 + (\partial_m r^4)^2 \right] + \sqrt{2} \sum_a (r^4 - t_a^4) F_{01,a} \\
 &= -\frac{1}{2}H \left[ (\partial_m r^1)^2 + (\partial_m r^2)^2 + (\partial_m r^3)^2 \right] - \frac{1}{2g^2} (\partial_m r^4)^2 + \sqrt{2} \sum_a (r^4 - t_a^4) F_{01,a} \\
 &\quad - \sum_a \sqrt{2}R_a \left( \partial_m \alpha_a - A_{a,m} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{-(r^1 - s_a^1)\partial_m r^2 + (r^2 - s_a^2)\partial_m r^1}{\sqrt{2}R_a(R_a + r^3 - t_a^3)} \right)^2,
 \end{aligned}$$

となる。ここで弦理論の低エネルギー有効理論としての超重力理論におけるブレーン解を特徴付けていた調和関数に対応する物として

$$H = \frac{1}{g^2} + \sum_a \frac{1}{\sqrt{2}R_a}, \tag{5.92}$$

とした。低エネルギー極限  $e \rightarrow \infty$  によってベクトル多重項の運動項が消えるのでベクトル多重項がフリーズアウトする。ラグランジアンに残ったベクトル多重項の成分場はラグランジアンとしては補助場となるので、これを積分する。ゲージ場の運動方程式は以下の様になる<sup>†</sup>:

$$\begin{aligned}
 \delta \mathcal{L} &= \sum_a \sqrt{2}(r^4 - t_a^4) \epsilon_{nm} \partial^n \delta A_a^m + \sum_a 2\sqrt{2}R_a \left( \partial_m \alpha_a - A_{a,m} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{-(r^1 - s_a^1)\partial_m r^2 + (r^2 - s_a^2)\partial_m r^1}{\sqrt{2}R_a(R_a + r^3 - t_a^3)} \right) \delta A_a^m \\
 0 &= \sqrt{2} \epsilon_{nm} \partial^n (r^4 - t_a^4) + 2\sqrt{2}R_a \left( \partial_m \alpha_a - A_{a,m} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{-(r^1 - s_a^1)\partial_m r^2 + (r^2 - s_a^2)\partial_m r^1}{\sqrt{2}R_a(R_a + r^3 - t_a^3)} \right) \\
 A_{a,m} &= \frac{1}{2R_a} \epsilon_{nm} \partial^n r^4 + \partial_m \alpha_a + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{-(r^1 - s_a^1)\partial_m r^2 + (r^2 - s_a^2)\partial_m r^1}{\sqrt{2}R_a(R_a + r^3 - t_a^3)}.
 \end{aligned} \tag{5.93}$$

<sup>†</sup>  $F_{01,a} = \epsilon^{mn} \partial_n A_{m,a} = \epsilon_{nm} \partial^n A_a^m$ ,  $\epsilon_{01} = \epsilon^{10} = 1$ ,  $\epsilon_{lm} \epsilon^{mn} = \delta_l^n$  を用いている。

ここで  $\alpha_a = 0$  とゲージ固定し、運動方程式を 2 つの項に代入する。1 項目は

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2} \sum_a (r^4 - t_a^4) F_{01,a} &= \sqrt{2} \sum_a (r^4 - t_a^4) \epsilon^{mn} \partial_n A_{m,a} \\
 &= -\sqrt{2} \sum_a \partial_n (r^4 - t_a^4) \epsilon^{mn} A_{m,a} \\
 &= -\sqrt{2} \sum_a \epsilon^{mn} \partial_n r^4 \left( \frac{1}{2R_a} \epsilon_{lm} \partial^l r^4 + \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega_{i,a} \partial_m r^i \right) \\
 &= -\sqrt{2} \sum_a \epsilon^{mn} \partial_n r^4 \frac{1}{2R_a} \epsilon_{lm} \partial^l r^4 - \sqrt{2} \sum_a \epsilon^{mn} \partial_n r^4 \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega_{i,a} \partial_m r^i \\
 &= -\sum_a \frac{1}{\sqrt{2}R_a} (\partial_m r^4)^2 - \sum_a \epsilon^{mn} \partial_n r^4 \Omega_{i,a} \partial_m r^i, \tag{5.94}
 \end{aligned}$$

となり、2 項目は

$$\begin{aligned}
 &-\sum_a \sqrt{2}R_a \left( \partial_m \alpha_a - A_{a,m} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{-(r^1 - s_a^1) \partial_m r^2 + (r^2 - s_a^2) \partial_m r^1}{\sqrt{2}R_a (R_a + r^3 - t_a^3)} \right)^2 \\
 &= -\sum_a \sqrt{2}R_a \left( \frac{1}{2R_a} \epsilon_{nm} \partial^n r^4 \right) \left( \frac{1}{2R_a} \epsilon^{lm} \partial_l r^4 \right) \\
 &= \sum_a \frac{1}{2\sqrt{2}R_a} (\partial^m r^4)^2, \tag{5.95}
 \end{aligned}$$

となるので

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}H \left[ (\partial_m r^1)^2 + (\partial_m r^2)^2 + (\partial_m r^3)^2 \right] - \frac{1}{2g^2} (\partial_m r^4)^2 - \sum_a \frac{1}{2\sqrt{2}R_a} (\partial_m r^4)^2 - \epsilon^{mn} \Omega_i \partial_m r^i \partial_n r^4, \tag{5.96}$$

$$\Omega_i \equiv \sum_a \Omega_{i,a}, \quad \Omega_i \partial_m r^i = \frac{-(r^1 - s_a^1) \partial_m r^2 + (r^2 - s_a^2) \partial_m r^1}{\sqrt{2}R_a (R_a + r^3 - t_a^3)}, \tag{5.97}$$

を得ることができる。

したがって H-モノポールに対応する GLSM

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_H &= \int d^4\theta \frac{1}{g^2} (-\bar{\Theta}\Theta + \bar{\Psi}\Psi) + \int d^4\theta \sum_{a=1}^k \left\{ \frac{1}{e_a^2} (-\bar{\Sigma}_a \Sigma_a + \bar{\Phi}_a \Phi_a) + \bar{Q}_a e^{-2V_a} Q_a + \bar{\tilde{Q}}_a e^{+2V_a} \tilde{Q}_a \right\} \\
 &+ \sum_{a=1}^k \left\{ \sqrt{2} \int d\theta^+ d\theta^- \left( \tilde{Q}_a \Phi_a Q_a + (s_a - \Psi) \Phi_a \right) + (h.c.) \right\} \\
 &+ \sum_{a=1}^k \left\{ \sqrt{2} \int d\theta^+ d\bar{\theta}^- (t_a - \Theta) \Sigma_a + (h.c.) \right\}, \tag{5.98}
 \end{aligned}$$

の低エネルギー有効理論として最終的な結果は以下の様になる:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &\ni -\frac{1}{2}H \left[ (\partial_m \vec{r})^2 + (\partial_m r^4)^2 \right] - \epsilon^{mn} \Omega_i \partial_m r^i \partial_n r^4, \\
 H &= \frac{1}{g^2} + \sum_a \frac{1}{\sqrt{2}R_a}. \tag{5.99}
 \end{aligned}$$

ここで  $S^1$  方向の FI-パラメーター  $t_a^4$  が最後の結果に存在しないのは部分積分で  $\partial_m(r^4 - t_a^4)$  消えてたことに起因する。この結果の物理的な意味について言及すると、H-モノポールとはコンパクト方向に関して smear された NS5-ブレーンに対応するので、 $S^1$  方向には smearing の操作が施されており依存していないのであった。したがって上記の結果はこの事を正しく再現している。また、この GLSM の文脈ではディラトンに関しては読み取る事ができないが、背景空間の計量  $g$  と NS-NS B 場に関しては古典解である超重力理論の結果を再現している。最後に超重力理論の解との比較について触れておくと、超重力理論の解の調和関数は  $H = 1 + \frac{1}{rR}$  で  $\theta \simeq \theta + 2\pi Rn$  の周期性を持ち  $S^1$  の半径は  $R$  であった。これに対して GLSM の標的空間の計量は  $H = \frac{1}{g^2} + \frac{1}{r}$  であり  $\theta \simeq \theta + 2\pi n$  の周期性を持ち  $S^1$  の半径は  $\frac{1}{g^2}$  である。これは GLSM の  $\theta$  を半径でリスケールすれば  $Hd\theta^2 = (1 + \frac{1}{rR^2})d(R\theta)^2$  となる。

## 5.5 KK5-ブレーンを記述する NLSM

ここでは先ほど H-モノポールで議論した様に、KK5-ブレーンに対応する GLSM

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{KK}} = & \int d^4\theta \frac{1}{g^2} \bar{\Psi}\Psi + \int d^4\theta \sum_{a=1}^k \left\{ \frac{1}{e_a^2} (-\bar{\Sigma}_a \Sigma_a + \bar{\Phi}_a \Phi_a) + \bar{Q}_a e^{-2V_a} Q_a + \bar{\tilde{Q}}_a e^{+2V_a} \tilde{Q}_a \right\} \\ & + \sum_{a=1}^k \left\{ \sqrt{2} \int d\theta^+ d\theta^- \left( \tilde{Q}_a \Phi_a Q_a + (s_a - \Psi) \Phi_a \right) + (h.c.) \right\} \\ & + \sum_{a=1}^k \left\{ \sqrt{2} \int d\theta^+ d\bar{\theta}^- t_a \Sigma_a + (h.c.) \right\} \\ & + \int d^4\theta \frac{g^2}{2} \left( \sum_{a=1}^k 2V_a + \Gamma + \bar{\Gamma} \right)^2 + \sqrt{2} \epsilon^{mn} \sum_{a=1}^k \partial_m (\theta A_{n,a}), \end{aligned} \quad (5.100)$$

から出発して低エネルギー有効理論が KK5-ブレーンの背景時空を標的空間とする超対称 NLSM になっている事を確認する。

H-モノポールに対する GLSM に対して T-双対性変換を実行して得られた GLSM の超場形式のラグランジアンを成分場で書き下して補助場を積分した後のボソン部分のみに注目したラグランジアンは以下で与えられる:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{KK}} \ni & \sum_a \frac{1}{e_a^2} \left[ \frac{1}{2} (F_{01,a})^2 - |\partial_m \sigma_a|^2 - |\partial_m \phi|^2 \right] - \sum_a \left( |D_m q_a|^2 + |D_m \tilde{q}_a|^2 \right) - \frac{1}{2g^2} (\partial_m \vec{r})^2 - \frac{g^2}{2} (D_m \gamma^4)^2, \\ & + \sum_a \left[ -\frac{e^2}{2} (|q_a|^2 - |\tilde{q}_a|^2 - \sqrt{2}(r^3 - t_a^3))^2 - e^2 |\sqrt{2} q_a \tilde{q}_a + (r^1 + ir^2) - (s_a^1 + is_a^2)|^2 \right. \\ & \quad \left. - 2(|\phi_a|^2 + |\sigma_a|^2)(|q_a|^2 + |\tilde{q}_a| + g^2) \right], \\ & + \sqrt{2} \sum_a \epsilon^{mn} \partial_m \left( (r^4 - t_a^4) A_{n,a} \right). \end{aligned}$$

ここでも低エネルギー有効理論の計量を見る事が目的なので簡単のためにボソン部分のみに注目して計算をする。ここで  $\gamma^4$  に対して共変微分を導入した\*\*:

$$D_m \gamma^4 = \partial_m \gamma^4 - \sqrt{2} \sum_a A_{m,a}. \quad (5.101)$$

これはベクトル多重項  $V_a$  のゲージ変換に伴ってカイラル多重項  $\Gamma$  がシフトする事でゲージ不変性を保つ。双対性関係式から、 $A_m \rightarrow A_m + \partial_m \lambda$  の下で  $\gamma$  は  $\gamma^4 \rightarrow \gamma^4 + \sqrt{2} \lambda$  と変換する††。しかし双対場である  $r^4$  はゲージ不変であるので共変微分を導入しゲージ不変にしている。

上記のラグランジアンを超対称真空は以下で与えられる:

$$\sigma_a = \phi_a = 0, \quad (5.102)$$

$$|q_a|^2 - |\tilde{q}_a|^2 - \sqrt{2}(r^3 - t_a^3) = 0, \quad (5.103)$$

$$\sqrt{2}q_a \tilde{q}_a + (r^1 + ir^2) - (s_a^1 + is_a^2) = 0. \quad (5.104)$$

これは H-モノポールの系と同じであるので、この超対称真空を満たすような場の配位は先ほどと同様である:

$$q_a = \frac{i}{2^{1/4}} e^{i\alpha_a(x)} \sqrt{R_a + r^3 - t_a^3}, \quad \tilde{q}_a = \frac{i}{2^{1/4}} e^{-i\alpha_a(x)} \frac{(r^1 - s_a^1) + i(r^2 - s_a^2)}{\sqrt{R_a + r^3 - t_a^3}}. \quad (5.105)$$

したがってこれをラグランジアンに代入すると以下のようにになる:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{KK}} \ni & \sum_a \frac{1}{e_a^2} \left[ \frac{1}{2} (F_{01,a})^2 - |\partial_m \sigma_a|^2 - |\partial_m \phi|^2 \right] - \sum_a \left( |D_m q_a|^2 + |D_m \tilde{q}_a|^2 \right) - \frac{1}{2g^2} (\partial_m \vec{r})^2 - \frac{g^2}{2} (D_m \gamma^4)^2, \\ & + \sum_a \left[ -\frac{e^2}{2} (|q_a|^2 - |\tilde{q}_a|^2 - \sqrt{2}(r^3 - t_a^3))^2 - e^2 |\sqrt{2}q_a \tilde{q}_a + (r^1 + ir^2) - (s_a^1 + is_a^2)|^2 \right. \\ & \quad \left. - 2(|\phi_a|^2 + |\sigma_a|^2)(|q_a|^2 + |\tilde{q}_a|^2 + g^2) \right], \\ & + \sqrt{2} \sum_a \epsilon^{mn} \partial_m \left( (r^4 - t_a^4) A_{n,a} \right) \\ = & \sum_a \frac{1}{2e_a^2} (F_{01,a})^2 - \frac{1}{2} H (\partial_m \vec{r})^2 - \frac{g^2}{2} (D_m \gamma^4)^2, \\ & - \sum_a \sqrt{2} R_a \left( \partial_m \alpha_a - A_{m,a} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega_{i,a} \partial_m r^i \right)^2 + \sqrt{2} \sum_a \epsilon^{mn} \partial_m \left( (r^4 - t_a^4) A_{n,a} \right). \end{aligned}$$

次に質量モードを分離させる低エネルギー極限  $e_a \rightarrow \infty$  を実行する。これによってベクトル多重項の運動項が消えるのでベクトル多重項がフリーズアウトする。ラグランジアンに残った

\*\*ここではコンパクトスカラー  $\gamma^4$  のゲージ共変微分は [46] にしたがって導入している。しかし超対称局所化の際には [53] に記法を全て統一している為に、 $\gamma^4$  のゲージ共変微分の中の符号が反転する。

††この  $\gamma^4$  の変換が [6, 10] と [46] では符号が逆であるが、ここでは [46] に合わせる様にしている



ベクトル多重項の成分場はラグランジアンとしては補助場となるので、拘束条件を与える。ここでゲージ不変な座標として以下を

$$\tilde{r}^4 := \gamma^4 - \sqrt{2} \sum_a \alpha_a, \quad (5.106)$$

導入すると NLSM は以下のようになる:

$$\mathcal{L}_{\text{KK}} \ni -\frac{1}{2}H(\partial_m \tilde{r})^2 - \frac{1}{2H} \left( \partial_m \tilde{r}^4 - \Omega_i \partial_m r^i \right)^2 + \sqrt{2} \sum_a \epsilon^{mn} \partial_m \left( (r^4 - t_a^4) A_{n,a} \right), \quad (5.107)$$

$$H = \frac{1}{g^2} + \sum_a \frac{1}{\sqrt{2}R_a}. \quad (5.108)$$

実際にはもちろんフェルミオン項も存在するが、ここでの議論では NLSM の標的空間の計量が超重力理論における KK5-ブレーン計量を再現しているかという観点に注目しているので本質的では無いということで無視した。フェルミオン項についても [6] にて全て議論されている。この結果を見ると、T-双対性変換を実行した  $\tilde{r}^4$  方向に関して計量が逆数になっている点を読み取れる。これは H-モノポールの  $\mathbb{R}^3 \times S^1$  のコンパクト化半径が T-双対性変換によって逆数となった KK5-ブレーン  $\mathbb{R}^3 \times \tilde{S}^1$  を再現している。

最後にここで重要なポイントについて顕に言及する。今 GLSM の文脈で UV 理論から低エネルギー有効理論として、KK5-ブレーンの背景時空を標的空間とした超対称 NLSM すなわち世界面シグマ模型を得ることが出来た。これは弦理論の低エネルギー極限すなわち粒子描像である超重力理論におけるブレーン解を、弦理論の立場から再定式化している事を意味する。

## 第6章 超対称局所化

この章では本研究において重要な役割を果たす超対称局所化について解説する。

超対称局所化 (Supersymmetric Localization) とは、理論が持つ超対称性  $\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = \gamma_{\alpha\beta}^m P_m$  の性質を用いた鞍点法の事であり、経路積分やある種の相関関数を非摂動的に実行する事で具体的に評価する事が可能となる。一般に経路積分や相関関数を解析的に計算する事は非常に困難である。故に通常は摂動展開が可能な結合定数の領域において古典的な配位からの量子的揺らぎを評価するのである。しかし理論に超対称性が存在する場合には、超対称性及び鞍点法の恩恵を最大限に享受する事ができる。これが超対称局所化である。超対称局所化においては、経路積分に寄与する配位は鞍点上の配位のみならず“局所化”されるのである。また揺らぎの部分に関しても 1-ループ完全となる。これが非常に強力なポイントであり、一般には無限次元の積分を取り扱う経路積分が有限次元の積分や和まで落ちる事になり、超対称局所化が非摂動的な解析たる所以である。超対称局所化は、鞍点の選び方によって分配関数は Higgs ブランチ上の局所化  $Z_{\text{Higgs}}$  と Coulomb ブランチ上の局所化  $Z_{\text{Coulomb}}$  の表式を得る。これらの差異は単に鞍点の選び方によるものなので見かけ上の表式は異なるが結果には依存せず等価  $Z_{\text{Higgs}} = Z_{\text{Coulomb}}$  である。

この局所化の技術は  $S^4$  上の  $\mathcal{N} = 2$  超対称ゲージ理論における分配関数や Wilson ループに対して初めて応用された [26]。これをきっかけに様々な次元や多様体、理論に対して応用される様になる。3次元における分配関数や Wilson ループに対して調べられている [34, 54]。また指数の計算においても議論されている [32]。2次元では [33, 53] で  $\mathcal{N} = (2, 2)$  on  $S^2$  上の分配関数が計算され、 $\mathcal{N} = (2, 2)$  の境界付きの多様体についても計算されている [55–57]。本研究では2次元の球面分配関数を取り扱っており、[53] の取り扱いに従った。 $\mathcal{N} = (2, 2)$  楕円種数すなわち  $T^2$  上の分配関数は [58, 59] で計算された。また GLSM の文脈においてはシガー構造を標的空間とした  $\mathcal{N} = (2, 2)$  楕円種数 [60] や Taub-NUT 空間を標的空間とした  $\mathcal{N} = (4, 4)$  楕円種数 [48] も議論されている。これらは GLSM の文脈で、Taub-NUT 空間を理解する為に有用である。

この章ではまず前半部分で、超対称局所化について概観する事を目的として解説する。したがって前半部分ではあまり技術的な詳細には立ち入らずに全体の流れや思想的な部分に着目して解説する。その後超対称性の取り扱いについて触れる。これは超対称局所化を実行する為には赤外発散を取り除く為に、予め理論に典型的なスケールを導入する必要がある。こ

の為に理論をコンパクトな多様体上に定義する必要がある。この議論を解説する為に、平坦な空間上で定義された超対称性を持った理論を考える事から始める。この出発点から、コンパクトな多様体上に超対称不変な理論を定義する事を考える。素朴に一般のコンパクト多様体上に理論を乗せようとする事と超対称性が破れてしまうので、曲がった多様体上における超対称性の取り扱いには注意を払う必要がある。一般にコンパクト多様体上に理論を定義する為の手法として2つに大別される。1つは超重力理論を用いた手法である [28–31]。この手法は、非常に一般的で系統的な議論が可能であるが、超重力理論を用いる等技術的な部分がある。もう1つは逐次的な Weyl 射影の手法である [32–34]。こちらは共形平坦の様なある程度限られた多様体に対して、共形 Killing スピノル方程式を満たす変換パラメータを用いた超対称変換を実行する事によって超対称不変なラグランジアンを具体的に構成する事が出来る。ここでは後者に特に注目し解説する。

これらの議論によって球面上に超対称不変な理論を定義する事が可能となるので、本研究において実行した KK5-ブレーンの背景時空を標的空間とする GLSM の球面分配関数の計算についてはこの章の後半部分 — 6.4 章後半から — で触れる。

## 6.1 超対称局所化

ここではまず超対称局所化の思想を概観する事を目的とする。超対称局所化全体の大きな流れを議論する事に重きを置き、技術的な詳細には立ち入らない事にする。

### 超対称局所化の思想

超対称性  $Q$  が理論の対称性で尚且つ量子論レベルでも保たれていれば、 $Q$ -不変な物理量は  $Q$ -完全項による理論の変形には依存しない。したがってこの時、パラメータ  $t$  を導入し理論を  $S_0 \rightarrow S_0 + tS_{\text{def}}$  と変形する。変形された理論の経路積分は  $t$  を感知しないので、 $t \rightarrow \infty$  とする事で経路積分は  $S_{\text{def}} = 0$  を満たす場の配位のみで“局所化”する。

以下ではまず  $Q$ -不変な物理量  $\mathcal{O}$  は変形のパラメータ  $t$  に依存しないことを示す。まず分配関数は以下で与えられる:

$$Z_0 = \int \mathcal{D}\Phi e^{-S[\Phi]} . \quad (6.1)$$

ここで  $\Phi$  は理論に含まれる全ての場を示している。一般にあらゆる場を意味している。この分配関数を  $Q$ -完全項を付け加える事によって変形する事を考える。この時フェルミオンの対称性である超対称性  $Q$  は理論の対称性である事から  $QS[\Phi] = 0$  である事が直ちに言える。また  $Q^2V = 0$  且つ  $QV$  のボソン部分に関して半正定値である、理論に含まれるフェル

ミオン及び  $Q$  から構成される  $V$  を用いて上記の分配関数を変形する:

$$Z[t] = \int \mathcal{D}\Phi e^{-S[\Phi]-t(QV)[\Phi]}. \quad (6.2)$$

ここで任意のパラメーター  $t$  を導入した。分配関数は実は今導入したパラメーター  $t$  に依存しない事が分かる。これを見る為に変形された分配関数  $Z[t]$  を  $t$  で微分すると

$$\frac{d}{dt}Z[t] = \int \mathcal{D}\Phi (QV) e^{-S-tQV} = \int \mathcal{D}\Phi Q (V e^{-S-tQV}) = 0, \quad (6.3)$$

となる。ここで  $QS = 0, Q^2V = 0$  及び超対称性が量子論的対称性 (anomaly free)  $Q(\mathcal{D}\Phi) = 0$  である事を用いている。最後の等号に関しては、経路積分の意味で“変数変換”の差になっている事を意味している。このアノマリーフリー条件  $Q(\mathcal{D}\Phi) = 0$  について補足する。理論を変形する際に  $Q^2V = 0$  を  $V$  の対して要請したが、より正確にいうと  $Q$  はフェルミオンの対称性なので理論の Lorentz 対称性や R-対称性、ゲージ対称性の様な理論のボソンの対称性  $\delta_{\text{bosnic}}$  を用いて  $Q^2 = \delta_{\text{bosnic}}$  となる。故にこれらボソンの対称性がアノマリーフリーである事と超対称性がアノマリーフリーである事は密接に関係する。この議論を  $Q$ -不変な物理量に関して同様の議論を展開する事が出来る。まず  $Q$ -不変  $Q\mathcal{O} = 0$  な演算子を考え、 $Q$ -完全項によって変形する:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{O} e^{-S[\Phi]-t(QV)[\Phi]}. \quad (6.4)$$

同様にパラメーター  $t$  に関して微分すると以下を得る:

$$\frac{d}{dt}\langle \mathcal{O} \rangle = \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{O} QV e^{-S-tQV} = \int \mathcal{D}\Phi Q (\mathcal{O} V e^{-S-tQV}) = 0. \quad (6.5)$$

さらにこれまでの議論から演算子が  $Q$ -完全  $\mathcal{O}' = Q\mathcal{O}$  の物はゼロになる事が分かる:

$$\langle Q\mathcal{O} \rangle = \int \mathcal{D}\Phi (Q\mathcal{O}) e^{-S[\Phi]} = 0. \quad (6.6)$$

したがって、アノマリーフリーな超対称性に関して  $Q$ -不変な物理量は  $Q$ -完全項による理論の変形には依存しない、すなわち  $t$  を感知しない事が示された。これによって次の事が言える:

$$Z_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} Z[t] =: Z_\infty. \quad (6.7)$$

これは  $Z_\infty$  を評価する事は元々の理論を評価する事と等価である事を意味する。一般に元々の  $Z_0$  を評価するのは非常に困難であり、通常は摂動展開によって議論される訳だが、理論の対称性として超対称性が保たれていれば  $Z_\infty$  を評価すれば良いのである。上記の  $Q$ -完全項によって変形された表式から  $t \rightarrow \infty$  において経路積分へ寄与する場の配位は  $QV = 0$  に“局所化”する事が分かる。これによって経路積分が鞍点法によって評価される。

次に上記の変形された理論の経路積分の鞍点法を議論する。今議論した様に鞍点は以下で定義される:

$$QV[\Phi] = 0. \quad (6.8)$$

これを満たす場の配位を  $\Phi_0$  とすると、理論に存在する全ての場を鞍点の周りで次の様に展開する:

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{1}{\sqrt{t}} \hat{\Phi}. \quad (6.9)$$

ここで  $\hat{\Phi}$  は鞍点周りの揺らぎを表しており、リスケール  $\frac{1}{\sqrt{t}}$  は天下りの的であるが Gauss 積分に帰着する事を見越している。この様に鞍点周りで展開する事によって分配関数は以下の様になる:

$$Z[t] = \int \mathcal{D}\Phi e^{-S[\Phi]-tQV[\Phi]} \stackrel{t \rightarrow \infty}{\simeq} \int \mathcal{D}\Phi_0 e^{-S[\Phi_0]} Z_{1\text{-loop}}[\Phi_0]. \quad (6.10)$$

ここで  $Z_{1\text{-loop}}$  は  $QV[\Phi] = 0$  を満たす鞍点の周りでの場の展開  $\Phi = \Phi_0 + \frac{1}{\sqrt{t}} \hat{\Phi}$  に関して2次の部分を Gauss 積分した物を意味する。2次以上に関しては  $t \rightarrow \infty$  によって寄与が全て落ちる。つまり 1-ループ完全になる事を意味する。これが非常に強力なポイントであり、一般には無限次元の積分を取り扱う経路積分が有限の積分や和まで落ちる事となり、局所化が非摂動的な解析たる所以である。形式的な議論ではあるがこれが局所化の手続きの全貌である。すなわちラグランジアンを与えた際に上記の形式まで解析的に実行する事ができ、あとは 1-ループ行列式部分さえ評価する事が出来れば良い事になる。補足すると、最終表式におけるゼロモードに関する積分が残っているが、鞍点が離散的である場合は全ての鞍点に関する和まで落ちる。

### ・ 1-ループ行列式

最後に上記の最終表式に現れている 1-ループ行列式部分である  $Z_{1\text{-loop}}$  について簡単に解説する。基本的に局所化において、理論に含まれる全ての超対称多重項に対して各多重項の 1-ループ行列式を評価する事になる:

$$Z_{1\text{-loop}}^{\text{total}} = Z_{1\text{-loop}}(V) Z_{1\text{-loop}}(\Phi) \cdots \quad (6.11)$$

各多重項  $\{V, \Phi, \dots\}$  には当然ボソンとフェルミオンが属しているので、必ずペアとして含まれている。この時フェルミオンに作用する微分作用素の様な演算子を全てまとめて  $\mathcal{O}_{\text{fermion}}$  と表し、同様にボソンに作用する微分作用素の様な演算子を全てまとめて  $\mathcal{O}_{\text{boson}}$  と表す事にする。この時、各多重項の  $Z_{1\text{-loop}}$  は次の様な構造を持つ事がわかる:

$$Z_{1\text{-loop}} = \frac{\det(\mathcal{O}_{\text{fermion}})}{\det(\mathcal{O}_{\text{boson}})}. \quad (6.12)$$

ここでボソン部分とフェルミオン部分の因子の入り方が逆である要因は、それぞれの統計性の違いによる Gauss 積分の結果である。さらにこの行列式を議論する際に評価すべき量は  $|\nabla_m \phi|^2$ 、 $i\bar{\psi}\gamma^m \nabla_m \psi$  の微分演算子である。1-ループ行列式は Gauss 積分に帰着され係数等は無視して次の様に具体的に実行可能である:

$$\int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\bar{\phi} e^{-\int d^n x \sqrt{g} |\nabla_m \phi|^2} \simeq \frac{1}{\det(-\nabla^2)}, \quad (6.13)$$

$$\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-\int d^n x \sqrt{g} i\bar{\psi}\gamma^m \nabla_m \psi} \simeq \det(-i\gamma^m \nabla_m). \quad (6.14)$$

したがって、1-ループ行列式の評価はあとは各演算子の固有値問題へと帰着された事を意味する。これらの固有値を評価すれば上記の1-ループ行列式を計算する為の準備は整うので具体的に評価出来る事になる。

ここでは具体的に議論を行う為に2次元を考え、理論が定義されている多様体としては共形平坦な多様体である  $S^2$  を考える事にする。またここで取り扱う演算子としてはスカラー場に対する Klein-Gordon 演算子  $|\nabla_m \phi|^2$  に注目する。 $S^2$  上の  $\phi$  は球面調和関数  $Y_{jm}(\theta, \varphi)$  を用いてモード展開する事が可能であるので、具体的に Klein-Gordon 演算子の固有値を評価する事が出来る:

$$-\nabla^2 Y_{jm}(\theta, \varphi) = \frac{j(j+1)}{r^2} Y_{jm}(\theta, \varphi). \quad (6.15)$$

ここでは議論の本質を捉えるために最も簡略化された状況下の演算子としてゲージ対称性の下で中性で Lorentz の下でスカラーとして振る舞う  $\phi$  に対して固有値を評価した。しかし固有値の評価の仕方に関して本質的にはこれで全てである。あとは各多重項毎のゲージ対称性の下での表現ないし電荷、や Lorentz 対称性の下での表現を気にして扱いを個別に変えるだけである。詳細は付録 C を参照されたい。

## 6.2 曲がった多様体上の超対称性

超対称局所化を用いて指数や分配関数等々を評価する際には、赤外発散を取り除く為に理論に典型的なスケールを導入する事が必要になる。これは理論をコンパクトな多様体上に定義する事によって実現される。したがって、この章からは平坦空間上で構築した超対称不変な理論をコンパクト多様体  $\mathcal{M}$  上に定義する事を目標として解説する。

Minkowski 空間  $\mathbb{R}^{1,d-1}$  から Wick 回転によって平坦な Euclid 空間  $\mathbb{R}^d$  上でラグランジアンが得られたとする。ここでは超対称局所化を実行する事を目的として、理論をコンパクト多様体  $\mathcal{M}$  上で定義したいので、 $\mathcal{M}$  上で超対称性を保つ事を要請する。一般に、ある多様

体が超対称性を保つかどうかという問いは非自明な問題である事に注意しなければならない。ここでは超対称性を保つ様な多様体のみを考える。

$M$  上で超対称性を考えるために、非常に素朴な理論の変更を考えてみる事にする。つまり  $\mathbb{R}^d$  における計量や微分演算子を  $M$  上の物に変える:

$$\eta_{mn} \longrightarrow g_{mn}, \quad \partial_m \longrightarrow \nabla_m, \quad \partial_m \epsilon = 0 \longrightarrow \nabla_m \epsilon = 0. \quad (6.16)$$

ここで最後の式に関して言及すると、平坦空間上の定数スピノル  $\partial_m \epsilon = 0$  を  $M$  上における共変的定数スピノル  $\nabla_m \epsilon = 0$  に変更した事を意味する。しかし、 $\nabla_m \epsilon = 0$  は  $M$  の計量やトポロジーに非常に強い制限を課してしまっている。 $\nabla_m \epsilon = 0$  を仮定すると  $[\nabla_m, \nabla_n] \epsilon = R_{mn}{}^{ab} \gamma_{ab} \epsilon = 0$  となるので、これらを満たす可能な多様体は Ricci 平坦でなければならない事になる。これは2次元であれば  $T^2$ 、3次元は  $T^3$ 、4次元でも  $T^4$  もしくは K3 に絞られてしまうので条件として厳し過ぎる。したがってコンパクト多様体上の超対称性を議論する際には超対称性変換のパラメーターである  $\epsilon$  を注意深く扱う必要がある。

一般的に、平坦空間上の超対称性を曲がった多様体上に定義する際の手続きとしては大きく次の2つのアプローチが存在する:

### 1. 超重力理論的手法

この超重力理論アプローチは Seiberg et.al. [28, 29] によって確立された定式化である。詳細には踏み込まずに概要を説明する。まず平坦空間  $\mathbb{R}^d$  上で超対称不変な理論  $\mathcal{L}_0$  を考える。この  $\mathcal{L}_0$  は理論が持つ対称性からエネルギー運動量テンソル  $T^{mn}$ 、超対称性カレント  $S^{m\alpha}$ 、R-対称性カレント  $J^m$  等を含む。次に  $\mathcal{L}_0$  の対称性をゲージ化する事を考える。この手続きは具体的には背景場として超重力多重項を理論に結合させる事を意味する:

$$\mathcal{L}_0 \implies \mathcal{L}_0 + T^{mn} g_{mn} + S^{m\alpha} \Psi_{m\alpha} + J^m A_m + \dots \quad (6.17)$$

この時重力多重項は理論が持つ対称性に依じて変わるが、ここではグラビトン  $g$ 、グラビティーノ  $\Psi$ 、R-対称性ベクトル  $A$  をあらわにした。この変形した理論にさらに背景場である重力多重項  $\{g, \Psi, A, \dots\}$  に対する運動項を追加する事で出発点の理論  $\mathcal{L}_0$  は超重力理論となる。次に Killing スピノル方程式を考える。アイソメトリーに対する Killing ベクトル方程式の導出を思い出すと、変換に対して  $g_{mn}$  が不変である事を要請した事から得られた。これと同じ様にグラビティーノ  $\Psi_m$  に対する局所超対称性変換をゼロとセットする、すなわち局所超対称性変換の下で不変である事を要請する事で一般化された Killing スピノル方程式が得られる:

$$\delta \Psi_m = 0 \implies \nabla_m \epsilon + (\text{auxiliary field}) = 0. \quad (6.18)$$



最後に *rigid limit* — Newton 定数をゼロにする — をとる。ただし、この時に背景場は一般化された Killing スピノル方程式を保つ様に固定されており、この超対称性条件を保つように極限操作を実行する。この rigid 極限によって理論から超重力多重項がフリーズアウトし、曲がった多様体  $M$  上の超対称性を得ることができる。

この手法は非常に一般的な取り扱いを実現しており、尚且つ機械的な手順を踏む事で曲がった多様体上の超対称不変な理論を構成する事が出来るので強力である。一方で、この手続きのポイントは超重力理論を構成する点である。故に超重力理論を介する事による技術的な困難を伴う。

## 2. 逐次的構成法

この手法は上記の超重力理論の手続きに比べると共形平坦多様体というある程度限られたクラスの多様体に対して適用する事が出来る [32–34]。計量に注目する事で平坦空間  $\mathbb{R}^d$  は Weyl 変換によって共形平坦多様体  $\mathcal{M}_d$  に移る事ができる事が直ちにわかる:

$$ds_{\mathbb{R}^d}^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{d-1} \xrightarrow{\text{Weyl map}} r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\Omega_{d-1}) = ds_{S^d}^2. \quad (6.19)$$

したがってこの関係を用いる事によって、平坦空間上の超対称性から Weyl 変換によって共形平坦多様体上の超対称性を構築し、この共形平坦多様体上の超対称性の下で不変な理論を構成する事が可能となる。この時に超対称性の変換パラメーターが Weyl 変換の下で共変的に振る舞う必要がある。また共形平坦多様体  $\mathcal{M}$  上の超対称性の下で不変な理論を構築する為には Ricci 曲率ないし  $S^d$  の半径の様な典型的なスケールを用いてオーダー毎に出発点の平坦空間上の理論  $\mathcal{L}_0$  に対する  $\mathcal{O}(1/r), \dots, \mathcal{O}(1/r^d)$  という補正項を決めていく。以下の章ではこの逐次的な手続きについて説明する。この手続きに関して注意がいくつかある。共形平坦多様体より一般の多様体に対してこの手続きを適用した際には超対称性を保てない多様体も存在するので、有限の手続きで実行可能か否か等の上手くいく保証がない。また、ラグランジアンや超対称性変換等を共形 Killing スピノル方程式の下で変形しなければならないので、2次元程度では  $\mathcal{O}(1/r^2)$  で済むので現実的だが、高次元になればなるほど膨大な計算コストがかかる。本研究では  $S^2$  を取り扱っている所以で以下では2次元に注目する。

## 6.3 共形 Killing スピノル

ここでは共形平坦多様体上に超対称不変な理論を定義することを考える。この目標のためにまず [32, 61] に基づいて、Weyl 変換の下で共変的な超対称性変換のパラメーターである共形 Killing スピノルに関して解説するところから始める。



平坦空間における超対称性変換のパラメーター  $\epsilon$  は定数スピノルである。これはすなわち以下の様に記述されることを意味している:

$$\text{定数スピノル} : \partial_m \epsilon_\alpha = 0. \quad (6.20)$$

この式自体は非常に自明な関係であるが、この式の捉え方を変えるという点が重要なのである。上記の定数スピノルの式を、平坦空間上の超対称性もしくはその変換パラメーターに対する条件式と捉える事も出来るということである。つまりベクトル添字を1つとスピノル添字を1つ持つ量がゼロでありなさいと捉え直すという事である。上記の定数スピノルの式は既約分解するとスピン  $\frac{1}{2}$  成分とスピン  $\frac{3}{2}$  成分が存在する事がすぐわかる。すなわち上記の定数スピノルの式はそれらの成分に対してゼロを課している事を意味する:

$$\partial_m \epsilon_\alpha = 0 \iff [\partial_m \epsilon_\alpha]_{\frac{1}{2}} = 0, [\partial_m \epsilon_\alpha]_{\frac{3}{2}} = 0. \quad (6.21)$$

この様に平坦空間上の上記の定数スピノルの式は条件として非常に強い制限を課している。実際この制限は Weyl 変換の下においてスピン  $\frac{1}{2}$  成分が不変では無い。したがって平坦空間上の定数スピノルの式を Weyl 変換の下で共変的に振る舞う部分に注目して条件緩める事を考える。

平坦空間上で  $[\partial_m \epsilon_\alpha]_{\frac{1}{2}} = [\partial_m \epsilon_\alpha]_{\frac{3}{2}} = 0$  を課しているが、スピン  $\frac{1}{2}$  成分は Weyl 変換の下で共変的では無いので共形平坦多様体上では  $[\partial_m \epsilon_\alpha]_{\frac{1}{2}} \neq 0$  である事を意味する。一方でスピン  $\frac{3}{2}$  成分は共変的に振る舞い共形平坦多様体上においても  $[\partial_m \epsilon_\alpha]_{\frac{3}{2}} = 0$  を保っている事を意味する。すなわちスピン  $\frac{3}{2}$  成分さえゼロであれば Weyl 変換の下で共変的な超対称性を構成する事が出来るわけである。したがって定数スピノルの条件を緩め、共形平坦多様体上の超対称性に対して次の制限を課す:

$$[\partial_m \epsilon_\alpha]_{\frac{3}{2}} = 0. \quad (6.22)$$

この制限は構成から明らかな様に Weyl 変換の下で共変的である。またこの制限はスピン  $\frac{1}{2}$  成分はノンゼロである事を意味する。そこでスピン  $\frac{1}{2}$  成分を以下の様に選ぶとすると以下の様に記述される\*:

$$\nabla_\mu \epsilon = \frac{i}{2r} \gamma_\mu \epsilon. \quad (6.23)$$

これが共形 Killing スピノル方程式 (*conformal Killing spinor equation*) である。以降では超対称性変換のパラメーターはこの共形 Killing スピノル方程式を満たす共形 Killing スピノルとする。

\*この共形 Killing スピノルは  $SU(2|1)_A$  超対称性を実現する。この超対称代数は超共形代数の部分代数として実現される [33, 53]。

## 6.4 共形平坦多様体上の超対称理論

一般に共形変換の下で同一視される共形平坦多様体上の超対称性変換は、 $\mathbb{R}^2$  の平坦空間上の超対称代数から Weyl 変換に対する共変化によって得ることができる。ここでは Weyl 共変化の一般的な処方箋を解説する [15, 32–34, 61]。この手続きは以下で見ると超対称性変換を具体的に補正する事によって実行される。つまり考えている次元によって Clifford 代数等の状況が変わってしまうので各状況ごとに議論が異なってくる。この事からここでは具体的な本論に直接関係する議論を進める為に 2 次元の状況におけるカイラル多重項を考える。カイラル多重項かベクトル多重項かの様な違いは本質的な問題では無く、超対称性変換に含まれる微分項に注目する点が本質的であり、スカラー場とスピノル場の微分項しか現れない。したがってこれらの状況における超対称性変換を以下に与える:

$$\begin{aligned}\delta\phi &= \epsilon\psi, \\ \delta\psi &= i\gamma^m\epsilon\nabla_m\phi + \epsilon F, \\ \delta F &= i\epsilon\gamma^m\nabla_m\psi.\end{aligned}\tag{6.24}$$

この超対称性変換において、微分を含まない項は Weyl 変換のパラメーターに微分が当たらないので、そのまま Weyl 変換の下で共変的である。したがって、超対称性変換のパラメーターを平坦空間上の定数スピノルから共形 Killing スピノルに置き換えるだけで良い。一方、微分を含む項に関しては Weyl 共変化を実行する必要がある。まず  $\gamma^m\epsilon\nabla_m\phi$  に注目する。 $\phi$  の Weyl 変換を  $\phi \rightarrow e^{\Delta_\phi}\phi$ 、パラメーター  $\epsilon$  は  $\epsilon \rightarrow e^{\frac{1}{2}\alpha}\epsilon$  とし、この項の Weyl trans. は以下の様になる:

$$\gamma^m\epsilon\nabla_m\phi \rightarrow e^{(\Delta_\phi+\frac{1}{2})\alpha} \left[ \gamma^m\epsilon\nabla_m\phi + \Delta_\phi\gamma^m\epsilon(\nabla_m\alpha)\phi \right].\tag{6.25}$$

この超対称性変換に含まれる微分項  $\gamma^m\epsilon\nabla_m\phi$  を共変的にする為に、変換パラメーターの微分項である  $\gamma^m\nabla_m\epsilon$  が特にスピン接続を考慮して Weyl 変換の下で

$$\gamma^m\nabla_m\epsilon \rightarrow e^{\frac{1}{2}\alpha} \left[ \gamma^m\nabla_m\epsilon - \frac{d}{2}\gamma^m\epsilon(\nabla_m\alpha) \right],\tag{6.26}$$

と変換される事を用いる。このパラメーターの微分項を組み合わせる事によって以下の様に共変的にする事が可能となる:

$$\begin{aligned}\gamma^m\epsilon\nabla_m\phi + \frac{2\Delta_\phi}{d}\gamma^m\nabla_m\epsilon\phi &\rightarrow e^{(\Delta_\phi+\frac{1}{2})\alpha} \left[ \left( \gamma^m\epsilon\nabla_m\phi + \Delta_\phi\gamma^m\epsilon(\nabla_m\alpha)\phi \right) + \left( \gamma^m\nabla_m\epsilon - \Delta_\phi\gamma^m\epsilon(\nabla_m\alpha)\phi \right) \right] \\ &= e^{(\Delta_\phi+\frac{1}{2})\alpha} \left[ \gamma^m\epsilon\nabla_m\phi + \gamma^m\nabla_m\epsilon\phi \right].\end{aligned}\tag{6.27}$$

次にフェルミオンの微分項に注目する。上記のスカラーの微分項と同様に補助場の超対称性変換に含まれるフェルミオンの微分項  $\epsilon\gamma^m\nabla_m\psi$  は以下の様に変換される:

$$\epsilon\gamma^m\nabla_m\psi = e^{(\Delta_\psi+\frac{1}{2})\alpha} \left[ (\epsilon\gamma^m\nabla_m\psi) + \left( \Delta_\psi - \frac{d-1}{2} \right) (\nabla_m\alpha)(\epsilon\gamma^m\psi) \right].\tag{6.28}$$

ここで  $\Delta_\psi$  は Weyl ウェイトである。この変換に対しても変換パラメーターの微分項  $\gamma^m \partial_m \epsilon$  を組み合わせることで以下の様になる:

$$\epsilon \gamma^m \nabla_m \psi + \frac{2}{d} \left( \Delta_\psi - \frac{d-1}{2} \right) \nabla_m \epsilon \gamma^m \psi = e^{(\Delta_\psi + \frac{1}{2})\alpha} \left[ (\epsilon \gamma^m \nabla_m \psi) + \frac{2}{d} \left( \Delta_\psi - \frac{d-1}{2} \right) \nabla_m \epsilon \gamma^m \psi \right]. \quad (6.29)$$

以上のことから、共形平坦多様体上の超対称性変換は平坦空間上の超対称性変換に含まれる微分項を Weyl 共変にする事によって構成することができる:

$$\gamma^m \epsilon \nabla_m \phi \implies \gamma^m \epsilon \nabla_m \phi + \frac{2\Delta_\phi}{d} \gamma^m \nabla_m \epsilon \phi \quad (6.30)$$

$$\epsilon \gamma^m \nabla_m \psi \implies \epsilon \gamma^m \nabla_m \psi + \frac{2}{d} \left( \Delta_\psi - \frac{d-1}{2} \right) \nabla_m \epsilon \gamma^m \psi. \quad (6.31)$$

実際に使用するデータをまとめる [33, 53]:

multiplet	V					$\Phi$					
	$A_m$	$\hat{\sigma}$	$\lambda$	$\bar{\lambda}$	$D$	$\phi$	$\bar{\phi}$	$\psi$	$\bar{\psi}$	$F$	$\bar{F}$
$U(1)_V$	0	0	1	-1	0	$q$	$-q$	$q-1$	$-(q-1)$	$q-2$	$-(q-2)$
$U(1)_A$	0	-1	1	1	0	0	0	1	-1	0	0
$\Delta$	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{q}{2}$	$\frac{q}{2}$	$\frac{q+1}{2}$	$\frac{q+1}{2}$	$\frac{q+2}{2}$	$\frac{q+2}{2}$

twisted chiral に関するデータは [25] を参照。

これまでの議論によって一般の共形平坦多様体上の超対称性変換のパラメーターに関する取り扱いができる様になった。つまり平坦空間上における超対称代数を Weyl 変換の下で共变的に振る舞う様にした。最後に、当初の目的であった一般の共形平坦多様体上の超対称不変な理論の構成を解説する [32-34]。

まず平坦空間上の超対称性変換の定数パラメーターを用いて構成された超対称不変な理論  $\mathcal{L}_\mathbb{R}$  が与えられているとする。この平坦空間上の超対称性変換の定数パラメーターを用いた超対称性変換を  $\delta_\mathbb{R}$  と記述するとこの理論は定義より以下を満たす:

$$\mathcal{L}_\mathbb{R} \implies \delta_\mathbb{R} \mathcal{L}_\mathbb{R} = 0. \quad (6.32)$$

次に上記の手続きによって平坦空間上の超対称性変換に対して Weyl 共変化を実行し、その変換パラメーターすなわち共形 Killing スピノルを用いた超対称性変換を  $\delta_S$  と記述する。この  $\delta_S$  を用いて、平坦空間上の  $\mathcal{L}_\mathbb{R}$  に超対称性変換を実行する事を考える。これは当然  $\delta_S$  の下で不変にはならない:

$$\mathcal{L}_\mathbb{R} \implies \delta_S \mathcal{L}_\mathbb{R} \neq 0. \quad (6.33)$$

これは意味を成さない訳では無い。変換後の右辺の  $\delta_S \mathcal{L}_{\mathbb{R}} \neq 0$  の部分に注目する。極めて煩雑な計算を経て、この不変にならない部分を共形 Killing 方程式を用いて変形する事で以下の形に帰着させる事が出来る:

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}} \implies \mathcal{L}_{\mathbb{R}} + \frac{1}{r} \delta_S(\dots) + \frac{1}{r^2} \delta_S(\dots) + \dots \quad (6.34)$$

この式変形において重要なポイントは、不変にならない部分は共形平坦多様体上の超対称性変換によって括り出すことが出来る形に帰着するという点である。ここで右辺の  $\mathcal{O}(1/r)$  の次数は考えている多様体の次元に依存するので、ここでは一般的に扱っている。具体的に2次元であれば  $\mathcal{O}(1/r)$ 、 $\mathcal{O}(1/r^2)$  までで終わる。

したがってこの右辺の形から共形平坦多様体上の超対称不変な理論  $\mathcal{L}_S$  を次の様に定義する:

$$\mathcal{L}_S := \mathcal{L}_{\mathbb{R}} - \frac{1}{r}(\dots) - \frac{1}{r^2}(\dots) + \dots \quad (6.35)$$

これらの構成法から明らかな様に  $\mathcal{L}_S$  は共形平坦多様体上の超対称性変換の下で不変なラグランジアンである:

$$\mathcal{L}_S \implies \delta_S \mathcal{L}_S = 0. \quad (6.36)$$

ここまでは一般論を展開してきたので、具体的に本研究にて使用する GLSM for KK5-brane に対して同じ手続きを行う。本研究では次の共形 Killing スピノル方程式を用いている [53, 55, 62, 63]:

$$\nabla_m \epsilon = \frac{i}{2r} \gamma_m \epsilon, \quad \nabla_m \bar{\epsilon} = \frac{i}{2r} \gamma_m \bar{\epsilon}, \quad (6.37)$$

今議論してきた様に、この方程式は平坦空間上の超対称性における定数スピノルから条件を緩める事によって得られる。これまで議論してきた様に Weyl 共変化を施し、条件方程式を満たす共形 Killing スピノルを用いて共形平坦多様体上の超対称性変換を構成することができる [15, 32–34]。この様にして得られる超対称性変換は次で与えられる。ベクトル多重項に

対しては以下である:

$$\begin{aligned}
 \delta\sigma &= \frac{1}{2}(\bar{\epsilon}\lambda - \bar{\lambda}\epsilon), \\
 \delta\eta &= -\frac{i}{2}(\bar{\epsilon}\gamma^3\lambda - \bar{\lambda}\gamma^3\epsilon), \\
 \delta A_m &= -\frac{i}{2}(\bar{\epsilon}\gamma_m\lambda - \bar{\lambda}\gamma_m\epsilon), \\
 \delta\lambda &= i\gamma_3\epsilon\left(F_{\hat{1}\hat{2}} - \frac{\eta}{r}\right) - \epsilon\left(D + \frac{\sigma}{r}\right) + i\gamma^m\epsilon\nabla_m\sigma - \gamma_3\gamma^m\epsilon\nabla_m\eta, \\
 \delta\bar{\lambda} &= i\gamma_3\bar{\epsilon}\left(F_{\hat{1}\hat{2}} - \frac{\eta}{r}\right) + \bar{\epsilon}\left(D + \frac{\sigma}{r}\right) - i\gamma^m\bar{\epsilon}\nabla_m\sigma - \gamma_3\gamma^m\bar{\epsilon}\nabla_m\eta, \\
 \delta D &= -\frac{i}{2}(\nabla_m\bar{\lambda}\gamma^m\epsilon + \bar{\epsilon}\gamma^m\nabla_m\lambda) - \frac{1}{2r}(\bar{\epsilon}\lambda - \bar{\lambda}\epsilon),
 \end{aligned} \tag{6.38}$$

同様にしてゲージ群の下で電荷を持ったカイラル多重項のに対して書き下すが、ここでは一般に  $U(1)$  R-対称性の下での電荷を  $q$  として与える:

$$\begin{aligned}
 \delta\phi &= \bar{\epsilon}\psi, \\
 \delta\bar{\phi} &= \bar{\psi}\epsilon, \\
 \delta\psi &= \left(i\gamma^m D_m\phi + i\sigma\phi + \gamma_3\eta\phi - \frac{q}{2r}\phi\right)\epsilon + \bar{\epsilon}F, \\
 \delta\bar{\psi} &= \left(i\gamma^m D_m\bar{\phi} + i\bar{\phi}\sigma - \gamma_3\bar{\phi}\eta - \frac{q}{2r}\bar{\phi}\right)\bar{\epsilon} + \bar{F}\epsilon, \\
 \delta F &= \epsilon\left(i\gamma^m D_m\psi - i\sigma\psi + \gamma_3\eta\psi + \frac{q}{2r}\psi - i\lambda\phi\right), \\
 \delta\bar{F} &= \bar{\epsilon}\left(i\gamma^m D_m\bar{\psi} - i\bar{\psi}\sigma - \gamma_3\bar{\psi}\eta + \frac{q}{2r}\bar{\psi} + i\bar{\phi}\lambda\right).
 \end{aligned} \tag{6.39}$$

ここで  $D_m$  は全ての接続すなわちスピン接続およびゲージ接続を含んだ微分である。具体的に GLSM for KK5-ブレーンのカイラル多重項  $Q, \tilde{Q}, \Gamma$  のスカラー場に対して共変微分を書き下しておく:

$$D_m q = \nabla_m q + iA_m q, \quad D_m \tilde{q} = \nabla_m \tilde{q} - iA_m \tilde{q}, \quad D_m \gamma^4 = \nabla_m \gamma^4 + \sqrt{2}A_m. \tag{6.40}$$

上記の共形 Killing スピノルを用いて共形平坦多様体上のラグランジアンを構成すると以

下の様になる†:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\Sigma &= \frac{1}{2} \left( F_{\hat{1}\hat{2}} - \frac{\eta}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( D + \frac{\sigma}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla\sigma)^2 + \frac{1}{2} (\nabla\eta)^2 + \frac{i}{2} \bar{\lambda} \gamma^m \nabla_m \lambda, \\
\mathcal{L}_\Phi &= |\nabla\phi|^2 + |D_\Phi|^2 - i \bar{\lambda} \gamma^m \nabla_m \tilde{\lambda} - \frac{1}{r} \bar{\lambda} \tilde{\lambda}, \\
\mathcal{L}_{\tilde{Q}} &= |D_m \tilde{q}|^2 + (\sigma^2 + \eta^2) |\tilde{q}|^2 + |\tilde{F}|^2 + i D |\tilde{q}|^2 + i (\tilde{q} \tilde{\psi} \lambda - \bar{\tilde{q}} \tilde{\lambda} \tilde{\psi}) - i \bar{\tilde{\psi}} \gamma^m D_m \tilde{\psi} + i \tilde{\psi} (\sigma + i \gamma^3 \eta) \tilde{\psi}, \\
\mathcal{L}_Q &= |D_m q|^2 + (\sigma^2 + \eta^2) |q|^2 + |F|^2 - i D |q|^2 - i (q \bar{\psi} \lambda - \bar{q} \bar{\lambda} \psi) - i \bar{\psi} \gamma^m D_m \psi - i \bar{\psi} (\sigma + i \gamma^3 \eta) \psi, \\
\mathcal{L}_\Gamma &= \frac{1}{g^2} \left[ \frac{1}{2} (\nabla_m r^3)^2 - i \bar{\chi} \gamma^m \nabla_m \tilde{\chi} \right] + g^2 \left[ \frac{1}{2} (D_m \gamma^4)^2 + |G_\Gamma|^2 \right] \\
&\quad + \frac{g^2}{2} (\sigma^2 + \eta^2) + i \sqrt{2} r^3 D + i [\bar{\chi} \gamma_3 \lambda + \bar{\lambda} \gamma_3 \tilde{\chi}], \\
\mathcal{L}_\Psi &= \frac{1}{2} (\nabla_m r^1)^2 + \frac{1}{2} (\nabla_m r^2)^2 + |G|^2 - i \bar{\chi} \gamma^m \nabla_m \chi, \\
\mathcal{L}_{\tilde{Q}\Phi Q} &= i \sqrt{2} \left[ \phi (q \tilde{F} + \tilde{q} F) + \bar{\phi} (\bar{q} \tilde{F} + \bar{\tilde{q}} F) + q \tilde{q} D_\Phi + \bar{q} \bar{\tilde{q}} \bar{D}_\Phi \right] \\
&\quad - i \sqrt{2} \left[ (\phi \tilde{\psi} \psi + \bar{\phi} \bar{\tilde{\psi}} \bar{\psi}) + (q \tilde{\lambda} \tilde{\psi} + \bar{q} \bar{\tilde{\lambda}} \bar{\psi}) + (\tilde{q} \lambda \psi + \bar{\tilde{q}} \bar{\lambda} \bar{\psi}) \right], \\
\mathcal{L}_{\Psi\Phi} &= i \left[ \sqrt{2} \phi G + \sqrt{2} \bar{\phi} \bar{G} + (r^1 + i r^2) D_\Phi + (r^1 - i r^2) \bar{D}_\Phi \right] - i \sqrt{2} \left[ \chi \tilde{\lambda} + \bar{\chi} \tilde{\lambda} \right], \\
\mathcal{L}_{s\Phi} &= -i \sqrt{2} \left[ s D_\Phi + \bar{s} \bar{D}_\Phi \right], \quad \mathcal{L}_{t\Sigma} = -i \sqrt{2} \left[ t_1 D - t_2 F_{\hat{1}\hat{2}} \right],
\end{aligned} \tag{6.41}$$

最後にこのラグランジアンに関していくつかコメントする。このラグランジアンは  $\mathcal{N} = (2, 2)$  超対称性の下で不変であるが、 $\mathcal{N} = (4, 4)$  超対称性をマニフェストには保てていない事に注意が必要である。この事は具体的に  $(\Sigma, \Phi)$  から構成されるベクトル多重項部分に注目すると  $SU(2)_R$ -対称性をマニフェストに出来ていない点から読み取れる。しかし当然ながら平坦空間極限  $r \rightarrow \infty$  で  $\mathcal{N} = (4, 4)$  対称性は回復する。また、コンパクトな多様体上で超対称性を保っているの、超対称局所化は実行可能である。

## 6.5 Q-完全変形

6.1 章で解説した様に、超対称局所化を実行する為には以下の様に  $QV$ -項を追加する事によって経路積分を変形する必要がある:

$$Z_0 = \int \mathcal{D}\Phi e^{-S[\Phi]} \implies Z[t] = \int \mathcal{D}\Phi e^{-S[\Phi] - t QV[\Phi]}. \tag{6.42}$$

この経路積分の変形に用いた  $QV[\Phi]$  によって、超対称局所化における鞍点が定義され、経路積分に寄与する場の配位が決定されるのである。したがってここでは  $QV$ -項について触れる。

†このラグランジアンのベクトル多重項とカイラル多重項の規格化は [53] を採用している。

まず超対称局所化を実行する超対称電荷を以下の様を選ぶ [53]:

$$\mathcal{Q} := Q + Q^\dagger, \quad Q := \epsilon^\alpha Q_\alpha, \quad Q^\dagger := \epsilon^{\alpha} Q_\alpha^\dagger. \quad (6.43)$$

ここで  $\epsilon^c := C\epsilon^*$ ,  $\epsilon$  は共形 Killing スピノルの解を用いている事に注意すると、演算子  $\mathcal{Q}$  は Grassmann 奇である。この時スピノルは  $\bar{\psi} = C(\psi^\dagger)^T$ ,  $\bar{\phi} = \phi^\dagger$  と書き換えている (付録 D 参照)。またこの時共形 Killing スピノル方程式の解の性質から  $\epsilon^\dagger \epsilon = 1$  として、 $\psi^\dagger$  に関しては  $\psi^\dagger \psi = \psi^\dagger C \psi$ ,  $\psi^\dagger \gamma^m \psi = \psi^\dagger C \gamma^m \psi$  と縮約をとっている。

次に今導入した超対称局所化を実行する超対称電荷  $\mathcal{Q}$  を用いて Q-完全変形項  $\mathcal{Q}V$  を構成する。ベクトル多重項及び一般のカイラル多重項に対しを Q-完全変形項以下で与える [55]:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}V_{\text{vector}} &= \frac{1}{4} \mathcal{Q} \left[ (\overline{\mathcal{Q}\lambda}) \lambda + \lambda^\dagger (\overline{\mathcal{Q}\lambda^\dagger}) \right], \\ \mathcal{Q}V_{\text{chiral}} &= \frac{1}{2} \mathcal{Q} \left[ (\overline{\mathcal{Q}\psi}) \psi + \psi^\dagger (\overline{\mathcal{Q}\psi^\dagger}) \right] + \frac{q-1}{2r} \mathcal{Q} \left[ \phi^\dagger (\overline{\mathcal{Q}\phi^\dagger}) - (\overline{\mathcal{Q}\phi}) \phi \right]. \end{aligned} \quad (6.44)$$

ここで  $(\overline{\dots})$  の演算は  $c$  数に関してはエルミート共役として作用し、場に関しては  $\Phi \rightarrow \Phi^\dagger$ ,  $(\overline{\Phi^\dagger}) = \Phi$  である。

以下で各超対称多重項に関して詳細を議論する。ベクトル多重項  $(\sigma, \eta, \lambda, A, D)$  に対して具体的に  $\mathcal{Q}V$  を計算すると以下が得られる:

$$\mathcal{Q}V_{\text{vector}}^b = \frac{1}{2} (\epsilon^\dagger \epsilon) \left( F_{\hat{1}\hat{2}} - \frac{\eta}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} (\epsilon^\dagger \epsilon) \left( D + \frac{\sigma}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} (\epsilon^\dagger \epsilon) (\nabla_m \sigma)^2 + \frac{1}{2} (\epsilon^\dagger \epsilon) (\nabla_m \eta)^2, \quad (6.45)$$

$$\mathcal{Q}V_{\text{vector}}^f = \frac{i}{4} (\nabla_m \lambda^\dagger \gamma^m \lambda) (\epsilon^\dagger \epsilon) - \frac{i}{4} (\lambda^\dagger \gamma^m \nabla_m \lambda) (\epsilon^\dagger \epsilon), \quad (6.46)$$

ここで  $b, f$  はボソン部分、フェルミオン部分を示すラベルとして記述してる。

次に一般の  $U(1)$  ゲージ対称性の下で電荷を持つカイラル多重項  $(\phi, \psi, F)$ 、但し R-対称性の電荷  $q$  に対しては以下である:

$$\mathcal{Q}V_\psi := \frac{1}{2} \mathcal{Q} \left[ (\overline{\mathcal{Q}\psi}) \psi + \psi^\dagger (\overline{\mathcal{Q}\psi^\dagger}) \right], \quad \mathcal{Q}V_\phi := \mathcal{Q} \left[ \phi^\dagger (\overline{\mathcal{Q}\phi^\dagger}) - (\overline{\mathcal{Q}\phi}) \phi \right]. \quad (6.47)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}V_\psi^b &= (\epsilon^\dagger \epsilon) \left[ |D_m \phi|^2 + \phi^\dagger \sigma^2 \phi + \phi^\dagger \eta^2 \phi + \frac{q^2}{4r^2} \phi^\dagger \phi + |F|^2 \right] \\ &\quad + i \frac{1-q}{r} (\epsilon^\dagger \gamma^m \epsilon) \phi^\dagger D_m \phi + (\epsilon^\dagger \gamma^3 \epsilon) \left[ \frac{2-q}{r} \phi^\dagger \eta \phi - \phi^\dagger F_{12} \phi \right] - i (\epsilon^\dagger \gamma^3 \gamma^m \epsilon) \phi^\dagger D_m \eta \phi, \end{aligned} \quad (6.48)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}V_\psi^f &= (\epsilon^\dagger \epsilon) \left[ \frac{i}{2} D_m \psi^\dagger \gamma^m \psi - \frac{i}{2} \psi^\dagger \gamma^m D_m \psi + i \psi^\dagger \sigma \psi - \psi^\dagger \eta \gamma^3 \psi - \frac{3i}{4} \phi^\dagger \lambda^\dagger \psi + \frac{3i}{4} \psi^\dagger \lambda \phi - \frac{1}{2r} \psi^\dagger \psi \right] \\ &\quad + i (\epsilon^\dagger \gamma^m \epsilon) \left[ \frac{i}{2} \varepsilon_{mn} (D^n \psi^\dagger \gamma^3 \psi + \psi^\dagger \gamma^3 D^n \psi) + \frac{1}{4} \phi^\dagger \lambda^\dagger \gamma_m \psi - \frac{1}{4} \psi^\dagger \gamma_m \lambda \phi - \frac{iq}{2r} \psi^\dagger \gamma_m \psi \right] \\ &\quad + i (\epsilon^\dagger \gamma^3 \epsilon) \left[ \frac{1}{2} D_m \psi^\dagger \gamma^3 \gamma^m \psi + \frac{1}{2} \psi^\dagger \gamma^3 \gamma^m D_m \psi + \frac{1}{4} \phi^\dagger \lambda^\dagger \gamma_3 \psi - \frac{1}{4} \psi^\dagger \gamma_3 \lambda \phi - \frac{i(q+1)}{2r} \psi^\dagger \gamma_3 \psi \right] \\ &\quad - \frac{i}{4} (\epsilon \gamma^m \epsilon) \psi^\dagger \gamma_m \lambda^\dagger \phi + \frac{i}{4} (\epsilon^\dagger \gamma^m \epsilon^c) \phi^\dagger \lambda \gamma_m \psi - \frac{i}{4} (\epsilon \gamma^3 \epsilon) \psi^\dagger \gamma_3 \lambda^\dagger \phi + \frac{i}{4} (\epsilon^\dagger \gamma^3 \epsilon^c) \phi^\dagger \lambda \gamma_3 \psi, \end{aligned} \quad (6.49)$$

$$\mathcal{Q}V_\phi^b = 2(\epsilon^\dagger\epsilon)\left(i\phi^\dagger\sigma\phi - \frac{q}{2r}\phi^\dagger\phi\right) + 2i(\epsilon^\dagger\gamma^m\epsilon)\phi^\dagger D_m\phi + 2(\epsilon^\dagger\gamma^3\epsilon)\phi^\dagger\eta\phi, \quad (6.50)$$

$$\mathcal{Q}V_\phi^f = -(\epsilon^\dagger\epsilon)(\psi^\dagger\psi) + i(\epsilon^\dagger\gamma_3\epsilon)i(\psi^\dagger\gamma^3\psi) + i(\epsilon^\dagger\gamma_m\epsilon)i(\psi^\dagger\gamma^m\psi). \quad (6.51)$$

したがって  $\mathcal{Q}V$  項は次の様にまとまる:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}V_{\text{chiral}}^b &= (\epsilon^\dagger\epsilon)\left[|D_m\phi|^2 + \phi^\dagger\sigma^2\phi + \phi^\dagger\eta^2\phi + i\frac{q-1}{r}\phi^\dagger\sigma\phi - \frac{q(q-2)}{4r^2}\phi^\dagger\phi + |F|^2\right] \\ &\quad + (\epsilon^\dagger\gamma^3\epsilon)\phi^\dagger\left(\frac{\eta}{r} - F_{1\hat{2}}\right)\phi - i(\epsilon^\dagger\gamma^3\gamma^m\epsilon)\phi^\dagger(D_m\eta)\phi, \end{aligned} \quad (6.52)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}V_{\text{chiral}}^f &= (\epsilon^\dagger\epsilon)\left[\frac{i}{2}D_m\psi^\dagger\gamma^m\psi - \frac{i}{2}\psi^\dagger\gamma^m D_m\psi + i\psi^\dagger\sigma\psi - \psi^\dagger\eta\gamma^3\psi - \frac{3i}{4}\phi^\dagger\lambda^\dagger\psi + \frac{3i}{4}\psi^\dagger\lambda\phi - \frac{q}{2r}\psi^\dagger\psi\right] \\ &\quad + i(\epsilon^\dagger\gamma^m\epsilon)\left[\frac{1}{4}\phi^\dagger\lambda^\dagger\gamma_m\psi - \frac{1}{4}\psi^\dagger\gamma_m\lambda\phi\right] + i(\epsilon^\dagger\gamma^3\epsilon)\left[\frac{1}{4}\phi^\dagger\lambda^\dagger\gamma_3\psi - \frac{1}{4}\psi^\dagger\gamma_3\lambda\phi\right] \\ &\quad - \frac{i}{4}(\epsilon\gamma^m\epsilon)(\psi^\dagger\gamma_m\lambda^\dagger)\phi + \frac{i}{4}(\epsilon^\dagger\gamma^m\epsilon^c)\phi^\dagger(\lambda\gamma_m\psi) - \frac{i}{4}(\epsilon\gamma^3\epsilon)(\psi^\dagger\gamma_3\lambda^\dagger)\phi + \frac{i}{4}(\epsilon^\dagger\gamma^3\epsilon^c)\phi^\dagger(\lambda\gamma_3\psi). \end{aligned} \quad (6.53)$$

上記で構成した  $\mathcal{Q}V$ -項によって超対称局所化における鞍点が決定され、Coulomb ブランチ配位  $\mathcal{Q}V = 0$  が与えられる:

$$F_{1\hat{2}} = \frac{\eta}{r}, \quad D = -\frac{\sigma}{r}, \quad \sigma = \eta = \text{constant}, \quad \lambda = 0. \quad (6.54)$$

$$\phi = \psi = F = 0. \quad (6.55)$$

## 6.6 1-ループ行列式

最後に超対称局所化における 1-ループ行列式を、GLSM for KK5-ブレーンに含まれる全ての超対称多重項に対して実行する。この時の計算手法は [53] に従う事にする。

### 6.6.1 カイラル多重項 $\Psi$

カイラル多重項  $\Psi$  に対する鞍点上における  $\mathcal{Q}V$ -項は以下で与えられる:

$$\mathcal{Q}V_\Psi = \frac{1}{2}(\nabla_m r^1)^2 + \frac{1}{2}(\nabla_m r^2)^2 - i\chi^\dagger\gamma^m\nabla_m\chi + |G|^2. \quad (6.56)$$

場の展開は以下で与えられる:

$$r = \frac{1}{\sqrt{t}}\hat{r}, \quad \chi = \frac{1}{\sqrt{t}}\hat{\chi}, \quad G = \frac{1}{\sqrt{t}}\hat{G}, \quad (6.57)$$

ここで標的空間の座標に対応する実スカラー場を複素スカラー場に組み直し  $r := \frac{1}{\sqrt{2}}(r^1 + ir^2)$  としてここでは取り扱う事にする。基本的に全ての 1-ループ行列式は球面調和関数を用い



た Gaussian 積分によって実行される。したがってゲージ中性のカイラル多重項に関する 1-ループ行列式は自明となり定数因子を与えるだけである:

$$Z_\Psi = \text{const.} . \quad (6.58)$$

ここで標的空間の座標に対応するスカラー場  $r$  に関するゼロモード  $r_0, \bar{r}_0$  について触れておく。このゼロモード積分は実行されなければならないが、この時に注意する必要があるポテンシャル項に存在する次の項及び随伴表現カイラル多重項に存在する補助場の“ゼロモード”を用いて実行可能である:

$$\int [dD_{\Phi,0}][d\bar{D}_{\Phi,0}][dr_0][d\bar{r}_0] e^{i\sqrt{2}(r_0-s)D_{\Phi,0}+i\sqrt{2}(\bar{r}_0-\bar{s})\bar{D}_{\Phi,0}-|D_{\Phi,0}|^2} = 1 . \quad (6.59)$$

ここで数係数は重要では無いので、経路積分測度等の再定義に押し付ける事が可能で無視する事にする。

### 6.6.2 随伴表現カイラル多重項 $\Phi$

随伴表現カイラル多重項に対する  $\mathcal{Q}V$  項は以下で与えられる:

$$\mathcal{Q}V_\Phi = |\nabla\phi|^2 - i\tilde{\lambda}^\dagger\gamma^m\nabla_m\tilde{\lambda} - \frac{1}{r}\tilde{\lambda}^\dagger\tilde{\lambda} + |D_\Phi|^2 . \quad (6.60)$$

場の展開は以下で与えられる:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{t}}\hat{\phi}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{t}}\hat{\tilde{\lambda}}, \quad D_\Phi = \frac{1}{\sqrt{t}}\hat{D}_\Phi . \quad (6.61)$$

随伴表現カイラル多重項はゲージ 1 重項なので直ちに Gauss 積分を実行出来てしまう。

ここでもスカラー場のゼロモード  $\phi_0, \bar{\phi}_0$  に関して触れておく。ゲージ中性なカイラル多重項に属している補助場  $G$  のポテンシャル項に注目し、 $G$  の“ゼロモード”を用いる事で随伴表現カイラル多重項のスカラー場のゼロモードは処理出来る:

$$e^{i\sqrt{2}\phi_0 G_0 + i\sqrt{2}\bar{\phi}_0 \bar{G}_0 - |G_0|^2} . \quad (6.62)$$

次はフェルミオンに注目し、次の様な行列として表したフェルミオンに作用する演算子  $\mathcal{O}_{\tilde{\lambda}}$  を考える:

$$\mathcal{Q}V_\Phi \ni -i\tilde{\lambda}^\dagger\gamma^m\nabla_m\tilde{\lambda} - \frac{1}{r}\tilde{\lambda}^\dagger\tilde{\lambda} =: \tilde{\lambda}^\dagger\mathcal{O}_{\tilde{\lambda}}\tilde{\lambda}, \quad (6.63)$$

ここで  $\mathcal{O}_{\tilde{\lambda}}$  は以下で与えられる<sup>‡</sup>:

$$\mathcal{O}_{\tilde{\lambda}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} & -2i\nabla_+ \\ 2i\nabla_- & +\frac{1}{r} \end{pmatrix} . \quad (6.64)$$

<sup>‡</sup> $D_\pm := (D_1 \mp iD_2)/2$  の notation を用いる

この演算子  $\mathcal{O}_{\tilde{\chi}}$  に作用するスピン球面調和関数は  $Y_{j,m}^{\frac{1}{2}}, Y_{j,m}^{-\frac{1}{2}}$  である。ここでも随伴表現カイラル超場はゲージ 1 重項である事によってフェルミオンに対するスピン球面調和関数のスピンはモノポール効果によりずれること無く評価出来る。よって 1-ループ行列式は以下で与えられる<sup>§</sup>:

$$\text{Det } \mathcal{O}_{\tilde{\chi}} = \prod_{j=\frac{3}{2}} \left(j + \frac{3}{2}\right)^{2j+1} \left(j - \frac{1}{2}\right)^{2j+1}. \quad (6.65)$$

これらの結果から随伴表現カイラル多重項に対する 1-ループ行列式は以下の様に自明となる:

$$Z_{\Phi} = \text{const.} . \quad (6.66)$$

ここでフェルミオンゼロモードに関して言及する。上記のフェルミオンに対する 1-ループ行列式には  $j = \frac{1}{2}$  にゼロモードが存在するが、経路積分測度に  $\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_0^{\dagger}$  を組み込んで再定義する事で処理をしている。

### 6.6.3 $U(1)$ 電荷を持つカイラル多重項 $\tilde{Q}, Q$

ここではゲージ電荷を持つカイラル多重項である  $\tilde{Q}, Q$  を扱うが、基本的に注目するのは  $\tilde{Q}$  だけにする。なぜなら  $\tilde{Q}, Q$  はゲージ電荷が  $\pm 1$  で反転するだけなので  $\tilde{Q}$  の結果でベクトル多重項と結合する項の寄与のみ符号をフリップさせるだけで  $Q$  の結果を得る事ができる。

ゲージ電荷を持つカイラル多重項  $\tilde{Q}$  に対する鞍点上において評価した  $QV$  は以下で与えられる:

$$QV_{\tilde{Q}} = |D_m \tilde{q}|^2 + (\sigma_0^2 + \eta_0^2) |\tilde{q}|^2 - \frac{i\sigma_0}{r} |\tilde{q}|^2 + |\tilde{F}|^2 - i\tilde{\psi}^{\dagger} \gamma^m D_m \tilde{\psi} + i\tilde{\psi}^{\dagger} (\sigma_0 + i\gamma^3 \eta_0) \tilde{\psi}. \quad (6.67)$$

場の展開は以下で与えられる:

$$\tilde{q} = \frac{1}{\sqrt{t}} \hat{q}, \quad \tilde{\psi} = \frac{1}{\sqrt{t}} \hat{\psi}, \quad \tilde{F} = \frac{1}{\sqrt{t}} \hat{F}. \quad (6.68)$$

以下では記法を簡略化する為に  $\hat{\quad}$  を省略する。補助場である  $\tilde{F}$  は独立に存在するので直ちに Gauss 積分を実行する事ができる。

ここから具体的にゲージ電荷を持つカイラル多重項に対する 1-ループ行列式を評価してく訳だが、まずスカラー場に注目し、そのスカラー場に作用する演算子  $\mathcal{O}_{\tilde{q}}$  を以下の様に書き下す:

$$QV_{\tilde{Q}} \ni |D_m \tilde{q}|^2 + (\sigma_0^2 + \eta_0^2) |\tilde{q}|^2 - \frac{i\sigma_0}{r} |\tilde{q}|^2 =: \tilde{q}^{\dagger} \mathcal{O}_{\tilde{q}} \tilde{q}, \quad (6.69)$$

<sup>§</sup>この演算子を行列表示する際にはスピノル添字を標準位置に直す際のイプシロンテンソルないし荷電共役行列の寄与を考慮する必要がある [53]。

$$\mathcal{O}_{\tilde{q}} = -D_m D^m - \frac{i\sigma_0}{r} + \sigma_0^2 + \eta_0^2, \quad (6.70)$$

ここでゲージ電荷を持つカイラル多重項におけるスカラー場は当然ゲージ電荷を持つので、スカラー場ではあるが球面調和関数はモノポール効果によって有効スピンを持つ。詳細は付録 C に記載しているが、モノポール電荷によって有効スピンの値が次の様に与えられる  $s_{\text{eff}} = 0 - \frac{m}{2}$ 。このスピンのずれによってスカラー場は有効スピンを用いてスピン球面調和関数によって展開される。ベクトル多重項の鞍点の VEV は  $F_{12} = \frac{\eta_0}{r} = \frac{m}{2r^2}$  及び  $m \in \mathbb{Z}$  である。

縮重度を考慮してゲージ電荷を持つスカラー場の 1-ループ行列式は以下の様に計算できる<sup>¶</sup>:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\tilde{q}} &= \frac{1}{r^2} \left[ \left\{ j(j+1) - s_{\text{eff}}^2 \right\} - i\sigma_0 + (\sigma_0)^2 + \frac{m^2}{4} \right] \\ &= \frac{1}{r^2} [j - i\sigma_0] [j + 1 + i\sigma_0]. \end{aligned}$$

$$\text{Det } \mathcal{O}_{\tilde{q}} = \prod_{j=\frac{|m|}{2}}^{\infty} (j - i\sigma_0)^{2j+1} (j + 1 + i\sigma_0)^{2j+1}. \quad (6.71)$$

次にフェルミオンに注目する。上記のスカラー場の議論と同様にフェルミオンに作用する演算子  $\mathcal{O}_{\tilde{\psi}}$  に注目し以下の様に行列表示で書き下すが、 $D_{\pm} := (D_1 \mp iD_2)/2$  の記法を使用している:

$$QV_{\tilde{Q}} \ni -i\tilde{\psi}^\dagger \gamma^m D_m \tilde{\psi} + i\tilde{\psi}^\dagger (\sigma_0 + i\gamma^3 \eta_0) \tilde{\psi} =: \tilde{\psi}^\dagger \mathcal{O}_{\tilde{\psi}} \tilde{\psi}, \quad (6.72)$$

$$\mathcal{O}_{\tilde{\psi}} = \begin{pmatrix} i\sigma_0 - \frac{m}{2} & -2iD_+ \\ 2iD_- & -i\sigma_0 - \frac{m}{2} \end{pmatrix}. \quad (6.73)$$

$$1. \quad \frac{1}{2} + \frac{|m|}{2} \leq j$$

まずフェルミオンのスピン球面調和関数が全て存在する状況を考える。この時にこの演算子の固有値を評価し行列式を評価する:

$$\mathcal{O}_{\tilde{\psi}} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} i\sigma_0 - \frac{m}{2} & -2iD_+ \\ 2iD_- & -i\sigma_0 - \frac{m}{2} \end{pmatrix}. \quad (6.74)$$

詳細は付録 C を参照:

$$D_+ Y^{-\frac{1}{2} - \frac{m}{2}} = \frac{\sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4}}}{2r} Y^{\frac{1}{2} - \frac{m}{2}}, \quad (6.75)$$

$$D_- Y^{\frac{1}{2} - \frac{m}{2}} = \frac{\sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4}}}{2r} Y^{\frac{1}{2} - \frac{m}{2}}. \quad (6.76)$$

<sup>¶</sup> $D_0 = -\frac{\sigma_0}{r}$ , 随伴表現スカラー場  $\sigma, \eta$  は質量次元が 1 なので鞍点上で  $\sigma = \frac{\sigma_0}{r}, \eta = \frac{m}{2r}$  である。

縮重度に注意して  $\mathcal{O}_\psi$  の行列式の結果は以下の様になる:

$$\text{Det } \mathcal{O}_\psi = \prod_{j=\frac{|m|}{2}+\frac{1}{2}}^{\infty} \left(j + \frac{1}{2} - i\sigma_0\right)^{2j+1} \left(j + \frac{1}{2} + i\sigma_0\right)^{2j+1}. \quad (6.77)$$

2.  $j = \frac{|m|}{2} - \frac{1}{2}$

次にフェルミオンのスピン球面調和関数の片方の成分がゼロとなる状況の 1-ループ行列式を議論する。この状況では演算子のランクは 1 になる。具体的に  $1 \leq m = 2$  及び  $j = \frac{1}{2}$  の状況を考えてみる。すると固有値は次の様になる:

$$\begin{pmatrix} Y_{l,m}^{-\frac{1}{2}} \\ Y_{l,m}^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{l,m}^{-\frac{1}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \implies (\text{eigenvalue}) = i\sigma_0 - \frac{m}{2} = i\sigma_0 - \frac{|m|}{2}. \quad (6.78)$$

同様に  $m = -2 \leq -1$ 、 $j = \frac{1}{2}$  を考えてみると次の様になる:

$$\begin{pmatrix} Y_{l,m}^{\frac{3}{2}} \\ Y_{l,m}^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Y_{l,m}^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \implies (\text{eigenvalue}) = -i\sigma_0 - \frac{m}{2} = -i\sigma_0 + \frac{|m|}{2}. \quad (6.79)$$

最後に  $m = 0$  の時は  $j < 0$  となる様に見えるが、そもそも  $j$  は  $|s_{\text{eff}}| \leq j$  なので  $\frac{1}{2} \leq j$  より小さくなる事は無い。したがって縮重度を考慮して 1-ループ行列式は以下の様になる:

$$\text{Det } \mathcal{O}_\psi = (-1)^{|m|} \left(\frac{|m|}{2} - i\sigma_0\right)^{|m|}. \quad (6.80)$$

ここで  $[m]$  はガウス関数である。

これまでの議論及び結果からフェルミオン部分の 1-ループ行列式は次で与えられる:

$$\text{Det } \mathcal{O}_\psi = \prod_{k=\frac{|m|}{2}}^{\infty} (k - i\sigma_0)^{2k} ((k+1) + i\sigma_0)^{2k+2}. \quad (6.81)$$

最終的にゲージ電荷を持つカイラル多重項に対する 1-ループ行列式は次の様に得られる  $\tilde{Q}$  ( $Q = +1, q = 0$ )、 $Q$  ( $Q = -1, q = 0$ ):

$$Z_{\tilde{Q}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{m+n_f}{2} - i(\sigma_0 + \sigma_f)\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{m+n_f}{2} + i(\sigma_0 + \sigma_f)\right)}, \quad Z_Q = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n_f}{2} + i(\sigma_0 + \sigma_f)\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{m+n_f}{2} - i(\sigma_0 + \sigma_f)\right)}. \quad (6.82)$$

ここで  $n_f, \sigma_f$  はフレーバー対称性に対するツイステッド質量である [33, 53, 65, 66]。

6.6.4 ゲージ多重項  $\Sigma$ 

ゲージ多重項の  $QV$ -項及びゴーストセクターのラグランジアンは以下で与えられる:

$$QV_{\Sigma} = \frac{1}{2} \left( F_{1\hat{2}} - \frac{\eta}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( D + \frac{\sigma}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla\sigma)^2 + \frac{1}{2} (\nabla\eta)^2 + \frac{i}{2} \lambda^{\dagger} \gamma^m \nabla_m \lambda, \quad (6.83)$$

$$\mathcal{L}_{\text{ghost}} = -\bar{c} \nabla^2 c - \frac{1}{2\xi} (\nabla^m A_m). \quad (6.84)$$

ベクトル多重項の鞍点周りの場の展開は以下で与えられる:

$$A_m = A_{0,m} + \frac{1}{\sqrt{t}} \hat{A}_m, \quad D = -\frac{\sigma_0}{r} + \frac{1}{\sqrt{t}} \hat{D}, \quad \sigma = \sigma_0 + \frac{1}{\sqrt{t}} \hat{\sigma}, \quad \eta = \eta_0 + \frac{1}{\sqrt{t}} \hat{\eta}, \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{t}} \hat{\lambda}. \quad (6.85)$$

ここで  $\sigma_0, \eta_0$  は Coulomb ブランチをパラメーター付けするモジュライである。以降では表記を簡略化する為に  $\hat{\phantom{x}}$  を省略して表記する。上記の鞍点上のゲージ場の配位  $A_{0,m}$  は鞍点条件  $F_{1\hat{2}} - \frac{\eta}{r}$  及び  $\nabla_m \eta = 0$  を満たすモノポール配位であり以下で与えられる:

$$A_{0,\theta} = 0, \quad A_{0,\varphi} = \begin{cases} \eta_0(1 - \cos\theta) & 0 \leq \theta \leq \theta_0 \\ -\eta_0(1 + \cos\theta) & \theta_0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}. \quad (6.86)$$

ここで  $\theta_0$  は北半球パッチと南半球パッチのカットであり  $0 < \theta_0 < \pi$  である。北半球パッチと南半球パッチは以下の様に定義する:

$$U_N := \{(\theta, \varphi) | 0 \leq \theta \leq \theta_0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}, \quad (6.87)$$

$$U_S := \{(\theta, \varphi) | \theta_0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}. \quad (6.88)$$

これから  $U(1)$  のベクトル多重項の 1-ループ行列式を評価する。基本的にやる事はこれまでの超対称多重項の時の議論の様に、スカラー場や Dirac フェルミオンに作用する演算子  $\mathcal{O}$  を引き抜き、 $\mathcal{O}$  の固有値を全て評価する事で  $\det \mathcal{O}$  が評価するという方針である。但しベクトル多重項の場合はボソン部分にはスカラー場  $\sigma, \eta$  及びベクトル場  $A_m$  が存在する。これらは  $S^2$  上の球面調和関数を用いて展開されるが、微分演算子によってスピン 0 とスピン 1 は移り変わる。すなわちスカラー場とベクトル場を独立に扱ってしまうと対角成分しか取り扱っていない事を意味するので、移り変わっている非対角部分の寄与が拾えない。したがってベクトル多重項ではボソン部分の取り扱いを変え、スカラー場とベクトル場をまとめてボソン部分として演算子  $\mathcal{O}$  を構成する必要がある。

ベクトル多重項におけるボソン部分に注目し演算子  $\mathcal{O}_\Sigma^{\text{boson}}$  を以下の様に定義する:

$$\begin{aligned} QV_\Sigma^{\text{boson}} &= \frac{1}{2} \left( F_{1\hat{2}} - \frac{\eta}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla_m \sigma)^2 + \frac{1}{2} (\nabla_m \eta)^2 - \frac{1}{2\xi} (\nabla^m A_m) \\ &=: \begin{pmatrix} A_+ & A_- & \eta & \sigma \end{pmatrix} \mathcal{O}_\Sigma^{\text{boson}} \begin{pmatrix} A_+ \\ A_- \\ \eta \\ \sigma \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.89)$$

$$\mathcal{O}_\Sigma^{\text{boson}} = \begin{pmatrix} -4\nabla_+ \nabla_- & 0 & -\frac{i}{r} \nabla_+ & 0 \\ 0 & -4\nabla_- \nabla_+ & +\frac{i}{r} \nabla_- & 0 \\ -\frac{i}{r} \nabla_- & +\frac{i}{r} \nabla_+ & -\frac{1}{2} \nabla^2 - \frac{1}{2r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \nabla^2 \end{pmatrix}. \quad (6.90)$$

ここで次の記法を用いている  $A_\pm := (A_1 \mp iA_2)/2$  [53]。また  $U(1)$  の  $F = dA$  に関しては  $F_{mn} = \nabla_m A_n - \nabla_n A_m = \partial_m A_n - \partial_n A_m$  である事を用いている。

ここで演算子  $\mathcal{O}_\Sigma^{\text{boson}}$  の各成分について概要を説明する:

- 左上の  $2 \times 2$  に関して

ここはベクトル場の運動項及びゴーストからの寄与であり、 $F_{1\hat{2}}^2 - \frac{1}{\xi} (\nabla_m A_m)^2$  ( $\xi = -1$ ) によって非対角成分がゼロとなっている。さらに非可換ゲージ群との比較としては、非可換においては  $A_+$  と  $A_-$  に  $[A_m, \sigma_0]^2, [A_m, \eta_0]^2$  からの  $\sigma_0^2 + \eta_0^2$  という寄与が存在する。

- 次に右下の  $2 \times 2$  に関して

ここは可換群なのでスカラー場のゲージ共変微分における  $[A_m, \sigma], [A_m, \eta]$  の様な寄与がない事で対角成分は運動項と質量項だけである。 $\eta$  の質量項は場の強さ  $F$  の項からの寄与である。一方で  $\sigma$  の質量項が存在しないのは、補助場である  $D$  との組み合わせで現れているが補助場  $D$  の経路積分が独立に実行可能なので処理される事に起因して質量項が存在しない。これに伴って以下で見る様に  $\sigma$  に関してはゼロモードが存在し、これに対応するゼロモード積分が残る。また非対角成分も可換群では  $[\sigma, \eta]$  の様な項が存在しないので  $-\frac{1}{2}([\sigma, \eta_0] + [\sigma_0, \eta])^2$  のクロスタームからの寄与が無い。

- 右上と左下の  $2 \times 2$  に関して

ここでは  $A_\pm$  と  $\eta, \sigma$  の混合項になる。もう少し詳しくみると非可換では以下の様に

なる:

$$\begin{pmatrix} A_+ & A_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i(\eta_0 + \frac{1}{r})D_+ & -i\sigma_0 D_+ \\ -i(\eta_0 - \frac{1}{r})D_- & -i\sigma_0 D_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \sigma \end{pmatrix}. \quad (6.91)$$

この  $\frac{1}{r}D_{\pm}$  の項は  $\frac{1}{2}(F_{12} + \frac{\eta}{r})^2$  のクロスタームからの寄与である。それ以外の項は  $\frac{1}{2}(D_m\sigma - i[A_m, \sigma_0])^2$  と  $\frac{1}{2}(D_m\eta - i[A_m, \eta_0])^2$  のクロスタームからの寄与である。しかしこの項は可換群では落ちる。

次にベクトル多重項の場に対する球面調和関数について言及すると、ゲージ電荷を持った多重項は鞍点上のモノポール電荷によってスピンのずれの事由来してスカラー場でも有効スピンを持っていた。しかし、可換群はベクトルは自己相互作用も存在せず、スカラー場もゲージ1重項なのでモノポール効果によってスピンのずれの事は無いので球面調和関数としては  $j = 1, 0$  のみに注目すれば良い。

•  $1 \leq j$

まずベクトル及びスカラーの球面調和関数が全て存在する状況を考える。したがってボソン部分の演算子  $\mathcal{O}_{\Sigma}^{\text{boson}}$  は  $4 \times 4$  の行列である:

$$\mathcal{O}_{\Sigma}^{\text{boson}} = \begin{pmatrix} -4\nabla_+\nabla_- & 0 & -\frac{i}{r}\nabla_+ & 0 \\ 0 & -4\nabla_-\nabla_+ & +\frac{i}{r}\nabla_- & 0 \\ -\frac{i}{r}\nabla_- & +\frac{i}{r}\nabla_+ & -\frac{1}{2}\nabla^2 - \frac{1}{2r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\nabla^2 \end{pmatrix}. \quad (6.92)$$

このボソン部分の演算子  $\mathcal{O}_{\Sigma}^{\text{boson}}$  の各成分の固有値を以下を用いて評価する事によって行列式を得る事ができる:

$$\nabla_+ Y^{s-1} = \frac{s_-}{2r} Y^s, \quad \nabla_- Y^s = -\frac{s_-}{2r} Y^{s-1}, \quad s_{\pm} = \sqrt{j(j+1) - s(s \pm 1)}. \quad (6.93)$$

$$\det \mathcal{O}_{\Sigma}^{\text{boson}} = \frac{1}{2} [j(j+1)]^2 \cdot [j(j+1)]^2. \quad (6.94)$$

•  $j = 0$

次にベクトル場の球面調和関数がゼロとなる状況を考える。この時球面調和関数の成分が落ちる事に伴ってボソン部分の演算子  $\mathcal{O}_{\Sigma}^{\text{boson}}$  のランクも落ちて以下の様な行列になる:

$$\mathcal{O}_{\Sigma}^{\text{boson}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{2r^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\nabla^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}j(j+1) + \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}j(j+1) \end{pmatrix}.$$

したがって固有値が次の様に求まる:

$$\frac{1}{2}, \quad 0. \quad (6.95)$$

ここで前述したとおりスカラー球面調和関数、特に  $\sigma$  に対してゼロモードが存在する事がわかる。これは  $D$  の積分によって  $\sigma$  の質量項が処理されてしまう事に起因して現れる。通常の Coulomb ブランチ上の局所化の結果は、この  $\sigma$  のゼロモード積分由来のモジュライ積分が残る。しかし、後述する様に Stückelberg 型カイラル多重項が理論に含まれると、Stückelberg 型カイラル多重項に属するスカラー場のゼロモード積分の処理に注意しなければならない。この Stückelberg 型カイラル多重項のスカラー場の実部は標的空間の  $\mathbb{R}$ 、虚数部分は  $S^1$  に対応する。このノンコンパクトスカラー場の処理に伴い、 $\sigma$  のゼロモード積分が実行できる形になるのである。

ゴーストセクターの運動項は以下で与えられる:

$$\mathcal{L}_{c,\bar{c}} = -\bar{c}\nabla^2 c. \quad (6.96)$$

ゴーストは、1-ループ行列式を評価する際に注意すべき点は Grassmann 奇の統計性を持ったスカラー場という点である。基本的にはスカラー場なので通常の球面調和関数によって固有値を評価し Gauss 積分を実行するが、Grassmann 奇なので結果の現れ方が異なる。したがって結果は次の様になる:

$$\text{Det } \mathcal{O}_{\Sigma}^{c,\bar{c}} = \prod_{j=1} (j(j+1))^{2j+1}. \quad (6.97)$$

一般にはゴーストはゼロモードを含むが、独立に取り除く事が可能である [26, 60]。

最後にフェルミオン部分の 1-ループ行列式に注目する。ベクトル多重項に属するフェルミオンは可換群なので  $U(1)$  ゲージ対称性の下で 1 重項なので、ゲージ電荷を持ったカイラル多重項のフェルミオンの様にスピン球面調和関数がモノポール効果によってスピンのずれる事は起こらない。したがって基本的にゲージ中性なフェルミオンと取り扱いは同様である。この事から直ちに 1-ループ行列式を評価できる。フェルミオン 1-ループ行列式は質量項等が存在しないので運動項のみ考えれば良い<sup>†</sup>:

$$\mathcal{Q}V_{\Phi} \ni i\lambda^{\dagger}\gamma^m\nabla_m\lambda =: \lambda^{\dagger}\mathcal{O}_{\lambda}\lambda, \quad (6.98)$$

$$\mathcal{O}_{\lambda} = \begin{pmatrix} 0 & -2i\nabla_+ \\ 2i\nabla_- & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.99)$$

<sup>†</sup> $D_{\pm} := (D_1 \mp iD_2)/2$  で定義している



したがってスピン球面調和関数が両方存在する領域  $\frac{1}{2} \leq j$  のみ存在する:

$$\mathcal{O}_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-is_+}{r} \\ \frac{-is_-}{r} & 0 \end{pmatrix}, \quad \det \mathcal{O}_\psi = \left(j + \frac{1}{2}\right)^2. \quad (6.100)$$

したがって縮重度まで考慮した行列式は以下の様になる:

$$\text{Det } \mathcal{O}_\lambda = \prod_{j=\frac{1}{2}} \left[ \left(j + \frac{1}{2}\right)^2 \right]^{2j+1}. \quad (6.101)$$

以上の結果よりベクトル多重項の 1-ループ行列式は以下の様になる:

$$Z_\Sigma = \text{const.} \quad (6.102)$$

### 6.6.5 Stückelberg 型カイラル多重項 $\Gamma$

ここでは Stückelberg 型カイラル多重項  $\Gamma$  に対する 1-ループ行列式を評価する。この Stückelberg 型カイラル多重項に関しては  $QV$ -項を構成する事はしていないが、[48,60]において触れられている様にこの Stückelberg 型カイラル多重項のラグランジアンは既に場に関して 2 次で構成されている。したがって超対称局所化の手続きで場の 3 次以上の寄与が落ちる議論に関わらず、直ちに Gauss 積分を実行する事が可能である。また、この様に取り扱いをする事が出来るために GLSM の分配関数に Taub-NUT 空間における  $S^1$  ファイバーの漸近的半径  $g$  の依存性を残す事が可能であると期待される。したがって本研究の目的である世界面インスタントンと Taub-NUT 空間における  $S^1$  ファイバーの漸近的半径  $g$  の関係を探る事が出来る。但しこの取り扱いに伴う注意として、 $\Gamma$  はに属する全ての場は  $\frac{1}{\sqrt{t}}$  のリスケールがされない事を気を付ける。

まず Stückelberg 型カイラル多重項以外の全ての多重項によって定義された Coulomb ブランチ上において、この Stückelberg 型カイラル多重項のラグランジアンを評価すると以下の様になる:

$$\mathcal{L}_\Gamma|_{\text{saddle}} = \frac{1}{g^2} \left[ \frac{1}{2} (\nabla_m r^3)^2 - i \tilde{\chi} \gamma^m \nabla_m \tilde{\chi} \right] + \frac{g^2}{2} (D_m \gamma^4)^2 + g^2 |G_\Gamma|^2 + \frac{g^2}{2} (\sigma_0^2 + \eta_0^2) + i \sqrt{2} r_0^3 D_0. \quad (6.103)$$

基本的にはこれまでの他の多重項における 1-ループ行列式と全く同様にして Stückelberg 型カイラル多重項の 1-ループ行列式も評価する事ができる。但し、この多重項において注意を払って取り扱うべき項が 2 つ存在するという点を強調しておく。

まず 1 つ目はノンコンパクトなスカラー場に対するゼロモードの項である。このゼロモード  $r_0^3$  はベクトル多重項に属する補助場  $D$  の “ゼロモード” もしくは定数モードと結合して

いる。このゼロモードの取り扱いを議論する際は、ベクトル多重項の補助場  $D$  の項を思い出す:

$$\int \mathcal{D}D \, dr_0^3 \, e^{-t(D+\frac{\sigma}{r})^2 - i\sqrt{2}(r_0^3 - t_1)D_0}. \quad (6.104)$$

ここで  $(D + \frac{\sigma}{r})^2$ -項に関しては  $S^2$  の球面調和関数の角運動量  $l$  に関して分解することができる:

$$-t \left( D + \frac{\sigma}{r} \right)^2 = -t \left( D_0 + \frac{\sigma_0}{r} \right)^2 - \left( D + \frac{\sigma}{r} \right)^2 \Big|_{l=1} - \left( D + \frac{\sigma}{r} \right)^2 \Big|_{l=2} + \dots \quad (6.105)$$

1項目以外に  $t$  が掛かっていない理由は、ベクトル多重項は通常の局所化の手続きを踏んでいるので場をリスケールを実行しているためである。この操作に伴ってゼロモード以外の部分に関しては場の2次であることから  $t$  依存性が消えている。上記の1項目は、ベクトル多重項によって構成された  $\mathcal{Q}V$  から評価される超対称局所化の鞍点条件の定義から直ちにゼロとなる事が言える。即ち補助場のゼロモードと  $\sigma$  のゼロモードが関係付く

$$D_0 = -\frac{\sigma_0}{r}, \quad (6.106)$$

この事が意味するところは、 $D_0$  と  $\sigma_0$  に関する経路積分はそれぞれが独立に実行して良いのでは無く、鞍点条件を満たす様に実行しなければならない事を意味している。一方で  $l \geq 1$  に対する  $D$  の経路積分はベクトル多重項の1-ループ行列式で評価した様に自明に実行される。このような議論からゼロモード  $r_0^3$  に関する積分は以下の様になる:

$$\int \mathcal{D}D \, dr_0^3 \, e^{-t[(D+\frac{\sigma}{r})^2 + i\sqrt{2}(r_0^3 - t_1)D_0]} \propto \int dr_0^3 \, e^{i\sqrt{2}(r_0^3 - t_1)(-\frac{\sigma_0}{r})} \propto \delta(\sigma_0). \quad (6.107)$$

2つ目に取り扱いに注意すべき項はコンパクトスカラーの運動項  $\frac{g^2}{2}(D_m \gamma^4)^2$  である。この  $\gamma^4$  に関して古典的に非自明な配位を取り得るか否かを調べる必要がある。

$\gamma^4$  の運動項は以下でゲージ不変である:

$$D_m \gamma^4 := \partial_m \gamma^4 + \sqrt{2} A_m. \quad (6.108)$$

ここで  $A_m$  の配位としてはベクトル多重項から構成された  $\mathcal{Q}V$  から評価される鞍点条件の場の配位からモノポールとして Wu-Yang 配位を用いる:

$$A_\theta = 0, \quad A_\varphi^N = a(1 - \cos \theta), \quad A_\varphi^S = -a(1 + \cos \theta). \quad (6.109)$$

ここで  $S^2$  上の座標を  $(\theta, \varphi)$  とし、第一 Chern 類等の係数因子を全てまとめて  $a$  とした。  $\gamma^4$  の運動方程式は以下で与えられる:

$$\delta(D_m \gamma^4)^2 = 0 \implies \nabla^2 \gamma^4 + 2\sqrt{2} \nabla \cdot A = \nabla^2 \gamma^4 = 0. \quad (6.110)$$

1-ループ行列式を評価する際の配位を探す事を考えるが、以下の事を要請する:

## 1. ゲージ不変性

$S^2$  積分を実行する際に、モノポールは  $S^2$  全体で定義されていないので北半球の領域  $U_N := \{(\theta, \varphi) | 0 \leq \theta \leq \theta_0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$  で  $A_\varphi^N$  を使用し、南半球の領域  $U_S := \{(\theta, \varphi) | \theta_0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$  では  $A_\varphi^S$  を使用したい。

この時に  $U_N$  と  $U_S$  において異なるゲージであり  $A_\varphi^N(\theta = \theta_0, \varphi) \neq A_\varphi^S(\theta = \theta_0, \varphi)$  となっており 1 価関数となっていないが、これらはゲージ変換によって移り変わるのでゲージ不変である  $D_m \gamma^4$  としては  $S^2$  全体で well-defined である事を要請する:

$$(D_m \gamma^4)|_{U_N} = (D_m \gamma^4)|_{U_S} \quad \text{at } \theta = \theta_0, \quad (6.111)$$

$$U_N : \begin{cases} D_\theta \gamma^4 = \partial_\theta \gamma^4 = g^N(\theta, \varphi) \\ D_\varphi \gamma^4 = \partial_\varphi \gamma^4 + a\sqrt{2}(1 - \cos \theta) = f^N(\theta, \varphi) \end{cases}, \quad (6.112)$$

$$U_S : \begin{cases} D_\theta \gamma^4 = \partial_\theta \gamma^4 = g^S(\theta, \varphi) \\ D_\varphi \gamma^4 = \partial_\varphi \gamma^4 - a\sqrt{2}(1 - \cos \theta) = f^S(\theta, \varphi) \end{cases}, \quad (6.113)$$

$$g^N(\theta_0, \varphi) = g^S(\theta_0, \varphi), \quad f^N(\theta_0, \varphi) = f^S(\theta_0, \varphi). \quad (6.114)$$

2.  $\gamma^4$  の配位は運動方程式を満たす。

$$\left[ \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \right] \gamma^4 = 0. \quad (6.115)$$

3.  $\int_{S^2} (D_m \gamma^4)^2$  が有限である。

$\theta$  成分の積分は問題ないが、 $\varphi$  成分の積分を実行する際に体積要素等から  $\frac{1}{\sin \theta}$  の係数因子が存在するので  $\varphi$  成分  $D_\varphi \gamma^4$  に注意を払う。

$$\int_{S^2} (D_m \gamma^4)^2|_{U_N} \simeq \int_{S^2} \left[ (g^N)^2 + \frac{(f^N)^2}{\sin \theta} \right] \quad (6.116)$$

まず  $U_N$  の領域に注目し、

$$U_N : \begin{cases} D_\theta \gamma^4 = \partial_\theta \gamma^4 = g^N(\theta, \varphi) \\ D_\varphi \gamma^4 = \partial_\varphi \gamma^4 + a\sqrt{2}(1 - \cos \theta) = f^N(\theta, \varphi) \end{cases} \quad (6.117)$$

の式から  $\partial_\theta \partial_\varphi \gamma^4$  を求めると以下の関係を得られる:

$$\partial_\varphi g^N = \partial_\theta f^N - a\sqrt{2} \sin \theta. \quad (6.118)$$

次に  $\gamma^4$  の運動方程式から以下を得る:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} \left[ (\cos \theta \partial_\theta \gamma^4 + \sin \theta \partial_\theta^2 \gamma^4) + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi^2 \gamma^4 \right] &= 0 \\ \cos \theta g^N + \sin \theta \partial_\theta g^N + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi f^N &= 0. \end{aligned} \quad (6.119)$$

さらに  $\partial_\varphi$  を当てると以下を得る:

$$\begin{aligned} \cos \theta \partial_\theta f^N + \sin \theta \partial_\theta^2 f^N + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi^2 f^N - 2\sqrt{2}a \cos \theta \sin \theta &= 0 \\ \left[ \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \right] f^N - 2\sqrt{2}a \cos \theta &= 0. \end{aligned} \quad (6.120)$$

得られた微分方程式から  $f$  が決定されれば、 $\partial_\varphi g^N = \partial_\theta f^N - a\sqrt{2} \sin \theta$  から  $g$  を決定する事ができる。この方程式は非斉次項が存在するので、3つの状況で微分方程式を解く事を考える:

1.  $f^N = f^N(\theta)$

$$\partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) f^N - 2\sqrt{2}a \cos \theta \sin \theta = 0. \quad (6.121)$$

この常微分方程式の一般解は次で与えられる:

$$f^N(\theta) = C_1 - \sqrt{2}a \cos \theta + \left( C_2 - \frac{a}{\sqrt{2}} \right) \log \left( \tan \frac{\theta}{2} \right). \quad (6.122)$$

この解の構造は、 $-\sqrt{2}a \cos \theta$  部分のみで既に上記の方程式の解になっている一方で、 $\cos \theta \partial_\theta f^N + \sin \theta \partial_\theta^2 f^N = 0$  を満たす解が  $\log$  部分である。但し、 $\log \left( \tan \frac{\theta}{2} \right)$  は  $\theta = 0$  で発散するので  $C_2$  を用いて  $\log$  部分を落とす必要がある。

残りの  $C_1 - \sqrt{2}a \cos \theta$  に関しては  $C_1$  を調整して  $f^N(\theta) = \sqrt{2}a(1 - \cos \theta)$  と選ぶ事ができ、 $S^2$  積分は有限であるが  $f^S(\theta) = -\sqrt{2}a(1 + \cos \theta)$  となるのでゲージ不変性を破る。

2.  $f^N = f^N(\varphi)$

$$\frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi^2 f^N - 2\sqrt{2}a \cos \theta \sin \theta = 0. \quad (6.123)$$

この方程式の解は  $a = 0$  のみで解を持つが、これはモノポール電荷がゼロである事を意味するので興味のある解ではない。

3.  $f^N = f^N(\theta, \varphi)$

$$\nabla_{S^2}^2 f^N = 2\sqrt{2}a \cos \theta. \quad (6.124)$$

これが解を持つかどうかを評価する事が出来れば議論は尽くされる。上記の議論に加えて、さらに  $D_m \gamma^4$  に関して  $\varphi$  の周期性を課す事を考える。これは  $D_m \gamma^4$  の  $\theta$  方向に関してゲージ不変性から一価関数である事を要請した様に、 $\varphi$  方向に関して同様に一価関数であると解釈できる。 $f(\theta, \varphi)$  に  $\varphi$  方向に関して周期性を課す事を考える:

$$f(\theta, \varphi) = f(\theta, \varphi + 2\pi) \implies f = \sum_m f_m(\theta) e^{im\varphi}. \quad (6.125)$$

$f(\theta, \varphi)$  に関して上記の様な性質を仮定し、改めて  $f(\theta, \varphi)$  が満たすべき微分方程式に代入すると以下を得る:

$$\sum_m \left[ \cos \theta \partial_\theta f_m^N(\theta) + \sin \theta \partial_\theta^2 f_m^N(\theta) + \frac{-m^2}{\sin \theta} f_m^N(\theta) - 2\sqrt{2}a \cos \theta \sin \theta \delta_{0,m} \right] e^{im\varphi} = 0. \quad (6.126)$$

ここで非斉次項の取り扱いに注意を払う必要がある。 $f(\theta, \varphi)$  は周期性から Fourier 展開を実行しており、 $m$  に関して和をとっているので、各  $m$  に関して満たすべき方程式は以下である:

$$\cos \theta \partial_\theta f_m^N(\theta) + \sin \theta \partial_\theta^2 f_m^N(\theta) + \frac{-m^2}{\sin \theta} f_m^N(\theta) - 2\sqrt{2}a \cos \theta \sin \theta \delta_{0,m} = 0. \quad (6.127)$$

したがってゼロモード  $m = 0$  に対しては既に議論を行った結果に帰着される。次に  $m \neq 0$  の状況であるが、これは非斉次項が消える。故にこの微分方程式は2次元球面上の Laplace 方程式に帰着する。つまり動径方向がゼロ  $l = 0$  である球面調和関数  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  に対応する。したがって  $m = 0$  の時に解を持つがこれは考えている状況に反するので解が存在しない。また、 $\partial_\varphi g^N = \partial_\theta f^N - a\sqrt{2} \sin \theta$  から  $g^N = g^N(\theta)$  が得られる。最後に  $\cos \theta g^N + \sin \theta \partial_\theta g^N + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi f^N = 0$  から積分定数  $C_3$  として  $g^N = \frac{C_3}{\sin \theta}$  が得られるが、 $S^2$  積分の有限性から  $g^N = 0$  となる。したがって得られる結果は  $m = 0$  の時に  $g^N = g^S = 0, f^N = f^S = 0$  である。

以上の議論から、 $D_m \gamma^4$  の1-ループ行列式はゲージ不変性や運動方程式を満たす事、有限な結果である事を満たす様な配位は存在しない事がわかった。したがって、この結果からインスタンオン数が非ゼロの寄与をするのは  $g = 0$  のみである事を読み取る事ができる。

次に GLSM の球面分配関数に対して、インスタントン数が非ゼロである寄与を引き出す事を考える。この為に  $g \rightarrow 0$  を実行するが、この時の注意は Stückelberg 型カイラル多重項に属するコンパクトスカラー場以外の場に関しては全て積分を実行した後にこの操作を行う。最後にコンパクトスカラーの運動項  $\frac{g^2}{2}(D_m\gamma^4)^2$  が残り、これをゼロに落とす。このコンパクトスカラーの運動項を  $g \rightarrow 0$  によって落とす配位は先行研究における GLSM のインスタントン計算における手続きと同じである。

最後に結果として、Coulomb ブランチ上で評価した Stückelberg 型カイラル多重項に対する 1-ループ行列式は以下の様に得られた:

$$Z_\Gamma \propto \delta(\sigma_0). \quad (6.128)$$

この結果から分かる様に、Coulomb モジュライの積分は自明に実行する事が可能となりゼロ点を選び出される。

## 6.7 GLSM 球面分配関数

これまで計算してきた結果を用いて KK5-ブレーンに対する GLSM の球面分配関数の結果を与える。まず  $U(1)$  ゲージ対称性が 1 つの系、すなわちシングルセンターの Taub-NUT 空間を与える系の Coulomb ブランチ上の GLSM の球面分配関数は  $g = 0$  で以下の様になる:

$$Z_{\text{GLSM}}^{S^2} = \int D\Sigma D\Phi D\Psi D\Gamma D\tilde{Q} DQ e^{-\frac{1}{2\pi}S_{\text{KK5}} - tQV} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-i\sqrt{2}t_2 m} Z_{\tilde{Q}} Z_Q, \quad (6.129)$$

ここで  $S_{\text{KK5}}$  は  $S^2$  上の  $U(1)$  GLSM であり、この  $1/2\pi$  の係数因子は世界面シグマ模型の規格化因子を採用している;

$$Z_{\tilde{Q}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{m+n_f}{2} - i\sigma_f\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{m+n_f}{2} + i\sigma_f\right)}, \quad Z_Q = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n_f}{2} + i\sigma_f\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{m+n_f}{2} - i\sigma_f\right)}. \quad (6.130)$$

ここで  $t_2$  は  $\theta$  パラメーターを担っており、 $m$  は第一 Chern 類である。

## 第7章 Kählerポテンシャル/GLSM球面分配関数

ここでは超対称局所化を用いて経路積分を評価する事で解析的な結果として得る事ができる GLSM の球面分配関数がどのような物理的な情報を含んでいるかという観点に着目する。Zamolodchikov 計量は共形場理論の変形によって議論される共形場理論のモジュライ空間を張るモジュライに付随する演算子の 2 点関数として定義される。またこれは共形場理論のモジュライ空間である共形多様体上に定義される計量としての役割を担う。またこのモジュライ空間は Kähler 多様体であり、Zamolodchikov 計量は Kähler ポテンシャルによって記述される。一方で GLSM の低エネルギー有効理論である超対称世界面シグマ模型の観点から見た共形場理論は、標的空間の Ricci 平坦性と密接に関係していた事から超共形場理論の共形対称性を保った理論の変形、すなわち SCFT のモジュライ空間である共形多様体と Ricci 平坦を保つ様な計量の変形に関するモジュライ空間が密接に関係している事が知られている。このような関係がある為に Zamolodchikov 計量を通して標的空間のモジュライ空間上の Kähler ポテンシャルと球面分配関数の間に関係を見出す事ができ、GLSM の分配関数から標的空間の幾何学的情報を引き出す事が可能となるのである [20, 21, 67]。

### 7.1 Zamolodchikov 計量

第3章において CFT のモジュライ空間について触れたが、GLSM の球面分配関数との関係について触れる前に、ここで Zamolodchikov 計量について改めて簡単に触れておく。d 次元において CFT  $S_0$  が与えられたとする。この時にこの CFT の exactly marginal 演算子を考える:

$$\mathcal{O}_i, \quad \dim \mathcal{O}_i = d. \quad (7.1)$$

これらの演算子を用いて CFT を変形する事を考える:

$$\delta S = \int d^d x \lambda_i \mathcal{O}_i(x), \quad S_{\text{total}} = S_0 + \delta S = \text{CFT}. \quad (7.2)$$

今 exactly marginal な理論の変形を考えているので  $S_0$  と  $\lambda = 0$  で連続的に繋がる新たな CFT にフローする。ここで  $\lambda_i$  は結合定数の様なパラメーターとして解釈され、この変形によ

る CFT の族をパラメーター付けしている。またこの CFT 族のことを共形多様体 (conformal manifold)  $\mathcal{M}$  という。 $\mathcal{M}$  上には Zamolodchikov 計量が定義される [22]:

$$\langle \mathcal{O}_i(x) \mathcal{O}_j(0) \rangle_{p \in \mathcal{M}} =: \frac{g_{ij}(p)}{x^{2d}}. \quad (7.3)$$

この式は次元解析  $[O_i] = d$  によって RHS の  $x$ -依存性が  $1/x^{2d}$  となる。

$\mathbb{R}^2$  上の 2 次元  $\mathcal{N} = (2, 2)$  超対称性では R-対称性として  $U(1)_A \times U(1)_V$  が存在する。また exactly marginal 演算子  $O_i$  は R-電荷  $(q_A, q_V) = (2, 0)$  のカイラル多重項における演算子や  $(0, 2)$  のツイステッドカイラル多重項における演算子として解釈される。この言及を少し噛み砕くと、R-電荷  $(q_A, q_V) = (2, 0)$  のカイラル多重項の F-項すなわち超ポテンシャル  $W(\Phi)$  による変形をカイラル変形といい、R-電荷  $(q_A, q_V) = (0, 2)$  のツイステッドカイラル多重項の F-項すなわちツイステッド超ポテンシャル  $\widetilde{W}(Y)$  による変形をツイステッドカイラル変形という。

カイラル多重項 R-電荷

$R_V$ symmetry	$R_A$ symmetry
$\phi \rightarrow e^{2i\alpha q_V} \phi$	$\phi \rightarrow e^{2i\alpha q_A} \phi$
$\psi_+ \rightarrow e^{i(q_V-1)\alpha} \psi_+$	$\psi_+ \rightarrow e^{i(q_A-1)\alpha} \psi_+$
$\psi_- \rightarrow e^{i(q_V-1)\alpha} \psi_-$	$\psi_- \rightarrow e^{i(q_A+1)\alpha} \psi_-$
$F \rightarrow e^{i(q_V-2)\alpha} F$	$F \rightarrow e^{i q_A \alpha} F$

ツイステッドカイラル多重項 R-電荷

$R_V$ symmetry	$R_A$ symmetry
$y \rightarrow e^{2i\alpha q_V} y$	$y \rightarrow e^{2i\alpha q_A} y$
$\bar{\chi}_+ \rightarrow e^{i(q_V-1)\alpha} \bar{\chi}_+$	$\bar{\chi}_+ \rightarrow e^{i(q_A-1)\alpha} \bar{\chi}_+$
$\chi_- \rightarrow e^{i(q_V+1)\alpha} \chi_-$	$\chi_- \rightarrow e^{i(q_A-1)\alpha} \chi_-$
$G \rightarrow e^{i q_V \alpha} G$	$G \rightarrow e^{i(q_A-2)\alpha} G$



したがって CFT の変形にはカイラル変形とツイステッドカイラル変形の 2 種類が存在するので、Kähler 多様体である共形多様体  $\mathcal{M}$  は局所的にカイラル変形に対応するモジュライ空間  $\mathcal{M}_c$  とツイステッドカイラル変形に対応するモジュライ空間  $\mathcal{M}_{tc}$  に分離している:

$$\mathcal{M}_{\text{CFT}} = \mathcal{M}_c \times \mathcal{M}_{tc}. \quad (7.4)$$

次に Ricci 平坦多様体を標的空間とする 2 次元  $\mathcal{N} = (2, 2)$  NLSM を考える。この場合において、上記の exactly marginal 演算子  $O_i$  による変形は標的空間計量を Ricci 平坦に保った変形に対応する。

- Ricci 平坦な変形

この言及についての意味をもう少し噛み砕く。まず NLSM  $\mathcal{L} \ni G_{mn}(X)\partial_a X^m \partial_b X^n g^{ab}$  の摂動は通常通り  $X$  を古典的な場の配位周りの揺らぎ  $X = x_c + x_q$  として議論する。すると  $G(x_c)$  の部分は結合定数の役割を担う。例えば、大まかには  $\partial_a x_q^m \partial^a x_q^n (G_{mn}(x_c) + R_{mknl}(x_q)^k (x_q)^l)$  の様な形になりプロパゲーターが  $G^{mn}(x_c)$  で与えられ、 $R_{mknl}$  は結合定数としてみなされる。この下で 1-ループのレベルで 2 点関数を計算し、次元正則化を行い、カウンター項を用いて  $S(G, R) \rightarrow S(\hat{G}, \hat{R}) = S(G, R) + S_{\text{ct}}(G, R; \epsilon)$  によって繰り込みを実行し  $\beta$  関数を計算すると以下を得る:

$$\beta_{mn}^G = \alpha' R_{mn}. \quad (7.5)$$

したがって  $\mathcal{N} = (2, 2)$  NLSM は Ricci 平坦で超共形場理論となる。ここで exactly marginal な変形は CFT を保つので Ricci 平坦を保った変形に対応している事がわかる。

つまり上記のカイラル / ツイステッドカイラルな変形は Ricci 平坦な計量の変形である Kähler / 複素構造の変形に対応する事がわかる。

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_c \times \mathcal{M}_{tc} = \mathcal{M}_{\text{CS}} \times \mathcal{M}_{\text{K}}. \quad (7.6)$$

ここで  $\dim \mathcal{M}_{\text{K}}$  は  $h^{1,1}$ 、 $\dim \mathcal{M}_{\text{CS}}$  は  $h^{d-1,1}$  で与えられる。

## 7.2 Ricci 平坦モジュライ空間

ここでは Ricci 平坦な Calabi-Yau に関して基本的な事柄をまとめていく [38, 68]。但しここではあまり詳細には立ち入らない事にする。Calabi-Yau 多様体  $\mathcal{M}$  は Riemann 多様体の中で特別な構造を持ち合わせた多様体の事を指す。基本的な構造としては、 $\mathcal{M}$  上の計量  $g$  と複素構造  $J$  を用いた Kähler 形式  $k = g \cdot J$  と非自明な holomorphic 3-形式  $\Omega$  が存在する。Calabi-Yau 多様体はこの  $k, \Omega$  によって特徴付けられる。ここで言及している Calabi-Yau 多

様体とは、ここでは Ricci 平坦な Kähler 多様体の事を指している。

まず Kähler 多様体を定義する。Kähler 多様体とは複素  $n$  次元多様体  $X$  上のエルミート計量  $g := g_{i\bar{j}}dz^i \otimes \overline{dz^j} + g_{\bar{i}j}\overline{dz^i} \otimes dz^j$ , ( $g_{ij} = g_{\bar{i}\bar{j}} = 0$ ) から構成される  $(1, 1)$ -形式

$$J := ig_{i\bar{j}}dz^i \otimes \overline{dz^j} - ig_{\bar{i}j}\overline{dz^i} \otimes dz^j = ig_{i\bar{j}}dz^i \wedge \overline{dz^j}, \quad (7.7)$$

が閉  $dJ = 0$  である時  $(X, g)$  を Kähler 多様体といい、 $J$  を Kähler 形式という。上記の記述は複素座標上での記述であり、より一般には複素構造  $J_m^n$  に関して  $J_{mn} = J_m^l g_{ln}$  として  $J := \frac{1}{2}J_{mn}dx^m \wedge dx^n$  である。またこの時の  $g$  を Kähler 計量という。また  $J$  は Levi-Civita 接続  $\nabla$  によって

$$\nabla J = 0, \quad (7.8)$$

を満たす。よってこれは平行移動で不変である。ここで  $J$  は複素構造  $J^2 = -1$  は以下の関係がある:

$$J_i^k J_k^j = -\delta_i^j, \quad J_i^j = i\delta_i^j, \quad J_i^k J_j^l g_{kl} = g_{ij}. \quad (7.9)$$

最後の式はエルミート計量である事を意味してる。また Kähler 形式は実である:

$$\overline{J} = -ig_{i\bar{j}} \overline{dz^i} \wedge dz^j = -ig_{\bar{j}i} \overline{dz^i} \wedge dz^j = ig_{\bar{j}i} dz^j \wedge \overline{dz^i} = J \quad (g_{i\bar{j}} = g_{\bar{i}\bar{j}} = g_{j\bar{i}}).$$

Kähler 形式が閉であるとは

$$\begin{aligned} dJ &= (\partial + \bar{\partial})ig_{i\bar{j}}dz^i \wedge \overline{dz^j} \\ &= i\partial_k g_{i\bar{j}} dz^k \wedge dz^i \wedge \overline{dz^j} + i\bar{\partial}_{\bar{k}} g_{i\bar{j}} \overline{dz^k} \wedge dz^i \wedge \overline{dz^j} \\ &= \frac{i}{2}(\partial_k g_{i\bar{j}} - \partial_i g_{k\bar{j}}) dz^k \wedge dz^i \wedge \overline{dz^j} + \frac{i}{2}(\bar{\partial}_{\bar{k}} g_{i\bar{j}} - \bar{\partial}_{\bar{j}} g_{i\bar{k}}) \overline{dz^k} \wedge dz^i \wedge \overline{dz^j} \\ &= 0, \\ \partial_k g_{i\bar{j}} &= \partial_i g_{k\bar{j}}, \quad \bar{\partial}_{\bar{k}} g_{i\bar{j}} = \bar{\partial}_{\bar{j}} g_{i\bar{k}}, \end{aligned} \quad (7.10)$$

を意味する。この添字の構造から読み取れる様に Kähler 計量は以下の様に記述される事を意味する:

$$g_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}. \quad (7.11)$$

ここで  $\mathcal{K}$  は多様体  $X$  上の Kähler ポテンシャルという。この Kähler ポテンシャル  $\mathcal{K}$  は一意的には決まらない。なぜなら常に holomorphic と anti-holomorphic な関数  $F$  を用いて Kähler 変換を実行する自由度が常に残っているからである:

$$\mathcal{K}(z, \bar{z}) \longrightarrow \mathcal{K}(z, \bar{z}) + F(z) + \overline{F}(\bar{z}). \quad (7.12)$$

## 7.2.1 コホモロジー類

ここでは考えている多様体上の微分形式について触れる。どのような微分形式、すなわち各  $n$ -形式が目している多様体上にいくつ定義できるかを考える。この微分形式を調べる事によって各  $n$ -形式が住んでいるベクトル空間が与えられ、多様体を特徴付ける量となる。

複素  $n$  次元多様体  $\mathcal{M}$  上の  $(p, q)$ -form は以下の様に記述される:

$$A_{i_1 i_2 \dots i_p j_1 j_2 \dots j_q} dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p} \wedge \overline{dz}^{j_1} \wedge \dots \wedge \overline{dz}^{j_q}, \quad (7.13)$$

$(p, q)$ -形式全体の成すベクトル空間を  $\Omega^{p,q}(\mathcal{M})$  と記述する。 $\mathcal{M}$  上の微分形式に作用する外微分作用素  $d$  は

$$d = dz^i \wedge \partial_i + \overline{dz}^i \wedge \bar{\partial}_i = \partial + \bar{\partial}, \quad \partial := dz^i \wedge \partial_i, \quad \bar{\partial} := \overline{dz}^i \wedge \bar{\partial}_i, \quad (7.14)$$

と与えられる。 $\partial, \bar{\partial}$  はそれぞれ holomorphic / anti-holomorphic 外微分作用素である:

$$\partial : \Omega^{p,q}(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{p+1,q}(\mathcal{M}), \quad \bar{\partial} : \Omega^{p,q}(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{p,q+1}(\mathcal{M}) \quad (7.15)$$

この時 nilpotent  $d^2 = 0$  から以下の事が言える:

$$\partial^2 = 0, \quad \partial \bar{\partial} + \bar{\partial} \partial = 0, \quad \bar{\partial}^2 = 0. \quad (7.16)$$

特に  $\bar{\partial}$  の  $\Omega^{p,q}(\mathcal{M})$  への制限を

$$\bar{\partial}^{p,q} : \Omega^{p,q}(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{p,q+1}(\mathcal{M}), \quad (7.17)$$

とすると  $\bar{\partial}^{p,q+1} \circ \bar{\partial}^{p,q} = 0$  を満たすので

$$0 \xrightarrow{\bar{\partial}^{p,-1}} \Omega^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}^{p,0}} \Omega^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}^{p,1}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}^{p,q-1}} \Omega^{p,q} \xrightarrow{\bar{\partial}^{p,q}} \Omega^{p,q+1} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}^{p,n-1}} \Omega^{p,n} \xrightarrow{\bar{\partial}^{p,n}} 0, \quad (7.18)$$

のコホモロジーを考える事が出来る。Dolbeault コホモロジー類は以下で定義される:

$$H_{\bar{\partial}}^{(p,q)}(\mathcal{M}) := \text{Ker}(\bar{\partial}^{p,q}) / \text{Im}(\bar{\partial}^{p,q-1}) = \frac{\bar{\partial}\text{-closed } (p,q)\text{-form}}{\bar{\partial}\text{-exact } (p,q)\text{-form}}, \quad (7.19)$$

$$H_{\bar{\partial}}^{(p,q)}(\mathcal{M}) = H_{\partial}^{(p,q)}(\mathcal{M}) := H^{(p,q)}(\mathcal{M}), \quad (7.20)$$

$$h^{p,q} := \dim H^{(p,q)}(\mathcal{M}) \quad (7.21)$$

定義が意味している事は「閉形式のベクトル空間を完全形式のベクトル空間で割ったベクトル空間」である。コホモロジー類の次元を Hodge 数という。複素  $n$  次元多様体  $M$  上の Dolbeault コホモロジーと de Rham コホモロジーの関係は以下で与えられる:

$$\Omega^r(\mathcal{M}) := \bigoplus_{r=p+q} \Omega^{p,q}(\mathcal{M}), \quad (7.22)$$

$$H^r(\mathcal{M}) := \text{Ker}(\bar{\partial}^r) / \text{Im}(\bar{\partial}^{r-1}), \quad (7.23)$$

$$\dim H^r(\mathcal{M}) =: h^r = \sum_{p+q=r} h^{p,q}. \quad (7.24)$$

複素  $n$  次元における Hodge 数の間には以下の関係が成り立つ:

$$\begin{aligned} h^{(p,q)} &= h^{(q,p)} \quad \text{複素共役,} \\ h^{(d-p,d-q)} &= h^{(p,q)} \quad \text{Hodge 双対.} \end{aligned} \quad (7.25)$$

### 7.2.2 モジュライ空間

Calabi-Yau 多様体は Ricci 平坦  $R_{mn}(g) = 0$  な Kähler 多様体であった。この Ricci 平坦性を保ったまま、Calabi-Yau 多様体上の計量の変形  $g \rightarrow g + \delta g$  を実行する事が可能である。この変形には 2 種類存在し、それぞれモジュライ空間を形成している。

変形を議論する際には重要な性質である Ricci 平坦性を保つ必要がある:

$$R_{mn}(g) = 0 \implies R_{mn}(g + \delta g) = 0. \quad (7.26)$$

ここで素朴な計量の変形  $g \rightarrow g + \delta g$  にはゲージ変換の自由度として  $\mathcal{L}_\xi g$  が含まれてしまっている事に注意を払う必要がある:

$$\delta g = \{\delta g', \mathcal{L}_\xi g\}. \quad (7.27)$$

ここで  $\delta g'$  は今興味のあるモジュライ空間を形成する物理的な変形の自由度を表している。すなわち我々が引き出したいモジュライ空間の情報は、この非物理的な自由度を落とした部分のみである:

$$\text{モジュライ空間} = \{\delta g', \mathcal{L}_\xi g\} / \mathcal{L}_\xi g. \quad (7.28)$$

このゲージ自由度を落とす為にゲージ固定に対応する条件を設定する必要があり、それが以下で与えられる [68]:

$$\nabla^m \delta g_{mn} = \frac{1}{2} \nabla_n (g^{ml} \delta g_{ml}) \iff \nabla^m \left( \delta g_{mn} - \frac{1}{2} g^{kl} \delta g_{kl} g_{mn} \right) = 0. \quad (7.29)$$

この拘束条件を課す事によって非物理的な自由度を落とす事が可能となる。ただし変形された計量はエルミートでは無い、つまり  $g_{i\bar{j}}$  以外の成分がノンゼロとなる。故に  $\delta g_{ij}$  型の変形は許される事を意味する。しかし適切な変数変換によってエルミート計量に引き戻す事が出来る。これは元々の CY 上ではもはや複素構造  $J$  では無くなってしまっているが、新たな  $J'$  を複素構造とする CY' が存在している事を意味する。この時  $\delta g_{ij}$  はモジュライである。上記のゲージ固定によって、 $R_{mn}(g + \delta g) = 0$  の  $\delta g$  の 1 次までの展開に関する方程式が得られるが、Kähler 多様体上の計量及び Riemann テンソルの添字の構造から多様体上の座標で実  $x^i, y^i$  から複素  $z^i, \bar{z}^i$  とした時モジュライはそれぞれ分離する事によって、以下の 2 種類になる:

$$\delta g_{ij} \quad \left( = \delta g_{i\bar{j}}^* \right), \quad \delta g_{i\bar{j}}. \quad (7.30)$$

$\delta g_{i\bar{j}}$  型の変形は添字の構造から読み取れる様にエルミート計量を保っている。このタイプは Kähler (1,1)-形式  $J$  の変形に現れる。一方で  $\delta g_{ij}, (\delta g_{i\bar{j}})^*$  型は先程とは異なってもはやエルミート計量では無くなっている。この点に関しては上記で言及した様に、変形としてはノンゼロである事が許され、これは複素構造の変形に対応する。このタイプは holomorphic (3,0)-形式  $\Omega$  (anti-holomorphic (0,3)-形式  $\bar{\Omega}$ ) の変形に現れる:

$$\begin{aligned}\delta J &= \frac{1}{2} \delta J_{ij} dx^i \wedge dy^j = i \delta_i^k \delta g_{k\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j \\ &= i \delta g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j,\end{aligned}\tag{7.31}$$

$$\delta \Omega = \Omega_{ijk} g^{k\bar{l}} \delta g_{\bar{k}l} z^i \wedge z^j \wedge \bar{z}^{\bar{l}}.\tag{7.32}$$

したがって以下のような対応関係が読み取れる:

$$\begin{aligned}\delta g_{i\bar{j}} &: (1,1)\text{-形式 } J \text{ 変形,} \\ \delta g_{ij} &: (2,1)\text{-形式 } \Omega \text{ 変形.}\end{aligned}\tag{7.33}$$

これらの変形は Hodge ダイヤモンドにおいて非自明に残るコホモロジー類  $H^{(1,1)}(\mathcal{M}), H^{(2,1)}(\mathcal{M})$  に対応していることが知られている。即ち、 $\delta J$  と  $\delta \Omega$  という独立な変形の自由度を調べることで非自明に残る Hodge 数がわかるのである。Ricci 平坦計量の変形に関してはこれらのモジュライ空間を複素構造モジュライ空間と Kähler 構造モジュライ空間と呼ぶ。holomorphic  $(n,0)$ -形式  $\Omega$  ( $(0,n)$ -形式  $\bar{\Omega}$ ) を Calabi-Yau 多様体上の  $n$ -サイクルで積分したものを

$$S^i := \int_{C_{i,n}} \Omega,\tag{7.34}$$

を多様体上の複素構造モジュライと呼ぶ。つまり Calabi-Yau 多様体に 3-サイクルが存在すると、この  $S^i$  を変える自由度としてモジュライが存在する。 $i$  は  $i = 1, \dots, h^{n-1,1} = h^{1,n-1}$  で、 $h^{n-1,1}$  はこの  $n$ -サイクルの独立な数である。一方で (1,1)-形式である Kähler 形式  $J$  を 2-サイクルで積分したものを

$$\rho_A := \int_{C_{A,2}} J,\tag{7.35}$$

を多様体上の Kähler モジュライと呼ぶ。 $A = 1, \dots, h^{1,1} = h^{n-1,n-1}$  であり、 $h^{1,1}$  は独立な 2-サイクルの数である。

これらの事から Calabi-Yau 多様体上の変形の自由度が成すモジュライ空間  $M$  は

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\text{KS}} \times \mathcal{M}_{\text{CS}},\tag{7.36}$$

の様に直積構造となっている。ミラー対称性はこの 2つのモジュライ空間の入れ替えに対応する。

### 7.3 Zamolodchikov 計量と GLSM 球面分配関数

これまで超共形場理論のモジュライ空間として共形多様体と Ricci 平坦を保った計量のモジュライ空間の関係について見てきた。次は GLSM の球面分配関数と今まで見てきたモジュライ空間がどの様に関係付くかを解説する [21]。

カイラルタイプの変形はカイラル多重項の F-項すなわち超ポテンシャル  $W$  によって行われる。しかしこの種類の変形は  $SU(2|1)_A^*$  の下では  $Q$ -完全項として記述される [53]:

$$\int_{S^2} F^{qv=2} = \int_{S^2} Q(\epsilon C\psi), \quad \int_{S^2} W = \int_{S^2} Q(\dots). \quad (7.37)$$

したがって超対称局所化の議論  $tQV$  を追加して  $\frac{d}{dt}Z = 0$  の議論と同様にして超ポテンシャル  $W$  のパラメーターに  $Z_{S^2}$  の結果に依存しない事がわかる。すなわち  $SU(2|1)_A$  の球面分配関数は複素構造の情報を感知しない。

次にツイステッドカイラルタイプの変形はツイステッド超ポテンシャル  $\widetilde{W}$  によって行われる。結論から言うとツイステッド超ポテンシャル  $\widetilde{W}$  は  $Q$ -完全形式では記述されない。しかしここで超ポテンシャル同様にツイステッドカイラル多重項のフェルミオンに関する超対称性変換に注目する [21]<sup>†</sup>:

$$Q\xi_+ = -i\gamma^m \nabla_m (Y\bar{\epsilon}_-) + G\bar{\epsilon}_+. \quad (7.38)$$

ここでこの超対称性変換は共形 Killing スピノル方程式を用いて全微分書き換えている。またベクトル多重項は微分を作用させる事でツイステッドカイラルとして記述出来るので、ベクトル多重項からツイステッドカイラル多重項としての複素の記法への書き換えが与えられている [20]。また添字に関して、 $\bar{\epsilon}_\pm$  はカイラリティ射影演算子  $P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^3)$  によって定義される。このフェルミオンに関する超対称性変換を  $G$  に関して解く事を考える。この時、変換パラメーターのノルムを  $\|\bar{\epsilon}\|^2 = \bar{\epsilon}\bar{\epsilon}$  とする。複素座標として  $z := x^1 + ix^2, \bar{z} := x^1 - ix^2$  を導入する。この時  $\nabla_z \bar{\epsilon}_+ = 0, \nabla_{\bar{z}} \left( \frac{\bar{\epsilon}}{\|\bar{\epsilon}\|^2} \right) = 0$  の関係を用いると次の様に書き換える事が出来る:

$$G = Q \left( \frac{\bar{\epsilon}_+ \chi_+}{\|\bar{\epsilon}_+\|^2} \right) + 2i \nabla_z \left( \frac{1 + \frac{z\bar{z}}{4r^2}}{\|\bar{\epsilon}_+\|^2} \bar{\epsilon}_+^\dagger \Gamma_1 \bar{\epsilon}_- Y \right). \quad (7.39)$$

ここで Weyl 射影によって平坦空間を  $S^2$  に射影すると計量は以下の様になる:

$$ds^2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{4r^2}\right)} dx^a dx^b \eta_{ab}. \quad (7.40)$$

\*  $SU(2|1)$  は 2 次元球面上の超対称代数を指す。球面上の超対称代数は R 対称性としてベクトルの R 対称性を持つ  $SU(2|1)_A$  と軸性 R 対称性を持つ  $SU(2|1)_B$  の 2 種類存在する。ここでは前者のみに注目している。

<sup>†</sup> [21] では超対称性変換のパラメーターとして  $\epsilon, \bar{\epsilon}$  を用いているが、ここで用いている記法に合わせる。またツイステッドカイラルに属するフェルミオンも  $\chi$  としている。

これに伴って平坦空間上の Clifford 代数  $\Gamma^m$  と  $S^2$  上の  $\gamma^m$  の関係は  $\Gamma^m = (1 + \frac{z\bar{z}}{4r^2})\gamma^m$  で与えられる。今興味のある量は  $G$ -項を  $S^2$  上で積分した量である。この積分領域を北半球パッチと南半球パッチに分ける事を考える:

$$\int_{S^2} G = \int_{D_N} G + \int_{D_S} G. \quad (7.41)$$

ここで領域  $D_N, D_S$  を以下のように定義している:

$$D_N := \{x|x^2 \leq R^2\}, \quad D_S := \{x|x^2 \geq R^2\} \quad (7.42)$$

今任意のスケール  $R^2$  を導入して領域を分けたが、結果は分け方に寄らないので最終的に  $R^2 \rightarrow 0$  として良い。そこで  $D_S$  に注目する事にすると上記の  $G$  の式を用いて以下を得る:

$$\int_{D_S} G = \int_{D_S} \mathcal{Q} \left( \frac{\bar{\epsilon}_+ \chi_+}{\|\bar{\epsilon}_+\|^2} \right) + 2i \int_{D_S} \nabla_z \left( \frac{1 + \frac{z\bar{z}}{4r^2}}{\|\bar{\epsilon}_+\|^2} \bar{\epsilon}_+^\dagger \Gamma_1 \bar{\epsilon}_- Y \right). \quad (7.43)$$

超対称局所化の文脈において  $\mathcal{Q}$ -完全形式の演算子の期待値は自明になるので 1 項目は結果に寄与しない事が明らかである。したがってこれ以降では 2 項目のみをに注目する。この 2 項目は Stokes の定理及び以下の恒等式 [21]

$$\|\bar{\epsilon}_+\|^2 = \frac{1}{4r^2} \frac{z\bar{z}}{1 + \frac{z\bar{z}}{4r^2}} \|\bar{\epsilon}_{0+}\|^2, \quad \bar{\epsilon}_+^\dagger \Gamma_1 \bar{\epsilon}_- = -\frac{i}{2r} \frac{z}{1 + \frac{z\bar{z}}{4r^2}} \|\bar{\epsilon}_{0+}\|^2. \quad (7.44)$$

を用いることで全微分を評価する事が出来る。 $\bar{\epsilon}_{0+}$  は定数スピノルである。多少この全微分の評価を詳細に議論する。まず微分の中身は上記の恒等式を用いる事で計算される:

$$\frac{1 + \frac{z\bar{z}}{4r^2}}{\|\bar{\epsilon}_+\|^2} \bar{\epsilon}_+^\dagger \Gamma_1 \bar{\epsilon}_- Y = -2ir \frac{1}{z} \left( 1 + \frac{z\bar{z}}{4r^2} \right) = -2ir \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} \left( 1 + \frac{z\bar{z}}{4r^2} \right). \quad (7.45)$$

したがって Stokes の定理を用いる為に全微分項を書き換える事を考える。複素座標として  $z := x^1 + ix^2, \bar{z} := x^1 - ix^2$  を導入し、これより  $x^1 = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), x^2 = \frac{1}{2}(z - \bar{z})$  である。また微分も  $z$  から  $x$  で書き直すと  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial x^1}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x^2} = \frac{1}{2}(\partial_{x^1} - i\partial_{x^2})$  である。したがって  $z$  から  $x$  表示に直す事によってクロスタームがキャンセルするので  $\nabla_z(zF(|z|^2)) = \frac{1}{2}(\partial_{x^1} - i\partial_{x^2}) \left[ (x^1 + ix^2)F(x^2) \right] = \nabla_m \left( \frac{1}{2}x^m F(x^2) \right)$  となる。したがって上記の全微分項最終的に以下の様書き換える事が出来る:

$$\nabla_z \left( \frac{1 + \frac{z\bar{z}}{4r^2}}{\|\bar{\epsilon}_+\|^2} \bar{\epsilon}_+^\dagger \Gamma_1 \bar{\epsilon}_- Y \right) = \nabla_m \left( \frac{1}{2}x^m F(x^2) \right). \quad (7.46)$$

ここで  $F(x^2) = -2ir \frac{1}{x^2} \left( 1 + \frac{z\bar{z}}{4r^2} \right)$  としている。ベクトルを  $A^m := \frac{1}{2}x^m F(x^2)$  とし、Stokes の定理によって  $S^2$  上の積分のうち  $d\varphi$  方向の積分が残り  $\theta$  方向のベクトル  $n_{\theta,m} = \frac{1}{1 + \frac{z\bar{z}}{4r^2}} \frac{x_m}{\sqrt{x^2}}$

と内積が取られ  $\theta$  方向の成分が残る。したがってストークスの定理で境界の向きに注意を払い、全微分項は以下の様に評価される:

$$\begin{aligned}
 2i \int_{D_S} \nabla_z \left( \frac{1 + \frac{z\bar{z}}{4r^2}}{\|\bar{\epsilon}_+\|^2} \bar{\epsilon}_+^\dagger \Gamma_1 \bar{\epsilon}_- Y \right) &= -2i \lim_{R \rightarrow 0} \int d\varphi \sqrt{g_\theta} n_{\theta,m} A^m Y(R, \theta) \\
 &= -2i \lim_{R \rightarrow 0} \int d\varphi \frac{\sqrt{x^2}}{1 + \frac{R^2}{4r^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2}} \frac{x^2}{1 + \frac{R^2}{4r^2}} \frac{F(x^2)}{2} Y(R, \theta) \\
 &= -4\pi r Y(N). \tag{7.47}
 \end{aligned}$$

ここで  $Y(N)$  は  $S^2$  上の北極の 1 点に局所化している  $Y$  を意味する。  $R \rightarrow 0$  によって  $Y$  が北極に局所化すると  $d\varphi$  積分は完全に空回りする。  $g_\theta$  は  $S^2$  上の計量を  $x$  表示を極座標に直した際の  $\theta$  方向である  $ds^2 = \frac{1}{(1 + \frac{x^2}{4r^2})} [(dx^1)^2 + (dx^2)^2] = \frac{1}{(1 + \frac{x^2}{4r^2})} [d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2]$ 、  $\rho^2 = x^2$ 。したがって以上の結果をまとめると以下の関係を得た:

$$\int_{S^2} G = -4\pi r Y(N). \tag{7.48}$$

北半球パッチは領域が潰れるので寄与は自明になる。この議論は  $\bar{G}$  に対してもまったく同様の議論を展開できるので以下の関係も得る事が出来る:

$$\int_{S^2} \bar{G} = 4\pi r \bar{Y}(S). \tag{7.49}$$

ここで上記の関係は  $\mathcal{Q}$ -完全形式の寄与が自明になる相関関数の中に挿入された演算子に関して成り立つ関係である事に注意である。この式の意味は積分された  $G$  項の挿入は最低次の成分場の局所的な挿入と  $\mathcal{Q}$ -同値である事を意味する。

ここでツイステッドカイラル多重項としての複素記法への書き換えを行ったベクトル多重項に関して以下のことが言える。上記の議論の様に  $S^2$  上の北極及び南極に局所化している場や超対称性変換のパラメーターである共形 Killing スピノルに対してはカイラリティを議論することが可能である:

$$P_+ \epsilon(N) = P_- \epsilon^c(N) = 0, \quad P_- \epsilon(S) = P_+ \epsilon^c(S) = 0. \tag{7.50}$$

ここで  $\epsilon(N/S)$  は北極もしくは南極に挿入されている事を表している。またカイラリティ演算子は  $P_\pm := \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^3)$  で定義されている。この時にツイステッドカイラル多重項に属するスカラー場  $Y$  に対する超対称性変換は以下の様になる:

$$\mathcal{Q}_A Y(N) = \mathcal{Q}_A \bar{Y}(S) = 0. \tag{7.51}$$

ここでツイステッドカイラル多重項とベクトル多重項記法を  $\hat{\sigma} := \sigma + i\eta$  として関係付けると超対称性変換は

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Q}\sigma &= -\frac{1}{2}(\lambda^\dagger \epsilon + \epsilon^\dagger \lambda), \quad \mathcal{Q}\eta = \frac{i}{2}(\lambda^\dagger \gamma_3 \epsilon + \epsilon^\dagger \gamma_3 \lambda), \\
 \mathcal{Q}\hat{\sigma} &= -\lambda^\dagger \frac{1 + \gamma_3}{2} \epsilon + \lambda \frac{1 - \gamma_3}{2} \epsilon^c. \tag{7.52}
 \end{aligned}$$



で与えられているので、直ちに  $Q\hat{\sigma}(N) = Q\bar{\sigma}(S) = 0$  を確認する事が出来る。この事が意味している事は、NP 及び SP に挿入されているツイステッドカイラル、ツイステッド反カイラルは  $Q$ -閉であるという事である。

したがって  $S^2$  分配関数  $Z_{S^2}$  が超対称局所化によって得られたとすると、この  $Z_{S^2}$  をツイステッドカイラルにおけるモジュライで微分すると以下の様になる:

$$\partial_a \partial_{\bar{b}} \log Z_{S^2}^A[\lambda, \bar{\lambda}] = \left\langle \int_{S^2} d^2x \sqrt{g} G_a(x) \int_{S^2} d^2y \sqrt{g} \bar{G}_{\bar{b}}(y) \right\rangle. \quad (7.53)$$

この微分の意味について触れる。共形多様体  $\mathcal{M}$  は exactly marginal 演算子の結合定数  $\lambda^i$  が張っている空間の事であった。つまり  $\mathcal{M}$  上の Kähler 計量である Zamolodchikov 計量を得るにはこの結合定数で微分されるべきである。ここで上記の [21] で与えられた  $\int G$  と  $Y(N)$  の関係を用いると以下を得る:

$$\partial_a \partial_{\bar{b}} \log Z_{S^2}^A[\lambda, \bar{\lambda}] = \left\langle \int_{S^2} G_a(x) \int_{S^2} \bar{G}_{\bar{b}}(y) \right\rangle = \left\langle (-4rY(N))(4r\bar{Y}(S)) \right\rangle = -(4r)^2 \langle Y(N)\bar{Y}(S) \rangle. \quad (7.54)$$

ここで、[21] において使用されている恒等式である超対称 Ward 恒等式を認めると

$$-(4r)^2 \langle Y(N)\bar{Y}(S) \rangle = -(4r)^2 \langle rG(N)r\bar{G}(S) \rangle = -(2r)^4 \langle G(N)\bar{G}(S) \rangle, \quad (7.55)$$

となる。ここまで来れば、これは exactly marginal な演算子の 2 点関数なので Zamolodchikov 計量の定義より

$$-(2r)^4 \langle G(N)\bar{G}(S) \rangle = g_{i\bar{j}} = -\partial_i \partial_{\bar{j}} K_{tc}, \quad (7.56)$$

となる。重要な点として  $(2r)^4 \langle G_i(N)\bar{G}_{\bar{j}}(S) \rangle = g_{i\bar{j}}$  で Zamolodchikov 計量の定義通り  $r^{2d}$  の factor まで合っている事に注意。したがって up to holomorphic ambiguity で

$$Z_{S^2}^A = e^{-K_{tc}}, \quad (7.57)$$

を得る。A は  $SU(2|1)_A$  を意味する。

複素構造モジュライについても同様の議論が出来る (カイラル多重項  $\phi$ ):

$$\partial_i \partial_{\bar{j}} \log Z_{S^2}^B = -(4r)^2 \langle \phi_i(N)\bar{\phi}_{\bar{j}}(S) \rangle = -(2r)^4 \langle F_i(N)\bar{F}_{\bar{j}}(S) \rangle = \partial_i \partial_{\bar{j}} K_c. \quad (7.58)$$

したがって up to holomorphic ambiguity で

$$Z_{S^2}^B = e^{-K_c}, \quad (7.59)$$

を得る。B は  $SU(2|1)_B$  を意味する。

## 第8章 世界面インスタントン

ここでは超対称局所化によって得られた KK5-ブレーンを記述する GLSM の球面分配関数  $Z_{\text{GLSM}}^{S^2}$  の結果について先行研究の解釈を用いて物理的側面について議論する。特に具体的には超対称局所化の鞍点からの寄与の部分に注目し、世界面インスタントンとしての物理的解釈を通して議論する。 $Z_{\text{GLSM}}^{S^2}$  の結果について触れる前に、まずはこれまでの先行研究の GLSM の文脈における世界面インスタントンの議論及びその物理的な解釈や、標的空間である Taub-NUT 空間との幾何学的な関係性について概観する。なのでまずこれまでのシングル及び多重センターにおける KK5-ブレーンの背景時空すなわち Taub-NUT 空間における世界面インスタントン効果の議論を解説する [6, 10, 69, 70]。

以下での議論においてまず混乱を回避する為に言葉の定義を最初に述べる事にする。基本的に世界面インスタントンを標的空間における幾何と結び付けて解釈するという事を考える。ここで世界面インスタントンと一括りに言及したが、以下では頭に2種類に関して言及している。1つは、通常の2-サイクルに起因した標的空間への世界面に対する埋め込み写像の世界面インスタントンであり、これを以下では2-サイクル・インスタントンと呼ぶ。他方は、シングルセンターの際の世界面インスタントンであり、[10]において標的空間への埋め込み写像が定義されたもので、これを以下ではディスク・インスタントンと呼ぶ。

一般の多重センター系における Taub-NUT 空間計量は以下で記述される\*:

$$ds_{\text{Taub-NUT}}^2 = H(R)dx_{\mathbb{R}^3}^2 + \frac{1}{H(R)}(d\theta + \omega_i dx^i)^2, \quad (i = 6, 7, 8), \quad (8.1)$$

$$H(R) = \frac{1}{g^2} + \sum_a \frac{1}{\sqrt{2}R_a}, \quad (8.2)$$

$$R_a = \sqrt{(x^6 - s_a^1)^2 + (x^7 - s_a^2)^2 + (x^8 - t_a^1)^2}. \quad (8.3)$$

この  $ds_{\text{Taub-NUT}}^2$  は KK5-ブレーンに対する直行方向の空間  $x^6, x^7, x^8, x^9$  を表している。 $dx_{\mathbb{R}^3}$  は Taub-NUT 空間における底空間の  $\mathbb{R}^3$  方向を表しており、 $d\theta$  は Taub-NUT 空間における  $S^1$  ファイバーを表現している。この Taub-NUT 空間は局所的に  $\mathbb{R}^3 \times S^1$  で記述され

---

\*ここで調和関数  $H(r)$  の規格化等は [11] に従う事にする。

dim	$x^0$	$x^1$	$x^2$	$x^3$	$x^4$	$x^5$	$x^6$	$x^7$	$x^8$	$x^9$
KK5	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	-	-	-	~*

表 8.1: プレーンが広がる方向 : ⊙, コンパクト方向 ( $\tilde{S}^1$ ) : ~\*

るが、もう少し正確に言うと  $S^1$  fibered over base  $\mathbb{R}^3$  である。この  $S^1$  ファイバーの構造はコンパクト方向における計量、すなわち調和関数  $H(r)$  の振る舞いをみる事で理解される。ここで  $R_a$  はセンターからの距離を表している。 $s_a^{1,2}, t_a^1$  は  $\mathbb{R}^3$  におけるセンターの位置を指定するモジュライパラメーターであり、GLSM の言葉では FI パラメーターに対応する。 $S^1$  ファイバーの有効的な半径は  $1/\sqrt{H(R)}$  である。調和関数  $H(R)$  はセンター近傍と無限遠点で以下の振る舞いをする:

$$\frac{1}{H(R \rightarrow 0)} = 0, \quad \frac{1}{H(R \rightarrow \infty)} = g^2. \quad (8.4)$$

つまりセンター直上で  $S^1$  ファイバーが潰れる事を意味しており、無限遠で漸近的な半径  $g$  の  $S^1$  になる。ここでこの振る舞いを見るとセンター近傍  $R_a = 0$  では、見かけ上では計量が特異である様に見えるが、適当な座標変換を実行する事で滑らかに  $\mathbb{R}^4$  となる事がわかる。

多重センター系の Taub-NUT 空間の場合、上記の計量によって記述される Taub-NUT 空間は非常に非自明な構造を持つ。上記で特徴的な位置に注目した調和関数の振る舞いをみた様に、各センターの直上において  $S^1$  ファイバーは潰れる。一方でセンターから離れるにつれて半径  $g$  に漸近的するので、 $S^1$  の構造が現れる。したがって Taub-NUT 空間では2つのセンター間に非自明な 2-サイクルが存在する。故にこの 2-サイクルによって Taub-NUT 空間における世界面インスタントンとして 2-サイクルインスタントンが定義される:

$$\phi : \Sigma = S^2 \longrightarrow S^2, \quad \pi_2(S^2) = \mathbb{Z}. \quad (8.5)$$

次にシングルセンターの系について解説する。シングルセンターの Taub-NUT 空間は、GLSM の文脈では  $U(1)$  対称性を 1 つにする事によって実現されるので、劇的な変化は起きない様に思えるが、重要な点は標的空間の幾何学的観点の議論が大きく変わる事である。シングルセンターは 2-センターの片方を無限遠に突ばす事で理解できる。つまり  $S^1$  ファイバーの線分が  $H(0) = 0$  であり  $H(\infty) = 1/g^2$  であるので開いたシガーの様な幾何となり、トポロジカルには 2次元ディスク  $D^2$  である。すなわちシングルセンター系の Taub-NUT 空間に非自明な 2-サイクルが存在しない。しかし実際には [6] において実行された様に、多重センター系と同様の世界面インスタントン寄与が存在する。ここが Taub-NUT 空間における世界面インスタントンの物理的解釈に関する議論が難しい点である。この物理的解釈を [10] において行われ、[6] の実行したシングルセンター系の Taub-NUT 空間におけるインスタントンに対する標的空間の幾何学的描像と結び付けた議論が次の様にされた。これは世界面を

次の様に分解し、トポロジーとして次のように看做するという事である:

$$\Sigma = S^2 = D^2 \cup \{\infty\}. \quad (8.6)$$

したがってこの世界面の意味でのディスクによってインスタントンが定義されるという物である。具体的に [10] において与えられたディスク・インスタントンは以下で定義される:

$$\text{Disk instanton} : \Sigma \ni D^2 := \{z \mid |z| < 1\} \longrightarrow nC_a := \{\vec{r}(z) = \vec{r}_a + f(|z|)\vec{v}, \theta(z) = n \cdot \arg(z)\}. \quad (8.7)$$

ここで  $\vec{v}$  は  $S^1$  ファイバーされる線分の方向を表すベクトルで、 $C_a$  は  $r_a$  で潰れるシガーであり、 $f(z)$  は境界条件として以下を満たす関数である:

$$f(0) = 0, \quad f(1) = \infty. \quad (8.8)$$

世界面上の  $z = z_0 < 1$  で原点周りで1周すると標的空間における Taub-NUT 空間の意味でのディスクに巻き付き、 $n$  でラベルされている。このディスク・インスタントンは任意の  $g$  に対して定義されている。上記のディスク・インスタントンは、世界面上のユークリッド時間として  $\tau = 1/|z|$  を導入すると、無限遠の半径  $g$  である  $S^1$  ファイバーに  $n$  回巻き付いている弦がセンターに向かって伝搬しており、 $\tau = \infty$  にて解ける様な弦の配位を表している。

また [69] では、上記のディスク・インスタントンの写像を踏まえた上で  $g \rightarrow 0$  における 2-サイクル・インスタントンとディスク・インスタントンの関係について解釈を試みている。具体的にはシングルセンター系における世界面インスタントン効果 (ここで言うところのディスク・インスタントン) と多重センター系における世界面インスタントン効果 (2-サイクル・インスタントン) を与える位相不変量としてはどちらも  $\pi_2(S^2)$  として存在する事を期待し、どちらも本質的に同一の世界面インスタントンであるとしている。この時のシングルセンターの物理的な解釈としては、 $g \rightarrow 0$  極限を実行する事によって無限遠における  $S^1$  ファイバーのみが潰れると予想し、これによって標的空間の Taub-NUT 空間の意味でのディスクがトポロジカルに  $S^2$  になる事を期待している。

これらの先行研究の Taub-NUT 空間への世界面インスタントンに対する物理的解釈を踏まえた上で、本研究 [35] における超対称局所化によって得た KK5-ブレーンを記述する GLSM の球面分配関数の世界面インスタントンについて議論する。本研究において扱った KK5-ブレーンの GLSM に関する球面分配関数は  $g = 0$  において以下の様に得られた:

$$Z_{\text{GLSM}}^{S^2} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-i\theta m} Z_Q(m, \sigma_f, n_f) Z_{\tilde{Q}}(m, \sigma_f, n_f). \quad (8.9)$$

この結果で注目すべきは超対称局所化の鞍点からのインスタントン寄与  $e^{-i\theta m}$  である。先行研究における GLSM の標的空間におけるアイソメトリーを破る効果を生み出すインスタン

---

トン計算では  $g \rightarrow 0$  極限で実行されていた [5]。今注目している分配関数は  $g = 0$  において得られる結果であり、そこに鞍点上の寄与としてインスタントンが存在する。ここで  $m$  は第一 Chern 類によって与えられ、整数値となる。またこの寄与は GLSM における世界面インスタントンとして見えている寄与 [6, 10] でもあり、シングルセンター系の Taub-NUT 空間の場合は、[10] によって導入されたディスク・インスタントンとしての世界面インスタントンと理解する事が出来る。

また先行研究の GLSM における世界面インスタントンの寄与の FI-パラメーター部分について触れておく。GLSM のインスタントン計算では、 $g \rightarrow 0$  極限を実行する事で Stückelberg 型のカイラル多重項のスカラー場の運動項がフリーズアウトする事によりダイナミカルな FI-パラメーターが固定されている。これによってセンターから有限の距離で FI-パラメーターが与えられる事により寄与が残っていた。一方で局所化の計算では全て積分をしているので寄与が残っていない。

最後に  $g$  の有限領域におけるディスク・インスタントンについて言及する。[10] において与えられたディスク・インスタントンの定義は有限の  $g$  においても定義されている。しかし本研究の局所化の解析において議論した様に、Stückelberg 型のカイラル多重項の 1-ループ行列式の評価から、有限の  $g$  の領域におけるインスタントン効果はゲージ不変性や積分の有限性等の観点から許されるインスタントン数はゼロしか取り得ない事が示された。これはつまり世界面から標的空間への定数写像を意味するので巻き付きがない事を意味する。故に有限の  $g$  における Taub-NUT 空間に対する世界面インスタントンは存在しないと言える。

## 第9章 結論

ここでは本研究の全体及び得られた結果についてまとめる。まず最初に本研究における主な結果を簡潔に述べると、弦理論的效果を探る為に超対称局所化の手法を用いる事でシングルセンターの KK5-ブレーンを記述する GLSM の球面分配関数を鞍点及びその周りの揺らぎを含めて全て厳密に評価した事である。また先行研究による Taub-NUT 空間における世界面インスタントンの解釈を用いる事によって本研究で得られた結果の物理的意味について議論した。

これまで超弦理論の低エネルギー有効理論という文脈での超重力理論のレベルにおいて、弦理論的な広がった物体である KK5-ブレーンの背景時空としての Taub-NUT 空間の性質が理解されてきた。しかしその背景時空は世界面インスタントンによって補正される事が知られている [5, 6, 10, 70]。この事実が意味するところは粒子描像に立った有効理論としての超重力理論ではなく、弦理論の観点からの解析では弦理論的效果として世界面インスタントンの効果が存在するという事である。この弦描像に立った解析を実現させる理論が GLSM である。

GLSM の文脈において、センターが1つの状況における Taub-NUT 空間に対する世界面インスタントンによる補正が [6] で評価され、これに対して物理的解釈を与えたのが [10] である。これらの議論は Taub-NUT 空間の  $S^1$  ファイバーの半径  $g$  に関して  $g \rightarrow 0$  となる領域に制限されたものである。しかし幾何学的観点からは  $g \rightarrow 0$  という制限に対する物理的意味が不明瞭である。また [10] によって与えられたインスタントンの標的空間への世界面の埋め込み写像自体は有限の  $g$  でも定義されているが、先行研究では有限の領域についての言及はなされていない。そこで本研究では、 $g$  の値に依存せずに経路積分を解析的に評価できる超対称局所化の手法を適用した。これは  $g$  が有限の領域におけるインスタントンの寄与を探る為に有効な手段である。

本研究では超対称局所化の適用によって KK5-ブレーンを記述する GLSM に対する球面分配関数を解析的に評価した。この局所化において標的空間を記述する多重項のうち、特に Stückelberg 型のカイラル多重項の議論を強調する。Stückelberg 型のカイラル多重項は Taub-NUT 空間  $\mathbb{R}^3 \times S^1$  のうち  $\mathbb{R}$  及び  $S^1$  部分に対応しコンパクトスカラーを含むので、世界面インスタントンの議論において重要である。この Stückelberg 型のカイラル多重項のノンコンパクトなスカラー場の 1-ループ積分を評価する事で、ゲージ多重項に含まれる随伴



---

表現のスカラ場ゼロモード積分を実行する事が可能となり、このスカラ場の真空期待値がゼロに選び出された。これは  $\mathbb{R}$  方向に対応するスカラ場のゼロモード積分を処理する際に Coulomb ブランチのモジュライに関するデルタ関数が現れる事に起因する。一方で  $S^1$  方向に対応するコンパクトなスカラ場に関しては非自明に巻き付く配位を取り得るので、1-ループ積分の評価を慎重に議論する必要がある。このコンパクトスカラ場を評価する際に運動方程式を満たす事、ゲージ不変性を保つ事、 $S^2$  積分の有限性の3つを要請する事で、 $S^1$  ファイバーの半径  $g$  が有限の領域において許されるインスタントン数はゼロのみであるという結果を得た。この結果は  $g$  が有限の領域において世界面から標的空間である Taub-NUT 空間への埋め込み写像は定数写像のみが許されるという事を意味する。言い換えると、世界面の Taub-NUT 空間への巻き付きが存在しない事を示している。また  $g = 0$  とする事によって KK5-ブレーンを記述する GLSM の球面分配関数に対する非自明なインスタントン数の寄与を見出す事が可能であり、この結果を具体的に与えた。

本研究で得られた GLSM の球面分配関数の結果には超対称局所化の鞍点からの非自明な寄与が存在する。特にインスタントン数の物理的な意味について先行研究の結果及び解釈を用いて議論した。先行研究 [6, 10] にて Taub-NUT 空間への世界面インスタントンの議論が行われた。この議論において世界面インスタントンの寄与は GLSM のインスタントン配位を探す事により  $g \rightarrow 0$  で得られた。実際、本研究の結果である GLSM の球面分配関数における寄与も  $g = 0$  で現れる寄与となっており、先行研究の結果と無矛盾である。故に本研究のインスタントンの寄与は先行研究 [10] で議論された世界面インスタントンの解釈と比較する事で、次の様に理解する事が可能である。シングルセンターの Taub-NUT 空間においては  $S^1$  ファイバーがトポロジーとして  $D^2$  である。この時に世界面の  $S^2$  を  $D^2 \cup \{\infty\}$  と分解する事で、世界面ディスクが標的空間における  $D^2$  に非自明に巻き付くものがディスク・インスタントンである。また本論文では詳細に立ち入らないが多重センターの Taub-NUT 空間に対しては  $g$  が有限でも非自明なインスタントンの寄与が存在する事が判明した [35]。

最後に今後の発展について多少言及する。本研究では多重センターにおける有限の  $g$  でのインスタントンの寄与に対する物理的な解釈をするには至らなかったが、この点を解決する事は今後の重要な課題である。また、Taub-NUT 空間に対する世界面インスタントンの物理的な解釈を明らかにする為には、 $g \rightarrow 0$  における幾何学的振る舞いをより詳細に理解する必要がある。

---

## 謝辞

博士論文を執筆するにあたりお世話になった以下の方々に謝辞を述べたいと思います。

まず指導教員である酒井忠勝准教授に深く感謝致します。大学院の博士前期課程から5年間にわたって自分の興味に従って自由に物理をさせて頂いたにも関わらず、非常に寛大な対応及びサポートをして頂きました。議論をして頂いた際には多くの物理的な観点からの示唆を与えて下さりました。非常に丁寧に指導して頂きありがとうございました。

また佐藤勇貴特任助教に心から感謝致します。日頃から研究での非常に有意義な議論をして頂きました。論文の執筆に関しても丁寧にサポートして頂きました。私に多大なる時間を割いて頂いたことをありがたく思います。

何度も議論をして頂き、非常に有益な助言等を与えてくださった新居慶太氏に心から感謝致します。

快適な研究環境を与えてくださった名古屋大学素粒子論研究室のスタッフの皆様に感謝致します。



## 付録 A 記法

ここでは本研究における超対称局所化において使用した記法および様々な添字についてまとめる。

### • 添字

ここでは3種類の添字を用いるので以下に記す:

$$\begin{aligned}
 m, n, \dots &= 1, 2 && \text{curved space indices} \\
 a, b, \dots &= \hat{1}, \hat{2} && \text{tangent space indices} \\
 \alpha, \beta, \dots &= +, - && \text{spinor indices}
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

2次元の球面上の座標として  $(\theta, \varphi)$  を導入する。またこの  $(\theta, \varphi)$  を用いて半径  $r$  である2次元球面  $S^2$  の計量およびスピノ接続を以下で与える:

$$ds^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) = g_{mn}dx^m dx^n = e^a e^a. \tag{A.2}$$

$$\partial_{\hat{1}} = e_{\hat{1}}^1 \partial_1 = \frac{1}{r} \partial_\theta, \quad \partial_{\hat{2}} = e_{\hat{2}}^2 \partial_2 = \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\varphi, \quad \omega^{\hat{1}\hat{2}} = -\cos\theta d\varphi. \tag{A.3}$$

また2階の完全反対称イプシロンテンソルは  $\varepsilon_{+-} = \varepsilon^{+-} = 1$  とする。

### • Clifford 代数

2次元における Clifford 代数は通常の Pauli 行列を用いて与えられる:

$$\gamma^a := \sigma^a, \quad \gamma_3 := -i\gamma^{\hat{1}}\gamma^{\hat{2}}, \quad \{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\delta^{ab}\mathbf{1}, \quad \gamma^{ab} := \frac{1}{2}(\gamma^a\gamma^b - \gamma^b\gamma^a). \tag{A.4}$$

$$\gamma^{\hat{1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{\hat{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{\hat{3}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{A.5}$$

Euclid 空間における Dirac スピノル  $\psi$  とバー付き Dirac スピノル  $\bar{\psi}$  は互いに独立な場である。フェルミオンに関する計算を実行する際のスピノル添字は荷電共役行列  $C$  を用いて上げ下げを行う事にする。ここではスピノルにおける縮約に関して次の様に定める [53, 58, 59]:

$$\bar{\psi}\lambda := \bar{\psi}^\alpha \lambda_\alpha, \quad \bar{\psi}\gamma^a\lambda := \bar{\psi}^\alpha (\gamma^a)_\alpha{}^\beta \lambda_\beta. \tag{A.6}$$

---

荷電共役行列  $C$  に関する性質は以下で与えられる:

$$C^\dagger = C, \quad C^2 = 1, \quad C^T = -C, \quad C\gamma^a C = -(\gamma^a)^T. \quad (\text{A.7})$$

Grassmann 奇および偶であるスピノルに関する入れ替えにおける関係をまとめておく:

$$\begin{array}{ll}
 \psi\lambda = \lambda\psi & \psi\lambda = -\lambda\psi \\
 \text{Grassmann 奇} \quad \psi\gamma^a\lambda = -\lambda\gamma^a\psi & \text{Grassmann 偶} \quad \psi\gamma^a\lambda = +\lambda\gamma^a\psi \\
 \psi\gamma^a\gamma^b\lambda = \lambda\gamma^b\gamma^a\psi & \psi\gamma^a\gamma^b\lambda = -\lambda\gamma^b\gamma^a\psi
 \end{array} \quad (\text{A.8})$$

超対称局所化における計算において Fierz 恒等式を用いるので、Grassmann 偶スピノルに対して関係式を与える:

$$(\epsilon^\dagger\lambda_1)\lambda_2 = \frac{1}{2} \left[ \lambda_1(\epsilon^\dagger\lambda_2) + \gamma_3\lambda_1(\epsilon^\dagger\gamma_3\lambda_2) + \gamma^m\lambda_1(\epsilon^\dagger\gamma_m\lambda_2) \right]. \quad (\text{A.9})$$

## 付録B 共形 Killing スピノル

超対称局所化の手続きにおいて使用する超対称変換のパラメーターである共形 Killing スピノルに関してまとめる。局所化を実行する為には IR の発散を処理する為に理論に典型的なスケールを導入させる。これは理論をコンパクト多様体上に定義する事によって実現される。2次元の場合には共形平坦多様体上に射影する事によって  $S^2$  の半径  $r$  が導入される。この時に平坦空間上の計量  $\eta_{mn}$  や微分  $\partial_m$ 、定数スピノル  $\partial_m \epsilon_\alpha = 0$  を素朴にコンパクト多様体上の計量  $g_{mn}$  や微分  $\nabla_m$ 、 $\nabla_m \epsilon_\alpha = 0$  としてしまうと、超対称性の変換パラメーターに関する条件が強過ぎる事に起因して Ricci 平坦多様体しか許さない事がわかる。そこで  $\nabla_m \epsilon_\alpha = 0$  の条件を緩め、共形平坦多様体上で許される拘束条件が共形 Killing スピノル方程式である [53, 55, 62, 63]:

$$\nabla_m \epsilon = \frac{i}{2r} \gamma_m \epsilon, \quad \nabla_m \bar{\epsilon} = \frac{i}{2r} \gamma_m \bar{\epsilon}. \quad (\text{B.1})$$

ここではポジティブな共形 Killing スピノルを選んでいく。この共形 Killing スピノルを用いて平坦空間上の超対称性代数に対して Weyl 共変換を実行する事で共形平坦多様体上の超対称性を得る事が出来る。上記のポジティブな共形 Killing スピノル方程式の解は具体的に以下で与えられる [53]:

$$\epsilon = C_1 e^{-i\frac{\varphi}{2}} \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -i \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} + C_2 e^{i\frac{\varphi}{2}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

ここで  $C_1, C_2$  は任意定数である。本研究において超対称局所化を実行する上では、 $C_1 = 0, C_2 = 1$  を共形 Killing スピノルとして選んでいる。この変換パラメーターに関して注意すべき点は、Grassmann 偶スピノルであるという点である。これは上記の共形 Killing スピノル方程式の解であるという点から明らかである。また上記の共形 Killing スピノルを用いる事で次の様な関係式を得る事が出来る:

$$\epsilon^\dagger \epsilon = 1, \quad \epsilon^T C \epsilon = 0. \quad (\text{B.3})$$

この関係式は局所化における  $QV$  項を構成する際に使用する。また、 $QV$  項の計算において  $\epsilon^\dagger \gamma^m \epsilon$  や  $\epsilon^\dagger \gamma^3 \epsilon$  の様な組み合わせが頻出するが、特に前者は Killing ベクトルであり  $SU(2|1)_A$  では以下の関係を満たす:

$$V^m = \epsilon^\dagger \gamma^m \epsilon, \quad \nabla_m V^m = 0. \quad (\text{B.4})$$

## 付録 C $S^2$ 球面調和関数

ここでは超対称局所化における 1-ループ行列式を評価する際に必要となるツールに関してまとめる。この時記法に関しては [53] に従う事にする。1-ループ行列式は理論に含まれる全ての超対称多重項に関して評価される。その際に全ての場に関して、その場に作用する演算子の固有値問題に置き換わる。球面上の場は球面調和関数  $Y_{jm}(\theta, \varphi)$  を用いる事でモード展開をする事が可能であり、これらは運動項などの Laplacian の固有関数である事から容易に固有値を評価する事が可能となる。具体的に  $S^2$  上のゲージ対称性の下で変換しない様なスカラー場に関する Laplacian の固有値は以下で与えられる:

$$\nabla^2 Y_{jm} = -\frac{j(j+1)}{r^2} Y_{jm}, \quad (\text{C.1})$$

ここで  $j \in \mathbb{N}$  and  $-j \leq m \leq j$  である。この様にスカラー場に対するスカラー球面調和関数はよく知られているが、一般に理論にはスピン  $s$  を持った場が多く含まれる。これらの場に関する 1-ループ行列式ないし演算子の固有値を取り扱うにはスピン球面調和関数  $Y_{jm}^s(\theta, \varphi)$  を用いる必要がある。このスピン球面調和関数の立場からスカラー球面調和関数は  $Y_{jm}^{s=0}(\theta, \varphi)$  である。

さらに一般に理論に含まれる場はゲージ対称性の下で変換する。また球面上の理論の場合、Coulomb ブランチの配位ではゲージ多重項の鞍点からモノポールが存在する事がわかる。従ってこれらの事から、ゲージ対称性の下で非自明に変換する場に関してはモノポールからも寄与を受ける事に注意しなければならない。ここでは本研究で用いる  $U(1)$  ゲージ対称性だけに絞ってモノポールからの寄与を考慮する。モノポールの寄与を議論する為には、1-ループ行列式を評価する微分演算子に注目すれば良い。今一般にスピン  $s$  を持った任意の場を  $\Phi$  と記述する。この時にスピン接続及びゲージ接続を含んだ共変微分は以下で与えられる:

$$D_m \Phi = (\partial_m + is\omega_m - iQA_m)\Phi. \quad (\text{C.2})$$

ここで  $\omega_m$  をスピン接続とし、ゲージチャージを  $Q$  として表している。今  $S^2$  上に定義された理論を考えているので  $S^2$  上の計量及びスピン接続は  $ds^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ 、 $\omega^{\hat{1}\hat{2}} = -\cos\theta d\varphi$  で与えられる。また Coulomb ブランチ上でゲージ場に関する鞍点を評価すると  $F_{\hat{1}\hat{2}} - \frac{\eta}{r} = 0$  及び  $\nabla_m \eta = 0$  を満たすモノポール配位  $A_{0,\theta} = 0, A_{0,\varphi} = -(r\eta_0) \cos\theta$  となる。

$\eta_0$  はゲージ多重項に属する随伴表現のスカラー場の VEV である。このことからゲージ接続はスピン接続を用いて記述する事が可能となり、 $\eta_0 = \frac{m}{2r}$  ただし  $m \in \mathbb{Z}$  という規格化を選ぶと、場のスピン  $s$  にモノポールチャージ  $m$  が寄与する事がわかる。この様にして得られるモノポールチャージの寄与を考慮した有効スピンを  $s_{\text{eff}}$  と記述すると  $s_{\text{eff}} := s_0 - \frac{Qm}{2}$  [71] となる。この  $m$  は鞍点で存在するモノポールのチャージであり整数値をとる。より一般のゲージ対称性の下で有効スピに関する議論は [53] に記載されているが、本質的な部分は変わらない。したがってスカラー球面調和関数の固有値を評価した様に、一般のスピン  $s$  を持った場で、さらに  $U(1)$  ゲージ対称性の下で非自明に変換する場の微分演算子に対する固有値を議論したい。その為にまず微分演算子を次の様に線形結合を取り直す [53]:

$$D_{\pm} := \frac{1}{2}(D_1 \mp iD_2). \quad (\text{C.3})$$

この様に記述した微分演算子は、スピン球面調和関数を  $Y_{jm}^s$  とするとスピン  $s$  を  $s \pm 1$  に写像する。したがって 1-ループ行列式を評価する際の代表的な微分演算子である運動項の固有値は以下で与えられる [53, 72]:

$$D^2 Y_{jm}^{s_{\text{eff}}} = -\frac{j(j+1) - s_{\text{eff}}^2}{r^2} Y_{jm}^{s_{\text{eff}}}. \quad (\text{C.4})$$

ここで角運動量は  $j \in \mathbb{N}$  であり、 $-j \leq m \leq j$ 、 $|s_{\text{eff}}| \leq j$  を満たす。これによって一般的な場の固有値を評価する事が可能である。

また、フェルミオンの場合は上記の様な Laplacian 的な微分演算子では無いので Dirac 演算子を考える必要があるが、Dirac 演算子を行列表現で書き下し  $D_{\pm} := \frac{1}{2}(D_1 \mp iD_2)$  の定義に注意する事によって次の様に書ける:

$$i\gamma^m D_m = \begin{pmatrix} 0 & 2iD_+ \\ 2iD_- & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

したがってフェルミオンに現れる代表的な微分演算子に関しては、上記の非対角項の固有値がわかれば良い事になる。実際有効スピンを持ったフェルミオンの固有値は以下で与えられる [53]:

$$D_+ Y_{jm}^{s_{\text{eff}}} = \frac{s_{\text{eff}}^+}{2r} Y_{jm}^{s_{\text{eff}}+1}, \quad D_- Y_{jm}^{s_{\text{eff}}} = -\frac{s_{\text{eff}}^-}{2r} Y_{jm}^{s_{\text{eff}}+1}. \quad (\text{C.6})$$

ここで固有値  $s_{\text{eff}}^{\pm}$  は以下で定義されている:

$$s_{\text{eff}}^+ = \sqrt{j(j+1) - s_{\text{eff}}^+(s_{\text{eff}}^+ \pm 1)}. \quad (\text{C.7})$$

以上の議論から 1-ループ行列式を評価する際の固有値の評価は上記の関係を用いる事によって、一般のスピン  $s$  を持った場で、さらに  $U(1)$  ゲージ対称性の下で非自明に変換する場の微分演算子に対して評価が可能である。

## 付録D 超対称電荷

共形平坦な多様体上の超対称性変換に関する演算子は  $\delta = \delta_\epsilon + \delta_{\bar{\epsilon}} = \epsilon^\alpha Q_\alpha + \bar{\epsilon}^\alpha Q_\alpha^\dagger$  で与えられる。この超対称性変換のチャージ及び変換パラメーターは Grassmann 奇であるので、演算子  $\delta$  は Grassmann 偶である。ここで共形平坦な多様体上の超対称性変換と言及した意味は、超対称性変換のパラメーターは共形 Killing スピノル方程式を満たしているということである。次に超対称局所化を実行する超対称電荷を構成するが、基本的な手続きは [53] にしたがっている。具体的に行っている操作は共形平坦な多様体上の超対称性変換に関する Grassmann 偶な演算子である  $\delta$  から Grassmann 奇な変換パラメーターを取り除く。ここで  $\delta$  に付随していた変換パラメーターは共形 Killing スピノル方程式  $\nabla_m \epsilon = \frac{i}{2r} \gamma_m \epsilon$  を満たしている事を用いて、共形 Killing スピノル方程式の解

$$\epsilon = C_1 e^{-i\frac{\varphi}{2}} \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -i \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} + C_2 e^{i\frac{\varphi}{2}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.1})$$

を使用する事が出来る。この時に注意する必要がある点は、共形 Killing スピノル方程式の解である共形 Killing スピノルは Grassmann 偶だという事である。この Grassmann 偶な共形 Killing スピノルを変換パラメーターとして使用する事で超対称局所化を実行する超対称電荷を以下の様に得る:

$$Q := Q + Q^\dagger, \quad Q := \epsilon^\alpha Q_\alpha, \quad Q^\dagger := \epsilon^{\alpha} Q_\alpha^\dagger. \quad (\text{D.2})$$

ここでこれらの共形 Killing スピノルは  $\epsilon^\dagger \epsilon = 1$ ,  $\epsilon \epsilon = \epsilon^T C \epsilon = 0$  の関係を満たす。したがって Grassmann 偶の共形 Killing スピノルを用いる事で Grassmann 奇な超対称性電荷を得る  $Q$ 。ここで  $\epsilon^c$  は荷電共役スピノルとして定義されている:

$$\epsilon^c := C \epsilon^*, \quad \epsilon^{c\dagger} = \epsilon^T C. \quad (\text{D.3})$$

この様にして得られた超対称性変換を改めてここで書き下すが、上記の様に共形 Killing スピノルとその荷電共役を用いているのに対応し、 $\bar{\phi} = \phi^\dagger$ ,  $\bar{\psi} = C(\psi^\dagger)^T$  と書き換える事で以下の様に与えられる [53] (及び [73, 74]):

---

• ゲージ多重項

$$\begin{aligned}
QA_m &= \frac{i}{2}(\lambda^\dagger \gamma_m \epsilon + \epsilon^\dagger \gamma_m \lambda), \\
Q\sigma &= -\frac{1}{2}(\lambda^\dagger \epsilon + \epsilon^\dagger \lambda), \\
Q\eta &= \frac{i}{2}(\lambda^\dagger \gamma_3 \epsilon + \epsilon^\dagger \gamma_3 \lambda), \\
Q\lambda &= i\gamma_3 \epsilon \left( F_{\hat{1}\hat{2}} - \frac{\eta}{r} \right) - \epsilon \left( D + \frac{\sigma}{r} \right) + i\gamma^m \epsilon \nabla_m \sigma - \gamma_3 \gamma^m \epsilon \nabla_m \eta, \\
Q\lambda^\dagger &= -i\epsilon^\dagger \gamma_3 \left( F_{\hat{1}\hat{2}} - \frac{\eta}{r} \right) + \epsilon^\dagger \left( D + \frac{\sigma}{r} \right) + i\epsilon^\dagger \gamma^m \nabla_m \sigma - \epsilon^\dagger \gamma_3 \gamma^m \nabla_m \eta, \\
QD &= \frac{i}{2}(\epsilon^\dagger \gamma^m \nabla_m \lambda - \nabla_m \lambda^\dagger \gamma^m \epsilon) + \frac{1}{2r}(\epsilon^\dagger \lambda + \lambda^\dagger \epsilon)
\end{aligned} \tag{D.4}$$

• カイラル多重項

$$\begin{aligned}
Q\phi &= -\epsilon^\dagger \psi, \\
Q\phi^\dagger &= \psi^\dagger \epsilon, \\
Q\psi &= \left( i\gamma^m D_m \phi + i\sigma \phi + \gamma_3 \eta \phi - \frac{q}{2r} \phi \right) \epsilon + \epsilon^c F, \\
Q\psi^\dagger &= \epsilon^\dagger \left( -i\gamma^m D_m \phi^\dagger + i\sigma \phi^\dagger + \gamma_3 \eta \phi^\dagger - \frac{q}{2r} \phi^\dagger \right) - \epsilon^c F^\dagger, \\
QF &= \epsilon^c \left( i\gamma^m D_m \psi - i\sigma \psi + \gamma_3 \eta \psi + \frac{q}{2r} \psi - i\lambda \phi \right), \\
QF^\dagger &= \left( -iD_m \psi^\dagger \gamma^m - i\sigma \psi^\dagger + \psi^\dagger \gamma_3 \eta + \frac{q}{2r} \psi^\dagger + i\lambda^\dagger \phi^\dagger \right) \epsilon^c.
\end{aligned} \tag{D.5}$$

## 参考文献

- [1] J. de Boer and M. Shigemori, “Exotic Branes in String Theory,” *Phys. Rept.* **532**, 65-118 (2013) doi:10.1016/j.physrep.2013.07.003 [arXiv:1209.6056 [hep-th]].
- [2] J. de Boer and M. Shigemori, “Exotic branes and non-geometric backgrounds,” *Phys. Rev. Lett.* **104**, 251603 (2010) doi:10.1103/PhysRevLett.104.251603 [arXiv:1004.2521 [hep-th]].
- [3] N. A. Obers and B. Pioline, “U duality and M theory,” *Phys. Rept.* **318**, 113 (1999) [hep-th/9809039].
- [4] T. Kimura, “Defect (p,q) Five-branes,” *Nucl. Phys. B* **893**, 1-20 (2015) doi:10.1016/j.nuclphysb.2015.01.023 [arXiv:1410.8403 [hep-th]].
- [5] D. Tong, “NS5-branes, T duality and world sheet instantons,” *JHEP* **0207**, 013 (2002) doi:10.1088/1126-6708/2002/07/013 [hep-th/0204186].
- [6] J. A. Harvey and S. Jensen, “Worldsheet instanton corrections to the Kaluza-Klein monopole,” *JHEP* **0510**, 028 (2005) doi:10.1088/1126-6708/2005/10/028 [hep-th/0507204].
- [7] T. Kimura and S. Sasaki, “Worldsheet instanton corrections to  $5_2^2$ -brane geometry,” *JHEP* **08**, 126 (2013) doi:10.1007/JHEP08(2013)126 [arXiv:1305.4439 [hep-th]].
- [8] T. H. Buscher, “A Symmetry of the String Background Field Equations,” *Phys. Lett. B* **194**, 59-62 (1987) doi:10.1016/0370-2693(87)90769-6
- [9] T. Kikuchi, T. Okada and Y. Sakatani, “Rotating string in doubled geometry with generalized isometries,” *Phys. Rev. D* **86**, 046001 (2012) doi:10.1103/PhysRevD.86.046001 [arXiv:1205.5549 [hep-th]].
- [10] K. Okuyama, “Linear sigma models of H and KK monopoles,” *JHEP* **0508**, 089 (2005) [hep-th/0508097].



- 
- [11] T. Kimura and S. Sasaki, “Gauged Linear Sigma Model for Exotic Five-brane,” Nucl. Phys. B **876**, 493 (2013) doi:10.1016/j.nuclphysb.2013.08.017 [arXiv:1304.4061 [hep-th]].
- [12] T. Kimura and S. Sasaki, “Worldsheet Description of Exotic Five-brane with Two Gauged Isometries,” JHEP **03**, 128 (2014) doi:10.1007/JHEP03(2014)128 [arXiv:1310.6163 [hep-th]].
- [13] T. Kimura, S. Sasaki and K. Shiozawa, “Semi-doubled Gauged Linear Sigma Model for Five-branes of Codimension Two,” JHEP **12**, 095 (2018) doi:10.1007/JHEP12(2018)095 [arXiv:1810.02169 [hep-th]].
- [14] E. Witten, “Phases of N=2 theories in two-dimensions,” Nucl. Phys. B **403**, 159 (1993) [AMS/IP Stud. Adv. Math. **1**, 143 (1996)] doi:10.1016/0550-3213(93)90033-L [hep-th/9301042].
- [15] F. Benini, P. M. Cricigno, D. Jain and J. Nian, “Semichiral fields on  $S^2$  and generalized Kähler geometry,” JHEP **01**, 060 (2016) doi:10.1007/JHEP01(2016)060 [arXiv:1505.06207 [hep-th]].
- [16] K. Hori and C. Vafa, “Mirror symmetry,” hep-th/0002222.
- [17] K. Hori, S. Katz, A. Klemm, R. Pandharipande, R. Thomas, C. Vafa, R. Vakil and E. Zaslow, “Mirror symmetry,”
- [18] B. J. Schroers, “The Spectrum of Bogomol’nyi solitons in gauged linear sigma models,” Nucl. Phys. B **475**, 440-468 (1996) doi:10.1016/0550-3213(96)00348-3 [arXiv:hep-th/9603101 [hep-th]].
- [19] H. Jockers, V. Kumar, J. M. Lapan, D. R. Morrison and M. Romo, “Two-Sphere Partition Functions and Gromov-Witten Invariants,” Commun. Math. Phys. **325**, 1139 (2014) [arXiv:1208.6244 [hep-th]].
- [20] J. Gomis and S. Lee, “Exact Kahler Potential from Gauge Theory and Mirror Symmetry,” JHEP **1304**, 019 (2013) [arXiv:1210.6022 [hep-th]].
- [21] E. Gerchkovitz, J. Gomis and Z. Komargodski, “Sphere Partition Functions and the Zamolodchikov Metric,” JHEP **11**, 001 (2014) doi:10.1007/JHEP11(2014)001 [arXiv:1405.7271 [hep-th]].

- 
- [22] A. B. Zamolodchikov, “Irreversibility of the Flux of the Renormalization Group in a 2D Field Theory,” *JETP Lett.* **43**, 730-732 (1986)
- [23] T. Kimura, S. Sasaki and M. Yata, “World-volume Effective Actions of Exotic Five-branes,” *JHEP* **1407**, 127 (2014) [arXiv:1404.5442 [hep-th]].
- [24] T. Ortin, “Gravity and Strings,” Cambridge University Press, (2015).
- [25] N. Doroud and J. Gomis, “Gauge theory dynamics and Kähler potential for Calabi-Yau complex moduli,” *JHEP* **1312**, 099 (2013) [arXiv:1309.2305 [hep-th]].
- [26] V. Pestun, “Localization of gauge theory on a four-sphere and supersymmetric Wilson loops,” *Commun. Math. Phys.* **313**, 71-129 (2012) doi:10.1007/s00220-012-1485-0 [arXiv:0712.2824 [hep-th]].
- [27] V. Pestun, M. Zabzine, F. Benini, T. Dimofte, T. T. Dumitrescu, K. Hosomichi, S. Kim, K. Lee, B. Le Floch, M. Marino, J. A. Minahan, D. R. Morrison, S. Pasquetti, J. Qiu, L. Rastelli, S. S. Razamat, S. S. Pufu, Y. Tachikawa, B. Willett and K. Zarembo, “Localization techniques in quantum field theories,” *J. Phys. A* **50**, no.44, 440301 (2017) doi:10.1088/1751-8121/aa63c1 [arXiv:1608.02952 [hep-th]].
- [28] G. Festuccia and N. Seiberg, “Rigid Supersymmetric Theories in Curved Superspace,” *JHEP* **1106**, 114 (2011) [arXiv:1105.0689 [hep-th]].
- [29] T. T. Dumitrescu, G. Festuccia and N. Seiberg, “Exploring Curved Superspace,” *JHEP* **1208**, 141 (2012) doi:10.1007/JHEP08(2012)141 [arXiv:1205.1115 [hep-th]].
- [30] T. T. Dumitrescu and N. Seiberg, “Supercurrents and Brane Currents in Diverse Dimensions,” *JHEP* **07**, 095 (2011) doi:10.1007/JHEP07(2011)095 [arXiv:1106.0031 [hep-th]].
- [31] Z. Komargodski and N. Seiberg, “Comments on Supercurrent Multiplets, Supersymmetric Field Theories and Supergravity,” *JHEP* **07**, 017 (2010) doi:10.1007/JHEP07(2010)017 [arXiv:1002.2228 [hep-th]].
- [32] Y. Imamura, “Relation between the 4d superconformal index and the  $S^3$  partition function,” *JHEP* **09**, 133 (2011) doi:10.1007/JHEP09(2011)133 [arXiv:1104.4482 [hep-th]].
- [33] N. Doroud, J. Gomis, B. Le Floch and S. Lee, “Exact Results in D=2 Supersymmetric Gauge Theories,” *JHEP* **1305**, 093 (2013) [arXiv:1206.2606 [hep-th]].

- 
- [34] N. Hama, K. Hosomichi and S. Lee, “Notes on SUSY Gauge Theories on Three-Sphere,” *JHEP* **03**, 127 (2011) doi:10.1007/JHEP03(2011)127 [arXiv:1012.3512 [hep-th]].
- [35] Y. Hiraga and Y. Sato, “Localization of Gauged Linear Sigma Model for KK5-branes,” [arXiv:2011.06919 [hep-th]].
- [36] J. Wess and J. Bagger, “Supersymmetry and supergravity,” Princeton, USA: Univ. Pr. (1992) 259 p
- [37] J. Chen, “On exact correlation functions of chiral ring operators in  $2d \mathcal{N} = (2, 2)$  SCFTs via localization,” *JHEP* **03**, 065 (2018) doi:10.1007/JHEP03(2018)065 [arXiv:1712.01164 [hep-th]].
- [38] B. R. Greene, “String theory on Calabi-Yau manifolds,” [arXiv:hep-th/9702155 [hep-th]].
- [39] W. Lerche, C. Vafa and N. P. Warner, “Chiral Rings in  $N=2$  Superconformal Theories,” *Nucl. Phys. B* **324**, 427-474 (1989) doi:10.1016/0550-3213(89)90474-4
- [40] P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Senechal, “Conformal Field Theory,” doi:10.1007/978-1-4612-2256-9
- [41] J. Polchinski, “String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string,” Cambridge University Press, (1998).
- [42] “String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond,” Cambridge University Press, (1998).
- [43] K. Hori and A. Kapustin, “Duality of the fermionic 2-D black hole and  $N=2$  liouville theory as mirror symmetry,” *JHEP* **0108**, 045 (2001) doi:10.1088/1126-6708/2001/08/045 [hep-th/0104202].
- [44] P. S. Aspinwall, “The Moduli space of  $N=2$  superconformal field theories,” [arXiv:hep-th/9412115 [hep-th]].
- [45] D. Green, Z. Komargodski, N. Seiberg, Y. Tachikawa and B. Wecht, “Exactly Marginal Deformations and Global Symmetries,” *JHEP* **06**, 106 (2010) doi:10.1007/JHEP06(2010)106 [arXiv:1005.3546 [hep-th]].

- 
- [46] T. Kimura, “N=(4,4) Gauged Linear Sigma Models for Defect Five-branes,” arXiv:1503.08635 [hep-th].
- [47] 今村 洋介, “T 双対性についてのノート”, (2016).
- [48] J. A. Harvey, S. Lee and S. Murthy, “Elliptic genera of ALE and ALF manifolds from gauged linear sigma models,” JHEP **1502**, 110 (2015) [arXiv:1406.6342 [hep-th]].
- [49] D. E. Diaconescu and N. Seiberg, “The Coulomb branch of (4,4) supersymmetric field theories in two-dimensions,” JHEP **9707**, 001 (1997) [hep-th/9707158].
- [50] O. Aharony and M. Berkooz, “IR dynamics of  $D = 2$ ,  $N=(4,4)$  gauge theories and DLCQ of ‘little string theories’,” JHEP **9910**, 030 (1999) [hep-th/9909101].
- [51] M. Rocek and E. P. Verlinde, “Duality, quotients, and currents,” Nucl. Phys. B **373**, 630 (1992) [hep-th/9110053].
- [52] Matteo Bertolini, “Lectures on Supersymmetry,” (2020)
- [53] F. Benini and S. Cremonesi, “Partition Functions of  $\mathcal{N} = (2, 2)$  Gauge Theories on  $S^2$  and Vortices,” Commun. Math. Phys. **334**, no. 3, 1483 (2015) [arXiv:1206.2356 [hep-th]].
- [54] A. Kapustin, B. Willett and I. Yaakov, “Exact Results for Wilson Loops in Superconformal Chern-Simons Theories with Matter,” JHEP **1003**, 089 (2010) doi:10.1007/JHEP03(2010)089 [arXiv:0909.4559 [hep-th]].
- [55] S. Sugishita and S. Terashima, “Exact Results in Supersymmetric Field Theories on Manifolds with Boundaries,” JHEP **1311**, 021 (2013) [arXiv:1308.1973 [hep-th]].
- [56] D. Honda and T. Okuda, “Exact results for boundaries and domain walls in 2d supersymmetric theories,” JHEP **09**, 140 (2015) doi:10.1007/JHEP09(2015)140 [arXiv:1308.2217 [hep-th]].
- [57] K. Hori and M. Romo, “Exact Results In Two-Dimensional (2,2) Supersymmetric Gauge Theories With Boundary,” [arXiv:1308.2438 [hep-th]].
- [58] F. Benini, R. Eager, K. Hori and Y. Tachikawa, “Elliptic genera of two-dimensional  $N=2$  gauge theories with rank-one gauge groups,” Lett. Math. Phys. **104**, 465 (2014) [arXiv:1305.0533 [hep-th]].

- 
- [59] F. Benini, R. Eager, K. Hori and Y. Tachikawa, “Elliptic Genera of 2d  $\mathcal{N} = 2$  Gauge Theories,” *Commun. Math. Phys.* **333**, no.3, 1241-1286 (2015) doi:10.1007/s00220-014-2210-y [arXiv:1308.4896 [hep-th]].
- [60] S. K. Ashok, N. Doroud and J. Troost, “Localization and real Jacobi forms,” *JHEP* **1404**, 119 (2014) doi:10.1007/JHEP04(2014)119 [arXiv:1311.1110 [hep-th]].
- [61] Y. Imamura, “調和関数展開による 3 次元分配関数の計算” (2013)
- [62] C. Closset and S. Cremonesi, “Comments on  $\mathcal{N} = (2,2)$  supersymmetry on two-manifolds,” *JHEP* **1407**, 075 (2014) [arXiv:1404.2636 [hep-th]].
- [63] H. Lu, C. N. Pope and J. Rahmfeld, “A Construction of Killing spinors on  $S^{2n}$ ,” *J. Math. Phys.* **40**, 4518 (1999) [hep-th/9805151].
- [64] S. Pasquetti, “Factorisation of  $N = 2$  Theories on the Squashed 3-Sphere,” *JHEP* **04**, 120 (2012) doi:10.1007/JHEP04(2012)120 [arXiv:1111.6905 [hep-th]].
- [65] K. Hori, H. Kim and P. Yi, “Witten Index and Wall Crossing,” *JHEP* **01**, 124 (2015) doi:10.1007/JHEP01(2015)124 [arXiv:1407.2567 [hep-th]].
- [66] C. Closset, S. Cremonesi and D. S. Park, “The equivariant A-twist and gauged linear sigma models on the two-sphere,” *JHEP* **1506**, 076 (2015) doi:10.1007/JHEP06(2015)076 [arXiv:1504.06308 [hep-th]].
- [67] F. Benini, “Localization in supersymmetric field theories,” YITP Kyoto, 29 February — 4 March 2016
- [68] K. Becker, M. Becker and J. H. Schwarz, “String theory and M-theory: A modern introduction,” Cambridge University Press, (2007).
- [69] T. Kimura, S. Sasaki and K. Shiozawa, “Worldsheet Instanton Corrections to Five-branes and Waves in Double Field Theory,” *JHEP* **1807**, 001 (2018) doi:10.1007/JHEP07(2018)001 [arXiv:1803.11087 [hep-th]].
- [70] R. Gregory, J. A. Harvey and G. W. Moore, “Unwinding strings and  $t$  duality of Kaluza-Klein and  $h$  monopoles,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **1**, 283-297 (1997) doi:10.4310/ATMP.1997.v1.n2.a6 [arXiv:hep-th/9708086 [hep-th]].
- [71] F. Benini and A. Zaffaroni, “A topologically twisted index for three-dimensional supersymmetric theories,” *JHEP* **07**, 127 (2015) doi:10.1007/JHEP07(2015)127 [arXiv:1504.03698 [hep-th]].

- 
- [72] M. Honda and Y. Yoshida, “Supersymmetric index on  $T^2 \times S^2$  and elliptic genus,” [arXiv:1504.04355 [hep-th]].
- [73] F. Benini and W. Peelaers, “Higgs branch localization in three dimensions,” JHEP **1405**, 030 (2014) doi:10.1007/JHEP05(2014)030 [arXiv:1312.6078 [hep-th]].
- [74] F. Benini and A. Zaffaroni, “Supersymmetric partition functions on Riemann surfaces,” Proc. Symp. Pure Math. **96**, 13 (2017) [arXiv:1605.06120 [hep-th]].
- [75] J. Yagi, “3d TQFT from 6d SCFT,” JHEP **1308**, 017 (2013) [arXiv:1305.0291 [hep-th]].
- [76] D. Tong, “TASI lectures on solitons: Instantons, monopoles, vortices and kinks,” hep-th/0509216.
- [77] R. Blumenhagen, D. Lust and S. Theisen, “Basic concepts of string theory,” Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2012)
- [78] N. Ishtiaque, “2D BPS Rings from Sphere Partition Functions,” JHEP **04**, 124 (2018) doi:10.1007/JHEP04(2018)124 [arXiv:1712.02551 [hep-th]].