

学位論文

原子気体ボース・アインシュタイン凝縮体における
トポロジカル相と輸送現象

Topological Phase and Transport Phenomena
in Cold Atomic Bose-Einstein Condensates

名古屋大学大学院 工学研究科
応用物理学専攻
大橋 輝道

概要

本論文では、申請者の研究成果 [1, 2] をまとめたものである。本論文の研究目的は、原子気体ボース・アインシュタイン凝縮体におけるトポロジカル物性および輸送現象に関して解明することである。構成は以下の通りである。

第1章では、本論文の研究背景について紹介する。

第2章では、本論文の理論的背景と関連実験について紹介する。本論文の理論的背景と関連実験について紹介する。原子気体ボース・アインシュタイン凝縮体 (BEC) は、冷却原子系と呼ばれる、レーザー光などで真空中に捕獲した極低温の原子集団で形成される。この冷却原子系の特徴として、系全体がほぼ孤立量子系で、相互作用、内部自由度、空間次元などを高精度に制御可能であることが挙げられる。光学技術を駆使することにより、実験と理論を定量的に比較でき、かつ、固体電子系では実験不可能だった未開拓領域まで研究可能な系として様々な現象が観測されている。ボース・アインシュタイン凝縮とは、ボース粒子の同じ状態を際限なく取ることができる統計性から、系を構成する巨視的な数の粒子が最低エネルギー状態を占有する相転移現象である。今日では $U(1)$ ゲージ対称性の自発的破れによる現象として広く理解され、破れた連続対称性に関係したギャップレス励起の南部-Goldstone モード (NG モード) が現れることが知られている。このような凝縮体からの励起の性質は Bogoliubov 方程式 (以下、Bogoliubov ハミルトニアンと呼ぶ) を用いた解析から理解できる。BEC における Bogoliubov ハミルトニアンの特徴として、擬エルミート性と $particle-hole$ 対称性を有する非エルミートであることが挙げられる [3]。この非エルミート性はボゾンの統計性のみ由来し、それを反映して励起スペクトルにしばしば複素数や対角化不可能な点 (例外点) が現れる [4]。つまり、BEC における Bogoliubov 準粒子系は本質的に非エルミート系である。この非エルミート性のもたらす物性解明が、本論文での主題である。

BEC における複素固有値をもつモードは励起エネルギーがゼロで、ひとたびこのモードが現れると指数関数的に増大し凝縮体を不安定化させる。この不安定性を動的不安定性と呼び、エネルギー保存系の冷却原子系において BEC に支配的な影響を与える。実験的にも超流動カレントの減衰や強磁性相転移後の磁化過程として観測されている [5, 6]。一方、非エルミート系は一般に粒子数非保存の開放系で現れる。非エルミート物理は空間反転と時間反転 (PT) 対称性を組み合わせた系の研究に端を発し、近年、フォトニック結晶やマイクロキャビティをはじめとする制御された実験系で実現され、注目されている [7]。非エルミート系の代表的な現象に一方向輸送がある [8]。これは粒子の流入流出がある物質中を光が伝搬する系で、左右どちらかの進行波が対角化不可能な点 (例外点) において完全透過するという著しい特徴をもち、1次元光学系で観測されている。このように非エルミート性が顕著な例外点や複素スペクトルが現れる領域で新奇的な物理が創発する。近年では、トポロジーで特徴付けられる相 (トポロジカル相) [9] の概念が非エルミート系へ拡張 [10, 11] され、益々注目を集めている。このような背景から、BEC の非エルミート性が新奇的なトポロジカル物性および輸送現象を創発すると期待される。上記の動的不安定な BEC のトポロジカル相とトンネル効果に関する詳しい内容はそれぞれ第3章、第4章に記した。

第3章では、1次元 BEC のトポロジカル相を特徴付けるトポロジカル不変量の一般化に関する研究成果についてまとめる [1]。近年、トポロジカルで特徴付けられる相（トポロジカル相）は固体物理をはじめとする様々な分野で大きな成功を収め、現代物理学の大きな潮流のひとつになっている。トポロジカル相の特徴は波動関数が波数空間で非自明なトポロジカル相を有すると、必ずギャップレスな端状態が現れる点である。この対応関係をバルクエッジ対応と呼ぶ。この量子相の研究は整数量子ホール効果の発見 [12] に端を発し、今日では絶縁体や超伝導体など様々な系に拡張され、実験と理論の双方から盛んに研究されている。固体電子系だけではなく冷却原子気体においても、波動関数のトポロジカル相を制御・検出する研究 [13] が活発に行なわれている。また、原子気体 BEC の Bogoliubov 準粒子のトポロジカル相の研究は 1 次元 [14]、2 次元系 [15] に対して議論され、Bogoliubov ハミルトニアン固有の擬エルミート性を反映し、トポロジカル不変量の変更を受けることが明らかにされた。しかし、これらの先行研究では、励起スペクトルが実数の場合に限定されていた。また、ボース粒子系においても、非エルミートとトポロジカル相の協奏から新奇な物理が創発すると期待される。

本研究では、1次元 Bogoliubov 励起バンドに複素数や例外点を伴う場合のトポロジカル物性を解明することを目的として、そのような励起バンドにトポロジカル不変量が定義可能であるかどうか、またバルクエッジ対応が成り立つかどうかという問題に取り組んだ。これらの問題を解決するために、まず正規直交基底を用いてトポロジカル不変量（ベリー位相と巻きつき数）を拡張した。ベリー位相が例外点で定義不可能という問題に対し、擬エルミート性の性質から例外点が波数の実軸上に点として存在することを見出し、複素運動量平面上に積分経路を取ることで例外点を避けてベリー位相を定義した。また、時間反転演算子の構造を考慮すると 1 次元時間反転対称な系のトポロジカル不変量である巻きつき数が常に自明な値しか取り得ないことがわかった。バルクエッジ対応を確認するために、2つの Toy Model [時間反転対称な場合とそうでない場合、また両モデルともに空間反転対称性を有する] で数値的に調べた。その結果、複素固有値が存在する場合でも空間反転対称性に保護された端状態が存在し、バルクエッジ対応が成り立つことがわかった。本研究は系の詳細に依らない対称性のみに基づいたものであるため、マグノンなどボゾンの Bogoliubov ハミルトニアンで記述される一般的な系に適用可能である。

第4章では、動的不安定な BEC のトンネル効果に関する研究成果についてまとめる [2]。準粒子励起の概念は基底状態の性質から非平衡輸送現象に至るまで量子多体系の基本的な性質を理解する上で重要な役割を果たしている。特に、自発的対称性が破れた系の低エネルギーの性質は、対称性の破れによる NG モードの影響を強く受ける。例えば、スピノル BEC にはフォノンやスピン波（マグノン）が存在し、それぞれ $U(1)$ ゲージ対称性の破れと $SO(3)$ スピン回転対称性の破れに関係する NG モードである。BEC のトンネル効果は BEC の準粒子励起の性質を強く受け、異常トンネル効果と呼ばれる現象がある。異常トンネル効果とは、BEC 中の NG モードである準粒子励起が低エネルギー極限で、ポテンシャル障壁を完全透過する現象である [16]。異常トンネル効果の研究は 1 次元、3 次元、スピノル BEC、ジョセフソン電流との関係、超流動カレントがある場合と様々な状況に拡張されている。このような詳細な研究により、入射波である NG モードが低エネルギーで凝縮体波動関数と一致するため完全透過すると理解されている。中でも、 PT 対称な非エルミート系において例外点で一方向輸送が現れるように、非エルミート性が強く現れる動的不安定な BEC のトンネル効果は興味深い問題であり、本研究の動機である。

本研究では、動的不安定な BEC のトンネル効果を網羅的に調べるために、2成分 BEC とスピン 1 polar BEC の 2つのモデルで解析した。2つのモデルの大きな違いは、準粒子励起であるスピン波が NG モードであるか、そうでないかである。スピン 1 polar BEC は二次ゼーマン効果によりスピン回転対称性が明示的に破れることにより、スピン波は NG モードではなくなる。したがって、2つのモデル

解析からトンネル効果における NG モードの役割を明らかにすることが可能である。以上のセットアップで有限要素法を用いてポテンシャル障壁に対する透過率, 反射率を数値的に求めた。2つのモデルの解析結果から、動的不安定な2成分 BEC でも完全透過が起こることを発見した。これはエネルギーの虚軸に沿うゼロエネルギー極限でスピン波と凝縮体波動関数が一致するため完全透過すると理解できる。一方で、スピン 1 polar BEC では、スピン波が NG モードではないため、どのパラメタでも完全透過は起こらないことがわかった。その代わりに、入射波のエネルギーが長波長極限の運動エネルギーと一致すると、透過率は共鳴的に増加することがわかった。また、純虚数の入射エネルギー $|\text{Im}E|$ が最大値で完全反射が起こることがわかった。このエネルギーでは入射波と反射波が一致することにより準粒子波動関数が強く抑制され、完全反射が起こると理解できる。また、2つのモデルで完全反射が起こる事実から、この起源は NG モードに無関係であることも示唆している。さらに、凝縮体の運動を記述する時間依存の Gross-Pitaevskii 方程式によるトンネル効果の実時間ダイナミクスの解析を行なった。本研究では、ポテンシャル障壁の片側にのみ運動量をもつ不安定なスピン波を加え、その揺らぎがポテンシャルの両側でどのように成長するのかを調べた。その結果、完全透過に近い場合は、ポテンシャル障壁の影響をほとんど受けず、長時間一様系での成長で近似可能であり、また、揺らぎはポテンシャル障壁の反対側にまで透過していくことがわかった。一方で、完全反射の場合は、ポテンシャル障壁の影響を強く受け、ポテンシャル障壁の反対側にその揺らぎが透過しないことがわかった。完全反射は成長が最も速いモードで起こるため、この特徴は実験で観測可能であることがわかった。

第5章は、本博士論文全体のまとめと今後の展望について記す。

目次

第 1 章	序論	1
第 2 章	理論的背景と関連実験	3
2.1	冷却原子気体系	3
2.2	原子気体ボース・アインシュタイン凝縮	3
2.2.1	ハミルトニアン	4
2.3	スピノル BEC における平均場理論	6
2.3.1	Gross-Pitaevskii 方程式	6
2.4	Bogoliubov 理論	7
2.4.1	第二量子化形式による Bogoliubov ハミルトニアン	8
2.4.2	BEC における線形安定性解析	12
2.4.3	南部・ゴールドストーンモード	13
2.4.4	動的不安定性	13
2.5	非エルミート物理の数学的基礎	16
2.5.1	正規双直交基底	17
2.5.2	例外点	18
2.5.3	擬エルミート性	18
2.5.4	Bogoliubov 準粒子系への応用	20
第 3 章	ボース・アインシュタイン凝縮体におけるトポロジカル相	25
3.1	導入	26
3.1.1	正規双直交基底の導入	26
3.1.2	Bogoliubov ハミルトニアンの対称性	27
3.1.3	ベリー位相	28
3.1.4	複素運動量平面への拡張	28
3.1.5	南部-ゴールドストーンモードと例外点の関係	31
3.2	空間反転対称性に関する \mathbb{Z}_2 不変量	32
3.2.1	ベリー接続	32
3.2.2	空間反転対称性に関する \mathbb{Z}_2 トポロジカル不変量	32
3.2.3	ラベルルール	33
3.2.4	$\nu_{\text{IS}} \in \mathbb{Z}_2$ の証明	33
3.3	その他のトポロジカル不変量	35
3.3.1	particle-hole 対称性に関する \mathbb{Z}_2 トポロジカル不変量	36
3.3.2	カイラル対称性に関する巻きつき数	38
3.4	ボーズ粒子系における Bogoliubov 励起のトポロジカル相	40
3.4.1	Kitaev-chain モデル	40

3.4.2	Su-Schrieffer-Heeger モデル	45
3.5	結論	50
第 4 章	ボース・アインシュタイン凝縮体における輸送現象	53
4.1	導入	54
4.2	2 成分 BEC	55
4.2.1	モデル	55
4.2.2	一様系での 2 成分 BEC の Bogoliubov スペクトル	57
4.2.3	2 成分 BEC におけるスピン波モードのトンネル効果	60
4.3	スピン 1 ポーラー BEC	65
4.3.1	モデル	65
4.3.2	一様系でのスピン 1 BEC の Bogoliubov スペクトル	67
4.3.3	スピン 1 polar BEC におけるスピン波モードのトンネル効果	68
4.4	Gross-Pitaevskii 方程式による実時間ダイナミクス	69
4.5	結論	74
第 5 章	結語	75
付録 A		79
A.1	複素波数空間における種々の対称性に関する証明	79
A.2	非エルミート系における総和則の証明	80
A.3	空間反転対称性に関係したトポロジカル不変量の証明	81
A.4	particle-hole 対称性に関係したトポロジカル不変量の証明	82
参考文献		84
出版論文		95
謝辞		96

第1章 序論

ボース・アインシュタイン凝縮とは、ボース粒子の同一状態を際限なく取ることが可能なボース統計性から、系を構成する巨視的な数の粒子が最低エネルギー状態を占有する相転移現象である [17, 18]。今日では、U(1) ゲージ対称性の自発的破れによる現象として広く理解されている。ボース・アインシュタイン凝縮は、光子で起こる特異な量子多体现象として、1925年に Bose と Einstein により予言された。その後、1938年に ^4He の超流動現象が発見 [19, 20] されるとすぐにボース凝縮との関係が議論され、超流動状態は ^4He 原子がボース・アインシュタイン凝縮を起こしたボース・アインシュタイン凝縮体 (BEC) であると理解されたが [21]、密度の高い液体状態であるため直接的にボース・アインシュタイン凝縮の証拠となるものは得られていない。一方 1995年に、極低温に冷却された気体状の ^{87}Rb [22], ^{23}Na [23], および ^7Li [24] の原子集団において、原子の運動量空間における密度分布から最低エネルギー状態に巨視的な数の粒子が凝縮している様子が確認され、ボース・アインシュタイン凝縮の証拠が初めて確認された。この実験で用いられた原子集団は冷却原子気体と呼ばれ、レーザー光や磁場を用いて真空中に捕獲された原子集団で、典型的には数 10 ~ 数 100nK もの極低温に冷却されている。この系は、原子種、相互作用、トラップポテンシャルをはじめとする系の多くのパラメータを高精度に制御可能である。内部自由度を有する BEC (スピノル BEC) のスピン 1 BEC の観測 [25]、Kibble-Zurek 機構による位相欠陥 [6]、光格子系で超流動-絶縁体転移 [26] をはじめとする、この系特有の様々な現象が観測され、固体電子系では観測不可能だった未開拓領域まで研究可能な系として急激な発展を遂げている。BEC の性質は理論的には平均場理論と励起状態を記述する Bogoliubov 理論でよく理解できる [3]。BEC 中の Bogoliubov 準粒子が従う固有値方程式が、ボゾンの統計性から非エルミートになるという特徴がある。そのため、複素固有値をもつモードが出現すると、そのモードが指数関数的に増加し凝縮体を不安定化させる。この不安定性を動的不安定性と呼び、熱浴と接しない孤立系である冷却原子系において、エネルギー散逸を伴わない動的不安定性が凝縮体の物性に重要な役割を果たす。

一般に、非エルミートハミルトニアンは粒子数非保存の開放系を有効的に記述する。近年、フォトリック結晶やマイクロキャビティ [27]、非ユニタリー発展する量子ウォーク系 [28] など粒子の流入流出が制御された実験系が数多く実現され、非エルミート物理の研究が盛んに行われている [7]。非エルミート物理は空間反転と時間反転 (PT) 対称性を組み合わせた系の研究 [29] に端を発し、この系の特筆すべき性質として、スペクトルが複素数になりうることと対角化不可能な点 (例外点) が存在することが挙げられる。特に例外点において現れる、非従来の一方向輸送 [8, 30] や量子臨界現象 [31, 32, 33] などが理論と実験ともに活発に議論されている。例えば、一方向輸送と呼ばれる現象は、粒子の流入流出がある物質中を光が伝搬する系で左右どちらかの進行波が例外点において完全透過するという著しい特徴をもち、次元光学系で観測されている。このように非エルミート性が輸送現象などの物性と相互作用することにより新奇な物理が創発する。BEC における Bogoliubov 準粒子の非エルミート性はボゾンの統計性に由来し、この準粒子励起は自発的対称性の破れに関係していることから BEC の基礎物理を開拓する一つの指針になると期待できる。

一方で、トポロジーで特徴付けられる相 (トポロジカル相) は固体物理をはじめとする様々な分野で大きな成功を収め、現代物理学の大きな潮流のひとつになっている。トポロジカル相の特徴は波動

関数が波数空間で非自明なトポロジを有すると、必ずギャップレスな表面状態(エッジ状態)が現れる点である。この対応関係をバルクエッジ対応と呼ぶ。トポロジカル相の研究は 1980 年の整数量子ホール効果の観測から始まる。系に印加した電場に対して垂直方向に電流が流れるホール効果は古くから知られていたが、低温で面直磁場中の 2 次元系におけるホール抵抗が一定の値をとる領域が出現することが観測 [34] された。さらに、数学の位相幾何(トポロジー)による解釈が与えられ、整数量子ホール効果 [12] として非常に注目を集めた。トポロジカル相は、トポロジーを用いると系の対称性と空間次元で各クラスに対応するトポロジカル不変量が分類 [9] されることがわかり、我々に統一的な理解を与えた。トポロジーを用いた分類は、整数量子ホール系や絶縁体、超伝導体だけでなく、時間に関して周期駆動系である Floquet 系 [35]、粒子数非保存系である非エルミート系 [10, 11] に対しても適応され、さらなる広がりを見せている。冷却原子系においても、波動関数のトポロジーを検出する実験が行われている。非自明な相が現れるモデルとして、F. D. M. Haldane により提案された、2 次元蜂の巣格子系で磁場が原子レベルで上下方向に向くモデル(Haldane モデル)がある [36]。Haldane モデル(時間反転対称性の破れた 2 次元系)はチャーン数 \mathbb{Z} で特徴付けられるが、実験的に実現が難しいモデルとして認識されていた。しかし、冷却原子系の光格子による蜂の巣格子系に周期外場の円偏光を照射した Floquet 系で Haldane モデルを実現し、系のトポロジーの検出に成功している [13]。他にも、冷却原子系の操作性の高さから粒子の内部自由度を有効的に空間とみなして高次元系をシミュレートする人工次元系において、カイラルエッジ状態が観測されている [37, 38]。また、BEC の Bogoliubov 準粒子におけるトポロジカル物性についても盛んに研究され、ボゾンの交換関係が反映されたトポロジカル不変量も解明されている [14, 15, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45]。

BEC における Bogoliubov 準粒子は、低エネルギー極限でポテンシャル障壁を完全透過する異常トンネル効果と呼ばれる特異な輸送特性を有す [16]。Schrödinger 方程式で記述される自由粒子は低エネルギー極限でポテンシャル障壁に対して透過率がゼロになる振る舞いと真逆の振る舞いをする。異常トンネル効果に関して、スカラー BEC やスピン 1 BEC において、超流動カレントがある場合 [46, 47, 48]、ジョセフソン電流との関係 [49, 50]、有限温度の場合 [51]、ドメインウォールや不純物がある場合 [52, 53]、2 次元粒子数密度差のある場合 [54]、Polar 相 [55]、強磁性相 [56] でのトンネル効果など、様々な場合について研究されている。最近では、南部・Goldstone(NG)モードとヒッグスモードの間のファノ共鳴や反束縛状態を介したヒッグスモードの完全透過が研究されている [57, 58]。この BEC の Bogoliubov 準粒子におけるトンネル効果の一連の研究により、入射波が NG モードである時、ゼロエネルギー極限で入射波と凝縮体波動関数が一致するため、入射波はポテンシャル障壁の両側に広がり完全透過が起こると解明された。

現在までに、原子気体 BEC におけるトポロジカル相と輸送現象に関して、主に動的安定な場合について研究されてきたが、昨今著しく発展している非エルミートトポロジカル相や輸送現象の研究を踏まえて BEC の物性を眺めると、トポロジーや輸送特性と、動的不安定性との相互作用により、より豊かな物性が現れると期待できる。このような背景の下、本博士論文は、原子気体 BEC における動的不安定性がもたらす新奇なトポロジカル相及び輸送現象の開拓を目的とし、それらの性質について理論的に調べた。

本博士論文は以下のように構成される。第 2 章では、ボース・アインシュタイン凝縮体、非エルミート物理の基本事項に関してまとめる。第 3, 4 章では、BEC におけるトポロジカル相と輸送現象に関する研究について記す。第 5 章は本博士論文のまとめと今後の展望である。

第2章 理論的背景と関連実験

2.1 冷却原子気体系

本研究の研究舞台は、レーザー光などで真空中に捕獲した極低温の原子集団（以下、冷却原子気体）である。冷却原子系の特徴として、極低温であること（数 $10 \sim 100\text{nK}$ ）、電氣的に中性で希薄な原子集団であること ($10^{19} \sim 10^{21}\text{m}^{-3}$)、系全体がほぼ孤立系であること、原子種、外場、相互作用、内部自由度、空間次元、トラップポテンシャルの形状などを高精度に制御可能であることが挙げられる。

冷却原子系では、様々な光学技術を用いて原子集団を冷却し捕獲している。原子集団の捕獲方法には、磁気光学トラップや光学トラップがある。磁気光学トラップは、原子に空間依存する外部磁場を印加してポテンシャルを形成させて捕獲する方法である。この性質から磁気モーメントが磁場方向に向くためスピンの自由度が凍結してしまう。一方で、光学トラップは、原子と電場の相互作用により誘起される分極のポテンシャルを利用するためスピン自由度を残したまま原子集団を捕獲することが可能になり、この方法で多成分 BEC が実現されている。さらに、空間的に周期構造をもつレーザーを原子集団に照射することによって光格子ポテンシャルと呼ばれる周期ポテンシャルも形成することができる [59]。近年では原子とレーザーの相互作用を制御し、電氣的に中性な原子に実効的に働くゲージ場の生成に成功している [60, 61]。この光学技術を応用して、物質のトポロジカル相の実現に重要な役割を果たすスピン軌道相互作用を生成することが提案され、実現している [62, 63]

冷却原子系の冷却方法には、レーザー冷却と蒸発冷却法がある。レーザー冷却は、電磁波の非保存力である輻射圧による非弾性散乱を用いて原子を止める方法である。原子は自身の準位間のエネルギー差に対応する共鳴周波数の電磁波を吸収、放出することができる。共鳴周波数に近く小さい周波数のレーザーを照射し原子を励起させて基底状態に遷移する過程で反跳運動量をもつ光子を放出させて減衰させることが可能である。特に、アルカリ金属やアルカリ土類金属は最外殻電子数が少なく、原子核構造が単純であるため冷却原子気体でこれらの族に属する原子種がよく用いられる。蒸発冷却は、ポテンシャルにより捕獲されている熱平衡状態の原子集団の中から高いエネルギーを持っている原子を選択的に排除して、エネルギーの低い原子集団のみを残す冷却方法である。このレーザー冷却法と蒸発冷却法を用いて原子を転移温度以下まで冷却し、ボース・アインシュタイン凝縮の実現に成功した。この革新的に冷却方法を開発した、S. Chu, C. Cohen-Tannoudji, および W. Phillips の三氏は 1997 年にノーベル物理学賞を受賞した。

2.2 原子気体ボース・アインシュタイン凝縮

ボース・アインシュタイン凝縮とは、ボース粒子の同じ状態を制限なく取ることができる統計性から、系を構成する巨視的な数の粒子が、最低エネルギー状態を占有する相転移現象である。今日では、 $U(1)$ ゲージ対称性の自発的破れによる現象として広く理解されている。また、超伝導のような相転移現象では粒子間相互作用を必要とするが、ボース・アインシュタイン凝縮は相互作用を必要とせず純粹

な量子統計性により起こる。ボース・アインシュタイン凝縮体 (BEC) の存在は 1925 年に Einstein により予言されていたが、長年観測に至らずその 70 年後の 1995 年に ^{87}Rb [22], ^{23}Na [23], および ^7Li [24] の単一スピン状態の冷却原子気体においてその直接的証拠が観測された。この偉大な研究により、E. A. Cornell, C. E. Wieman, 及び W. Ketterle の 3 氏は 2001 年にノーベル賞物理学賞を受賞した。その後、光学技術の発展から 1998 年の内部自由度を有する BEC の観測 [64] はじめとする、様々な系が提案実装され、BEC の理解が急速に進んだ。以下では、本論文の議論で用いる、弱く相互作用するボース原子気体で実現する BEC の運動をよく記述する Gross-Pitaevskii 方程式 (GP 方程式) と凝縮体からの準粒子励起を記述する Bogoliubov 理論について述べる。

2.2.1 ハミルトニアン

本項では、冷却原子系で実現する内部自由度を有するスピノル BEC について説明する。冷却原子気体を構成する 1 原子の全スピンは全原子角運動量 (ハイパーファインスピン) $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{J}$ で記述され、核スピン \mathbf{I} と電子のスピン角運動量 $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ の和からなり、 \mathbf{L} は電子の軌道角運動量、 \mathbf{S} は電子のスピン角運動量を表す。ここではアルカリ原子を考えると $S = 1/2$, $L = 0$ であることから、ハイパーファインスピン準位 $F = I \pm 1/2$ の基底状態が実現し、それらは磁気副準位 $m = F, F-1, \dots, -F$ からなる $2F+1$ 個の量子状態を取る。核スピン \mathbf{I} は原子種に依存し、例えば $I = 3/2$ の ^{23}Na や ^{87}Rb を用いて、スピン $F = 1$ [25, 65], $F = 2$ [66, 67] の BEC が実現している。

トラップポテンシャル $U(\mathbf{r})$ に捕捉されたスピン F 、磁気副準位 m 、質量 M の N 個のボース原子からなる多粒子系を考える。空間のある点 \mathbf{r} におけるボース原子の生成消滅を表す場の演算子 $\hat{\Psi}_m^\dagger(\mathbf{r})$, $\hat{\Psi}_m(\mathbf{r})$ は、ボース統計性から

$$[\hat{\Psi}_m(\mathbf{r}), \hat{\Psi}_{m'}^\dagger(\mathbf{r}')] = \delta_{m,m'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.1a)$$

$$[\hat{\Psi}_m(\mathbf{r}), \hat{\Psi}_{m'}(\mathbf{r}')] = [\hat{\Psi}_m^\dagger(\mathbf{r}), \hat{\Psi}_{m'}^\dagger(\mathbf{r}')] = 0 \quad (2.1b)$$

を満たす。 $\delta_{mm'}$ はクロネッカーデルタを表し、 $m = m'$ の時、1 を取り、それ以外は 0 である。

一様磁場中におけるスピノル BEC のハミルトニアン $\hat{\mathcal{H}}$ は、

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_{\text{mag}} + \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}} \quad (2.2a)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \int d\mathbf{r} \sum_{mm'} \hat{\Psi}_m^\dagger(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) \right] \hat{\Psi}_{m'}(\mathbf{r}) \quad (2.2b)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{mag}} = \int d\mathbf{r} \sum_{mm'} \hat{\Psi}_m^\dagger(\mathbf{r}) \left[p(F_z)_{mm'} + q(F_z^2)_{mm'} \right] \hat{\Psi}_{m'}(\mathbf{r}) \quad (2.2c)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \sum_{mn,m'n'} C_{nn'}^{mm'} \hat{\Psi}_m^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_{m'}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_{n'}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_n(\mathbf{r}) \quad (2.2d)$$

$$C_{nn'}^{mm'} := \sum_{\mathcal{F}=0}^{2F} \frac{4\pi\hbar^2}{M} a_{\mathcal{F}} \langle Fm; Fm' | \hat{P}_{\mathcal{F}} | Fn'; Fn \rangle \quad (2.2e)$$

と書ける。 $U(\mathbf{r})$ は原子集団を捕獲するトラップポテンシャル、 F_z はスピン行列の z 成分を表す。 $p = g\mu_B B$ は一次ゼーマン係数、 $q = (g\mu_B B)^2 / (\Delta E_{\text{hf}})$ は二次ゼーマン係数で、それぞれラングの g 因子、ボーア磁子 μ_B 、超微細分裂エネルギー E_{hf} を用いて表す。実験的には二次ゼーマン係数 q はマイクロ波を用いて制御することができる [68, 69]。極低温で十分希薄な冷却原子系における同一ボーズ原子の

2体散乱は、低エネルギーでの散乱になるため散乱ポテンシャルをデルタ関数と s -波散乱長で近似できる。スピン依存性のある s -波散乱長は、2原子の合成スピンが全スピン \mathcal{F} 、全磁気量子数 \mathcal{M} をもつ状態 $|\mathcal{F}, \mathcal{M}\rangle$ へ射影する演算子 $\hat{P}_{\mathcal{F}}$ を用いて、各スピン状態の和で書くことができる。また、ボース統計性から二体の散乱過程での原子の入れ替えに対して、全スピン \mathcal{F} が偶数に制限される。

次に、スピン $F = 1$ のスピノル BEC を用いて、スピン演算子で表現した相互作用ハミルトニアンについて紹介する。(2.2e) 式から各合成スピン \mathcal{F} の射影演算子 $\hat{P}_{\mathcal{F}}$ が求まれば相互作用ハミルトニアンの具体的な形がわかるため、スピン演算子の関係式と射影演算子の完全性から導出する。2体散乱する同一ボース原子 j のスピン演算子を $\hat{\mathbf{F}}_j$ ($j = 1, 2$) とすると、

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{F}}_1 \cdot \hat{\mathbf{F}}_2 &= \frac{1}{2} \left[(\hat{\mathbf{F}}_1 + \hat{\mathbf{F}}_2)^2 - \hat{\mathbf{F}}_1^2 - \hat{\mathbf{F}}_2^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{F}=0,2} \left[\mathcal{F}(\mathcal{F}+1) - 2F(F+1) \right] \hat{P}_{\mathcal{F}}\end{aligned}\quad (2.3)$$

と書くことができる。また射影演算子の完全性は

$$\sum_{\mathcal{F}=0,2} \hat{P}_{\mathcal{F}} = \hat{1}\quad (2.4)$$

で与えられる。スピン演算子の関係式 (2.3) と完全性 (2.4) から射影演算子は以下のように導出される。

$$\hat{P}_0 = \frac{1 - \hat{\mathbf{F}}_1 \cdot \hat{\mathbf{F}}_2}{3}\quad (2.5a)$$

$$\hat{P}_2 = \frac{2 + \hat{\mathbf{F}}_1 \cdot \hat{\mathbf{F}}_2}{3}\quad (2.5b)$$

ここでスピン 1 のスピン演算子の行列 $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ は

$$F_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_y = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\quad (2.6)$$

で与えられ、スピン演算子の行列表示 $(\mathbf{F})_{mn} = \langle Fm | \hat{\mathbf{F}} | Fn \rangle$ を用いると、相互作用係数 $C_{nn'}^{mm'}$ は

$$C_{nn'}^{mm'} = c_0 \delta_{mn} \delta_{m'n'} + c_1 (\mathbf{F})_{mn} \cdot (\mathbf{F})_{m'n'}\quad (2.7)$$

$$c_0 := \frac{2g_2 + g_0}{3}\quad (2.8)$$

$$c_1 := \frac{g_2 - g_0}{3}\quad (2.9)$$

と書ける。 $g_{\mathcal{F}}$ は全スピン \mathcal{F} の各 s -波散乱長を表し、

$$g_{\mathcal{F}} = \frac{4\pi\hbar^2}{M} a_{\mathcal{F}}\quad (2.10)$$

のように関係する。以上の計算から、スピン 1 のスピノル BEC のハミルトニアン $\hat{\mathcal{H}}_{\text{spin1}}$ が以下のよ

うに求める。

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{spin1}} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_{\text{mag}} + \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}} \quad (2.11a)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \int d\mathbf{r} \sum_{mm'} \hat{\Psi}_m^\dagger(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) \right] \hat{\Psi}_{m'}(\mathbf{r}) \quad (2.11b)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{mag}} = \int d\mathbf{r} \sum_{mm'} \hat{\Psi}_m^\dagger(\mathbf{r}) \left[p(F_z)_{mm'} + q(F_z^2)_{mm'} \right] \hat{\Psi}_{m'}(\mathbf{r}) \quad (2.11c)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \left[c_0 : \hat{n}^2(\mathbf{r}) + c_1 \hat{F}^2(\mathbf{r}) : \right] \quad (2.11d)$$

:: は消滅演算子を生成演算子の右に配置する順序であることを表す。

$$\hat{n}(\mathbf{r}) = \sum_m \hat{\Psi}_m^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_m(\mathbf{r}) \quad (2.12a)$$

$$\hat{F}(\mathbf{r}) = \sum_{mm'} \hat{\Psi}_m^\dagger(\mathbf{r}) (\mathbf{F})_{mm'} \hat{\Psi}_{m'}(\mathbf{r}) \quad (2.12b)$$

$\hat{n}(\mathbf{r})$ は粒子数密度演算子、 $\hat{F}(\mathbf{r})$ はスピン密度演算子を表す。

2.3 スピノル BEC における平均場理論

本項では、原子気体 BEC における平均場理論及び、BEC を記述する Gross-Pitaevskii 方程式について説明する。

2.3.1 Gross-Pitaevskii 方程式

ボース原子の場の演算子を正規直交基底を用いて展開する。

$$\hat{\Psi}_m(\mathbf{r}) = \sum_j \psi_{jm}(\mathbf{r}) \hat{a}_{jm}, \quad (2.13a)$$

$$\hat{\Psi}_m^\dagger(\mathbf{r}) = \sum_j \psi_{jm}^*(\mathbf{r}) \hat{a}_{jm}^\dagger \quad (2.13b)$$

\hat{a}_{jm}^\dagger (\hat{a}_{jm}) は位置 \mathbf{r} にいる状態 $\psi_{jm}(\mathbf{r})$ の生成 (消滅) 演算子を表し、それらは正規直交性とボゾンの交換関係を満たす。

$$\int d\mathbf{r} \psi_{mi}^*(\mathbf{r}) \psi_{mj}(\mathbf{r}) = \delta_{ij} \quad (2.14a)$$

$$\sum_j \psi_{mj}^*(\mathbf{r}) \psi_{mj}(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.14b)$$

$$[\hat{a}_{mi}, \hat{a}_{m'j}^\dagger] = \delta_{mm'} \delta_{ij}, \quad (2.14c)$$

$$[\hat{a}_{mi}, \hat{a}_{m'j}] = [\hat{a}_{mi}^\dagger, \hat{a}_{m'j}^\dagger] = 0 \quad (2.14d)$$

原子気体 BEC における平均場近似は、巨視的な数の粒子が最低エネルギー状態を占有していると仮定してその状態 $|\xi\rangle$ は以下のように与える。

$$|\xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \left(\sum_{m=-F}^F \xi_m a_{m0}^\dagger \right)^N |\text{vac}\rangle \quad (2.15)$$

$|\text{vac}\rangle$ は粒子の真空を表し、 ξ_m は規格化条件を満たすとす。

$$\sum_{m=-F}^F |\xi_m|^2 = 1 \quad (2.16)$$

これを用いると基底状態である凝縮状態は

$$\Psi_m(\mathbf{r}) = \sqrt{N} \xi_m \psi_{0m}(\mathbf{r}) \quad (2.17)$$

と表すことができる。この状態を用いて、スピノル BEC のハミルトニアン (2.2a) における平均場エネルギー $\mathcal{E}[\Psi]$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[\Psi] &= \langle \xi | \hat{\mathcal{H}} | \xi \rangle \\ &= \int d\mathbf{r} \sum_{mm'} \Psi_m^*(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) + p(F_z)_{mm'} + q(F_z^2)_{mm'} \right] \Psi_{m'}(\mathbf{r}) \\ &\quad + \int d\mathbf{r} \sum_{mnm'n'} C_{nn'}^{mm'} \Psi_m^*(\mathbf{r}) \Psi_n^*(\mathbf{r}) \Psi_{n'}(\mathbf{r}) \Psi_{m'}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.18)$$

と与えられ、この平均場エネルギーを $\Psi_m^*(\mathbf{r})$ で変分を行うと、多成分 BEC の運動を記述する時間依存する Gross-Pitaevskii 方程式 (GP 方程式) が得られる。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_m = \frac{\delta \mathcal{E}[\Psi]}{\delta \Psi_m^*} = \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) + p(F_z)_{mm} + q(F_z^2)_{mm} \right] \Psi_m + \sum_{nm'n'} C_{nn'}^{mm'} \Psi_n^* \Psi_{n'} \Psi_{m'} \quad (2.19)$$

また、定常状態を記述する GP 方程式は $\Psi_m(\mathbf{r}, t) = \Psi_m e^{-i\mu t/\hbar}(\mathbf{r})$ を (2.19) 式に代入すると得られる。

$$\mu \Psi_m = \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) + p(F_z)_{mm} + q(F_z^2)_{mm} \right] \Psi_m + \sum_{nm'n'} C_{nn'}^{mm'} \Psi_n^* \Psi_{n'} \Psi_{m'} \quad (2.20)$$

2.4 Bogoliubov 理論

Bogoliubov 理論は、低温で凝縮体からの励起 (Bogoliubov 準粒子) を記述する理論である。Bogoliubov 準粒子を記述する Bogoliubov 方程式の導出方法は、第二量子化による方法と線形安定性解析による方法があり、前者は Bogoliubov 準粒子を個別励起として記述し、後者は集団励起として記述する。本章では、2つの方法について説明し、各々の方法から導出される Bogoliubov 方程式が一致することを紹介する。また、Bogoliubov ハミルトニアンのハミルトニアン行列の性質についても述べる。

2.4.1 第二量子化形式による Bogoliubov ハミルトニアン

ボーズ・アインシュタイン凝縮は巨視的な数の状態が最低エネルギー状態を占有する現象から、凝縮状態に対応する生成、消滅演算子を c -数に置き換えるという平均場近似を行う。

$$\hat{\Psi}_m = \Psi_m + \delta\hat{\Psi}_m \quad (2.21)$$

第一項目は凝縮状態を表し GP 方程式から計算できる。第二項目は励起状態を表す。この式 (2.21) をハミルトニアンに代入し、 $\delta\hat{\Psi}_m$ の2次まで展開するのが Bogoliubov 理論である。

以下では、一様系 $U(\mathbf{r}) = 0$ の場合を考える。その時、場の演算子は平面波展開できる。

$$\hat{\Psi}_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}m} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (2.22a)$$

$$\hat{\Psi}_m^\dagger(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}m}^\dagger e^{+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (2.22b)$$

Ω は体積、 m は内部自由度を表す。この場の演算子をスピノル BEC のハミルトニアン (2.2a) に代入する。

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} = & \sum_{\mathbf{k}, m} (\epsilon_{\mathbf{k}} + p(F_z)_{mm} + q(F_z^2)_{mm}) \hat{a}_{\mathbf{k}m}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}m} \\ & + \frac{1}{2\Omega} \sum_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_4} \sum_{m_1, \dots, m_4} C_{m'_1, m'_2}^{m_1, m_2} \delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4} \hat{a}_{\mathbf{k}_1 m_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_2 m_2}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_3 m'_2} \hat{a}_{\mathbf{k}_4 m'_1} \end{aligned} \quad (2.23)$$

$\hat{a}_{\mathbf{k}m} (\hat{a}_{\mathbf{k}m}^\dagger)$ は内部状態 m で運動量 \mathbf{k} のボーズ原子の消滅 (生成) を表す演算子である。

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}m}, \hat{a}_{\mathbf{k}'m'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta_{mm'}, \quad (2.24a)$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}m}, \hat{a}_{\mathbf{k}'m'}] = [\hat{a}_{\mathbf{k}m}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'m'}^\dagger] = 0 \quad (2.24b)$$

ボゾン演算子の交換関係から、相互作用係数は以下の関係を満たす。

$$C_{m'_1, m'_2}^{m_1, m_2} = C_{m_1, m_2}^{m'_1, m'_2} = C_{m'_2, m'_1}^{m_2, m_1} = C_{m_2, m_1}^{m'_2, m'_1} \quad (2.25)$$

また、空間依存しないため粒子数密度 n と規格化された秩序変数 ξ (2.16) を用いて

$$\Psi_m = \sqrt{n} \xi_m \quad (2.26)$$

と置くことができ、(2.23) 式のハミルトニアン $\hat{\mathcal{H}}$ に関して

$$\hat{a}_{\mathbf{0}m}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{0}m'} \rightarrow \hat{N}_0 \xi_m^* \xi_{m'} \quad (2.27)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{0}m_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{0}m_2}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{0}m'_2} \hat{a}_{\mathbf{0}m'_1} \rightarrow \hat{N}_0 (\hat{N}_0 - 1) \xi_{m_1}^* \xi_{m_2}^* \xi_{m'_2} \xi_{m'_1} \quad (2.28)$$

と近似できる。ここで \hat{N}_0 は凝縮状態の粒子数を表す。

$$\hat{N}_0 := \hat{N} - \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}, m} \hat{n}_{\mathbf{k}m} \quad (2.29)$$

このように全粒子数 N を固定して考えると、化学ポテンシャルを導入せずに粒子数保存する Bogoliubov 理論を考えることができる。ボーズ・アインシュタイン凝縮は U(1) ゲージ対称性の破れにより粒子数

が保存しない相転移現象として理解される。冷却原子気体系は、有限サイズの孤立系で粒子数保存が成り立つ系のため、厳密な意味でボーズ・アインシュタイン凝縮は起こらないが、本章で紹介している平均場近似から求まる GP 方程式を用いて原子気体 BEC の実験をうまく説明できることが知られている。

以上の関係を用いて $\delta\hat{\Psi}$ の 2 次まで展開したものを二次形式でまとめる。

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{Bog}} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \begin{pmatrix} \tilde{\hat{\mathbf{a}}}_{\mathbf{k}}^\dagger & \tilde{\hat{\mathbf{a}}}_{-\mathbf{k}} \end{pmatrix} \tilde{H}(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}} \\ \hat{\mathbf{a}}_{-\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} [\text{Tr}[\mathbf{H}_{\mathbf{k}}^{(0)} + \mathbf{H}^{(1)}]] \quad (2.30)$$

$\tilde{\hat{\mathbf{a}}}_{\mathbf{k}} = (\hat{a}_{\mathbf{k}F}, \hat{a}_{\mathbf{k}F-1}, \dots, \hat{a}_{\mathbf{k}-F})$, $\tilde{\hat{\mathbf{a}}}_{\mathbf{k}}^\dagger = (\hat{a}_{\mathbf{k}F}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}F-1}^\dagger, \dots, \hat{a}_{\mathbf{k}-F}^\dagger)$, $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}} = (\tilde{\hat{\mathbf{a}}}_{\mathbf{k}})^\text{T}$, $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}}^\dagger = (\tilde{\hat{\mathbf{a}}}_{\mathbf{k}}^\dagger)^\text{T}$ は内部自由度 $2F+1$ 個の生成消滅演算子を表す。第 2 項は粒子数保存により現れる。 $\tilde{H}(\mathbf{k})$ は $2(2F+1) \times 2(2F+1)$ のエルミート行列で、行列成分は以下のように与えられる。

$$\tilde{H}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{\mathbf{k}}^{(0)} + \mathbf{H}^{(1)} & \mathbf{H}^{(2)} \\ [\mathbf{H}^{(2)}]^* & [\mathbf{H}_{-\mathbf{k}}^{(0)} + \mathbf{H}^{(1)}]^* \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{k}}^{(0)} = (\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu)\mathbf{1} + p\mathbf{F}_z + q\mathbf{F}_z^2, \quad (2.32a)$$

$$(\mathbf{H}_{\mathbf{k}}^{(1)})_{m_1 m_2} = \frac{N}{\Omega} \sum_{m'_1, m'_2} (C_{m'_1, m'_2}^{m_1, m'_2} + C_{m_2, m'_1}^{m_1, m'_2}) \xi_{m'_1} \xi_{m'_2}^*, \quad (2.32b)$$

$$(\mathbf{H}^{(2)})_{m_1 m_2} = \frac{N}{\Omega} \sum_{m'_1, m'_2} C_{m'_1, m'_2}^{m_1, m_2} \xi_{m'_1} \xi_{m'_2}, \quad (2.32c)$$

$$\mu = \sum_m (p(\mathbf{F}_z)_{mm} + q(\mathbf{F}_z^2)_{mm}) |\xi_m|^2 + \frac{2N-1}{2\Omega} \sum_{m_1 m_2 m'_1, m'_2} C_{m'_1, m'_2}^{m_1 m_2} \xi_{m_1}^* \xi_{m_2}^* \xi_{m'_1} \xi_{m'_2} \quad (2.32d)$$

$\mathbf{H}_{\mathbf{k}}^{(0)}$, $\mathbf{H}_{\mathbf{k}}^{(1)}$ は $(2F+1) \times (2F+1)$ 次元のエルミート行列、 $\mathbf{H}_{\mathbf{k}}^{(2)}$ は $(2F+1) \times (2F+1)$ 次元の対称行列である。 μ は化学ポテンシャルを表す。

BEC における Bogoliubov 変換

次に、Bogoliubov 変換とよばれる一次変換を行い、 $\hat{\mathcal{H}}_{\text{Bog}}$ の対角化を行う。以下のような Bogoliubov 変換を考える。

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}} \\ \hat{\mathbf{a}}_{-\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{\mathbf{k}} & \mathbf{V}_{-\mathbf{k}}^* \\ \mathbf{V}_{\mathbf{k}} & \mathbf{U}_{-\mathbf{k}}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{k}} \\ \hat{\mathbf{b}}_{-\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix} =: T(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{k}} \\ \hat{\mathbf{b}}_{-\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Bogoliubov 準粒子の生成消滅演算子を $\tilde{\hat{\mathbf{b}}}_{\mathbf{k}} = (\hat{b}_{\mathbf{k}F}, \hat{b}_{\mathbf{k}F-1}, \dots, \hat{b}_{\mathbf{k}-F})^\text{T}$, $\tilde{\hat{\mathbf{b}}}_{\mathbf{k}}^\dagger = (\hat{b}_{\mathbf{k}F}^\dagger, \hat{b}_{\mathbf{k}F-1}^\dagger, \dots, \hat{b}_{\mathbf{k}-F}^\dagger)^\text{T}$ と定義し、 $\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{k}}$ は $\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{k}}^\dagger = (\tilde{\hat{\mathbf{b}}}_{\mathbf{k}}^\dagger)^\text{T}$, $\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{k}} = (\tilde{\hat{\mathbf{b}}}_{\mathbf{k}})^\text{T}$ とする。 $T(\mathbf{k})$ は $2(2F+1) \times 2(2F+1)$ 次元の変換行列である。 $\mathbf{U}_{\mathbf{k}} = (\mathbf{u}_{\mathbf{k}F}, \mathbf{u}_{\mathbf{k}F-1}, \dots, \mathbf{u}_{\mathbf{k}-F})^\text{T}$, $\mathbf{V}_{\mathbf{k}} = (\mathbf{v}_{\mathbf{k}F}, \mathbf{v}_{\mathbf{k}F-1}, \dots, \mathbf{v}_{\mathbf{k}-F})^\text{T}$ は Bogoliubov 準粒子の固有関数である。 $\hat{a}_{\mathbf{k}m}, \hat{a}_{\mathbf{k}m}^\dagger$ はボゾンの交換関係を満たすことから、Bogoliubov 固有関数 $\mathbf{U}_{\mathbf{k}}, \mathbf{V}_{\mathbf{k}}$ は

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}m}^\dagger \mathbf{u}_{\mathbf{k}'n} - \mathbf{v}_{-\mathbf{k}m}^\dagger \mathbf{v}_{-\mathbf{k}'n} = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta_{m, n}, \quad (2.34a)$$

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}m}^\dagger \mathbf{v}_{\mathbf{k}'n} - \mathbf{v}_{-\mathbf{k}m}^\dagger \mathbf{v}_{-\mathbf{k}'n} = 0 \quad (2.34b)$$

を満たす必要がある。この (2.34) 式を満たす逆変換 $T^{-1}(\mathbf{k})$ を構成すると、Bogoliubov 準粒子の生成(消滅)演算子 $\hat{b}_{\mathbf{k}m}^\dagger$ ($\hat{b}_{\mathbf{k}m}$) は

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_{\mathbf{k}} \\ \hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{\mathbf{k}}^\dagger & -\mathbf{V}_{\mathbf{k}}^\dagger \\ -\mathbf{V}_{-\mathbf{k}}^\top & \mathbf{U}_{-\mathbf{k}}^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{\mathbf{k}} \\ \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Bogoliubov 準粒子 $\hat{b}_{\mathbf{k}m}$, $\hat{b}_{\mathbf{k}'n}^\dagger$ に対してもボゾンの交換関係を与える。

$$[\hat{b}_{\mathbf{k}m}, \hat{b}_{\mathbf{k}'n}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \delta_{m,n}, \quad (2.36a)$$

$$[\hat{b}_{\mathbf{k}m}, \hat{b}_{\mathbf{k}'n}] = [\hat{b}_{\mathbf{k}m}^\dagger, \hat{b}_{\mathbf{k}'n}^\dagger] = 0 \quad (2.36b)$$

これにより、Bogoliubov 準粒子の固有関数である $\mathbf{U}_{\mathbf{k}}$ と $\mathbf{V}_{\mathbf{k}}$ は

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}m}^\dagger \mathbf{u}_{\mathbf{k}'n} - \mathbf{v}_{\mathbf{k}m}^\dagger \mathbf{v}_{\mathbf{k}'n} = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \delta_{m,n}, \quad (2.37a)$$

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}m} \mathbf{v}_{-\mathbf{k}'n} - \mathbf{v}_{\mathbf{k}m} \mathbf{v}_{-\mathbf{k}'n} = 0 \quad (2.37b)$$

を満たす。この関係から Bogoliubov 変換行列 $T(\mathbf{k})$ は

$$T^\dagger(\mathbf{k}) \tau_3 T(\mathbf{k}) = \tau_3, \quad (2.38)$$

を満たす。 τ_i ($i = 0, 1, 2, 3$) は南部空間の自由度を表すパウリ演算子である。このような性質をもつ行列をパラユニタリ行列と呼び、 $T^{-1}(\mathbf{k}) = \tau_3 T^\dagger(\mathbf{k}) \tau_3 \neq T^\dagger(\mathbf{k})$ である。このような性質を有する Bogoliubov 変換行列 $T(\mathbf{k})$ を用いて、 $\hat{\mathcal{H}}_{\text{Bog}}$ の対角化を行う。

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{Bog}} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \begin{pmatrix} \tilde{b}_{\mathbf{k}}^\dagger & \tilde{b}_{-\mathbf{k}} \end{pmatrix} T^\dagger(\mathbf{k}) \tilde{H}(\mathbf{k}) T(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} \hat{b}_{\mathbf{k}} \\ \hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} [\text{Tr}[\mathbf{H}_{\mathbf{k}}^{(0)} + \mathbf{H}^{(1)}]] \quad (2.39)$$

対角化する一次変換行列がパラユニタリ行列 (2.38) であるため、固有値方程式は以下ようになる。

$$H(\mathbf{k}) T(\mathbf{k}) = T(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{k}) & 0 \\ 0 & -\mathbf{E}^*(-\mathbf{k}) \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

$$H(\mathbf{k}) := \tau_3 \tilde{H}(\mathbf{k}) \quad (2.41)$$

$\mathbf{E}(\mathbf{k}) = \text{diag}[E_{\mathbf{k}F}, E_{\mathbf{k}F-1} \cdots, E_{\mathbf{k}-F}]$ は固有値を表し、 $(2F+1) \times (2F+1)$ 次元の対角行列である。また、ここでは後で述べる particle-hole 対称性により、固有値 $E(\mathbf{k})$ と $-\mathbf{E}^*(-\mathbf{k})$ が対で現れることを用いた。この (2.40) 式の固有値方程式を Bogoliubov 方程式と呼び、この固有値方程式を解くことにより対角化される。本論文では、このハミルトニアン行列を Bogoliubov ハミルトニアンと呼ぶ。

BEC における Bogoliubov ハミルトニアンは非エルミートであるため、固有値が複素数になりうる。固有値が実数か複素数であるかの違いは、規格化定数(ノルム)に現れる。(2.40) 式から内部自由度 n で固有値 $E_{\mathbf{k}n}$ をもつ固有状態 $|u_n(\mathbf{k})\rangle = (u_{\mathbf{k}n} \ v_{\mathbf{k}n})^\top$ に対する固有値方程式は以下のように与えられる。

$$\tau_3 \tilde{H}(\mathbf{k}) |u_n(\mathbf{k})\rangle = E_{\mathbf{k}n} |u_n(\mathbf{k})\rangle \quad (2.42)$$

(2.42) 式の左から $\langle u_m(\mathbf{k})|$ をかけ、 $\tilde{H}(\mathbf{k})$ がエルミート行列であることを用いて規格化定数を考える。

$$\begin{aligned} \langle u_m(\mathbf{k})| \tilde{H}(\mathbf{k}) |u_n(\mathbf{k})\rangle &= E_{\mathbf{k}n} \langle u_m(\mathbf{k})| \tau_3 |u_n(\mathbf{k})\rangle \\ &= E_{\mathbf{k}m}^* \langle u_m(\mathbf{k})| \tau_3 |u_n(\mathbf{k})\rangle \end{aligned} \quad (2.43)$$

$[E_{\mathbf{k},m} - E_{\mathbf{k},n}^*] \langle u_m(\mathbf{k}) | \tau_3 | u_n(\mathbf{k}) \rangle = 0$ の関係から、固有値が実数か複素数によりノルム $\langle u_m(\mathbf{k}) | \tau_3 | u_n(\mathbf{k}) \rangle$ の値が変化する。

$$\langle u_n(\mathbf{k}) | \tau_3 | u_n(\mathbf{k}) \rangle = \mathbf{u}_{\mathbf{k}n}^\dagger \mathbf{u}_{\mathbf{k}n} - \mathbf{v}_{\mathbf{k}n}^\dagger \mathbf{v}_{\mathbf{k}n} = 1 \quad E_{\mathbf{k}n} \in \mathbb{R}, \quad (2.44a)$$

$$\langle u_n(\mathbf{k}) | \tau_3 | u_n(\mathbf{k}) \rangle = \mathbf{u}_{\mathbf{k}n}^\dagger \mathbf{u}_{\mathbf{k}n} - \mathbf{v}_{\mathbf{k}n}^\dagger \mathbf{v}_{\mathbf{k}n} = 0 \quad E_{\mathbf{k}n} \in \mathbb{C} \quad (2.44b)$$

ノルムの計算から固有値が実数の場合は (2.37) 式と一致することからボゾンの交換関係が成り立つが、固有値が複素数の場合は、ボゾンの交換関係を満たさないことがわかる。したがって、固有値が複素数の領域において Bogoliubov 変換行列はパラユニタリ行列 (2.38) ではなくなる。しかし、そのような場合でも、複素共役対の線型結合からなる $\mathbf{U}_{\mathbf{k}}$, $\mathbf{V}_{\mathbf{k}}$ を構成すると、ボゾンの交換関係を満たす準粒子が定義できる [3]。

Bogoliubov ハミルトニアン の 対 称 性

Bogoliubov ハミルトニアンがもつ対称性について説明する。パラユニタリ行列を用いて対角化されるため、BEC における Bogoliubov ハミルトニアンは以下の関係が成り立つ。

$$\tau_3 H(\mathbf{k}) \tau_3^{-1} = H^\dagger(\mathbf{k}). \quad (2.45)$$

この対称性を擬エルミート性と呼ぶ。一般に τ_3 に対応する演算子 (計量演算子と呼ぶ) はエルミート行列として定義される。擬エルミート性は右固有ベクトルと左固有ベクトルを関係づけ、複素固有値モードが出現する場合、複素共役な対として出現することを保証する。ここでは簡単な紹介だけにして非エルミート物理に関する第 2.5 節にて詳しく述べる。Bogoliubov ハミルトニアンは次式で定義される particle-hole 対称性 (PHS) を常に満たす。

$$\mathcal{C} H(\mathbf{k}) \mathcal{C}^{-1} = -H(-\mathbf{k}), \quad \mathcal{C} = \tau_1 K \quad (2.46)$$

\mathcal{C} は particle-hole 演算子、 K は複素共役演算子である。これにより固有値 $E_{\mathbf{k}n}$ をもつ固有状態 $(\mathbf{u}_{\mathbf{k}n} \ \mathbf{v}_{\mathbf{k}n})^T$ と固有値 $-E_{\mathbf{k}n}^*$ をもつ固有状態 $(\mathbf{v}_{-\mathbf{k}n}^* \ \mathbf{u}_{-\mathbf{k}n}^*)^T$ が対で現れる。(2.40) 式ではこの性質を利用して、固有値行列が $E(\mathbf{k})$ と $-E^*(-\mathbf{k})$ と書いた。超伝導体や BEC のような量子凝縮系では必ず PHS があるため、particle-hole 対称な状態が対生成する。ただし、BEC における Bogoliubov 準粒子のノルムの定義が (2.44) 式で与えられるため particle-hole 対は区別される。

$$|u_n(\mathbf{k})\rangle : \langle u_n(\mathbf{k}) | \tau_3 | u_n(\mathbf{k}) \rangle = +1, \quad (2.47a)$$

$$\mathcal{C} |u_n(\mathbf{k})\rangle : \langle u_n(\mathbf{k}) | \tau_3 | u_n(\mathbf{k}) \rangle = -1 \quad (2.47b)$$

ノルムの値が +1 の状態を正ノルム (粒子的状態)、-1 の状態を負ノルム (ホールの状態) と呼ぶ。

以上のことを踏まえた、対角化された Bogoliubov ハミルトニアンは以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_{\text{Bog}} &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \begin{pmatrix} \tilde{\hat{\mathbf{b}}}_{\mathbf{k}}^\dagger & \tilde{\hat{\mathbf{b}}}_{-\mathbf{k}} \end{pmatrix} T^\dagger(\mathbf{k}) \tau_3 T(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{k}) & 0 \\ 0 & -\mathbf{E}^*(-\mathbf{k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{k}} \\ \hat{\mathbf{b}}_{-\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} [\text{Tr}[\mathbf{H}_{\mathbf{k}}^{(0)} + \mathbf{H}^{(1)}]] \\ &= \sum_{\mathbf{k} \neq 0, m'} (|u_{\mathbf{k}m'}|^2 - |v_{\mathbf{k}m'}|^2) E_{\mathbf{k}m'} \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{k}m'}^\dagger \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{k}m'} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} [\text{Tr}[\mathbf{E}(\mathbf{k}) - \mathbf{H}_{\mathbf{k}}^{(0)} - \mathbf{H}^{(1)}]] \end{aligned} \quad (2.48)$$

m' の添字は実固有値をもつ状態を指し、複素固有値の場合は含まれない。第 1 項から波数 \mathbf{k} で内部自由度 m' のボーズ原子の励起エネルギーが $(|u_{\mathbf{k}m'}|^2 - |v_{\mathbf{k}m'}|^2)E_{\mathbf{k}m'}$ であることがわかる。つまり、particle 励起と hole 的励起は同じ励起エネルギーを与え、励起エネルギーの観点では粒子的状態と hole 的状态を区別することができない。このように励起エネルギーが固有値とノルムの積で与えられることから、 $E_{\mathbf{k}m'}$ とノルムの符号が異なる場合も考えられる。 $(|u_{\mathbf{k}m'}|^2 - |v_{\mathbf{k}m'}|^2)E_{\mathbf{k}m'} < 0$ 、つまり、 $-E_{\mathbf{k}m'}$ をもつ正ノルムの励起(その逆も然り)は、励起した方が系全体のエネルギーを下げるため熱力学的な不安定性を引き起こす。このエネルギー散逸を伴う不安定をランダウ不安定性と呼び、熱浴と接する系において重要な役割を果たす。複素固有値の場合は上記の Bogoliubov 変換では、(2.44b) 式よりノルムがゼロになるため、(2.48) 式には含まれていない。複素固有値モードが出現する場合も BEC を不安定化させることが知られており、この不安定性を動的不安定性と呼ぶ。このモードはゼロエネルギー励起であるためエネルギー保存系である冷却原子系において、ランダウ不安定より動的不安定性が BEC に支配的な影響を与える。詳細は第 2.4.4 章にて記載する。

2.4.2 BEC における線形安定性解析

第 2.4.2 章では準粒子励起を個別励起としてみなして第二量子化形式で Bogoliubov 方程式を導出したが、本項では準粒子励起を集団励起とみなして線形安定性解析から Bogoliubov 方程式を導出する。集団励起による Bogoliubov 方程式の導出では、凝縮体の定常解 ψ からの微小揺らぎを準粒子励起 $\delta\psi$ とする:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = [\psi(\mathbf{r}) + \delta\psi(\mathbf{r}, t)]e^{-i\mu t/\hbar}, \quad (2.49a)$$

$$\delta\psi_m(\mathbf{r}, t) := u_m(\mathbf{r})e^{-iE_m t/\hbar} + v_m^*(\mathbf{r})e^{+iE_m^* t/\hbar}. \quad (2.49b)$$

μ は化学ポテンシャル、 E_m は準粒子のエネルギー、 $u_m(\mathbf{r})$, $v_m(\mathbf{r})$ は Bogoliubov 固有関数である。(2.49a) 式を時間依存する GP 方程式 (2.19) に代入すると GP 方程式の定常解 $\psi(\mathbf{r})$ が次のように得られる。

$$\mu\psi_m = \left[-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + U(\mathbf{r}) + p(F_z)_{mm} + q(F_z^2)_{mm} \right] \psi_m + \sum_{nm'n'} C_{nn'}^{mm'} \psi_m^* \psi_{n'} \psi_n \quad (2.50)$$

次に、この (2.49a) 式を時間依存する GP 方程式 (2.20) 式に代入し、 $\delta\Psi_m(\mathbf{r}, t)$ に関して 1 次まで残す近似を行う。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \delta\psi_m = \left[-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 - \mu + U(\mathbf{r}) + p(F_z)_{mm} + q(F_z^2)_{mm} \right] \delta\psi_m \quad (2.51)$$

$$+ \sum_{nm'n'} C_{nn'}^{mm'} [\psi_m^* \psi_n \delta\psi_n + \psi_m^* \delta\psi_n \psi_n + \delta\psi_m^* \psi_n \psi_n] \quad (2.52)$$

$e^{\pm iE_m t/\hbar}$ に関してまとめると、以下の式が導出が導出される。

$$\tau_3 \begin{pmatrix} \mathbf{H}_r^{(0)} + \mathbf{H}_r^{(1)} & \mathbf{H}_r^{(2)} \\ [\mathbf{H}_r^{(2)}]^* & [\mathbf{H}_r^{(0)} + \mathbf{H}_r^{(1)}]^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{v}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = E_m \begin{pmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{v}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

$$\mathbf{H}_r^{(0)} = \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) - \mu \right] \mathbf{1} + p\mathbf{F}_z + q\mathbf{F}_z^2, \quad (2.54a)$$

$$(\mathbf{H}_r^{(1)})_{m_1 m_2} = \sum_{m'_1, m'_2} (C_{m'_1, m_2}^{m_1, m'_2} + C_{m_2, m'_1}^{m_1, m'_2}) \psi_{m'_1} \psi_{m'_2}^*, \quad (2.54b)$$

$$(\mathbf{H}_r^{(2)})_{m_1 m_2} = \sum_{m'_1, m'_2} C_{m'_1, m'_2}^{m_1, m_2} \psi_{m'_1} \psi_{m'_2} \quad (2.54c)$$

Bogoliubov 準粒子の固有関数である $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ は正規直交関係を満たす。

$$\int d\mathbf{r} [u_m^*(\mathbf{r})u_n(\mathbf{r}) - v_m^*(\mathbf{r})v_n(\mathbf{r})] = \delta_{mn}, \quad (2.55a)$$

$$\int d\mathbf{r} [u_m^*(\mathbf{r})v_n(\mathbf{r}) - v_m^*(\mathbf{r})u_n(\mathbf{r})] = 0 \quad (2.55b)$$

GP 方程式を用いて凝縮体波動関数 ψ を求め、(2.53) 式に代入して固有値方程式を解くことで励起状態の波動関数が求まる。また、一様系の場合 $U(\mathbf{r}) = 0$ 、凝縮体波動関数は規格化された空間依存しない秩序変数 $\sqrt{n}\xi$ 、Bogoliubov 準粒子は平面波展開でき、それらに置き換えると (2.53) 式は第二量子化形式で得た Bogoliubov 方程式 (2.40) と一致する。

2.4.3 南部・ゴールドストーンモード

自然界では、基底状態が系の連続対称性を持たないことがしばしば起こる。磁性体、超流動体、超伝導体などもその一種で普遍的に存在する。自発的に連続対称性が破れると南部-Goldstone(NG) モードと呼ばれるギャップレス励起が現れる。ボース・アインシュタイン凝縮は自発的破れによる現象で、それに伴って NG モードが現れる。内部自由度がないスカラー BEC の場合は U(1) ゲージ対称性の破れによるフォノンモードが現れるが、スピン 1 BEC をはじめとするスピノル BEC は U(1) ゲージ対称性以外に回転対称性も自発的に破るため豊かな基底状態が存在する。スカラー BEC は U(1) ゲージ対称性の破れによるフォノンモード、擬スピン 1/2 BEC は混合相でフォノン以外に SO(2) 回転対称性の破れによる線形分散 ($E \propto |k|$) のマグノンモードが現れる。スピン 1 BEC は外部磁場がない場合、強磁性相とポーラー相がある。強磁性相ではフォノンモード以外に 2 乗分散 ($E \propto k^2$) のマグノンモード、ポーラー相では線形分散のマグノンモードが現れる。

一般に NG モードは、線形分散の Type-I と 2 乗分散の Type-II のモードが存在し、それらの分散関係と NG モードの個数の関係が明らかされている [70]。また、スピノル BEC に現れる NG モードの個数とその分散関係についても研究されている [71]。

2.4.4 動的不安定性

BEC における不安定は、熱力学的不安定性を表すランダウ不安定性と複素スペクトルの出現による動的不安定が存在するが、熱浴に接しないエネルギー保存系である冷却原子系において、動的不安定がダイナミクスに大きな影響を与える。BEC に現れる動的不安定は、用意した初期状態のゆらぎが指数関数的に大きくなり系が不安定な状態であることを意味する。この指数関数増加する解の振る舞いは、力学系など微分方程式論の線形安定性解析で議論されていることが多いが、本項では、場の理論および線形安定性解析の観点から説明する。

第二量子化形式による複素固有値モードの性質

第2.4.2章にて、固有値が複素数である時ノルムがゼロになることを説明した。つまり、これは励起状態である Bogoliubov 準粒子がボゾンの交換関係を満たさないことを意味するが、スピノル BEC の review 論文 [3] でボゾンの交換関係を満たす複素固有値モードの基底が紹介されている。その基底について説明するために、まず (2.44) 式で与えられる複素固有値モードのノルムの性質について再考する。

$$(E_{\mathbf{k}m} - E_{\mathbf{k}n}^*)(\mathbf{u}_{\mathbf{k}m}^\dagger \mathbf{u}_{\mathbf{k}'m} - \mathbf{v}_{\mathbf{k}m}^\dagger \mathbf{v}_{\mathbf{k}'n}) = 0 \quad (2.56)$$

m, n は内部自由度を表す。実固有値の場合はある波数で同じ状態では $E_{\mathbf{k}n} = E_{\mathbf{k}n}^*$ であるためボゾンの交換関係を満たすが、複素固有値の場合は複素共役対 $E_{\mathbf{k}a}, E_{\mathbf{k}b}^*$ が $E_{\mathbf{k}a} = E_{\mathbf{k}b}^*$ である必要がある。つまり、

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}a}^\dagger \mathbf{u}_{\mathbf{k}'b} - \mathbf{v}_{\mathbf{k}a}^\dagger \mathbf{v}_{\mathbf{k}'b} = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta_{a,b} \quad (2.57)$$

この関係式 (2.57) と particle-hole 対を用いて、ボゾンの交換関係を満たす $\tilde{U}_{\mathbf{k}}, \tilde{V}_{\mathbf{k}}$ を構成する。

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}m} \\ \tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}m} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{\mathbf{k}a} + \mathbf{u}_{\mathbf{k}b} \\ \mathbf{v}_{\mathbf{k}a} + \mathbf{v}_{\mathbf{k}b} \end{pmatrix}, \quad (2.58a)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_{-\mathbf{k}m} \\ \tilde{\mathbf{u}}_{-\mathbf{k}m} \end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{-\mathbf{k}a}^* - \mathbf{v}_{-\mathbf{k}b}^* \\ \mathbf{u}_{-\mathbf{k}a}^* - \mathbf{u}_{-\mathbf{k}b}^* \end{pmatrix} \quad (2.58b)$$

この複素共役対の線形結合からなる新しい基底は、ボゾンの交換関係を満たす。

$$\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}m}^\dagger \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}'n} - \tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}m}^\dagger \tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}'n} = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta_{mn} \quad (2.59)$$

したがって、複素固有値を持つ Bogoliubov 準粒子の演算子 $\hat{\gamma}_{\mathbf{k}}, \hat{\gamma}_{-\mathbf{k}}^\dagger$ は以下のように定義される。

$$\begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{\mathbf{k}} \\ \hat{\gamma}_{-\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{U}_{\mathbf{k}}^\dagger & -\tilde{V}_{\mathbf{k}}^\dagger \\ -\tilde{V}_{-\mathbf{k}}^T & \tilde{U}_{-\mathbf{k}}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}} \\ \hat{\mathbf{a}}_{-\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

$\tilde{U}_{\mathbf{k}}, \tilde{V}_{\mathbf{k}}$ は $\tilde{U}_{\mathbf{k}} = (\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}F}, \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}F-1}, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}-F})^T$, $\tilde{V}_{\mathbf{k}} = (\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}F}, \tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}F-1}, \dots, \tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}-F})^T$ である。この Bogoliubov 変換行列を用いて対角化された Bogoliubov ハミルトニアンは以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{Bog}} = & \sum_{\mathbf{k} \neq 0, m} \left[\text{Re} E_{\mathbf{k}m} \left(\hat{b}_{\mathbf{k}m}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}m} + \frac{1}{2} \right) + \text{Im} E_{\mathbf{k}m} \left(\hat{\gamma}_{\mathbf{k}m} \hat{\gamma}_{-\mathbf{k}m} + \hat{\gamma}_{\mathbf{k}m}^\dagger \hat{\gamma}_{-\mathbf{k}m}^\dagger \right) \right] \\ & - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} [\text{Tr}[\mathbf{H}_{\mathbf{k}}^{(0)} + \mathbf{H}_{\mathbf{k}}^{(1)}]] \end{aligned} \quad (2.61)$$

ボゾンの交換関係を満たす複素固有値モードは対角化されず、 \mathbf{k} と $-\mathbf{k}$ の準粒子が対生成消滅する。

線形安定性解析による複素固有値モードの性質

次に、線形安定性解析による動的不安定な集団励起による準粒子励起の振る舞いを紹介する。一様系において、凝縮状態は空間依存しない秩序変数、Bogoliubov 準粒子は平面波展開することが可能で

ある。

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{u}_{\mathbf{k}} e^{+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (2.62a)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{v}_{\mathbf{k}} e^{+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (2.62b)$$

この式を凝縮体波動関数 (2.49a) に代入すると

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \left[\sqrt{n} \xi + \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\mathbf{k}, m} [\Lambda_{\mathbf{k}m}(0) \mathbf{u}_{\mathbf{k}m} e^{-i(E_{\mathbf{k}m} t / \hbar - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} + \Lambda_{\mathbf{k}m}^*(0) \mathbf{v}_{\mathbf{k}m}^* e^{+i(E_{\mathbf{k}m}^* t / \hbar - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}] \right] e^{-i\mu t / \hbar} \quad (2.63)$$

$\Lambda_{\mathbf{k}m}(0)$ は、 $t = 0$ での凝縮体中の Bogoliubov 準粒子の混ざり具合を表し、 $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}$ と $\mathbf{v}_{\mathbf{k}}$ の正規直交関係から実固有値の場合、

$$\Lambda_{\mathbf{k}m}(t) = \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} [\mathbf{u}_{\mathbf{k}m}^\dagger \Psi(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}_{\mathbf{k}m}^\dagger \Psi^*(\mathbf{r}, t)] \quad (2.64)$$

複素固有値の場合、擬エルミート性から必ず複素共役の対 $E_{\mathbf{k}a}$, $E_{\mathbf{k}b}^*$ が現れ、対応するそれぞれのモードは成長/減衰する。それらの複素固有値モード j の振幅 $\tilde{\Lambda}_{\mathbf{k}j}(t)$ ($j = a, b$) は複素固有値モードの規格化条件を考慮すると、以下のように導出される。

$$\tilde{\Lambda}_{\mathbf{k}a}(t) = \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} [\mathbf{u}_{\mathbf{k}b}^\dagger \Psi(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}_{\mathbf{k}b}^\dagger \Psi^*(\mathbf{r}, t)], \quad (2.65)$$

$$\tilde{\Lambda}_{\mathbf{k}b}(t) = \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} [\mathbf{u}_{\mathbf{k}a}^\dagger \Psi(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}_{\mathbf{k}a}^\dagger \Psi^*(\mathbf{r}, t)] \quad (2.66)$$

一様系でのこれらのモードの振幅は解析に求めることができる。

$$\Lambda_{\mathbf{k}m}(t) = \Lambda_{\mathbf{k}m}(0) e^{+iE_{\mathbf{k}m} t / \hbar} \quad E_{\mathbf{k}m} \in \mathbb{R}, \quad (2.67a)$$

$$\tilde{\Lambda}_{\mathbf{k}m}(t) = \tilde{\Lambda}_{\mathbf{k}m}(0) e^{\text{Im} E_{\mathbf{k}m} t / \hbar} \quad E_{\mathbf{k}m} \in \mathbb{C} \quad (2.67b)$$

実固有値の場合は微小ゆらぎが定常解 Ψ のまわりを振動数 $E_{\mathbf{k}m} / \hbar$ で振動することを表す。一方、複素固有値の場合はゆらぎが指数関数的に増加することを表す。

動的不安定性がもたらした現象の一つにスピンの自発的対称性の破れによる自発磁化ダイナミクスがある [図 2.1 参照]。エネルギーやスピン保存系の冷却原子系では、凝縮体中の全てのスピンのが一方向を向くことができない。そのため凝縮体中のスピンは系全体で全スピンを保存しながら相互作用を最小化しようとする過程で必ずスピネクスタチャが生じる [6]。文献 [6] では空間的にドメイン構造が成長する様子が位相コントラスト法により観測された。このように孤立量子系である冷却原子気体系で実現する BEC は動的不安定がダイナミクスに重要な役割を果たす。

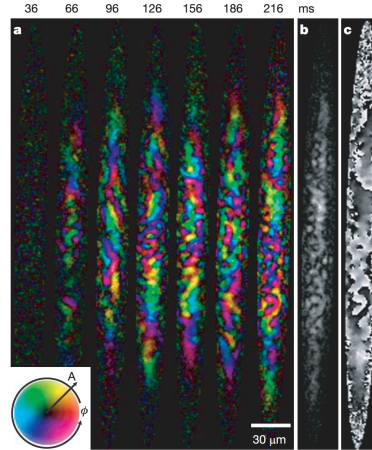


図. 2.1: スピン1BECを用いたスピンの自発的対称性の破れによる自発磁化の形成。スピントクスチャ、強磁性ドメインおよび磁壁の形成の時間発展を位相コントラスト法により観測。色の明暗が磁化の振幅、色が横磁化の方向を表している(左下のカラーマップ参照)。aは時刻 $t = 0\text{ms}$ でポーラー状態を用意した後の時間発展のスナップショット(各図の上の数字が時刻)、b,cは $t = 216\text{ms}$ での縦磁化の分布と横磁化の方位を表す(文献[6]から転載)。

2.5 非エルミート物理の数学的基礎

本章では、非エルミート物理の数学的基礎に関して述べる。主に非エルミート物理に関する review 論文 [72] と線形代数の網羅的な教科書 [4] の流儀に従って正規双直交基底、例外点、擬エルミート性の重要な性質を述べ、最後に BEC における Bogoliubov 準粒子系への応用を説明する。

ジョルダン標準形

一般的な複素正方行列 $H \in \mathbb{C}^{N \times N}$ を考え、ある値 E に対して

$$H|u\rangle = E|u\rangle \quad (2.68)$$

を満たすとき $|u\rangle$, E を固有ベクトル、固有値と呼ぶ。 $|u\rangle \neq \mathbf{0}$ である時 $(H - EI)$ の逆行列が存在しないことを意味する。つまり

$$\det(H - EI) = 0 \quad (2.69)$$

を満たす。この代数方程式を固有値方程式(固有値多項式)と呼び、この方程式の解を E_1, E_2, \dots, E_k とすると、固有値 E_n に対する固有空間 $V(E_n)$ と幾何学的重複度 M_n^g は

$$V_H(E_n) = \text{Ker}(H - E_n I), \quad (2.70)$$

$$M_n^g := \dim V_H(E_n) \quad (2.71)$$

と定義される。一般に任意の正則行列は対角化できるとは限らないが、正則行列 $X \in \mathbb{C}^{N \times N}$ を用いて以下のようなジョルダン標準形に変形することができる。

$$H = X^{-1} \begin{pmatrix} J_{m_1}(E_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_k}(E_k) \end{pmatrix} X \quad (2.72)$$

E_j は H の固有値、 n 次正方行列 $J_n(E)$ はジョルダン行列と呼ばれ、

$$J_n(E) := \begin{pmatrix} E & 1 & & 0 \\ & E & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & E \end{pmatrix}_{n \times n} \quad (2.73)$$

と定義される。ジョルダン標準形は $J_{n_j}(E_{n_j})$ の並べ方を除き、行列 H で一意に決まる。このとき、固有方程式 (2.69) は

$$\det(H - EI) = \prod_{j=1}^J (E - E_j)^{M_j^g} \quad (2.74)$$

と変形できる。 M_j^g は代数的重複度を表し、

$$\sum_{j=1}^J M_j^g = N \quad (2.75)$$

を満たす。また、ジョルダン行列 $J_{n_j}(E_{n_j})$ と行列 H の次元の間には

$$\sum_{j=1}^{M_j^g} m_j = M_j^a \quad (2.76)$$

が成り立つ。特に、全ての $J_{n_j}(E_{n_j})$ がスカラーである場合 ($n_j = 1$)、行列 H は対角化可能である。一般に $M_j^a \geq M_j^g$ であるが、行列 H がエルミートの場合は常に対角化可能であるため、 $M_j^a = M_j^g$ である。

2.5.1 正規双直交基底

本項では非エルミート行列に対する固有値問題について考える。行列 H が非エルミートであるとき、 $H \neq H^\dagger$ であるため右固有ベクトルと左固有ベクトルのエルミート共役 (行列の転置と複素共役の操作) が一致せず、それぞれ独立に考える必要がある。その枠組みを正規双直交基底と呼ぶ。非エルミート行列 $H \in \mathbb{C}^{N \times N}$ に対する固有値問題を考える。

$$H |u_n^R\rangle = E_n |u_n^R\rangle, \quad (2.77a)$$

$$\langle u_n^L | H = E_n \langle u_n^L | \quad (2.77b)$$

$|u_n^R\rangle, \langle u_n^L|$ は行列 H に対する右固有ベクトルと左固有ベクトル、 E_n は固有値を表す。(2.77b) 式のエルミート共役を考えると

$$H |u_n^R\rangle = E_n |u_n^R\rangle, \quad (2.78a)$$

$$H^\dagger |u_n^L\rangle = E_n^* |u_n^L\rangle \quad (2.78b)$$

であるため、行列 H^\dagger の固有値方程式を解いて得られる右固有ベクトルは左固有ベクトルのエルミート共役と一致する。(2.77) 式から

$$\begin{aligned} \langle u_m^L | H | u_n^R \rangle &= E_n \langle u_m^L | u_n^R \rangle = E_m \langle u_m^L | u_n^R \rangle, \\ (E_n - E_m) \langle u_m^L | u_n^R \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (2.79)$$

したがって、対角化可能な場合これらの基底は以下の正規直交関係を満たす。

$$\langle u_m^L | u_n^R \rangle = \langle u_m^R | u_n^L \rangle = \delta_{mn}, \quad (2.80a)$$

$$\sum_n |u_n^R\rangle \langle u_n^L| = \sum_n |u_n^L\rangle \langle u_n^R| = \mathbf{1} \quad (2.80b)$$

ただし、対角化不可能場合の場合はジョルダン標準形になるため(2.80)式が成り立たない。特に対角化不可能な点で代数的特異点になる場合、この点を例外点と呼ぶ[4]。(2.79)式から非エルミート行列では右固有ベクトル(左固有ベクトル)同士の内積は、

$$\langle u_m^R | u_n^R \rangle \neq \delta_{mn}, \quad \langle u_m^L | u_n^L \rangle \neq \delta_{mn}. \quad (2.81)$$

である。正規直交基底系は非エルミート物理を解析する上で非常に有用な枠組みで第3, 4章で記載するボース・アインシュタイン凝縮体におけるトポロジカル相及び輸送現象に関する研究でも用いる。

2.5.2 例外点

非エルミート系では、2つ以上の固有状態が合体し、ハミルトニアン行列が退化することにより対角化不可能な点(例外点)が現れる。エルミート系においても固有値が縮退する場合があるが、対応する固有状態が互いに直交するように選ぶことができるため例外点は存在しない。数学では、(2.73)式の行列次元が2以上で対角化不可能であるが、物理では固有値のパラメーター空間で代数的特異点を伴う場合を扱うことが多い[73, 74]。本論文では代数的特異点を伴う対角化不可能な点を例外点と呼ぶ[4]。

2.5.3 擬エルミート性

エルミート性は固有値が実数となる必要条件ではなく、物理学の文脈において反線形対称性をもつ非エルミート行列はスペクトルの全ての領域で実数になることが指摘された[7]。そのクラスに、空間反転と時間反転の組み合わせからなる parity-time(PT) 対称性が含まれ、空間的に粒子の散逸を制御することで実現可能な系であることから、理論と実験の双方から盛んに研究された。このような全領域で実スペクトルになる非エルミート行列は擬エルミート性を有すクラスに分類される。本項では、エルミート性の一般化としても知られる擬エルミート性(pseudo-Hermiticity)について紹介する。

非エルミート行列が擬エルミートを有す場合の性質について整理する。擬エルミート性とはある行列 H に対して

$$H^\dagger = \eta H \eta^{-1} \quad (2.82)$$

を満たす性質である [75, 76, 77, 78]。 $\eta = \eta^\dagger$ はエルミート演算子で、計量演算子と呼ばれる。行列 H が擬エルミート行列である場合、以下の性質を少なくとも一つは満たす。

- 行列 H のスペクトルが全て実数である
- 固有値は必ず複素共役で現れ、その複素共役の固有値の重複度は等しい

(2.78b) 式と (2.82) 式から

$$\eta |u_n^L\rangle = |u_n^R\rangle, \quad E_n \in \mathbb{R} \quad (2.83a)$$

$$\eta |u_n^L\rangle \neq |u_n^R\rangle, \quad E_n \in \mathbb{C} \quad (2.83b)$$

が成り立つ。(2.83a) 式を固有状態の擬エルミート性と呼ぶ。実固有値の場合は、規格化条件を次式のように右固有状態のみの式に書き直すことができる。

$$\langle u_n^L | u_n^R \rangle = \langle u_n^R | \eta | u_n^R \rangle = 1 \quad (2.84)$$

このように固有値が実数の場合は右固有ベクトルと左固有ベクトルが計量演算子で関係づけられるが、固有値が複素数の場合は、(2.83) 式が成り立たないため、固有ベクトルも必ずしも擬エルミート性があるとは限らない。演算子のパラメタによって実固有値から複素固有値に変化すると固有状態だけ自発的に擬エルミート性が破れ、複素共役対が生成される。擬エルミート行列においてこのスペクトル転移点が代数的特異点をもつ対角化不可能な点(例外点)になる。この証明は第 2.5.4 章にて紹介する。

PT 対称性

PT 対称な非エルミート系は空間的に散逸を制御することにより実験で実現可能な系になっているため、非エルミート系特有の現象が理論実験ともに盛んに研究されている [7]。PT 対称性は空間反転と時間反転対称性の組み合わせからなる対称性で以下のような性質を満たす。

$$\mathcal{P}x\mathcal{P}^{-1} = -x, \quad \mathcal{P}p\mathcal{P}^{-1} = -p, \quad \mathcal{T}x\mathcal{T}^{-1} = x, \quad \mathcal{T}p\mathcal{T}^{-1} = -p, \quad \mathcal{T}i\mathcal{T}^{-1} = -i, \quad (2.85a)$$

$$(\mathcal{PT})H(\mathcal{PT})^{-1} = H. \quad (2.85b)$$

\mathcal{P} は空間反転演算子、 \mathcal{T} は時間反転演算子で反ユニタリである。 \mathcal{PT} が空間反転と時間反転演算子からなる PT 演算子である。この関係から固有値が実数の場合、

$$\mathcal{PT} |u_n^R\rangle = \pm |u_n^R\rangle, \quad E_n \in \mathbb{R} \quad (2.86)$$

が成り立つ。PT 対称な非エルミート物理において、固有状態が PT 対称演算子の固有状態ではない場合、自発的に PT 対称性が破れたと呼び、固有値の対が互いに複素共役になる。固有値が実数から複素数へのスペクトル転移は PT 転移と呼ばれ、その転移点は例外点になる。このように PT 対称性が破れた相で複素共役対が出現するため、擬エルミート性と同じ性質を有する。

PT 対称な非エルミート系が実現する系として、散逸が制御された光学系 [7, 27, 79, 80] や冷却原子系 [81] が挙げられる。これらの系で、光が一方向だけ透過する一方向輸送 [8, 30] や新しい臨界現象 [31, 32, 33] が見つかっている。

2.5.4 Bogoliubov 準粒子系への応用

第 2.4 節で説明したように、Bogoliubov 準粒子は統計性から擬エルミートハミルトニアンにより記述される。本項では、Bogoliubov ハミルトニアンを非エルミート物理の観点から整理する。ここで Bogoliubov ハミルトニアン $H(\mathbf{k})$ に対する右固有関数と左固有関数を以下のように定義する。

$$|u_n^R(\mathbf{k})\rangle = \begin{pmatrix} u_{kn}^R \\ v_{kn}^R \end{pmatrix}, \quad |u_n^L(\mathbf{k})\rangle = \begin{pmatrix} u_{kn}^L \\ v_{kn}^L \end{pmatrix} \quad (2.87)$$

これらの固有関数は

$$H(\mathbf{k}) |u_n^R(\mathbf{k})\rangle = E_{kn} |u_n^R(\mathbf{k})\rangle, \quad (2.88a)$$

$$H^\dagger(\mathbf{k}) |u_n^L(\mathbf{k})\rangle = E_{kn}^* |u_n^L(\mathbf{k})\rangle \quad (2.88b)$$

を満たす。Bogoliubov ハミルトニアン $H(\mathbf{k})$ が擬エルミート性 (2.45) を有すことから

$$H(\mathbf{k})\tau_3 |u_n^L(\mathbf{k})\rangle = E_{kn}^* \tau_3 |u_n^L(\mathbf{k})\rangle \quad (2.89)$$

したがって、実固有値の場合 ($E_{kn} = E_{kn}^*$)、(2.88a) 式と (2.89) 式から規格化定数も踏まえると右固有ベクトルと左固有ベクトルの間に

$$|u_n^R(\mathbf{k})\rangle = \pm \tau_3 |u_n^L(\mathbf{k})\rangle \quad (2.90)$$

が成り立つ。+ 符号は正ノルム、- 符号は負ノルムを表す。この関係から従来のノルム (2.91) を正規双直交基底を用いて以下のように一般化可能である。

$$\langle u_n^L(\mathbf{k}) | u_n^R(\mathbf{k}) \rangle = \langle u_n^R(\mathbf{k}) | \tau_3 | u_n^R(\mathbf{k}) \rangle = 1 \quad E_{kn} \in \mathbb{R}, \quad (2.91a)$$

$$\langle u_n^L(\mathbf{k}) | u_n^R(\mathbf{k}) \rangle = 1 \quad E_{kn} \in \mathbb{C} \quad (2.91b)$$

また、(2.89) 式から擬エルミート性は固有値が複素数の場合、複素共役な対を対生成することを保証する。

次に、正規双直交基底系から Bogoliubov 変換に関して一般化を行う。第 2.4.4 章にて、(2.58) 式のような基底を考えると複素固有値モードもボゾンの交換関係を満たすことを紹介した [3] が、ここでは正規双直交基底系で以下のような線型結合からなる基底 $|\bar{u}_n^{R\pm}(\mathbf{k})\rangle, |\bar{u}_n^{L\pm}(\mathbf{k})\rangle$ を考え、第 2.4.4 章での結果と一致することを紹介する。

$$|\bar{u}_n^{R\pm}(\mathbf{k})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|u_n^R(\mathbf{k})\rangle \pm \tau_3 |u_n^L(\mathbf{k})\rangle], \quad (2.92a)$$

$$|\bar{u}_n^{L\pm}(\mathbf{k})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|u_n^L(\mathbf{k})\rangle \pm \tau_3 |u_n^R(\mathbf{k})\rangle] \quad (2.92b)$$

これらの基底は

$$|\bar{u}_n^{L\pm}(\mathbf{k})\rangle = \pm \tau_3 |\bar{u}_n^{R\pm}(\mathbf{k})\rangle, \quad (2.93)$$

が成り立つ。また、この基底の内積関係は以下のように与えられる。

$$\langle \bar{u}_n^{L\pm}(\mathbf{k}) | \bar{u}_n^{R\pm}(\mathbf{k}) \rangle = 1, \quad \langle \bar{u}_n^{L\pm}(\mathbf{k}) | \bar{u}_n^{R\mp}(\mathbf{k}) \rangle = 0. \quad (2.94)$$

(2.92) 式から固有値 E_{km} と $-E_{-km}^*$ をもつ固有状態を

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}_{km} \\ \bar{\mathbf{v}}_{km} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u_{km}^R + u_{km}^L \\ v_{km}^R - v_{km}^L \end{pmatrix} \quad (2.95a)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{v}}_{-km}^* \\ \bar{\mathbf{u}}_{-km}^* \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v_{-km}^{R*} - v_{-km}^{L*} \\ u_{-km}^R + u_{-km}^L \end{pmatrix} \quad (2.95b)$$

と置くと、Bogoliubov 準粒子の消滅 (生成) 演算子 $\hat{\beta}_{\mathbf{k}}$ ($\hat{\beta}_{-\mathbf{k}}^\dagger$) は、(2.95) 式からなる Bogoliubov 変換 $\bar{T}(\mathbf{k})$ を用いて、以下のように与えられる。

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}} \\ \hat{\mathbf{a}}_{-\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{U}}_{\mathbf{k}} & \bar{\mathbf{V}}_{-\mathbf{k}}^* \\ \bar{\mathbf{V}}_{\mathbf{k}} & \bar{\mathbf{U}}_{-\mathbf{k}}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{\mathbf{k}} \\ \hat{\beta}_{-\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix} =: \bar{T}(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{\mathbf{k}} \\ \hat{\beta}_{-\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix} \quad (2.96)$$

$\bar{\mathbf{U}}_{\mathbf{k}} = (\bar{\mathbf{u}}_{kF}, \bar{\mathbf{u}}_{k,F-1}, \dots, \bar{\mathbf{u}}_{k,-F})^\top$, $\bar{\mathbf{V}}_{\mathbf{k}} = (\bar{\mathbf{v}}_{kF}, \bar{\mathbf{v}}_{k,F-1}, \dots, \bar{\mathbf{v}}_{k,-F})^\top$ は Bogoliubov 準粒子の固有関数である。(2.93) 式から Bogoliubov 変換行列 $\bar{T}(\mathbf{k})$ はパラユニタリ行列である。

$$\tilde{T}(\mathbf{k})\tau_3\tilde{T}(\mathbf{k}) = \tau_3 \quad (2.97)$$

複素数固有値が出現する領域において、この一次変換を用いて対角化を行うと、

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_{\text{Bog}} &= \sum_{\mathbf{k} \neq 0, m} \left[\text{Re}E_{km} \left(\hat{b}_{\mathbf{k},m}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k},m} + \frac{1}{2} \right) + \text{Im}E_{km} \left(\hat{\beta}_{\mathbf{k},m} \hat{\beta}_{-\mathbf{k},m} + \hat{\beta}_{\mathbf{k},m}^\dagger \hat{\beta}_{-\mathbf{k},m}^\dagger \right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} [\text{Tr}[\mathbf{H}_{\mathbf{k}}^{(0)} + \mathbf{H}^{(1)}]] \end{aligned} \quad (2.98)$$

正規双直交基底を用いた Bogoliubov 変換の対角化と (2.61) 式が一致することがわかる。ただし、例外点では対角化不可能であることに注意する。

例外点近傍での性質

擬エルミート行列における例外点の性質について紹介する。ここでは2つの実固有値が複素共役の対に変わる点に代数的特異点を伴う例外点が現れることを示す。例外点近傍の2つバンドの振る舞いは、波数 k に依存する行列 $H(k) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ を用いて有効的に記述できる。ここでは簡単のために1次元系を仮定するが、高次元への拡張も可能である。

$$H(k) = a'_0(k)\sigma_0 + a'_1(k)\sigma_1 + a'_2(k)\sigma_2 + a'_3(k)\sigma_3, \quad (2.99)$$

擬エルミート性を与えると、 $a'_0(k)$ と $a'_3(k)$ [$a'_1(k)$ と $a'_2(k)$] は実数 [純虚数] で、 $H(k)$ は以下のように書かれる。

$$\begin{aligned} H(k) &= a_0(k)\sigma_0 + ia_1(k)\sigma_1 + ia_2(k)\sigma_2 + a_3(k)\sigma_3 \\ &= \begin{pmatrix} a_0(k) + a_3(k) & ia_1(k) + a_2(k) \\ ia_1(k) - a_2(k) & a_0(k) - a_3(k) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.100)$$

$a_i(k) (i = 0, 1, 2, 3)$ は k の実関数、 $\sigma_i (i = 0, 1, 2, 3)$ はパウリ行列である。 $H(k)$ の固有値は

$$E_1(k) = a_0(k) + \sqrt{E_{\text{root}}(k)}, \quad (2.101a)$$

$$E_2(k) = a_0(k) - \sqrt{E_{\text{root}}(k)}, \quad (2.101b)$$

$$E_{\text{root}}(k) := a_3^2(k) - a_1^2(k) - a_2^2(k) \quad (2.101c)$$

である。 $E_{1,2}(k)$ をもつ規格化されていない右固有状態と左固有状態は、それぞれ次式で与えられる。

$$|u_1^{\text{R}}(k)\rangle = \begin{pmatrix} a_3 + \sqrt{E_{\text{root}}(k)} \\ ia_1 + a_2 \end{pmatrix}, \quad |u_2^{\text{R}}(k)\rangle = \begin{pmatrix} a_3 - \sqrt{E_{\text{root}}(k)} \\ ia_1 + a_2 \end{pmatrix}, \quad (2.102a)$$

$$|u_1^{\text{L}}(k)\rangle = \begin{pmatrix} a_3 + (\sqrt{E_{\text{root}}(k)})^* \\ -ia_1 - a_2 \end{pmatrix}, \quad |u_2^{\text{L}}(k)\rangle = \begin{pmatrix} a_3 - (\sqrt{E_{\text{root}}(k)})^* \\ -ia_1 - a_2 \end{pmatrix}. \quad (2.102b)$$

特に縮退なく固有値が実数の場合、 $|u_{1,2}^{\text{R}}(k)\rangle$ と $\tau_3 |u_{1,2}^{\text{L}}(k)\rangle$ は同じであることがわかる。(2.102) 式から、 $|u_{1,2}^{\text{R/L}}(k)\rangle$ と $|u_{1,2}^{\text{R/L}}(k)\rangle$ の内積が

$$\begin{aligned} \langle u_{1,2}^{\text{L}}(k) | u_{1,2}^{\text{R}}(k) \rangle &= 2\sqrt{E_{\text{root}}(k)}(\sqrt{E_{\text{root}}(k)} \pm a_3) \Big|_{E_{\text{root}}(k)=0} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.103)$$

であるため、 $E_{\text{root}}(k) = 0$ で対角化不可能である。 $k = k_0$ でバンドが接するとし、(2.101) 式の2つの固有値の差の2乗が

$$[E_1(k) - E_2(k)]^2 > 0 \quad k < k_0, \quad (2.104a)$$

$$[E_1(k) - E_2(k)]^2 < 0 \quad k > k_0 \quad (2.104b)$$

であるため、 $k = k_0$ でバンドが接する $E_{\text{root}}(k)$ ゼロ点付近で、主要な項は $k - k_0$ の1次で展開できると次式で与えられる。

$$E_1(k) = +a\sqrt{k_0 - k}, \quad (2.105a)$$

$$E_2(k) = -a\sqrt{k_0 - k} \quad (2.105b)$$

a は実数で、 $k = k_0$ で代数的特異点が現れ、 $k < k_0$ で $E_1(k) - E_2(k)$ が実数、 $k > k_0$ で純虚数になりエネルギースペクトルは $k = k_0$ の周りで特徴的な振る舞いを起こす。したがって、擬エルミート性のあるバンドが接する点は代数的特異点 (2.106) を伴う対角化不可能な点、つまり例外点であることがわかる。また、

$$E_1(k) - E_2(k) \simeq 2a\sqrt{k_0 - k}, \quad (2.106)$$

からこのように例外点は1次元系では点、2次元では例外線、3次元では例外表面として現れる。

次に、例外点近傍の固有ベクトルの性質について整理する。まず実固有値では $|u_{1,2}^{\text{R}}(k)\rangle \propto \tau_3 |u_{1,2}^{\text{L}}(k)\rangle$ であるが、複素固有値では $|u_{1,2}^{\text{R}}(k)\rangle$ と $\tau_3 |u_{1,2}^{\text{L}}(k)\rangle$ は線型独立である。ただし、擬エルミート性から $E_1(k) = E_2^*(k)$ と $|u_1^{\text{R}}(k)\rangle \propto \tau_3 |u_2^{\text{L}}(k)\rangle$ を満たすような状態が存在する。(2.105) 式から $k < k_0$ で2つの実数から $k = k_0$ を境に $k > k_0$ で複素共役のペアになるため [図 2.2(a)]、各左右の固有ベクトル、計4つのうち、線型従属なペアは $k < k_0$ で

$$|u_1^{\text{R}}(k)\rangle \propto \tau_3 |u_1^{\text{L}}(k)\rangle, \quad (2.107a)$$

$$|u_2^{\text{R}}(k)\rangle \propto \tau_3 |u_2^{\text{L}}(k)\rangle, \quad (2.107b)$$

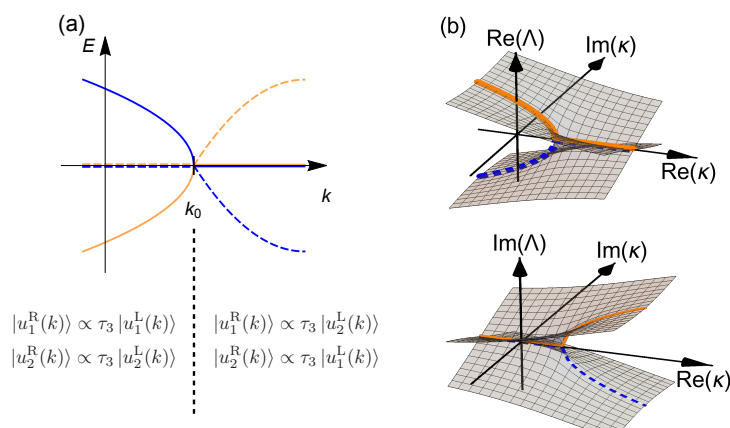


図. 2.2: (a) $k = k_0$ にある例外点近傍のエネルギースペクトル。2つの固有値 $E_+(k)$ と $E_-(k)$ が $k < k_0$ で実数から $k > k_0$ で複素共役の対に変わる。 $k = k_0$ で線型従属の対が入れ替わる。(b) 変数 $k \in \mathbb{R}$ の解析関数である固有値 $E_{1,2}(k)$ を複素関数 $\Lambda(\kappa) = a(k_0 - \kappa)^{1/2}$, $\kappa \in \mathbb{C}$ として表し、例外点近傍での分岐構造を表す。両図において、オレンジ色と青色の曲線は固有値を $k = \text{Re } \kappa$ の関数として表しており、実線と破線はそれぞれ固有値の実部と虚部を表す。

$k > k_0$ で

$$|u_1^R(k)\rangle \propto \tau_3 |u_2^L(k)\rangle, \quad (2.108a)$$

$$|u_2^R(k)\rangle \propto \tau_3 |u_1^L(k)\rangle, \quad (2.108b)$$

である。このように $k = k_0$ を境に合体した固有値間で固有ベクトルの入れ替わりが起こる。

上記の議論は擬エルミート性がある2つのバンドの性質について行ったため、BECにおけるBogoliubov準粒子系の場合は、正ノルムバンドと負ノルムバンド(すなわち、粒子的バンドとホールのバンド)が接する場合のみ有効である。そのため2つのバンドが共に正ノルム、もしくは負ノルムのバンドを記述する有効ハミルトニアンは擬エルミート性を持たない。以上より、BECにおけるBogoliubov準粒子系の代数的特異点を伴う例外点は、正ノルムバンドと負ノルムバンドが接して固有値が実数から複素数に変わる点に現れ、その点前後で固有ベクトルの入れ替えが起こる。

第3章

ボース・アインシュタイン凝縮体における トポロジカル相

光格子ポテンシャルに捕獲されたボース・アインシュタイン凝縮体の Bogoliubov 準粒子におけるトポロジカル相に関して議論する。ボース粒子系の Bogoliubov ハミルトニアンが非エルミートであるため、複素数の固有値をもつモードが出現する場合がある。実固有から複素固有値へ変わる点が代数的特異点と伴う対角化不可能な点(例外点)であるため、運動量空間でベリー位相が定義できない。本節では、運動量に虚部を導入することによりブリュアンゾーン (BZ) 内にある例外点を回避する体系的な手順を提案する。特に1次元ボース粒子系の Bogoliubov 励起バンドに対するベリー位相を定義する。エルミート系の議論を拡張し、空間反転対称な系のベリー位相が \mathbb{Z}_2 になることを示す。具体例として、2つのトイモデルを用いて複素固有値がある場合においてもバルクエッジ対応が成り立つことを数値的に確認する。また particle-hole 対称性とカイラル対称性によるトポロジカル不変量についても議論する。

関連論文

Terumichi Ohashi, Shingo Kobayashi, and Yuki Kawaguchi,
“Generalized Berry phase for a bosonic Bogoliubov system with exceptional points”,
Physical Review A, **101**, 1 (2020).

3.1 導入

トポロジカル相に関する研究は固体物理学の分野で注目を集めている [82, 83, 84, 85]。これまでのトポロジカル相の研究の中心はエルミート系だったが、その拡張として非エルミート系におけるトポロジカル相の研究が非常に注目を集めている [86, 87, 88]。非エルミート系特有の性質として、複素スペクトルと対角化不可能な点 (例外点) が出現することが挙げられる。これらの特徴により、非エルミート系はエルミート系には存在しない特有の現象が存在し、例えば、非相反輸送 [8, 30, 89] や非従来の量子臨界現象 [31, 32, 33] などがある。トポロジカル相においても非エルミート性との協奏からエルミート系には存在しない豊かな性質をもたらし、系の片端のみ局在する状態 [90, 91, 92, 93]、Weyl 点の例外リング (EP がリング状に並んだ状態) のトポロジカルチャージなどが議論されている。今日では、非エルミート系のトポロジカル相の分類 [10, 11, 94] も明らかになっている。

一般に、非エルミートハミルトニアンは粒子数非保存系を有効的に記述する。非エルミート系の具体例として、フォトニック結晶などのナノ構造中の光子 [27]、マイクロキャビティ [79, 80]、電気回路 [95, 96]、非ユニタリ時間発展する量子ウォーク [28]、散逸が制御された冷却原子系 [97, 98]、有限寿命をもつ準粒子 [99, 100] が挙げられる。また、第2章で説明したように、BEC からの準粒子励起である Bogoliubov 準粒子も BEC が粒子浴として働き、かつ、ボゾンの統計性から非エルミートハミルトニアンで記述される。これまでにマグノン [101, 102, 103, 104, 105]、フォトン [106]、フォノン [107, 108]、ボーズ原子 [14, 15, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45] をはじめとするボース粒子系の Bogoliubov ハミルトニアンを用いたトポロジカル相に関する研究が行われている。これらの一連の研究で、ボゾンの交換関係を考慮してトポロジカル不変量が拡張され固有値が実数の場合でバルクエッジ対応が数値的に成り立つことが明らかにされている。一方で、BEC において動的不安定性と呼ばれる複素固有値をもつモードが引き起こす不安定性が存在し、その不安定性に由来した現象が実験で観測されている [5, 6, 109, 110, 111]。

本研究では、光格子ポテンシャルに捕獲された原子気体 BEC の Bogoliubov 励起バンドのトポロジー、特に複素固有値が存在する場合に注目した。ボゾンの Bogoliubov ハミルトニアンが常にもつ擬エルミート性と particle-hole 対称性以外に、空間反転対称性 (IS) と時間反転対称性 (TRS) がある場合を考え、複素固有値と EP が出現する場合におけるトポロジカル不変量に関して議論する。まずはじめに第3.2章で対角化不可能な点である例外点ではトポロジカル不変量が定義できないため、トポロジカル不変量、特に空間反転対称性に関係したベリー位相の一般化を行う。ベリー位相の一般化において擬エルミート性が重要な役割を果たすため、以下で詳しく述べる。また第3.3章で TRS と PHS によるトポロジカル不変量についても議論する。これらを踏まえ、第3.4章で系の端に局在するエッジ状態を新しく定義したトポロジカル不変量で特徴づけることが可能であるかをボース粒子系の Kitaev-chain モデルと Su-Schrieffer-Heeger (SSH) モデルを用いて数値的に検証する。

3.1.1 正規双直交基底の導入

トポロジカル相では、バルクで定義されるトポロジカル不変量がエッジ状態を特徴付ける。非エルミートハミルトニアンに対してトポロジカル不変量を定義するために、第2.5.1章で紹介した正規双直交基底を導入する。また、閉じた運動量空間を考えるために光格子系を仮定し、Bloch の定理から導かれる波数依存した Bloch ハミルトニアン $H(\mathbf{k})$ を考える。本章では Bogoliubov 準粒子の Bloch ハミルトニアンを Bogoliubov ハミルトニアンと呼ぶ。また正規双直交基底の導入により第2.4.1章で説明

した Bogoliubov 変換を次式で再定義する。

$$T^{\text{R}}(\mathbf{k}) := (|u_1^{\text{R}}(\mathbf{k})\rangle, |u_2^{\text{R}}(\mathbf{k})\rangle, \dots, |u_{\mathcal{N}}^{\text{R}}(\mathbf{k})\rangle), \quad (3.1a)$$

$$T^{\text{L}}(\mathbf{k}) := (|u_1^{\text{L}}(\mathbf{k})\rangle, |u_2^{\text{L}}(\mathbf{k})\rangle, \dots, |u_{\mathcal{N}}^{\text{L}}(\mathbf{k})\rangle) \quad (3.1b)$$

実固有値の場合は (2.33) 式で与えられる $T(\mathbf{k})$ と同じである。つまり、

$$T^{\text{L}}(\mathbf{k})^\dagger T^{\text{R}}(\mathbf{k}) = T^{\text{R}}(\mathbf{k})^\dagger \tau_3 T^{\text{R}}(\mathbf{k}) = \tau_3, \quad \mathbf{E}(\mathbf{k}) \in \mathbb{R} \quad (3.2a)$$

$$T^{\text{L}}(\mathbf{k})^\dagger T^{\text{R}}(\mathbf{k}) = \mathbf{1} \quad \mathbf{E}(\mathbf{k}) \in \mathbb{C} \quad (3.2b)$$

を満たす。ただし、例外点において行列の階数が退化するため行列式がゼロになることに注意する。

3.1.2 Bogoliubov ハミルトニアンの対称性

トポロジカル相において系に対称性が重要な役割を果たすため、本節で注目する Bogoliubov ハミルトニアンの対称性について整理する。

- **擬エルミート性:** ボゾンの統計性から Bogoliubov ハミルトニアン $H(\mathbf{k})$ は常に擬エルミート性を有す:

$$\eta H(\mathbf{k}) \eta^{-1} = H(\mathbf{k})^\dagger, \quad \eta = \tau_3. \quad (3.3)$$

- **particle-hole 対称性 (PHS):** 量子凝縮の帰結として Bogoliubov ハミルトニアン $H(\mathbf{k})$ は常に PHS を有す:

$$C H(\mathbf{k}) C^{-1} = -H(-\mathbf{k}), \quad C = \tau_1 K. \quad (3.4)$$

- **時間反転対称性 (TRS):** 系に時間反転対称性がある場合、Bogoliubov ハミルトニアン $H(\mathbf{k})$ は以下の関係を満たす:

$$\mathcal{T} H(\mathbf{k}) \mathcal{T}^{-1} = H(-\mathbf{k}), \quad (3.5)$$

\mathcal{T} は反ユニタリー演算子である。ボーズ統計性から時間反転対称演算子は $\mathcal{T}^2 = +1$ を満たすためクラマース縮退は存在しない。時間反転対称演算子は粒子とホールセクターを混ぜないため、

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U^* \end{pmatrix} K \quad (3.6)$$

と書かれる。 U は $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ のユニタリー行列である。

- **chiral symmetry (CS):** 系にカイラル対称性がある場合、Bogoliubov ハミルトニアン $H(\mathbf{k})$ は以下の関係を満たす:

$$\Gamma H(\mathbf{k}) \Gamma^{-1} = -H(\mathbf{k}), \quad (3.7)$$

Γ はカイラル演算子である。Bogoliubov ハミルトニアンは常に PHS を有するため、時間反転対称な系ではカイラル対称性がある。TRS と CS は互いに $\Gamma = C\mathcal{T}$ の関係がある。

- **空間反転対称性 (IS):** 系に空間反転対称性がある場合、Bogoliubov ハミルトニアン $H(\mathbf{k})$ は以下の関係を満たす:

$$\mathcal{P} H(\mathbf{k}) \mathcal{P}^{-1} = H(-\mathbf{k}), \quad (3.8)$$

\mathcal{P} は空間反転対称性演算子である。

3.1.3 ベリー位相

ベリー位相は、シュレディンガー方程式の断熱近似により現れる幾何学的位相として古くから研究されてきた [112]。古典物理学ではベクトルポテンシャルは顕に現れなかったが、量子力学ではベリー位相として波動関数の位相に影響を与える。代表的に例として磁束を囲む閉ループに沿って粒子が運動すると、位相が量子化される Aharonov-Bohm(AB) 効果がある。また近年のトポロジカル物性の研究でベリー位相が表面状態(エッジ状態)を特徴付けるトポロジカル不変量として認識されている。この場合、ベリー位相 γ_n は 1 次元エルミート系においては、波数 k 依存したハミルトニアン固有関数 $|u_n(k)\rangle$ を用いて、

$$\gamma_n = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dk}{2\pi} A_n(k), \quad (3.9a)$$

$$A_n(k) = i \langle u_n(k) | \partial_k u_n(k) \rangle \quad (3.9b)$$

と書かれる。 $A_n(k)$ はベリー曲率である。AB 効果は実空間に存在するベリー曲率に由来した現象に対し、トポロジカル物性は波数空間に存在するベリー曲率 $A_n(k)$ の影響を受けて現れる。つまり、トポロジカル物性は波数空間における波動関数の非自明な幾何学的構造を反映した量子現象である。ここでは簡単のためにエルミート系のベリー位相について説明をしたが、正規双直交基底を用いて非エルミート物理系へ拡張することができる。詳細は第 3.2.1 章に記載する。

3.1.4 複素運動量平面への拡張

以下では、1 次元系の議論に限定する。本章で主に注目するトポロジカル不変量はベリー曲率の波数積分で定義されるベリー位相である。また以下の議論では波数積分領域でギャップがあると仮定すると、例外点がない場合は非エルミート系で定義されているベリー曲率と接続が定義できる。詳細は第 3.2 章で述べる。実固有値の場合はエネルギーバンドを正ノルム、負ノルムバンドに分けることが可能であるが、例外点を伴うエネルギーバンドにおいて以下の問題点がある：

1. 例外点において $\det[T^R(k)] = 0$ によりトポロジカルチャージが量子化されることを証明することができない。
2. 2つのエネルギーバンドが合体しているため、“占有バンド”と“非占有バンド”の分類が困難である。つまり、ボース粒子系はフェルミ面が存在しないため、指数 n_r を導入し、“占有”と“非占有”バンドを定義する。 n_r は“占有”と“非占有”バンドが接しないように定義し、トポロジカル不変量を計算するために“占有”されたバンドの和を取る。このような指数は IS や PHS によるトポロジカル不変量に適用する。

ここで (1) の問題点に関して、波数 k に虚部を導入した複素平面で定義された場合を考えると、問題点を解決することが可能であることを示す。 $\kappa := k + i\epsilon \in \mathbb{C}$, ($k, \epsilon \in \mathbb{R}$) を用いて、複素数の運動量 (κ) と実運動量 (k) を明示的に区別する。またこのアイディアは高次元への一般化も可能である。

複素数の運動量は非エルミート系でのバルクエッジ対応を議論するためにすでに導入されている [113, 114]。これは開境界条件での波動関数は複素数の波数をもつ平面波で展開されることに由来するが、トポロジカル不変量の積分経路上に現れる微分不可能な点(例外点)を避けるために複素数の波数を導入している点で先行研究と異なる。

まずはじめに $H(\kappa)$ を複素 κ 平面上で定義する:

$$H(\kappa) = \begin{pmatrix} H^{(1)}(\kappa) & H^{(2)}(\kappa) \\ -[H^{(2)}(-\kappa^*)]^* & -[H^{(1)}(-\kappa^*)]^* \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

したがって、PHS, TRS, CS, 及び IS はそれぞれ以下のように拡張される:

$$\text{PHS: } \mathcal{C}H(\kappa)\mathcal{C}^{-1} = -H(-\kappa^*), \quad (3.11a)$$

$$\text{TRS: } \mathcal{T}H(\kappa)\mathcal{T}^{-1} = H(-\kappa^*), \quad (3.11b)$$

$$\text{CS: } \Gamma H(\kappa)\Gamma^{-1} = -H(\kappa), \quad (3.11c)$$

$$\text{IS: } \mathcal{P}H(\kappa)\mathcal{P}^{-1} = H(-\kappa), \quad (3.11d)$$

(3.11) 式の証明は付録 A.1 に与えた。ここで、注意すべき点としてハミルトニアン $H(k_x + ik_y)$ は PHS や TRS のような反ユニタリ演算子による作用で k_y の符号を変えないという点で実波数の二次元系と異なっていることに注意する。そのため $H(\kappa)$ は物理的ではなく、理論的手続きのために導入したものである。

擬エルミート性は複素 κ 平面上で実軸でのみある:

$$\tau_3 H(\kappa) \tau_3 = H(\kappa)^\dagger \quad \text{for } \text{Im } \kappa = 0. \quad (3.12)$$

これは $\text{Im } \kappa \neq 0$ の時、固有値の複素共役が必ずしも $H(\kappa)$ の固有値とは限らないことを意味する。ここで第 2.5.4 章で紹介したスペクトルの代数的特異点の性質について再考する。つまり、例外点が $k = k_0$ にあるとき、その 2 つのバンド $E_{1,2}(k)$ は

$$E_1(k) = +a\sqrt{k_0 - k}, \quad (3.13a)$$

$$E_2(k) = -a\sqrt{k_0 - k}. \quad (3.13b)$$

であることから、 $H(k)$ が $H(\kappa)$ のように複素平面上で変数 $\kappa \in \mathbb{C}$ の解析関数で連続である時、 $E_{1,2}(k)$ は 2 つの分岐があるとして次式のように書くことができる:

$$\Lambda(\kappa) = a(k_0 - \kappa)^{1/2}. \quad (3.14)$$

この形式から $\kappa = k_0$ での例外点が複素平面上で孤立点として存在することがわかり、例外点周りで 2 つの固有値は交換する [詳細は第 2.5.4 章にて記載]。また (3.14) 式は複素平面上で経路を取ることで例外点を迂回できることを示している。このアイディアはラインノードや点ノードがあるトポロジカル超伝導体の場合の非エルミート系への拡張とみなすことができる。つまり、トポロジカル不変量はノード点を含まない BZ の部分空間の積分として定義される。以下の議論では、波数 k の関数として無限小の虚部 $\epsilon(k)$ を導入し、複素平面上で経路 $\ell: \kappa(k) = k + i\epsilon(k)$ ($-\pi \leq k \leq \pi$) に沿って積分を行う。

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(k) dk := \int_{-\pi}^{\pi} f(\kappa) \frac{d\kappa}{dk} dk, \quad (3.15)$$

右辺の $f(\kappa)$ は (3.10) 式にしたがって例外点を除く、実軸上に定義される積分 $f(k)$ の連続関数である。各例外点上で上半面と下半面の経路を選ぶ自由度があるが、この積分経路 ℓ の選び方はあるルールで則って連続的に変化するように定義する。固有値のラベル付けのルールは、議論するトポロジカル不変量に依存し、ルールの詳細に関しては以下で議論する。固有値が実数や複素数である状態がどのように例外点近傍で繋がるのかが決まれば、複素 κ 平面上での経路が決定する。その具体例を図 3.1 に示す。

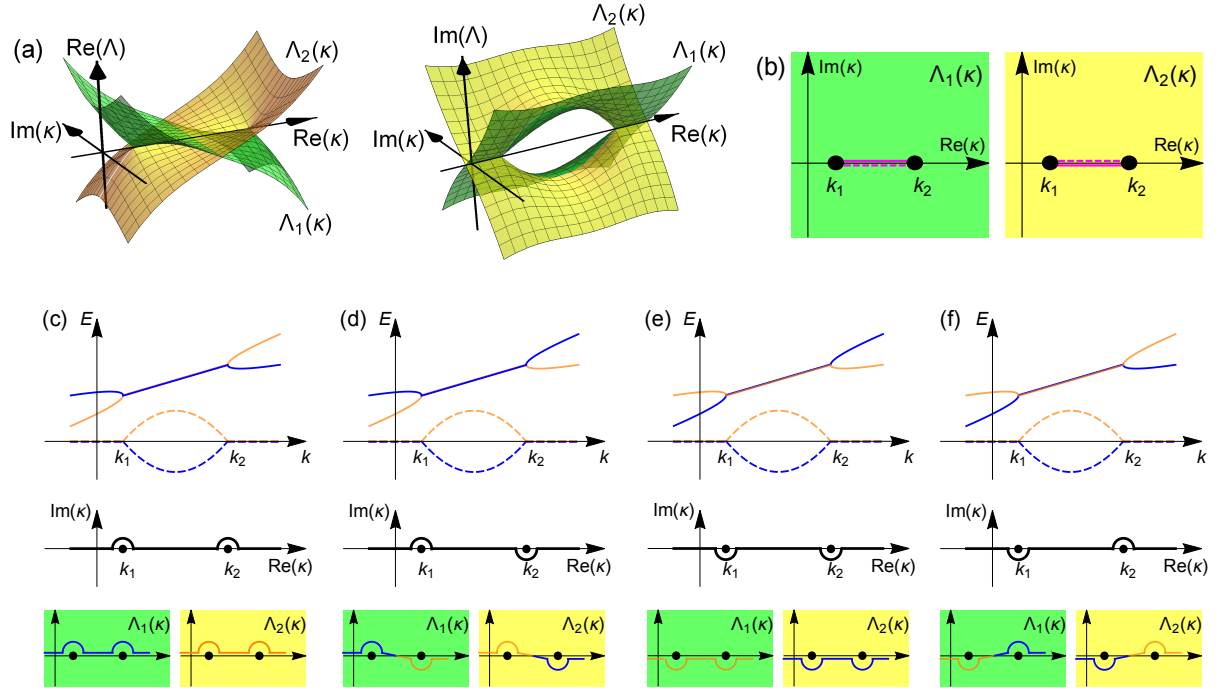


図. 3.1: (a) 平方根 $\Lambda(\kappa) = \sqrt{(\kappa - k_1)(\kappa - k_2)}$ の分岐構造, (b) $\Lambda(\kappa)$ のリーマン面と (c)-(f) 実固有値と複素固有値が例外点 (EP) を介して接続される積分経路の具体例を表す。一般的に $k = k_i$ ($i = 1, 2, \dots$) で2つのバンドが合体する場合、固有値の分岐構造は $\prod_i \sqrt{\kappa - k_i}$ である。 $k = k_1$ と $k = k_2$ での例外点の対を考え、 $\text{Re } \kappa$ ($:= k$) 軸上で固有値が $k < k_1$ と $k > k_2$ ($k_1 < k < k_2$) で実数 (複素数) を仮定する。対応する複素関数 $\Lambda(\kappa)$ は2つの分岐があり、 $\Lambda_1(\kappa)$ と $\Lambda_2(\kappa)$ の実部 (虚部) は (a) の左 (右) 側のパネルに書かれている。(b) に示されているリーマン面は2つの面からできている。これはブランチカットは2つの例外点間の実軸にあり、その2つの分岐はブランチカットを横切る時に交換する。(b) では、左パネルにあるマゼンタ色の実線と破線は右パネルの線と同じである。このように (a) で示すように、 $k < k_1$ で $\Lambda_1(k) > \Lambda_2(k)$ を満たす2つの分岐は、 $\text{Im } \kappa > 0$ (< 0) で、 $\text{Im } \Lambda_1(\kappa) < 0$ (> 0) と $\text{Im } \Lambda_2(\kappa) > 0$ (< 0) に繋がり、 $k > k_2$ で $\Lambda_1(k) < \Lambda_2(k)$ に繋がる。(c)-(f) の上段では、2つの合体した固有値の実部 (虚部) は実線 (破線) で示している。線のオレンジ色と青色は、固有値の接続の仕方を示す。複素 κ 平面上の対応する経路を (c)-(f) の中段に示す。(c)-(f) の下図は、上図のオレンジ色と青色のバンドがリーマン面内でどのように動いているかを示している。(a) の分岐構造から、2つの固有値 $E_1(k), E_2(k)$ が $k < k_1$ と $k > k_2$ で $E_1(k) - E_2(k)$ の符号が逆になるように接続すると、(c) と (e) の中段に示すように、積分経路 l は分岐点を横切らず、オレンジ色と青色のバンドは、2つのリーマン面のどちらか一方だけしか動かない。一方で、 $k < k_1$ と $k > k_2$ の $E_1(k) - E_2(k)$ の符号が同じ場合、(d) と (f) の下段に示すように、経路 l が分岐点を横切ることになる。このとき、 l が $\kappa = k_1$ で EP を時計回りもしくは反時計回りに周回するか、 $\text{Re}(E_1 - E_2)$ と $\text{Im} E_{1,2}$ の符号で決まる。

3.1.5 南部-ゴールドストーンモードと例外点の関係

ここで南部-ゴールドストーン (NG) モードに由来する例外点について言及しておく。NG モードは連続対称性の自発的な破れに伴うギャップレスモードである [詳細は第 2.4.3 章に記載]。またギャップが閉じる点でハミルトニアン行列の階数が少なくなり例外点を伴う。この種の例外点は連続対称性を破る無限小の外場を加えることによって取り除くことができる。例えば、 $U(1)$ ゲージ対称性の破れによる NG モードであるフォノンの場合、化学ポテンシャルを負の方向にシフトさせると無限小のギャップが開く: $\mu \rightarrow \mu - 0$ 。この手続きで NG モードをギャップがあるかのように扱うことが可能である。

3.2 空間反転対称性に関する \mathbb{Z}_2 不変量

ここでは、1次元光格子ポテンシャルに捕獲された空間反転対称な BEC を考え、空間反転対称性によるトポロジカル不変量を導出する。

3.2.1 ベリー接続

量子状態のトポロジを特徴づける基本的な指数の1つにベリー曲率 (ベリー位相) がある。非エルミート系の場合、様々な先行論文で双直交基底を用いて定義されたベリー接続が量子化されることを予言されている [112, 115, 116, 117, 118]。ここでベリー接続行列を

$$\mathcal{A}(k) := \frac{\mathcal{A}^{\text{LR}}(k) + \mathcal{A}^{\text{RL}}(k)}{2}, \quad (3.16)$$

と定義する。

$$[\mathcal{A}^{\text{LR}}(k)]_{mn} = i \langle u_m^{\text{L}}(k) | \partial_k u_n^{\text{R}}(k) \rangle, \quad (3.17a)$$

$$[\mathcal{A}^{\text{RL}}(k)]_{mn} = i \langle u_m^{\text{R}}(k) | \partial_k u_n^{\text{L}}(k) \rangle. \quad (3.17b)$$

$[\mathcal{A}^{\text{LR}}(k)]^\dagger = \mathcal{A}^{\text{RL}}(k)$ の関係から $\mathcal{A}(k)$ はエルミート行列であり、 $\text{tr} \mathcal{A}(k)$ は常に実数である。4つ種類の行列 $\mathcal{A}^{\text{LR}}(k)$, $\mathcal{A}^{\text{RL}}(k)$, $\mathcal{A}^{\text{RR}}(k)$, $\mathcal{A}^{\text{LL}}(k)$ はすでに非エルミートトポロジカル相の文脈で導入されているが [88]、本研究では双直交基底での内積から自然に定義される2種類のベリー接続だけを考える。

また上に定義された $\mathcal{A}(k)$ は総和則を満たすことを対称性を課すことなく示すことができる:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \sum_n [\mathcal{A}(k)]_{nn} = N \in \mathbb{Z}, \quad (3.18)$$

例外点が存在する場合、 $k \in \mathbb{R}$ を $\kappa \in \mathbb{C}$ に置き換えることと、(3.15) 式を用いることでベリー接続行列を拡張して定義可能である。(3.18) 式は積分経路の選び方に依らず必ず成り立つ。(3.18) 式の証明は付録 A.2 に記載する。

3.2.2 空間反転対称性に関する \mathbb{Z}_2 トポロジカル不変量

固有値が全て実数の場合、(3.16) 式で定義されるベリー接続行列の対角項は先行研究 [14, 15] で定義されたものと一致する。

$$[\mathcal{A}(k)]_{nn} = i \text{sign}(n) \langle u_n^{\text{R}}(k) | \tau_3 | \partial_k u_n^{\text{R}}(k) \rangle, \quad (3.19)$$

正ノルム (負ノルム) の状態は正 (負) の指数を割り与える。先行研究 [14] の議論に従い、(3.16) 式で定義されたベリー接続行列 $\mathcal{A}(k)$ を用いて拡張したトポロジカル不変量 \mathbb{Z}_2 を次式のように定義する:

$$(-1)^{\nu_{\text{IS}}} := \exp \left(i \int_{-\pi}^{\pi} dk \sum_{n=1}^{n_r} [\mathcal{A}(k)]_{nn} \right). \quad (3.20)$$

n_r という占有バンドと非占有バンドを区別する reference index を導入した。reference index は $0 < n \leq n_r$ と $m > n_r$ のバンドは分かれていると定義する。つまり BZ 全体で k で $E_n(k) \neq E_m(k)$ の場合はギャップフルであるとする。以下で示すように、上記で定義した ν_{IS} は 0 か 1 を取る。

$$(-1)^{\nu_{\text{IS}}} = \prod_{n=1}^{n_r} \frac{\xi_n(\pi)}{\xi_n(0)}, \quad (3.21)$$

$\xi_n(k_{\text{IS}}) = \pm 1$ は空間反転対称な波数 $k_{\text{IS}} = 0, \pi$ の n 番目の固有状態に対する空間反転演算子の固有値である。つまり、 $\xi_n(k_{\text{IS}})$ は

$$\mathcal{P} |u_n^{\text{L,R}}(k_{\text{IS}})\rangle = \xi_n(k_{\text{IS}}) |u_n^{\text{L,R}}(k_{\text{IS}})\rangle \quad (3.22)$$

を満たす。(3.21) 式から (3.20) 式を以下のように書き直す。

$$(-1)^{\nu_{\text{IS}}} := \exp \left(i \int_{-\pi}^{\pi} dk \sum_{n=-\mathcal{N}}^{n_r} [\mathcal{A}(k)]_{nn} \right), \quad (3.23)$$

これは正ノルム負ノルムの指数間の偶パリティと奇パリティの数はそれぞれ $k = 0$ と π で同じであるため上記のように書き直すことができる。つまり、

$$\prod_{n=-\mathcal{N}}^{-1} \xi_n(0) = \prod_{n=-\mathcal{N}}^{-1} \xi_n(\pi) = (-1)^{\mathcal{N}/2} \quad (3.24)$$

である。

3.2.3 ラベルルール

例外点がある場合、(3.20) 式で与えられる積分経路を定義するために固有状態を適切にラベル付けしなければならない。ここでは、空間反転対称な対に割り当てられた指数が同じ符号を持つこと、すなわち、particle バンド (hole バンド) の空間反転対称な対が particle バンド (hole バンド) にあることだけが条件になる。この条件を満たすために、正ノルムと負ノルムに関する (2.90) 式に従い、実固有値の正 (負) ノルム状態に正 (負) の指数を割り当てる。また、複素固有状態では、 $\text{Im}E > 0$ ($\text{Im}E < 0$) の状態に正 (負) の指数を割り当てる。空間反転対称性から $H(k)$ と $H(-k)$ の固有状態である $|u^{\text{R}}\rangle$ と $\mathcal{P} |u^{\text{R}}\rangle$ はそれぞれ同じ固有値 E のため、このラベルルールは条件を満たす。正の指数の状態と負の指数の状態は、それぞれ $\text{Re}E$ の順に並べる。図 3.1 の議論から積分経路は $\kappa = 0$ に対して対称になり、 $\ell: \kappa(k) = k + i\epsilon(k)$ は $\epsilon(-k) = -\epsilon(k)$ を満たす。例えば、図 3.1 (c) [図 3.1 (d)] に示したような構造が $k > 0$ に現れた場合、図 3.1 (e) [図 3.1 (d)] の構造は空間反転対称性から $k < 0$ に現れる [$\text{Re}(E_1 + E_2)$] の波数 k 依存性は積分経路を決定する上では無関係であることに注意]。複素固有値が $k = 0$ に現れる場合、積分経路が原点に対して対称であるため $k = 0$ 近傍のバンド構造は図 3.1 (d) もしくは 3.1 (f) に示すようになる。さらに複雑なバンド構造の例を図 3.2 に示す。

3.2.4 $\nu_{\text{IS}} \in \mathbb{Z}_2$ の証明

ここでは (3.21) 式の証明を行う。導出は空間反転対称なトポロジカル絶縁体 [119] の議論と同じである。空間反転対称性から以下の関係を得る:

$$\sum_{n=1}^{n_r} [\mathcal{A}(-\kappa)]_{nn} + \sum_{n=1}^{n_r} [\mathcal{A}(\kappa)]_{nn} = -\frac{i}{2} \partial_{\kappa} [\ln \det[U_{\mathcal{P}}^{\text{LR}}(\kappa) U_{\mathcal{P}}^{\text{RL}}(\kappa)]], \quad (3.25)$$

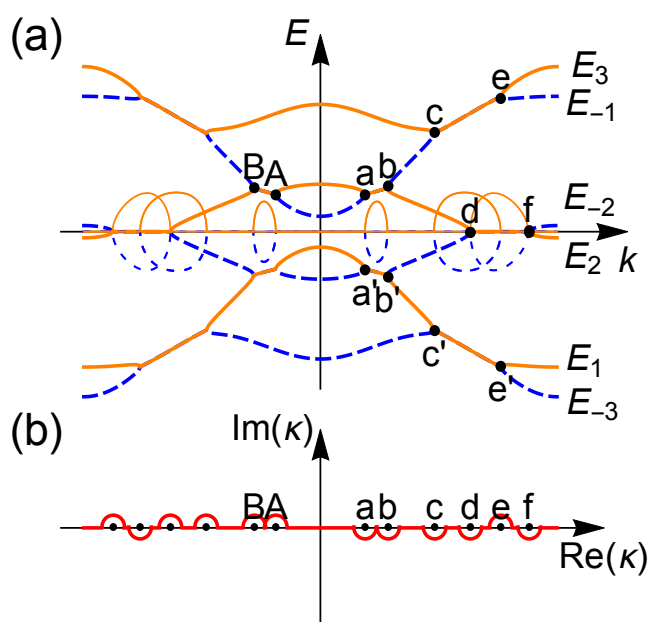


図. 3.2: (a) バンド構造の例と (b) それに対応した積分経路を示す。(a) では、 $E_{1,2,3}$ とラベル付けされた 3 つの正の指数のバンドがあり、オレンジ色の曲線で書かれ、対応する負の指数のバンド ($E_{-1,-2,-3}$) は、青の曲線で書かれている。固有値の実部(虚部)を実線(破線)で示す。複素共役の固有値のペアが現れる \mathbf{a} と \mathbf{b} の EP に注目すると、バンド構造は図 3.1 (e) と同じになる。PHS と IS により、EP も \mathbf{a}' と \mathbf{b}' に現れる。 $\text{Im}E_1$ を正に取るため、 \mathbf{a}' と \mathbf{b}' の近傍のバンド構造は、 \mathbf{a} と \mathbf{b} と同じである [図 3.1 (e)]。一方、IS により EP の対が \mathbf{A} と \mathbf{B} に現れ、その周りのバンド構造は図 3.1 (c) と同じである。 \mathbf{c} と \mathbf{e} 、 \mathbf{c}' と \mathbf{e}' 、 \mathbf{d} と \mathbf{f} に EP の対が現れる。前者は図 3.1 (f) と同じ構造になっており、後者は 3.1 (e) と同じ構造になっている。これらの EP の空間反転対称な対は、図 3.1 (f) と図 3.1 (c) にあり、(b) に示すように $\kappa = 0$ に関して積分経路が対称になる。積分経路は、 \mathbf{c} と \mathbf{e} (\mathbf{d} と \mathbf{f}) の EP の間で 1 回 (2 回、ただし 2 回横切ることは回らないと同じ) だけブランチカットを一度横切る。

$[U_{\mathcal{P}}^{\text{LR}}(\kappa)]_{mn} = \langle u_m^{\text{L}}(\kappa) | \mathcal{P} | u_n^{\text{R}}(-\kappa) \rangle$ と $[U_{\mathcal{P}}^{\text{RL}}(\kappa)]_{mn} = \langle u_m^{\text{R}}(\kappa) | \mathcal{P} | u_n^{\text{L}}(-\kappa) \rangle$ は指数 n_r は $1 \leq m, n \leq n_r$ をもつ $n_r \times n_r$ 行列で、 $U_{\mathcal{P}}^{\text{RL}}(\kappa) U_{\mathcal{P}}^{\text{LR}}(\kappa)^\dagger = \mathbf{1}$ を満たす。(3.15)式に従い、(3.25)式を波数 k で 0 から π まで積分する。これは $\epsilon(k)$ と $d\epsilon(k)/dk$ がそれぞれ k の奇関数と偶関数であるため、左辺の式(3.25)の積分は簡単な形になる:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi \sum_{n=1}^{n_r} [[\mathcal{A}(-\kappa(k))]_{nn} + [\mathcal{A}(\kappa(k))]_{nn}] \frac{d\kappa(k)}{dk} dk \\
&= \int_{-\pi}^0 \sum_{n=1}^{n_r} [\mathcal{A}(k - i\epsilon(-k))]_{nn} \left[1 + i \frac{d\epsilon(k')}{dk} \Big|_{k'=-k} \right] dk + \int_0^\pi \sum_{n=1}^{n_r} [\mathcal{A}(k + i\epsilon(k))]_{nn} \left[1 + i \frac{d\epsilon(k)}{dk} \right] dk \\
&= \int_{-\pi}^\pi \sum_{n=1}^{n_r} [\mathcal{A}(k + i\epsilon(k))]_{nn} \left[1 + i \frac{d\epsilon(k)}{dk} \right] dk \\
&= \int_{-\pi}^\pi \sum_{n=1}^{n_r} [\mathcal{A}(k)]_{nn} dk.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

一方で、(3.25)式の右辺の積分は以下のように式変形できる:

$$-\frac{i}{2} \int_0^\pi \partial_\kappa [\ln \det[U_{\mathcal{P}}^{\text{LR}}(\kappa) U_{\mathcal{P}}^{\text{RL}}(\kappa)]] \frac{d\kappa}{dk} dk = -\frac{i}{2} \ln \frac{\det[U_{\mathcal{P}}^{\text{LR}}(\pi) U_{\mathcal{P}}^{\text{RL}}(\pi)]}{\det[U_{\mathcal{P}}^{\text{LR}}(0) U_{\mathcal{P}}^{\text{RL}}(0)]}. \tag{3.27}$$

$U_{\mathcal{P}}^{\text{LR}}(k_{\text{IS}})$ と $U_{\mathcal{P}}^{\text{RL}}(k_{\text{IS}})$ は対角行列である。 $k_{\text{IS}} = 0, \pi$ で $H(k_{\text{IS}})$ は空間反転対称演算子 \mathcal{P} と交換するため、空間反転対称波数 ($k = 0, \pi$) では同時対角化可能である。

$$[H(k_{\text{IS}}), \mathcal{P}] = 0 \tag{3.28}$$

対角成分 $\xi_n(k_{\text{IS}})$ は空間反転対称演算子 \mathcal{P} の固有値である。つまり、固有値 $\xi_n(k_{\text{IS}}) = \pm 1$ として空間反転対称演算子 \mathcal{P} は

$$\mathcal{P} |u_n^{\text{R}}(k_{\text{IS}})\rangle = \xi_n(k_{\text{IS}}) |u_n^{\text{R}}(k_{\text{IS}})\rangle \tag{3.29}$$

を満たす。その結果、

$$\int_{-\pi}^\pi dk \sum_{n=1}^{n_r} [\mathcal{A}(k)]_{nn} = -i \ln \prod_{n=1}^{n_r} \frac{\xi_n(\pi)}{\xi_n(0)}, \tag{3.30}$$

同じ式として、

$$\exp \left(i \int_{-\pi}^\pi dk \sum_{n=1}^{n_r} [\mathcal{A}(k)]_{nn} \right) = \prod_{n=1}^{n_r} \frac{\xi_n(\pi)}{\xi_n(0)}. \tag{3.31}$$

(3.31)式の右辺が ± 1 を取るため、(3.21)式で定義される ν_{IS} は 0 か 1 を取る。

3.3 その他のトポロジカル不変量

ここで PHS と CS に関係したトポロジカル不変量について議論する。PHS に関するトポロジカル不変量の場合は特殊な場合は定義可能であり、CS に関するトポロジカル不変量は常に自明な値しか取らないことがわかった。

3.3.1 particle-hole 対称性に関係した \mathbb{Z}_2 トポロジカル不変量

複素固有値をもつ状態を含む、全ての固有状態が粒子的と hole 的状态に分類され、それぞれ正と負の指数に割り当てられるとする。その時、以下のように $\text{tr}A(k)$ を正ノルムと負ノルムの指数のバンドからの寄与に分けることができる:

$$\text{tr}A(k) = A_+(k) + A_-(k), \quad (3.32a)$$

$$A_+(k) := \sum_{n=1}^{\mathcal{N}} [A(k)]_{nn}, \quad (3.32b)$$

$$A_-(k) := \sum_{n=-\mathcal{N}}^{-1} [A(k)]_{nn}. \quad (3.32c)$$

負の指数 (正の指数) の状態を占有 (非占有) 状態と見なすことによって、トポロジカル不変量は負の index バンドのベリー位相として定義される。

$$(-1)^{\nu_{\text{PHS}}} := \exp \left(i \int_{-\pi}^{\pi} dk A_-(k) \right). \quad (3.33)$$

以下で、固有状態に対してラベルルールを与え、PHS に関係したトポロジカル不変量を $\nu_{\text{PHS}} = 0$ か 1 であることを示す。

ラベルルール

粒子とホールのバンドを分類するため、粒子・ホール状態の対が逆の符号を持つ指数にする。(2.90)式に基づく実固有値をもつ状態の分類は上記の粒子・ホール状態の対が逆符号を持つことを満たす。複素固有モードが存在する場合、固有値 $E, E^*, -E, -E^*$ の4つの状態が全て同時に現れる。これらの固有値は PHS と擬エルミート性で関係付いている [詳細は表 3.1 に記載]。表 3.1 に示すように、固有値 E が正の指数をもつ固有値の場合、 E^* と $-E^*$ ($-E$) は負 (正) の指数に割り当てられる。上記の議論と一致するように、 $\text{Im}E > 0 (< 0)$ の状態が正 (負) の指数を持つような複素固有値の状態を分類する。ただし、複素固有値が $k = 0, \pi$ で出現する場合は、指数の割り当てができないことを意味するため、そのような場合はトポロジカル不変量 ν_{PHS} は定義できないことを意味する。

上記の議論から、固有状態を以下のようにラベル付けする:

1. 複素固有値が $k = 0, \pi$ に存在するかを確認し、もし存在すればトポロジカル不変量 ν_{PHS} は定義不可能である。
2. BZ 内の例外点を除く各波数 k で、全ての固有値を正か負の指数をもつ固有値に分類する:
 - (a) 実固有値をもつ状態は (2.90) 式で分類される。
 - (b) 複素固有をもつ状態は $k \text{Im}E > 0 (< 0)$ で状態が正 (負) の指数をもつ固有状態に分類される。
3. 正と負の指数の状態の対を $\text{Re}E$ と $\text{Im}E$ の昇順などのように並び替える。

state	Hamiltonian	Eigenvalue	Assigned index
$ u^R\rangle$	$H(k)$	$E = a + ib$	+
$\tau_3 u^L\rangle$	$H(k)$	$E^* = a - ib$	-
$\mathcal{C} u^R\rangle$	$H(-k)$	$-E^* = -a + ib$	-
$\mathcal{C}\tau_3 u^L\rangle$	$H(-k)$	$-E = -a - ib$	+

表 3.1: 固有値 $E = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) をもつハミルトニアン $H(k)$ の正の指数の右固有状態 $|u^R\rangle$ と PHS と擬エルミート性で関係付いたその他の状態との関係をまとめた図を表す。実固有値をもつ正ノルムと負ノルムの固有状態が複素共役の対に変わるため (詳細について第 2.5.4 章と第 3.3.1 章に記載)、固有値 $E^* = a - ib$ をもつ $\tau_3|u^L\rangle$ は負の指数に分類される。 $\mathcal{C}|u^R\rangle$ と $\mathcal{C}\tau_3|u^L\rangle$ の particle-hole 対称な状態は $H(-k)$ の右固有状態であり、それぞれ $|u^R\rangle$ と $\tau_3|u^L\rangle$ の逆符号を持つ指数に分類される。

複素 κ 平面上での式 (3.33) の積分経路は上記のバンド構造と矛盾ないように決める。しかし、以下で見るように、虚部が固定された経路に連続変形可能な場合、例えば、実部が定数 ϵ_0 で $\ell_0 : \kappa(k) = k + i\epsilon_0$ のような場合だけ、トポロジカル不変量 ν_{PHS} が \mathbb{Z}_2 に属することがわかる。そうでなければ、 $\nu_{\text{PHS}} \in \mathbb{Z}_2$ と示すことができない (\mathbb{Z}_2 の可能性があるが、本研究では示していない)。トポロジカル不変量 ν_{PHS} が \mathbb{Z}_2 になることを証明するためには、図 3.1 (c) または図 3.1 (e) のような構造になっていなければならない。

$\nu_{\text{PHS}} \in \mathbb{Z}_2$ の証明

複素 κ 平面に拡張した PHS (3.11a) を用いて以下の関係を証明する。

$$A_+(-\kappa^*) - A_-(\kappa) = -\partial_\kappa \theta_{\mathcal{C}}(\kappa), \quad (3.34)$$

$[U_{\mathcal{C}}^{\text{RL}}(\kappa)]_{mn} := \langle u_m^{\text{R}}(\kappa) | \mathcal{C} | u_n^{\text{L}}(-\kappa^*) \rangle \in \mathbb{C}^{\mathcal{N} \times \mathcal{N}}$ は $m < 0$ と $n > 0$ で定義された正則行列で、 $\theta_{\mathcal{C}}(\kappa)$ は $\theta_{\mathcal{C}}(\kappa) := \arg[\det U_{\mathcal{C}}^{\text{RL}}(\kappa)]$ と定義される。(3.34) 式の導出の詳細は付録 A.4 に記載した。(3.34) 式を経路 $\ell : \kappa(k) = k + i\epsilon(k)$ ($-\pi \leq k \leq \pi$) に沿って積分する。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \frac{d\kappa(k)}{dk} [A_+(-k + i\epsilon(-k)) - A_-(k + i\epsilon(k))] = - \int_{\ell} \frac{d\kappa}{2\pi} \partial_\kappa \theta_{\mathcal{C}}(\kappa) = M \in \mathbb{Z} \quad (3.35)$$

κ は経路 ℓ に沿って変化し、 M は $-\det U_{\mathcal{C}}^{\text{RL}}(\kappa)$ が複素平面の原点の周りを回る回数である。BZ 内で全ての k に対して $\epsilon(k) > 0$ か $\epsilon(k) < 0$ で経路 ℓ を $\ell_0 : \kappa(k) = k + i\epsilon_0$ に連続変形できる。(3.35) 式は以下のように変わる。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} [A_+(k + i\epsilon_0) - A_-(k + i\epsilon_0)] = M \in \mathbb{Z}. \quad (3.36)$$

一方、(3.18) 式は $A_{\pm}(k)$ の項に書き直すことができる。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} [A_+(k) + A_-(k)] = N \in \mathbb{Z}. \quad (3.37)$$

つまり、上の式から負の指数のバンドのベリー位相が $1/2$ に量子化されることがわかる。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} A_-(k) = \frac{N - M}{2} = \frac{N'}{2}. \quad (3.38)$$

一般的に、ベリー位相はゲージ変換で整数倍だけ変化する。現在の場合、正と負の指数のベリー位相 $\int A_{\pm}(k)dk/(2\pi)$ は正と負の指数のバンドがラベルルールによりゲージ変換の下で混ざり合わないため、正と負の指数のバンドに対する $\int A_{\pm}(k)dk/(2\pi)$ は独立に整数倍だけ変化する。その結果、トポロジカル不変量は $\nu_{\text{PHS}} = N' \bmod 2 = 0, 1$ もしくは、 \mathbb{Z}_2 不変量として (3.33) 式で定義されるトポロジカル不変量 ν_{PHS} になる。

3.3.2 カイラル対称性に関係した巻きつき数

1次元非エルミートハミルトニアン $H(\mathbf{k})$ が反擬エルミート性 (pseudo-anti-Hermiticity) を満たす時、巻きつき数でエッジ状態が特徴付けられることが示されている [87]。反擬エルミート性とはある行列 $H(k)$ に対して

$$\eta H(k)\eta^{-1} = -H^{\dagger}(k) \quad (3.39)$$

を満たす性質である。以下では、この先行研究の議論に従い、Bogoliubov ハミルトニアンに対してカイラル対称性がある場合に巻きつき数を定義できることを示す。しかしながら以下で定義する巻きつき数は時間反転対称演算子の構造により常に自明になることがわかった。これは1次元ボース粒子系の Bogoliubov ハミルトニアンは、カイラル対称性で保護されるトポロジカル相は存在しないことを意味する。

時間反転対称な系を仮定し、以下では擬エルミート性 (3.3) とカイラル対称性 (3.7) を用いて反擬エルミート性と同一の関係式を得る:

$$(\tau_3\Gamma)H(k)(\tau_3\Gamma)^{-1} = -H(k)^{\dagger}. \quad (3.40)$$

$H(k)$ からエルミートなハミルトニアンを構成することができる。

$$H_0(k) := \frac{H(k) + H(k)^{\dagger}}{2} \quad (3.41)$$

この $H_0(k)$ は CS を満たす:

$$\tilde{\Gamma}H_0(k)\tilde{\Gamma}^{-1} = -H_0(k), \quad (3.42a)$$

$$\tilde{\Gamma} := i\tau_3\Gamma, \quad (3.42b)$$

$$\tilde{\Gamma}^2 = +1. \quad (3.42c)$$

$H_0(k)$ はエルミートなハミルトニアンであるためエルミート系で定義されている巻きつき数を適応することが可能である。

$$\begin{aligned} w &:= \frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} dk \text{tr}[\tilde{\Gamma}H_0(k)^{-1}\partial_k H_0(k)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \text{Im} \left[\int_{-\pi}^{\pi} dk \partial_k \ln[\det \tilde{q}(k)] \right] \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

$\tilde{q}(k)$ は以下のように定義される。

$$U_{\tilde{\Gamma}}^{\dagger}H_0(k)U_{\tilde{\Gamma}} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{q}(k) \\ \tilde{q}(k)^{\dagger} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

$U_{\tilde{\Gamma}}$ は $\tilde{\Gamma}$ を対角化するユニタリ行列である。巻きつき数の値は波数 k を 1 次元 BZ の $-\pi$ から $+\pi$ まで動かした時に $\det \tilde{q}(k)$ が複素平面の原点を巻きつく回数に対応する。しかし巻きつき数が 1 次元ボース粒子系の Bogoliubov ハミルトニアンに定義することが可能であるが、常に自明な値を取ることがわかる。これは計量演算子 $\eta = \tau_3$ と $H_0(k)$ が交換、 $\tilde{\Gamma}$ と反交換する性質に由来する。つまり、

$$[\tau_3, H_0(k)] = 0, \quad (3.45a)$$

$$\{\tau_3, \tilde{\Gamma}\} = 0, \quad (3.45b)$$

(3.45b) 式は (3.4) 式と (3.6) から導出可能で、この交換関係から巻きつき数を書き直すことができる:

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} dk \operatorname{tr} [\tilde{\Gamma} H_0(k)^{-1} \partial_k H_0(k)] \\ &= \frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} dk \operatorname{tr} [\tau_3 \tilde{\Gamma} \tau_3^{-1} \tau_3 H_0(k)^{-1} \tau_3^{-1} \partial_k \tau_3 H_0(k) \tau_3^{-1}] \\ &= -\frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} dk \operatorname{tr} [\tilde{\Gamma} H_0(k)^{-1} \partial_k H_0(k)] \\ &= -w, \end{aligned}$$

つまりこれは $w = 0$ を意味し、常に自明な値しか取り得ないため、1 次元ボース粒子系における巻きつき数で特徴付けられるトポロジカル相は存在しない。

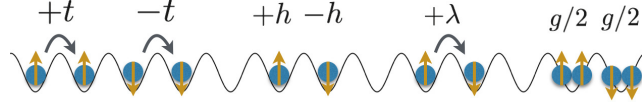


図. 3.3: (3.46) 式で与えられる Kitaev-chain モデルの概念図を表す。擬スピン 1/2 ボース原子気体が 1 次元光格子に並べられている。 t ($-t$) はスピンアップとダウンのボース原子のポッピング振幅, h は外部磁場, λ はスピン軌道相互作用の強さ, g は同種間相互作用の強さを表す。

3.4 ボース粒子系における Bogoliubov 励起のトポロジカル相

本項ではバルクエッジ対応が成り立つことを簡単な Toy モデルも用いて数値検証する。1 つ目の Toy モデルは、磁場中のスピン軌道相互作用する Kitaev-chain モデル、2 つ目が副格子のある Su-Schrieffer-Heeger (SSH) モデルである。両モデル共に擬エルミート性, PHS, 及び IS がある。ただし、前者は TRS が破れ、後者は TRS があるモデルである。

3.4.1 Kitaev-chain モデル

まずはじめに、磁場下でスピン軌道相互作用する 1 次元光格ポテンシャルで捕獲された擬スピン 1/2 のボース原子気体を考える [図 3.3]。冷却原子気体系におけるスピン軌道相互作用はレーザーを用いて誘起した人工ゲージ場によって実現可能である [62, 120]。この系を記述するハミルトニアン $\hat{\mathcal{H}}$ は次式で与えられる:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} = \sum_j \left[& -t(\hat{a}_{j,\uparrow}^\dagger \hat{a}_{j+1,\uparrow} - \hat{a}_{j,\downarrow}^\dagger \hat{a}_{j+1,\downarrow} + \text{H.c.}) \right. \\ & + h(\hat{a}_{j,\downarrow}^\dagger \hat{a}_{j,\downarrow} - \hat{a}_{j,\uparrow}^\dagger \hat{a}_{j,\uparrow}) \\ & + \lambda(\hat{a}_{j,\uparrow}^\dagger \hat{a}_{j+1,\downarrow} - \hat{a}_{j,\uparrow}^\dagger \hat{a}_{j-1,\downarrow} + \text{H.c.}) \\ & \left. + \frac{g}{2}(\hat{a}_{j,\uparrow}^\dagger \hat{a}_{j,\uparrow}^\dagger \hat{a}_{j,\uparrow} \hat{a}_{j,\uparrow} + \hat{a}_{j,\downarrow}^\dagger \hat{a}_{j,\downarrow}^\dagger \hat{a}_{j,\downarrow} \hat{a}_{j,\downarrow}) \right]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

$\hat{a}_{j,\sigma}^\dagger$ ($\hat{a}_{j,\sigma}$) は j サイトの内部自由度 $\sigma = \uparrow, \downarrow$ を持つボース原子の生成 (消滅) 演算子を表す。 $t, h, \lambda, g \in \mathbb{R}$ はそれぞれポッピング振幅, 外部磁場, スピン軌道相互作用の強さ, 及び同種間相互作用の強さを表す。相互作用の強さはアップスピンとダウンスピンが同じであると、簡単なために異種間相互作用は無視した。

フェルミ粒子系において 1 次元系で p 波ペアリングしているスピン偏極した超伝導体をモデル化した Kitaev-chain モデルがあり、このモデルはトポロジカル超伝導体を表すもっとも簡単なモデルとして知られている [121]。このハミルトニアンを Kitaev-chain モデルと呼ぶ。この系は本質的に s 波超伝導ペアリングが近接誘起した Rashba ナノワイヤー [122, 123] と同じであり、この系は Kitaev-chain と等価であることが知られている。スピン軌道相互作用と外部磁場、さらに今の場合超伝導ペアリングに対応する凝縮体が存在するため、その意味でこのモデルを Kitaev-chain モデルと呼ぶ。このモデルを用いて空間反転対称性に関係したトポロジカル不変量 \mathbb{Z}_2 を定義し、バルクエッジ対応を数値的に確かめている [14]。本節では、このモデルを用いて第 3.2 章で定義したトポロジカル不変量が複素固有値モードが存在する場合においてもバルクエッジ対応が成り立つのかを数値検証する。

超流動相を仮定し、Kitaev-chain モデルにおける基底状態の相図を平均場理論の範囲で求めた。図 3.4 (a) は基底状態の相図を表し、粒子数密度を ρ として $g\rho/\lambda = 0.5$ で計算した。この系は 4 つの基底状

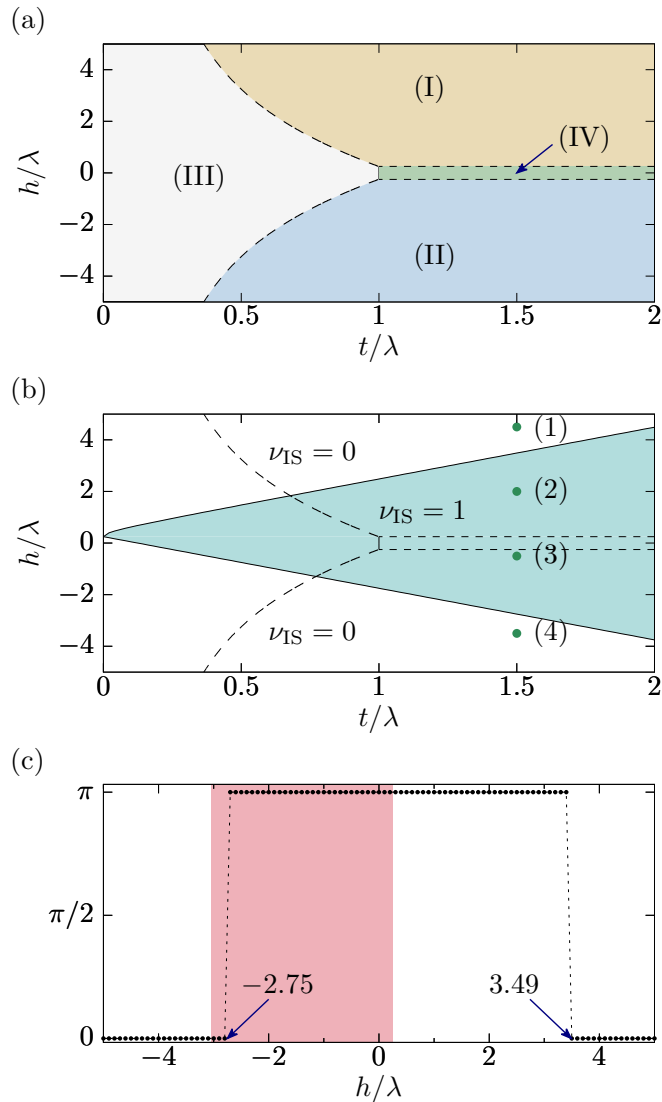


図. 3.4: (a) 式 (3.46) で与えられる Kitaev-chain モデルで $g\rho/\lambda = 0.5$ の場合での基底状態の相図。この系では相 (I)-(IV) と表記された 4 つの相がある。相 I(II) はアップスピン(ダウンスピン)原子が凝縮し、相 III はストライプ相、相 IV は I 相と II 相の秩序変数の重ね合わせ状態が実現する(本文参照)。凝縮体波動関数は相 I で実現する状態に平均場近似し、 t/λ と h/λ を変化させて Bogoliubov 励起バンドを計算する。これらのパラメータが相 I の領域外の場合、BEC が動的不安定になり準粒子励起として複素固有値モードが出現する。(b) 相 I の秩序変数を持つ BEC からの Bogoliubov バンドのトポロジカル相図。破線は (a) の相境界を表し、相転移点は実線で示した $h = g\rho/2 + \sqrt{2t(2t + g\rho)}$, $h = g\rho/2 - 2t$ で与えられ、トポロジカル不変量 $\nu_{\text{IS}} \in \mathbb{Z}_2$ は、青色の領域では非自明な値を取る。(1)-(4) の緑色の点は、それぞれ図 3.5 の計算に用いたパラメータを示す。(c) ベリー位相を $g\rho/\lambda = 0.5$ と $t/\lambda = 1.5$ で h/λ の関数として Wilson loop 法により数値評価。 $h/\lambda = -2.75$ と 3.49 で 0 と π の間で不連続に変化しており、トポロジカル相転移を表す。この点は (b) の相転移点と一致する。赤色の領域は複素固有値モードが出現する領域を表し、複素固有値モードが出現してもベリー相 ν_{IS} が非自明な値を取りうることを示す。

態が存在し、相 I と (II) はスピニアップ (スピンドアウン) のボース原子が $k = 0$ ($k = \pi$) に凝縮する。相 III はストライプ相と呼ばれ [62, 63]、ボース原子が $k (\neq 0)$ と $-k$ に凝縮する。相 IV は相 I と II での凝縮体の重ね合わせ状態が実現している相である。異種粒子間相互作用を無視したため相 IV 現れたと考えられ、相 I, II, III に関しては詳しく調べられている [14]。ここで相 I の秩序変数は

$$\begin{pmatrix} \langle \hat{a}_{j,\uparrow} \rangle \\ \langle \hat{a}_{j,\downarrow} \rangle \end{pmatrix} = \sqrt{\rho} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

である。以下では、平均場近似として相 I の BEC を仮定し、第 2.4 章に記載した手続きに従い Bogoliubov ハミルトニアンを求め、 h/λ と t/λ を変化させて Bogoliubov 励起スペクトルを計算する。格子定数を 1、格子のサイト数を L としてフーリエ変換 $\hat{a}_{j,\sigma} = (1/\sqrt{L}) \sum_k \hat{a}_{k,\sigma} e^{ikj}$ して運動量空間における Bogoliubov ハミルトニアンを以下のように得る。

$$H(k)T(k) = T(k) \begin{pmatrix} E(k) & 0 \\ 0 & -E^*(k) \end{pmatrix}, \quad (3.48a)$$

$$H(k) = \begin{pmatrix} [H^{(1)}(k)] & H^{(2)} \\ -H^{(2)*} & -[H^{(1)}(-k)]^* \end{pmatrix}, \quad (3.48b)$$

$$H^{(1)}(k) = \begin{pmatrix} -2t \cos k - h + 2g\rho - \mu & 2i\lambda \sin k \\ -2i\lambda \sin k & 2t \cos k + h - \mu \end{pmatrix}, \quad (3.48c)$$

$$H^{(2)} = \begin{pmatrix} g\rho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.48d)$$

$\mu = h - 2t + g\rho$ は化学ポテンシャルである。 h/λ と t/λ の値が図 3.4 (a) の相 I の領域内の場合には平均場近似した凝縮状態と基底状態が一致するため動的安定であるが、 h/λ と t/λ の値が相 I の領域以外にある場合、平均場近似した凝縮体が基底状態ではないため、凝縮体は動的不安定、つまり準粒子励起として複素固有値モードが出現する。動的安定な BEC における Bogoliubov 準粒子のトポロジカル相に関する研究 [14] はすでに行われており、本節では、動的不安定な BEC に注目して Bogoliubov 準粒子のトポロジカルな性質を議論する。

このモデルの対称性に関して整理する。上記で定義した Bogoliubov ハミルトニアン $H(k)$ は擬エルミート性と particle-hole 対称性以外に空間反転対称性を有す:

$$\begin{aligned} \text{pseudo-H: } \eta H(k) \eta^{-1} &= H(k)^\dagger, & \eta &= \tau_3, \\ \text{PHS: } C H(k) C^{-1} &= -H(-k), & C &= \tau_1 K, \\ \text{IS: } \mathcal{P} H(k) \mathcal{P}^{-1} &= H(-k), & \mathcal{P} &= \sigma_3, \end{aligned} \quad (3.49)$$

$\sigma_{i=0,1,2,3}$ ($\tau_{i=0,1,2,3}$) はスピン空間 (南部空間) の自由度を表すパウリ行列である。第 3.2 章の議論によれば、IS に関係したトポロジカル不変量は $\nu_{\text{IS}} \in \mathbb{Z}_2$ として定義可能である。

ここでは $n_\uparrow = 1$ の時のトポロジカル不変量 ν_{IS} を (3.21) 式を用いて計算する。 $k = 0, \pi$ では、Bogoliubov ハミルトニアンはスピニアップ (u_\uparrow, v_\uparrow) とスピンドアウン ($u_\downarrow, v_\downarrow$) に分けられ、空間反転対称演算子 $\mathcal{P} = \sigma_3$ の固有値は ± 1 で与えられる。 $k = 0, \pi$ における対応する全て正の指数の固有値は次式

で与えられる。

$$E_{\uparrow}(0) = 0, \quad (3.50a)$$

$$E_{\downarrow}(0) = 4t + 2h - g\rho, \quad (3.50b)$$

$$E_{\uparrow}(\pi) = 2\sqrt{2t(2t + g\rho)}, \quad (3.50c)$$

$$E_{\downarrow}(\pi) = 2h - g\rho, \quad (3.50d)$$

上記の固有値を $E_1 < E_2$ とすると、図 3.4 (a) のパラメータ空間を以下の 3 つの領域に分割可能である:

$$(i) \ h > g\rho/2 + \sqrt{2t(2t + g\rho)} :$$

$$E_1(0) = E_{\uparrow}(0), \ E_1(\pi) = E_{\uparrow}(\pi), \ \nu_{\text{IS}} = 0, \quad (3.51a)$$

$$(ii) \ g\rho/2 - t < h < g\rho/2 + \sqrt{2t(2t + g\rho)} :$$

$$E_1(0) = E_{\uparrow}(0), \ E_1(\pi) = E_{\downarrow}(\pi), \ \nu_{\text{IS}} = 1, \quad (3.51b)$$

$$(iii) \ h < g\rho/2 - 2t :$$

$$E_1(0) = E_{\downarrow}(0), \ E_1(\pi) = E_{\downarrow}(\pi), \ \nu_{\text{IS}} = 0. \quad (3.51c)$$

(3.51b) 式で示すように、トポロジカル相転移は $h = g\rho/2 + \sqrt{2t(2t + g\rho)}$ と $h = g\rho/2 - 2t$ で起こる。以上の議論から、トポロジカル相の相図は図 3.4(b) のように得られ、シアン色の領域がトポロジカルに非自明な領域を表す。また、Bogoliubov ハミルトニアン固有状態を求め、Wilson loop 法 [124] を用いてベリー位相を数値的に計算した [図 3.4(c)]。図 3.4(c) は $g\rho/\lambda = 0.5$ と $t/\lambda = 1.5$ の場合のベリー位相を h/λ の関数として示したものである。この数値計算結果は (3.51) 式による解析結果と一致する。例えば $h = g\rho/2 + \rho/2 + \sqrt{2t(2t + g\rho)}$ と $h = g\rho/2 - 2t$ でベリー位相が不連続に変化することを示しており、これはトポロジカル相転移を表す。図 3.4(c) の赤色の領域は複素固有値モードが出現する領域を表し、この数値結果から複素固有値モードの存在する場合でもベリー相とトポロジカル不変量 ν_{IS} がうまく定義されていることがわかる。

次に、バルクエッジ対応を理解するために、周期的境界条件と開放境界条件を持つ系のエネルギースペクトルを比較する。図 3.5 は $g\rho/\lambda = 0.5, t/\lambda = 1.5$ として h/λ の値をいくつか変えた場合のエネルギースペクトルを示す。図 3.5 の左図は周期境界条件の下、運動量空間で計算したエネルギーバンドであり実線は $\text{Re } E_n(k)$ を、点線は $10 \text{Im } E_n(k)$ を、黄色と青色はそれぞれ正の指数のバンドと負の指数のバンドを示す。右図は 100 サイトでの固有値を示し、黒点は降順に並べられた固有値の実部、シアン点是对応する虚部を 10 倍したものである。特に図 3.5 の右図で $E/\lambda \simeq \pm 5.0$ と ± 2.0 にギャップ内状態 (端状態) が存在することを示す。またこれらギャップ内状態が系の端に局在していることを波動関数の数値計算により確認した。図 3.4 (b) のトポロジカル相の相図によると、図 3.5 (a) と図 3.5 (d) [図 3.5 (b) と図 3.5 (c)] でトポロジカル不変量は $\nu_{\text{IS}} = 0$ [$\nu_{\text{IS}} = 1$] になる。これらのバンド計算結果からトポロジカル不変量 ν_{IS} が非自明な値を取る時、エッジ状態が現れると結論づけることができる。特に図 3.5 (c) に示すように複素固有値が存在する場合でもバルクエッジ対応が成り立つと言える。

最後に、このモデルは Kitaev-chain に類似しているため、エルミート系の類推から PHS による非自明なトポロジカル不変量 ν_{PHS} が存在する。実際に、第 3.3.1 章の議論によると、今回の場合では PHS に関係するトポロジカル不変量 ν_{PHS} が定義可能である。PHS によるトポロジカル不変量を定義する場合、複素固有値を持つ典型的なバンド構造は、図 3.5 (c) の右図のようなものであるため、運動

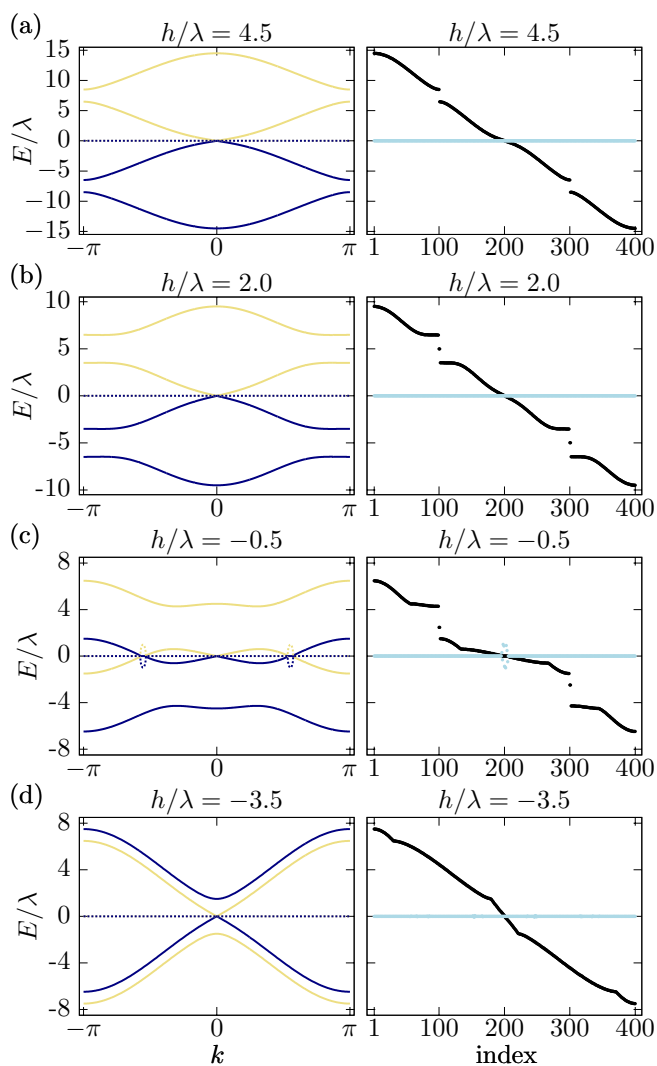


図. 3.5: $g\rho/\lambda = 0.5$, $t/\lambda = 1.5$, $h/\lambda = 4.5$ (a), 2.0 (b), -0.5 (c), -3.5 (d) の条件で計算した Kitaev-chain モデルでの相 I の秩序変数をもつ BEC からの Bogoliubov 準粒子励起スペクトル。左パネルは周期境界条件で求めた波数空間における固有値を表す。黄色 (青色) の実線と点線は、それぞれ正 (負) の指数のバンドの $\text{Re } E_n(k)$ と $10 \text{Im } E_n(k)$ を表す。右パネルは開放境界条件で 100 サイトで計算した実空間における固有値を示す。黒点は降順に並べられた固有値の実部 $\text{Re } E$ 、赤点是对応する虚部 $10 \text{Im } E$ である。(b) と (c) の右パネルには、トポロジカル不変量が $\nu_{\text{IS}} = 1$ になるパラメータで、それぞれ $E/\lambda \simeq \pm 5.0$ と ± 2.0 にギャップ内状態 (端状態) が存在する。

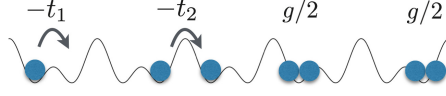


図. 3.6: (3.52) 式で与えられる SSH モデルを表し、スピンレスボゾンが 1 次元二重井戸の光格子ポテンシャルに並べられる。 t_1 (t_2) はサイト内 (サイト間) ホッピング振幅, g は原子間相互作用を表す。

量の虚部が一定値の積分経路を選択することができるが、ラベル付けのルールはトポロジカル不変量 ν_S の場合と異なることに注意する。ただし、このモデルを用いてトポロジカル不変量 ν_{PHS} を計算したが、常に自明な値しか取らないとわかった。

3.4.2 Su-Schrieffer-Heeger モデル

副格子の光格子ポテンシャルに捕獲された 1 次元スピンレスボーズ原子系を考える [125][図 3.6]。このモデルは TRS, PHS, 及び CS をもつポリアセチレン中の電子を記述する Su-Schrieffer-Heeger (SSH) モデルに由来する。今回は電子ではなくボーズ原子がボーズ・アインシュタイン凝縮した SSH モデルを考え、この系のハミルトニアン $\hat{\mathcal{H}}$ は次式のように与えられる。

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_j \left[-t_1 (\hat{a}_{j,A}^\dagger \hat{a}_{j,B} + \hat{a}_{j,B}^\dagger \hat{a}_{j,A}) - t_2 (\hat{a}_{j+1,A}^\dagger \hat{a}_{j,B} + \hat{a}_{j,B}^\dagger \hat{a}_{j+1,A}) + \frac{g}{2} (\hat{a}_{j,A}^\dagger \hat{a}_{j,A}^\dagger \hat{a}_{j,A} \hat{a}_{j,A} + \hat{a}_{j,B}^\dagger \hat{a}_{j,B}^\dagger \hat{a}_{j,B} \hat{a}_{j,B}) \right]. \quad (3.52)$$

$\hat{a}_{j,S}^\dagger$ ($\hat{a}_{j,S}$) は j サイトの副格子 $S=A$ か B にいるボーズ原子の生成 (消滅) 演算子である。 t_1 (t_2) はサイト内 (サイト外) のホッピング振幅, g は同種粒子間相互作用の強さを表す。またそれぞれ実数である。

超流動相を仮定すると、SSH モデルにおける基底状態の相関を平均場理論の範囲で求めた。図 3.7 (a) は基底状態の相関を表す。相 I では、原子間相互作用が引力 ($g < 0$) の場合で、あるサイトで 1 つの副格子にボーズ凝縮が起こり、相 II では、原子間相互作用が斥力 $g > 0$ の場合で、原子は両副格子に一樣で広がる。ここで相 II の秩序変数は

$$\begin{pmatrix} \langle \hat{a}_{j,A} \rangle \\ \langle \hat{a}_{j,B} \rangle \end{pmatrix} = \sqrt{\rho} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

である。 L は二重井戸の数、 N は原子の全粒子数を表し、 ρ は副格子あたりの平均原子数で $\rho = N/(2L)$ で与えられる。以下では平均場近似として相 II の BEC を仮定し、 t_1/t_2 と g/t_2 を変化させて励起スペクトルを計算する。格子定数を 1 としたフーリエ変換 $\hat{a}_{j,S} = (1/\sqrt{L}) \sum_k \hat{a}_{k,S} e^{ikj}$ して運動量空間にお

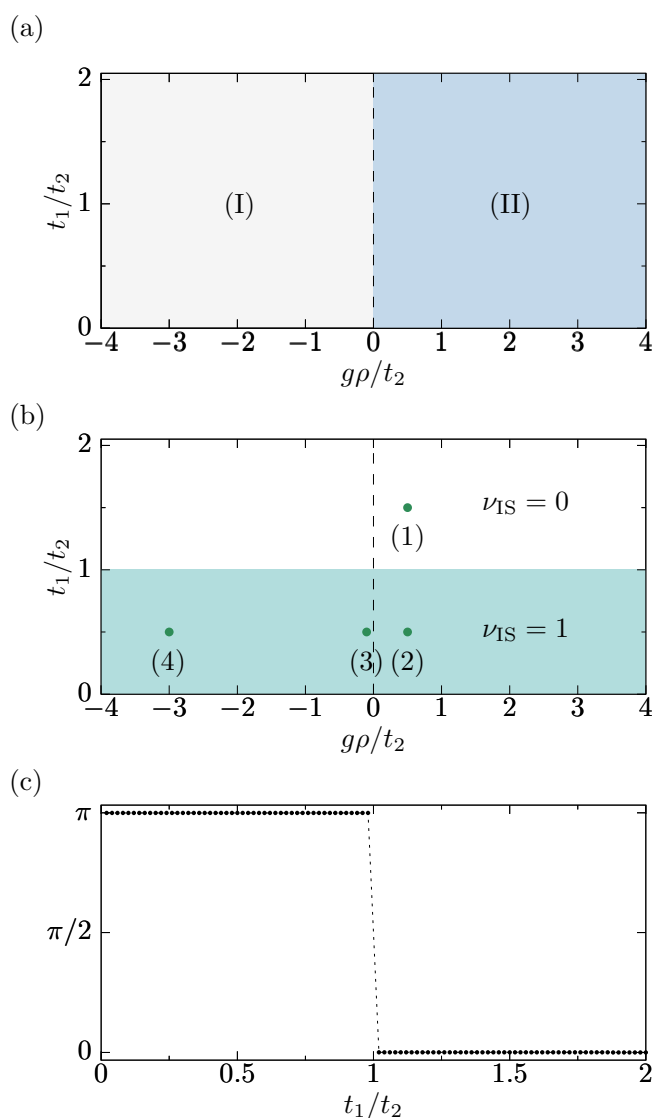


図. 3.7: (a) (3.52) 式で与えられる SSH モデルの基底状態の相図を表す。この系の基底状態は 2 つ存在する。相 I では、原子は引力相互作用によりあるサイトで 1 つの副格子にボース凝縮が起こる。相 II では、ボース原子が両副格子に一様で広がる。今回は、平均場近似として相 II の BEC を用意し、 t_1/t_2 と $g\rho/t_2$ を変化させて Bogoliubov 励起バンドを計算する。この場合、 $g\rho/t_2 < 0$ で BEC は動的不安定になり、複素固有値モードが現れる。(b) 相 II の秩序変数をもつ BEC からの Bogoliubov バンドのトポロジカル相の相図を表す。破線は (a) の基底状態の相境界を示す。トポロジカル相転移点は $t_1/t_2 = 1$ であり、トポロジカル不変量 $\nu_{1S} \in \mathbb{Z}_2$ はシアン色 (白色) の領域で非自明 (自明) な値を取る。(1)-(4) で表す点はそれぞれ図 3.8 (a)-3.8 (d) で計算する際に使ったパラメータである。(c) Wilson loop 法を用いて t_1/t_2 の関数として計算したベリー位相を数値結果を表し、この数値計算結果は $g\rho/t_2$ の値に依存しない。ベリー位相が 0 と π の間で不連続に変化し、この計算結果は図 (b) で示した相境界と一致する。

ける Bogoliubov ハミルトニアンを以下のように得る。

$$H(k)T(k) = T(k) \begin{pmatrix} E(k) & 0 \\ 0 & -E^*(k) \end{pmatrix}, \quad (3.54a)$$

$$H(k) = \begin{pmatrix} H^{(1)}(k) & H^{(2)} \\ -[H^{(2)}]^* & -[H^{(1)}(-k)]^* \end{pmatrix}, \quad (3.54b)$$

$$H^{(1)}(k) = \begin{pmatrix} -\mu + 2g\rho & -t_1 - t_2 e^{-ik} \\ -t_1 - t_2 e^{ik} & -\mu + 2g\rho \end{pmatrix}, \quad (3.54c)$$

$$H^{(2)} = \begin{pmatrix} g\rho & 0 \\ 0 & g\rho \end{pmatrix}. \quad (3.54d)$$

$\mu = -t_1 - t_2 + g\rho$ は化学ポテンシャルである。相 II ($g\rho/t_2 > 0$) では平均場近似した状態と基底状態が一致するため凝縮状態は動的安定であるが、相 I ($g\rho/t_2 < 0$) では動的不安定になり、準粒子励起として複素固有値モードが出現する。第 3.4.1 章と同様、本節でも動的不安定な BEC における Bogoliubov 準粒子のトポロジカルな性質を議論するが、kitaev-chain モデル (3.46) と対称性が異なる。

上記で定義した Bogoliubov ハミルトニアン $H(k)$ は擬エルミート性と particle-hole 対称性以外に空間反転対称性と時間反転対称性を有す：

$$\begin{aligned} \text{pseudo-H: } \quad \eta H(k)\eta^{-1} &= H(k)^\dagger, & \eta &= \tau_3, \\ \text{PHS: } \quad \mathcal{C}H(k)\mathcal{C}^{-1} &= -H(-k), & \mathcal{C} &= \tau_1 K, \\ \text{TRS: } \quad \mathcal{T}H(k)\mathcal{T}^{-1} &= H(-k), & \mathcal{T} &= K, \\ \text{CS: } \quad \Gamma H(k)\Gamma^{-1} &= -H(k), & \Gamma &= \tau_1, \\ \text{IS: } \quad \mathcal{P}H(k)\mathcal{P}^{-1} &= H(-k), & \mathcal{P} &= \sigma_1, \end{aligned} \quad (3.55)$$

$\tau_{i=0,1,2,3}$ ($\sigma_{i=0,1,2,3}$) は南部空間 (副格子) の自由度を表すパウリ行列である。

$n_r = 1$ での ν_{IS} を計算する。 $H(k_{\text{IS}} = 0, \pi)$ は空間反転対称性演算子 $\mathcal{P} = \sigma_1$ と交換するため、 $H(k_{\text{IS}})$ は \mathcal{P} の固有値 $+1$ と -1 のセクターに分けることができる。 $U^\dagger \sigma_1 U = \sigma_3$ を満たすユニタリ行列 $U = (\sigma_0 - i\sigma_2)/\sqrt{2}$ を定義し、 $H(k_{\text{IS}})$ は以下のようにユニタリ変換される：

$$U^\dagger H(k_{\text{IS}})U = \tau_3 \begin{pmatrix} \tilde{H}^{(1)}(k_{\text{IS}}) & 0 & \tilde{H}^{(3)} & 0 \\ 0 & \tilde{H}^{(2)}(k_{\text{IS}}) & 0 & \tilde{H}^{(3)} \\ \tilde{H}^{(3)} & 0 & \tilde{H}^{(1)}(k_{\text{IS}}) & 0 \\ 0 & \tilde{H}^{(3)} & 0 & \tilde{H}^{(2)}(k_{\text{IS}}) \end{pmatrix} \quad (3.56a)$$

$$\tilde{H}^{(1)}(k_{\text{IS}}) = -\mu + 2g\rho - t_1 - t_2 \cos k_{\text{IS}} \quad (3.56b)$$

$$\tilde{H}^{(2)}(k_{\text{IS}}) = -\mu + 2g\rho + t_1 + t_2 \cos k_{\text{IS}} \quad (3.56c)$$

$$\tilde{H}^{(3)} = g\rho \quad (3.56d)$$

$H(k_{\text{IS}})$ の固有値は 2×2 の行列を対角化することで得ることができる。したがって $k = 0, \pi$ での固有

値は

$$E_{\uparrow}(0) = 0, \quad (3.57a)$$

$$E_{\downarrow}(0) = 2\sqrt{(t_1 + t_2)(t_1 + t_2 + g\rho)}, \quad (3.57b)$$

$$E_{\uparrow}(\pi) = 2\sqrt{t_2(t_2 + g\rho)}, \quad (3.57c)$$

$$E_{\downarrow}(\pi) = 2\sqrt{t_1(t_1 + g\rho)}, \quad (3.57d)$$

$t_1, t_2 > 0$ を仮定する。 $t_1 + t_2 + g\rho = 0$ で2つのバンドが $k = 0$ で接し、一方 $t_1 = t_2$ と $t_1 + t_2 + g\rho = 0$ で $k = \pi$ で接する。その結果、 $g\rho$ の値に関係なく $t_1 = t_2$ でバンド反転が起こる。バンド構造を考えると、トポロジカル不変量 ν_{IS} は以下ようになる:

$$\nu_{\text{IS}} = \begin{cases} 1 & (t_1 < t_2) \\ 0 & (t_1 > t_2) \end{cases} \quad (3.58)$$

以上の議論から 図 3.7 (b) のトポロジカル相の相図が得られる。エネルギーバンドによる計算だけでなく Wilson loop 法によるベリー位相を数値的に求め、その結果を図 3.7 (c) に示す。解析計算及び数値計算から $t_1/t_2 < 1$ ではトポロジカルに非自明な相であることがわかる。

バルクエッジ対応を理解するために周期境界条件と開境界条件でのエネルギースペクトルを比較する。図 3.8 は t_1/t_2 と $g\rho/t_2$ の値を変化させた結果を示す。左図は周期境界条件の下、運動量空間で計算したエネルギースペクトルを示す。図 3.8 の線は図 3.5 と同じ意味である。図 3.8 (a)-3.8(d) で使われている $(t_1/t_2, g\rho/t_2)$ の値はトポロジカル相図の図 3.7 (a) の (1)-(4) として示す。 $\nu_{\text{IS}} = 1$ の場合に対応して、ギャップ内状態 (端状態) が図 3.8 (b), (c), 及び (d) の右図に存在する。特に図 3.8 (d) において、BZ 全体で固有値が全て純虚数であるにも関わらず、純虚数固有値をもつ端状態が存在する。

次に、(3.43) 式で定義した巻きつき数が常に自明になることを説明する。このモデルにおけるハミルトニアンのエルミートな部分である (3.41) 式は次式で与えられる。

$$H_0 = \begin{pmatrix} H^{(1)}(k) & 0 \\ 0 & -H^{(1)}(k) \end{pmatrix} = H^{(1)}(k)\tau_3, \quad (3.59)$$

$[H^{(1)}(-k)]^* = H^{(1)}(k) = [H^{(1)}(k)]^\dagger$ と $[H^{(2)}]^\text{T} = H^{(2)}$ の関係を使ってまとめた。 $H_0(k)$ と反交換するカイラル演算子 $\tilde{\Gamma}$ は

$$\tilde{\Gamma} = i\tau_3\Gamma = -\tau_2 \quad (3.60)$$

である。第 3.3.2 章で記載したように、この $\tilde{\Gamma}$ は τ_3 と反交換する:

$$\{\tilde{\Gamma}, \tau_3\} = 0. \quad (3.61)$$

$\tilde{\Gamma}$ を対角化するユニタリ行列 $U_{\tilde{\Gamma}}$ は

$$U_{\tilde{\Gamma}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_0 - i\tau_1), \quad (3.62)$$

であり、 $H_0(k)$ は以下のように変換される:

$$U_{\tilde{\Gamma}}^\dagger H_0(k) U_{\tilde{\Gamma}} = H^{(1)}(k)\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -iH^{(1)}(k) \\ iH^{(1)}(k) & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.63)$$

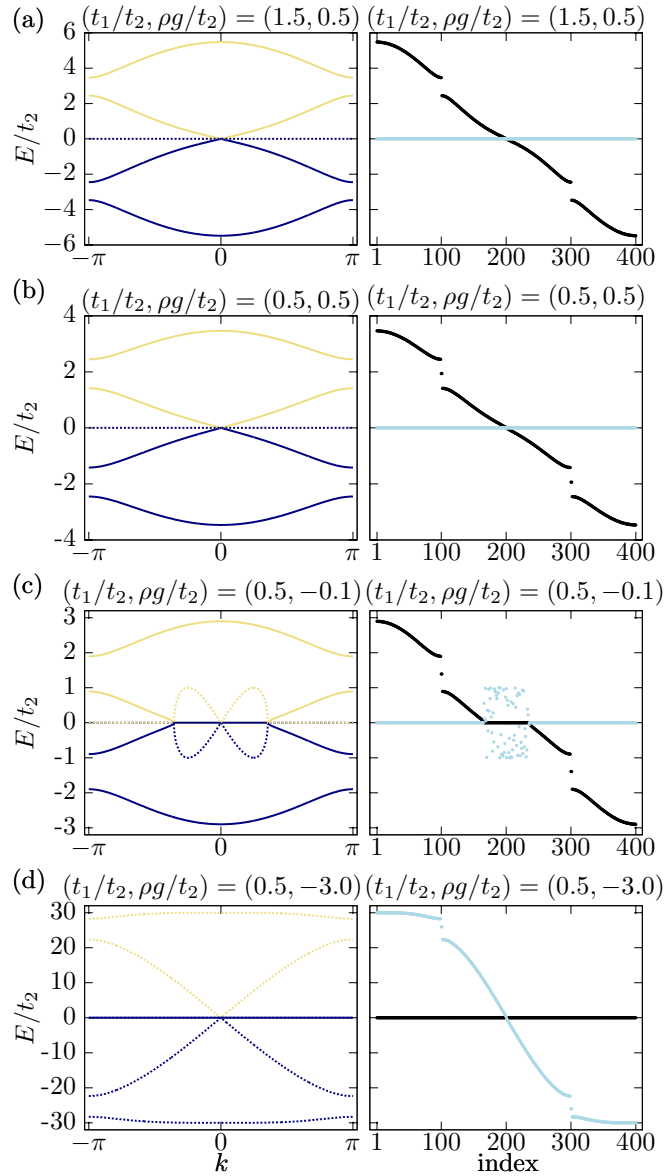


図. 3.8: $(t_1/t_2, g\rho/t_2) = (1.5, 0.5)$ (a), $(0.5, 0.5)$ (b), $(0.5, -0.1)$ (c), $(0.5, -3.0)$ (d) として SSH モデルの相 II での BEC から Bogoliubov 励起バンドを計算結果を示す。それらの (a)-(d) のパラメータは図 3.7 (a) の (1)-(4) にそれぞれ示す。右図左図の線の意味は図 3.5 と同じである。(b), (c), (d) の図で各 $E/t_2 \simeq \pm 1.9, \pm 1.4, \pm 26$ でギャップ内状態が存在し、この結果はトポロジカル不変量 ν_{IS} が非自明な値 $\nu_{\text{IS}} = 1$ を取る場合と一致する。

$\tilde{q}(k) = -iH^{(1)}(k)$ とすると $\det[H^{(1)}(k)] = -\det[\tilde{q}(k)]$ である。 $H^{(1)}(k)$ はエルミート行列であるため、 $\det[\tilde{q}(k)]$ は常に実数である。したがって (3.43) 式で与えられる巻きつき数は常にゼロ、つまり巻きつき数で特徴付けられるエッジ状態は存在しない。

この系においても PHS に関係するトポロジカル不変量 ν_{PHS} についても計算を行なった。図 3.8 (a)-3.8 (c) で示されるバンド構造の場合でも、積分経路とトポロジカル不変量 ν_{PHS} が定義可能であるが、常に自明になることがわかる。ただし図 3.8 (d) に示されるバンド構造の場合、 $k=0$ と π で複素固有値が現れるためトポロジカル不変量 ν_{PHS} は定義できない。

3.5 結論

本節では、1次元光格子ポテンシャルに捕獲された BEC からの Bogoliubov 励起、特に複素固有値モードが出現する場合におけるトポロジーに関して研究を行った。フェルミ粒子系と比較して、ボーズ粒子系の Bogoliubov 準粒子系は非エルミート系であるため複素固有値が現れ、これは動的不安定性として認知されている。非エルミート系の特徴として、2つ以上の固有値が合体して複素共役のペアになる点では代数的特異点を伴う対角化不可能な点(例外点)が出現する。この例外点では微分不可能であるためトポロジカル不変量ではベリー接続が定義できない。そこで、本研究では例外点の存在下でトポロジカル不変量を定義する方法を議論した。擬エルミート行列の性質から1次元の Bogoliubov 準粒子系で現れる例外点は複素平面で孤立した点であることを示し、複素平面上に積分経路を導入することにより、例外点を避けてトポロジカル不変量を定義することに成功した。IS と PHS に関係するトポロジカル不変量はベリー相によって定義されるが、複素平面上の積分経路は注目する対称性に依存することに注意する。また、CS による巻きつき数は、例外点の存在に関係なく定義できるが、時間反転対称演算子の構造から常に自明な値を取ることがわかった。バルクエッジ対応を見るために、空間反転対称な2つのトイモデルを数値的に調べ、トポロジカル不変量 \mathbb{Z}_2 である ν_{IS} が非自明であるときにエッジ状態が出現することを確認した。特に図 3.8 (d) に示すようにバルクの固有値が全て複素数でもエッジ状態は出現し、バルクエッジ対応が成り立っていることもわかった。また Wilson loop 法を用いてベリー位相を数値計算し、解析的に得たトポロジカル不変量 ν_{IS} と一致することもわかった。この結果は複素固有値が存在する場合もベリー位相がよく定義されていることを意味する。

空間反転対称性に関係したトポロジカル不変量 \mathbb{Z}_2 について言及する。エルミート系におけるトポロジカル相の分類 [126] によると、空間反転対称性に関係した1次元系のトポロジカル不変量は \mathbb{Z}_2 というより \mathbb{Z} が正確である。トポロジカル不変量は $N_+ = n_+(0) - n_+(\pi)$ で与えられ、 $n_+(k_{\text{IS}})$ は $k = k_{\text{IS}}$ で空間反転対称演算子の固有値が +1 になる占有バンドの数である。その意味で今回のエッジ状態の存在は N_+ のパリティを抽出していることに対応し、トポロジカル不変量が \mathbb{Z}_2 になったと考えられる。つまり、これはトポロジカル不変量がベリー位相であることを意味する。

いくつか残っている問題がある。まず1つ目に、ホールバンドのベリー位相を PHS に関係したトポロジカル不変量として定義したが、特殊なバンド構造の場合に限って \mathbb{Z}_2 になる。系がどの対称性クラスに属するのか、系を特徴付けるトポロジカル不変量は何であるのかを考えないといけない。非エルミートハミルトニアンは行われている [11] が、これはギャップが開いた系にしか適用できない。今回得られた結果を上記の分類に適用するためには、粒子バンドとホールバンドの固有値の分布を複素エネルギー空間で分離する必要がある。図 3.5(c) と図 3.8 (c) のバンド構造は、分離することできないためトポロジカル相の分類に適用できない。しかしながら、運動量に虚部を導入複素平面上での積分経路を考えることで、ギャップフルなバンドとして扱うことができる。そして今回得られた PHS と CS に関係するトポロジカル不変量は常に自明な値を取るというモデル計算の結果は先行研究 [11]

と矛盾しない。この分類によると1次元系の $C\eta_-$ クラスと $CI\eta_{+-}$ クラスで非自明な値をとるトポロジカル不変量は存在しない。ただし先行研究 [11] では空間反転対称性を考慮していない分類であるため、 ν_{IS} の有無は予言できないことに注意する。2つ目は例外点と特徴付けるトポロジカルチャージに関する問題である。例外点に関するトポロジカルチャージについていくつかの文献で調べられている [88, 94, 117]。先行研究 [88] の記法を用いると、今回計算した系で現れる全ての例外点は $\pm 1/2$ の渦度を予言する。さらに、複素平面上で例外点周りのベリー位相は量子化する可能性があり、これらに関しては今後の課題である。また今回は1次元系での研究であったが2次元系への拡張も考えられる。

第4章

ボース・アインシュタイン凝縮体における輸送現象

ボース-アインシュタイン凝縮体における南部-Goldstone(NG)モードがゼロエネルギー極限でポテンシャル障壁を完全透過する。この現象を異常トンネル効果と呼ぶ。本章では、動的に不安定なBECにおけるBogoliubov準粒子のトンネル効果について調べる。動的に不安定な多成分BEC(二成分BECとスピン1BEC)からのスピン波励起のトンネル問題を解く。その結果、スピン波がNGモードであれば、動的に不安定なBECであっても完全透過することがわかった。その完全透過するモードは、動的に不安定なスピン波モードであり、Bogoliubov-de Gennes方程式の純虚数をもつ固有関数である。ただし、実エネルギー軸ではなく虚数エネルギー軸に沿うゼロエネルギー極限で完全透過する。さらに、固有値の虚部が最大となる点で、動的に不安定なモードが完全反射することがわかった。その点において、入射波と反射波が破壊的な干渉を起こし、準粒子波動関数の振幅が強く抑制される。この完全反射は動的に不安定なモードの一般的な性質であり、NGモードとは無関係であることも数値的に確認した。また、時間依存するGross-Pitaevskii方程式を用いてスピン波の実時間ダイナミクスの計算を行い、トンネル効果の観測方法についても議論した。

関連論文

Terumichi Ohashi and Yuki Kawaguchi,
“Perfect Transmission and Perfect Reflection of Bogoliubov Quasiparticles in a Dynamically Unstable Bose-Einstein Condensate”,
Journal of the Physical Society of Japan, **90**, 034501 (2021).

4.1 導入

素励起の概念は、基底状態の性質から非平衡輸送現象まで、量子多体系の基本的な性質を理解する上で重要な役割を果たす。特に自発的対称性の破れを持つ系では、低エネルギーでの系の性質は破れた対称性に関係したギャップレス南部-Goldstone(NG)モードの影響を強く受ける。NGモードの例として、ボース-アインシュタイン凝縮体(BEC)中のフォノンや強磁性体中のマグノンなどがあり、これらはそれぞれU(1)ゲージ対称性の破れとSO(3)スピン回転対称性の破れに伴うゼロエネルギーモードである。

異常トンネル効果はBECの素励起の特徴を強く反映した現象の一つであり、BEC中のBogoliubov準粒子が低エネルギー極限でポテンシャル障壁を完全透過する現象である[16, 127][図4.1]。Schrödinger方程式で記述される自由粒子は低エネルギー極限でポテンシャル障壁に対し、異常トンネル効果は低エネルギー極限で透過率がゼロになるため真逆の振る舞いをする。現在までに異常トンネル効果に関して、スカラーBECやスピン1BECにおいて、超流動カレントがある場合[46, 47, 48]、ジョセフソン電流との関係[49, 50]、有限温度の場合[51]、ドメインウォールや不純物がある場合[52, 53]、2次元粒子数密度差のある場合[54]、Polar相[55]、強磁性相[56]でのトンネル効果など、様々な場合について研究されている。最近では、南部・Goldstone(NG)モードとヒッグスモードの間のファノ共鳴や反束縛状態を介したヒッグスモードの完全透過が研究されている[57, 58]。BECの不安定性は、ランダウ不安定性と動的不安定性の2種類があることが知られている。ランダウ不安定性は負の励起エネルギーを特徴とする熱力学的不安定性であるのに対し、後者は複素固有振動数を特徴とするゼロエネルギー励起が指数関数的成長に対する不安定性である[3, 5, 6, 128]。一方で、近年の非エルミート物理の輸送現象に関する研究結果から異常トンネル効果を考察すると、動的不安定な系、つまり複素固有値モードが出現する領域で非エルミートとの協奏により豊かな物性をもたらすと考えられる。このような背景の下、動的不安定なBECにおけるトンネル効果はどのような物理をもたらすのかという疑問をもち研究するに至った。

本章では、動的不安定なBECの準粒子のトンネル効果について調べた。初期状態のBECが動的不安定な場合、凝縮体からの励起スペクトルを記述するBogoliubov-de Gennes (BdG)方程式は複素固有値を持つ。このような場合においてもトンネル問題を考えることは可能である。具体的には、BdG方程式を与えられた固有値 E で固有関数を解き、得られた固有関数を用いて入射波、反射波、透過波に分け、反射率と透過率を数値的に求める。本研究では、混合状態の2成分(擬スピン-1/2)BEC[第4.2章]とスピン1 polar BEC[第4.3章]の系を考える。これらの系の動的不安定性は実験的に観測されており[6, 129, 130, 131]、スピン依存性のある相互作用パラメータで系が動的安定か不安定になる。2成分BECとスピン1 polar BECにおけるスピン波のBdG方程式は、polar BECの場合で現れる2次ゼーマンエネルギー(q_z)項を除いて同じである。2次ゼーマン q_z 項によりスピン回転対称性を破るため polar BECのスピン波モードはNGモードではないが、2成分BECのスピン波モードはNGモードであるため、この2つのモデルの解析により動的不安定なBECのトンネル効果を包括的に調べることが可能である。さらに、第4.4章で実験で観測可能なトンネル特性の特徴を明らかにするために、時間依存するGross-Pitaevskii方程式を用いて2成分BECの実時間ダイナミクスの数値シミュレーションを行った。数値的シミュレーションではポテンシャル障壁の片側だけに運動量を持つ動的不安定なスピン波の揺らぎを加えてポテンシャルの両側での揺らぎの成長を調べ、実験でどのような現象が観測されるかを議論する。

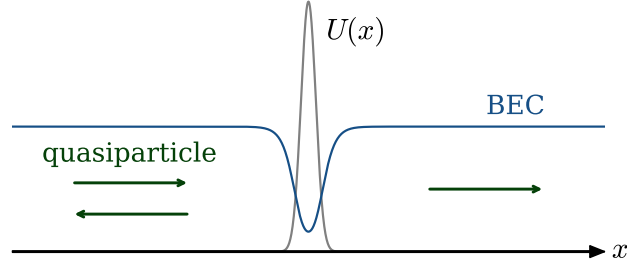


図. 4.1: ポテンシャル障壁 $U(x)$ 下での BEC の Bogoliubov 準粒子のトンネル問題の概念図。入射エネルギー E で左から入射された準粒子が左へ反射、または、右に透過する。自由粒子が低エネルギー極限 $E \rightarrow 0$ で完全反射するのに対し、自発的対称性の破れに伴う NG モードは $E \rightarrow 0$ で完全透過を示す。この現象を異常トンネルと呼ぶ [16, 127]。

4.2 2成分 BEC

4.2.1 モデル

$x = 0$ にポテンシャル障壁のある 2 成分 BEC [図 4.1] を考え、ポテンシャル障壁に対する Bogoliubov 準粒子のトンネル効果について調べる。この系のエネルギー汎関数は以下のように与えられる。

$$\mathcal{E}_{\text{binary}} = \int d\mathbf{x} \sum_m \left[\frac{\hbar^2}{2M} \left| \frac{\partial}{\partial x} \Psi_m \right|^2 + U(x) |\Psi_m|^2 \right] + \int d\mathbf{x} \left[\sum_m \frac{g}{2} |\Psi_m|^4 + g' |\Psi_1|^2 |\Psi_2|^2 \right], \quad (4.1)$$

$\Psi_m (m = 1, 2)$ は凝縮体波動関数、 M は原子質量、 $U(x)$ はポテンシャル障壁、 $g > 0$ と $g' > 0$ は同種間、異種間相互作用の強さを表し、 $m = 1$ と $m = 2$ の同種間相互作用の強さは同じであるとする。凝縮体の 2 成分は $g > g'$ で混合し、 $g < g'$ で相分離する [17, 18]。簡単なため、3 次元系で x のみに依存したポテンシャル障壁を仮定する。ポテンシャル $U(x)$ がゼロに漸近する $x \rightarrow \pm\infty$ 極限で、凝縮体密度は $n(x) = \sum_m |\Psi_m|^2$ は定数 n_0 になる。

エネルギー汎関数 (4.1) を Ψ_m^* で汎関数微分することにより、二成分 BEC の GP 方程式は以下のように得られる。

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x) + g |\Psi_1|^2 + g' |\Psi_2|^2 \right] \Psi_1, \quad (4.2a)$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x) + g |\Psi_2|^2 + g' |\Psi_1|^2 \right] \Psi_2. \quad (4.2b)$$

特に 2 成分が同じ量で完全に重なって混合した状態として

$$\Psi_1(x) = \Psi_2(x) := \Phi(x) / \sqrt{2} \quad (4.3)$$

とおく。また、 $\Phi(x)$ は、

$$\mu \Phi = \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dx^2} + U(x) + \frac{g + g'}{2} |\Phi|^2 \right] \Phi. \quad (4.4)$$

を満たし、 μ は化学ポテンシャルを表す。初期状態は (4.2) 式の定常解で、相互作用が $g > g'$ 、 $g < g'$ に関わらず、(4.2) 式の定常解である。ただし、凝縮体の安定性は $g = g'$ で変化する。つまり、初期状

態は $g > g'$ では基底状態であるため、準粒子の固有値は全て正の実数であるが、 $g < g'$ では系の基底状態ではないため初期状態は動的不安定な状態で、複素固有値をもつ準粒子が現れる。

$x \rightarrow \pm\infty$ で $U(x) \rightarrow 0$ になり $|\Psi|^2 \rightarrow n_0$ (定数) であるため、(4.4) 式から化学ポテンシャルは $\mu = (g + g')n_0/2$ である。以下ではエネルギー、長さ、時間スケールをそれぞれ μ , $\hbar/\sqrt{M\mu}$, μ/\hbar で GP 方程式をスケールする。また、相互作用の強さを表す β ($-1 \leq \beta \leq 1$) を導入する。

$$g = (g + g')\frac{1 + \beta}{2}, \quad g' = (g + g')\frac{1 - \beta}{2} \quad (4.5)$$

$\Psi_{1,2}(x) = \sqrt{n_0}\psi_{1,2}(x)$ と $\Phi(x) = \sqrt{n_0}\phi(x)$ として凝縮体波動関数を書き直し、無次元化した (4.2) 式と (4.4) 式は

$$i\frac{\partial\psi_1}{\partial t} = [\mathcal{L}_0 + (1 + \beta)|\psi_1|^2 + (1 - \beta)|\psi_2|^2] \psi_1, \quad (4.6a)$$

$$i\frac{\partial\psi_2}{\partial t} = [\mathcal{L}_0 + (1 + \beta)|\psi_2|^2 + (1 - \beta)|\psi_1|^2] \psi_2, \quad (4.6b)$$

$$(\mathcal{L}_0 - 1 + |\phi|^2) \phi = 0, \quad (4.7)$$

また運動項とポテンシャル項 \mathcal{L}_0 は

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + U(x). \quad (4.8)$$

である。

低温での凝縮体からの準粒子励起の運動は Bogoliubov 理論により説明される。2 成分 BEC に対する BdG 方程式は

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = e^{-it} \left[\frac{\psi_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{u}e^{-iEt} + \mathbf{v}^*e^{iE^*t} \right] \quad (4.9)$$

を (4.6) 式に代入し、 \mathbf{u} と \mathbf{v} の対して線型化することで得られる [詳細は第 2.4.4 章に記載]。ここで、 $\mathbf{u} = (u_1(x), u_2(x))^T$ と $\mathbf{v} = (v_1(x), v_2(x))^T$ は 2 成分スピノールである。以上より、 \mathbf{u} と \mathbf{v} に対する固有値方程式は以下のように与えられる。

$$\begin{pmatrix} ((\mathcal{L}_0 - 1)\mathbf{1} + H_1 & H_2 \\ -H_2^* & -[(\mathcal{L}_0 - 1)\mathbf{1} + H_1^*] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

$\mathbf{1}$ は 2×2 の単位行列である。また、

$$H_1 = \frac{|\phi|^2}{2} \begin{pmatrix} 3 + \beta & 1 - \beta \\ 1 - \beta & 3 + \beta \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

$$H_2 = \frac{\phi^2}{2} \begin{pmatrix} 1 + \beta & 1 - \beta \\ 1 - \beta & 1 + \beta \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

凝縮体の 2 つの成分が完全に重なっている場合は密度波とスピン波は結合しない。密度波 (phonon) モード $u^d = u_1 + u_2$, $v^d = v_1 + v_2$, スピン波 (magnon) モード $u^s = u_1 - u_2$, $v^s = v_1 - v_2$ を定義すると、

BdG 方程式は (4.10) 式は 2 つの方程式に分離できる。

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_0 - 1 + 2|\phi|^2 & \phi^2 \\ -(\phi^*)^2 & -(\mathcal{L}_0 - 1 + 2|\phi|^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^d \\ v^d \end{pmatrix} = E^d \begin{pmatrix} u^d \\ v^d \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_0 - 1 + (1 + \beta)|\phi|^2 & \beta\phi^2 \\ -\beta(\phi^*)^2 & -[\mathcal{L}_0 - 1 + (1 + \beta)|\phi|^2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^s \\ v^s \end{pmatrix} = E^s \begin{pmatrix} u^s \\ v^s \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

ポテンシャル $U(x) = 0$ の時、これらの Bogoliubov 方程式のスペクトルは低エネルギーでギャップレスな線型な分散になり、対応する NG フォノンと NG マグノンはそれぞれ $U(1)$ ゲージ対称性、 $SO(2)$ スピン回転対称性の自発的対称性の破れに関係する。ポテンシャル $U(x) \neq 0$ の時、NG モードの存在は $u^{d,s} = -(v^{d,s})^* = \phi$ が $E^{d,s} = 0$ での (4.13) 式と (4.14) 式の固有解であることから確認できる。ここで GP 方程式 (4.7) とフォノンモードに対する BdG 方程式 (4.13) はスカラー BEC の場合と同じ方程式であり、スカラー BEC の場合と同く異常トンネル効果を示す。したがって、今回はスピン波 (magnon) モードのトンネル効果について議論する。

4.2.2 一様系での 2 成分 BEC の Bogoliubov スペクトル

ここでは、トンネル問題を解く前に $x \rightarrow \pm\infty$ での準粒子波動関数の漸近解を導出する。 $x \rightarrow \pm\infty$ ではポテンシャルの影響を無視することができ、 $U(x) = 0$ の場合、(4.7) 式の定常解は $\phi = 1$ と置く。 $(u^s, v^s)^T = (ue^{ikx}, ve^{ikx})^T$ と $\phi = 1$ を (4.14) 式に代入すると、 $U(x) = 0$ でのスピン波モードに対する BdG 方程式は以下のように得られる。

$$\begin{pmatrix} \epsilon_k + \beta & \beta \\ -\beta & -(\epsilon_k + \beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = E^s \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

このスピン波モードの固有値は

$$E^s = \sqrt{\epsilon_k(\epsilon_k + 2\beta)}, \quad (4.16)$$

である。また $\epsilon_k := k^2/2$ とおいた。

$\beta < 0$ 、 E^s の時、小さい波数で固有値が純虚数になり、系は動的不安定になる。これは初期状態に相分離するモードが混合しているため、この不安定性が起こる。また、(4.5) 式から $\beta < 0$ の条件は、 $g < g'$ に等しいことがわかる。本研究の目的は、動的不安定なモードがポテンシャル障壁に対してどのようにトンネル効果を示すのかを明らかにすることである。 $\beta \geq 0$ の場合、系が動的安定でほとんど同じような状況でのトンネル効果について調べられている [55, 132]。特にスピン 1BEC の polar 状態でのスピン波モードのトンネル問題が議論され、長波長極限で完全透過することが解明されている [55, 132]。また、 $U(x) = 0$ でのフォノンモードに対する BdG 方程式 (4.13) の固有値 $E^d = \sqrt{\epsilon_k(\epsilon_k + 2)}$ は任意の波数 $\forall k$ で正の実数であることを注意する。

以上から、エネルギー E をもつ準粒子を $x = -\infty$ から入射し、 $x = 0$ にあるポテンシャル障壁に対するトンネル効果について調べる。入射エネルギー E の関数として、(4.15) 式の規格化された固有状態を計算する。ただし、BdG 方程式は非エルミート行列であるため規格化に注意する必要がある。(4.15) 式の対称性から、固有ベクトルの規格化定数が実数の場合は $|u|^2 - |v|^2 = \pm 1$ で、純虚数の場合は $u^2 - v^2 = \pm 1$ である。このよに固有値が実数か複素数かによって規格化定数が異なることを以下で説明する。

BdG 方程式の規格化条件

BdG 方程式が非エルミートであるため、正規双直交基底を用いて規格化定数を再考する必要がある。正規双直交基底と BdG 方程式の対称性に関しては第2章に記載しているためここでは簡単に説明する。

まず、ボース粒子系の BdG 方程式の行列を H とし、行列 H に対する正規双直交基底は以下のように定義される。

$$H |w_n^R\rangle = E_n |w_n^R\rangle, \quad (4.17a)$$

$$H^\dagger |w_n^L\rangle = E_n^* |w_n^L\rangle, \quad (4.17b)$$

$|w_n^R\rangle, \langle w_n^L|$ は固有値 E_n をもつ右固有状態と左固有状態を表す。この系の直交関係は以下のように与えられる:

$$\langle w_m^L | w_n^R \rangle = \delta_{mn}. \quad (4.18)$$

ボース粒子系の BdG 方程式の行列を H とすると、擬エルミート性と particle-hole 対称性から次式を満たす:

$$\tau_3 H \tau_3^{-1} = H^\dagger, \quad (4.19)$$

$$C H C^{-1} = -H, \quad (4.20)$$

$C = \tau_1 K$ は particle-hole 対称性操作演算子、 K は複素共役演算子、 τ_i ($i = 0, 1, 2, 3$) は南部空間の自由度を表すパウリ行列である [対称性の詳細に関しては第 2.4.1 章に記載]。 (4.17b) 式と (4.19) 式から固有値が実数の場合、

$$|w_n^L\rangle = \pm \tau_3 |w_n^R\rangle \quad E_n \in \mathbb{R} \quad (4.21)$$

+ が正ノルム、- が負ノルムモードを表す。 (4.17a) 式と (4.20) 式から、

$$H C |w_n^R\rangle = -C H |w_n^R\rangle = -E_n^* C |w_n^R\rangle. \quad (4.22)$$

固有値 E_n が実数の場合、 $|w_n^R\rangle$ と $C |w_n^R\rangle$ は particle-hole 対称な対で、

$$\langle w_n^R | C \tau_3 C |w_n^R\rangle = -\langle w_n^R | \tau_3 |w_n^R\rangle, \quad (4.23)$$

を満たす。したがって、実固有値のモードの規格化定数は

$$\langle w_n^R | \tau_z |w_n^R\rangle = +1 \text{ or } -1. \quad (4.24)$$

である。純虚数 $\text{Im } E_n \neq 0$ の場合、 $E_{n'} = E_n^*$ の状態 n' が存在し、擬エルミート性 (4.19) から $|w_n^R\rangle \propto \tau_3 |w_{n'}^L\rangle$ である。したがって、規格化条件は $|\langle w_{n'}^R | \tau_z |w_n^R\rangle| = 1$ で与えられる。さらに行列 H の要素が全て実数の場合、 $|w_n^R\rangle = (|w_{n'}^R\rangle)^*$ より、最終的に固有値が純虚数かつ行列要素が全て実数の場合の規格化条件は次式で与えられる:

$$\left| \langle (w_n^R) |^* \tau_z |w_n^R\rangle \right| = 1. \quad (4.25)$$

本論文で議論する BdG 方程式は、固有値が実数 ($\in \mathbb{R}$) と純虚数 ($\in i\mathbb{R}$) の場合である。BdG 方程式を (4.15) 式の形式で書くと、規格化条件は次のようになる。

$$|u|^2 - |v|^2 = \pm 1 \quad (E \in \mathbb{R}), \quad (4.26a)$$

$$u^2 - v^2 = \pm 1 \quad (E \in i\mathbb{R}), \quad (4.26b)$$

(4.14) 式と (4.53) 式を実空間で書くと、

$$\int_{-\infty}^{\infty} [|u(x)|^2 - |v(x)|^2] dx \quad (4.27)$$

である。実固有値の場合は規格化定数とみなすことができるが、複素固有値の場合は消える。

正の実固有値

正の実固有値の場合、2つの伝搬モードと2つの減衰もしくは発散モードが存在し、それぞれのモードは以下のように与えられる [図 4.2(a) と (c)]。

$$\begin{pmatrix} a_r \\ -b_r \end{pmatrix} e^{\pm ik_1 x}, \begin{pmatrix} b_r \\ a_r \end{pmatrix} e^{\mp q_2 x}, \quad (4.28)$$

$$a_r = \operatorname{sgn}(\beta) \sqrt{\frac{\sqrt{\beta^2 + E^2}}{2E} + \frac{1}{2}}, \quad (4.29a)$$

$$b_r = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta^2 + E^2}}{2E} - \frac{1}{2}}, \quad (4.29b)$$

$$k_1 = \sqrt{2} \sqrt{\sqrt{\beta^2 + E^2} - \beta}, \quad (4.29c)$$

$$q_2 = \sqrt{2} \sqrt{\sqrt{\beta^2 + E^2} + \beta}, \quad (4.29d)$$

a_r と b_r は $\beta: -1 \leq \beta \leq 1$ で固有解であり、 $|a_r|^2 - |b_r|^2 = 1$ を満たす。

純虚数固有値

固有値 E を $E = i\Delta$ ($\Delta \in \mathbb{R}$, $|\Delta| < |\beta|$) として、 $\beta < 0$ の時、4つの伝搬モードが存在する [図 4.2(d)]。

$$\begin{pmatrix} b_c \\ a_c \end{pmatrix} e^{\pm ik_3 x}, \begin{pmatrix} a_c \\ -b_c \end{pmatrix} e^{\pm ik_4 x}, \quad (4.30)$$

$\beta \geq 0$ の時、4つの減衰もしくは発散モードが存在する [図 4.2(b)]。

$$\begin{pmatrix} b_c \\ a_c \end{pmatrix} e^{\mp q_3 x}, \begin{pmatrix} a_c \\ -b_c \end{pmatrix} e^{\mp q_4 x}, \quad (4.31)$$

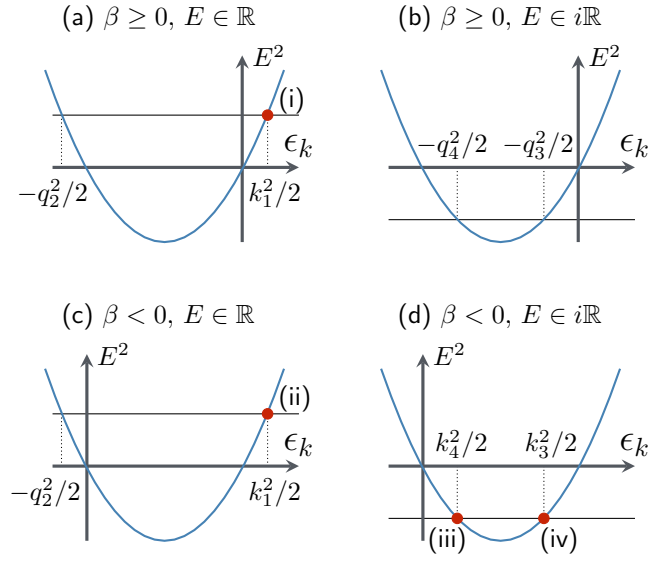


図. 4.2: 2成分 BEC のスピン波のスペクトル [(4.16) 式] を表す。(a),(b) は $\beta \geq 0$ に対して $\epsilon_k = k^2/2$ の関数として E^2 を表し、(c),(d) は $\beta < 0$ の場合を表す。 $E^2 > 0$ ($E^2 < 0$) は実固有値 (純虚数固有値) を意味し、 E の関数として k に関して解く。 $\epsilon_k > 0$ ($\epsilon_k < 0$) をもつ解は伝搬 (局在) モードである。(i)–(iv) で示した赤い点は (i)–(iv) の (4.36) 式–(4.38) 式で与えられる入射波に対応する。

$$a_c = \text{sgn}(\beta) \frac{e^{-i\theta/2}}{\sqrt{-2i \sin \theta}}, \quad b_c = \frac{e^{+i\theta/2}}{\sqrt{-2i \sin \theta}} \quad (4.32)$$

偏角 θ は $\theta \equiv \sin^{-1}(\Delta/|\beta|)$ を満たす。伝搬もしくは減衰の波数は

$$k_3 = iq_3 = \sqrt{2} \sqrt{+\sqrt{\beta^2 - \Delta^2} - \beta}, \quad (4.33)$$

$$k_4 = iq_4 = \sqrt{2} \sqrt{-\sqrt{\beta^2 - \Delta^2} - \beta}. \quad (4.34)$$

である。 a_c と b_c は $\beta \geq 0$ で固有解であり、 $a_c^2 - b_c^2 = \pm 1$ を満たす。

4.2.3 2成分 BEC におけるスピン波モードのトンネル効果

(4.14) 式で与えられる BdG 方程式と解き、入射エネルギー E をもつ準粒子の反射率と透過率を計算する。ポテンシャル障壁を $U(x)$ として、

$$U(x) = U_0 e^{-x^2/(2\sigma^2)}. \quad (4.35)$$

ガウス関数型のポテンシャルを用い、 $x \rightarrow \pm\infty$ での波動関数の漸近解を与えて有限要素法で BdG 方程式を数値的に解く。 $x = 0$ での境界条件が4つ存在することから、4つの変数を求める。

$\beta \geq 0$ の場合、 $x \rightarrow \infty$ から入射した準粒子 (e^{ik_1x}) は、左へ反射 (e^{ik_1x}) もしくは右へ透過 (e^{ik_1x})、ポテンシャル障壁近傍で局在モードが現れる ($e^{\pm q_2x}$)。 $x \rightarrow \pm\infty$ での波動関数の漸近解は以下のよう

(i) 入射波 $k_{\text{in}} = k_1$ で $\beta \geq 0, E \in \mathbb{R}$ の場合:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} u_{-\infty} \\ v_{-\infty} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_r \\ -b_r \end{pmatrix} (e^{ik_1x} + R e^{-ik_1x}) + A \begin{pmatrix} b_r \\ a_r \end{pmatrix} e^{q_2x}, \\ \begin{pmatrix} u_{+\infty} \\ v_{+\infty} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} a_r \\ -b_r \end{pmatrix} e^{ik_1x} + B \begin{pmatrix} b_r \\ a_r \end{pmatrix} e^{-q_2x}. \end{cases} \quad (4.36)$$

ここで、 R と T は反射と透過係数、 A と B は局在モードの係数を表す。カレントの保存則から $|R|^2 + |T|^2 = 1$ を満たす。

$\beta < 0$ の場合、3つの場合がある: (ii) 入射波数 $k_{\text{in}} = k_1$ で実固有値 $E \in \mathbb{R}$, (iii) 入射波数 $k_{\text{in}} = -k_4$ で純虚数 $E = i\Delta \in i\mathbb{R}$ ($\Delta > 0$), (iv) 入射波数 $k_{\text{in}} = k_3$ で純虚数 $E = i\Delta \in i\mathbb{R}$. $\Delta < 0$ の場合は $\Delta > 0$ での波動関数の複素共役で得られる。また入射波に対応する点は図 4.2 に示す。純虚数固有値の準粒子の群速度はゼロであるが、因果律から $-d|\Delta|/dk$ を群速度と仮定し、入射、反射、透過の運動量を選ぶ。因果関係の起源は、(4.55) 式のようにスペクトルが $k = 0$ のときにギャップがある時に明確になる。この問題についてはスピン 1 BEC の第 4.3.3 章で再検討する。したがって、 $x \rightarrow \pm\infty$ での波動関数の漸近解はそれぞれ以下のように与えられる:

(ii) 入射波数 $k_{\text{in}} = k_1$ で $\beta < 0, E \in \mathbb{R}$ の場合:

漸近解は (4.36) 式の場合と同じ

(iii) 入射波数 $k_{\text{in}} = -k_4$ で $\beta < 0, E \in i\mathbb{R}$ の場合:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} u_{-\infty} \\ v_{-\infty} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_c \\ -b_c \end{pmatrix} (e^{-ik_4x} + R e^{ik_4x}) + A \begin{pmatrix} b_c \\ a_c \end{pmatrix} e^{-ik_3x}, \\ \begin{pmatrix} u_{+\infty} \\ v_{+\infty} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} a_c \\ -b_c \end{pmatrix} e^{-ik_4x} + B \begin{pmatrix} b_c \\ a_c \end{pmatrix} e^{ik_3x}. \end{cases} \quad (4.37)$$

(iv) 入射波数 $k_{\text{in}} = k_3$ で $\beta < 0, E \in i\mathbb{R}$ の場合:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} u_{-\infty} \\ v_{-\infty} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_c \\ a_c \end{pmatrix} (e^{ik_3x} + R e^{-ik_3x}) + A \begin{pmatrix} a_c \\ -b_c \end{pmatrix} e^{ik_4x}, \\ \begin{pmatrix} u_{+\infty} \\ v_{+\infty} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} b_c \\ a_c \end{pmatrix} e^{ik_3x} + B \begin{pmatrix} a_c \\ -b_c \end{pmatrix} e^{-ik_4x}. \end{cases} \quad (4.38)$$

ここでカレント保存則からスケールした係数を導入する。

$$\tilde{A} = \sqrt{-\frac{k_{\text{sc}}}{k_{\text{in}}}} A, \quad \tilde{B} = \sqrt{-\frac{k_{\text{sc}}}{k_{\text{in}}}} B, \quad (4.39)$$

k_{sc} は局在モードの係数 A の運動量の実部を表す。例えば、(ii), (iii), (iv) の場合はそれぞれ $k_{\text{sc}} = 0, -k_3, k_4$ となる。カレント保存則から (i)–(iv) の全ての場合で以下のように書かれる。

$$|T|^2 + |R|^2 + |\tilde{A}|^2 + |\tilde{B}|^2 = 1 \quad (4.40)$$

(i)–(iv)の場合でのトンネル係数の数値計算結果を図4.3に、準粒子波動関数を図4.4に示す。図4.3(a)は $\beta = -0.8, -0.4, 0, +0.8$ で実数のエネルギー $E (> 0)$ の関数として透過確率を示し、これは(4.36) [(i)と(ii)]の漸近解を与えることで得られる。図4.3(a)からわかるように、長波数極限の $\beta \geq 0$ で完全透過が起こる。この結果は先行研究[55, 132]で示されている。一方で、 $\beta < 0$ の場合、透過確率は1より小さくなる。この違いは以下のように理解できる。完全透過は準粒子波動関数が凝縮体波動関数と一致する場合($u(x) = -v^*(x) = \phi(x)$)に完全透過が起こることが知られている。今の場合、 $\beta \geq 0$ の場合は入射エネルギー $E \rightarrow 0$ で入射運動量 k_1 はゼロになり、 $\beta < 0$ の場合では入射運動量 k_1 は有限になる。したがって、 $E \rightarrow 0$ で $\beta \geq 0$ では $u(x) = -v^*(x) = \phi(x)$ を満たし、 $\beta < 0$ では満たさない。図4.4(a)と(b)において、 $\beta = 0.2, -0.2$ での $|u|^2 - |v|^2$ を示している。 $\int (|u|^2 - |v|^2) dx$ は実入射エネルギー E での準粒子波動関数のノルムを与えるが、 E が複素数の場合はこの量はゼロになる。そのため図4.4(c)と(d)では $\beta < 0$ では $|u|^2 + |v|^2$ を示す[詳細は第4.2.2章に記載]。 $\beta = 0.2$ で $E \rightarrow 0$ の極限で、 $|u|^2 - |v|^2$ は $|\phi|^2$ と近くなっているが、一方で $\beta = -0.2$ で $E \rightarrow 0$ の極限では、 $|u|^2 - |v|^2$ は $|\phi|^2$ の x 依存性と完全に異なっている。この結果は臨界速度で動くスカラー BEC でのフォノンの u, v^* はポテンシャル障壁近傍で局所的な密度揺らぎにより凝縮体 $\phi(x)$ と異なるようになり、完全透過は起こらないという先行研究[46, 47, 48]と同じ理由だと考えられる。

虚軸に沿って E がゼロになるとき、 k_4 がゼロになり準粒子波動関数 $u(x), v(x)$ は $u(x) = -v^*(x) = \phi(x)$ を満たすため、この場合は $E \rightarrow 0$ で完全透過が起こる。図4.3(b)は $\beta = -0.2$ で $|T|^2, |R|^2, |\tilde{A}|^2, |\tilde{B}|^2$ のエネルギー依存性を示す。 $\epsilon_{k_{in}}$ は図の左端でゼロになり、右端にいくにしたがい $\epsilon_{k_{in}}$ は大きくなるという横軸とした[図4.3(b)]。入射エネルギー E が純虚数である範囲を灰色で表し、 $\text{Im}E = 0.2$ は入射波数と反射波数が一致する値である。また、(4.40)式で与えられるカレント保存則を数値的に満たすことを確かめた。図4.3(b)において、透過確率が図の左端で $\text{Im}E \rightarrow 0$ になり、 $|T|^2 \rightarrow 1$ になり、動的に不安定なモードでも完全透過が起きることを示す。図4.4(c)で示される $|u|^2 + |v|^2$ は $\text{Im}E \rightarrow 0$ で $|\phi(x)|^2$ に比例することがわかる。またその極限で準粒子波動関数 $u(x), v(x)$ は $u(x) = -v^*(x) = \phi(x)$ を満たす。一方で、 E が純虚数から実数へ変わる点で、 $E \rightarrow 0$ の極限で入射運動量 k_3 は有限値であり、 $u(x) = -v^*(x) = \phi(x)$ を満たすその結果、完全透過は起きないと結論付けることができる[図4.2(c)と(d)の $\epsilon_k > 0$ と $E = 0$ の点が図4.3(b)で灰色と白色の領域の境界に対応する]。

図4.3(b)に示すように、 $E = i|\beta|$ で $|\tilde{A}|^2 = 1$ になることがわかった。 $E \in i\mathbb{R}$ で $d\text{Im}E/dk = 0$ の点において、 $|\text{Im}E|$ は最大値となる。 E が純虚数のとき、(4.37)式と(4.38)式での A は入射波と異なる運動量をもつ反射波を表す。したがって、 $|\tilde{A}|^2 = 1$ は完全反射を起こしていることを示している。完全反射の起源は、 $k_3 = k_4$ で、(4.30)式で与えられる線形独立な解の数が減り、(4.37)式と(4.38)式の漸近形を満たす解が消失するからである。したがって、入射波と反射波(A 項)は破壊的な干渉を起こす。この破壊的な干渉は図4.4(d)で示される準粒子波動関数から確認できる。また(4.37)式の漸近形で $\beta = -0.2$ として計算した $|u|^2 + |v|^2$ を示している。この波動関数は $x < 0$ 領域でも $E \rightarrow i|\beta|$ としてゼロになる。入射波の振幅を1に固定しているため、 $|u|^2 + |v|^2$ の減少は破壊的な干渉を意味する。また、強磁性 BEC のスピン波モード[132, 55]の長波長限界においても完全反射が起こることと予想される。

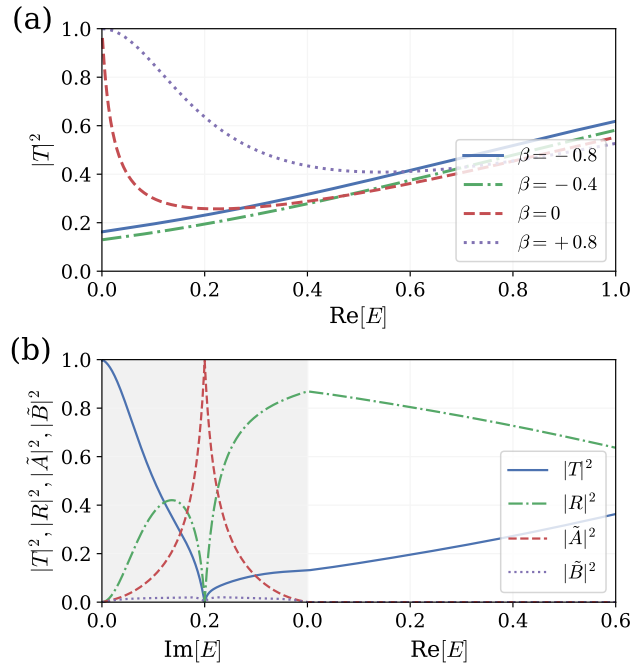


図. 4.3: 2成分 BEC におけるスピン波モードのトンネル特性を示す。(a) (4.36) 式の漸近形を与え、数値的に得た透過率 $|T|^2$ の実エネルギー E 依存性 [(i) と (ii) の場合]。低エネルギー極限 $E \rightarrow 0$ で完全透過が起こる。つまり、 $\beta \geq 0$ の場合 $E \rightarrow 0$ で $|T|^2 \rightarrow 1$ になるが、 $\beta < 0$ の場合 $E \rightarrow 0$ で $|T|^2$ の値は 1 よりも小さくなる。(b) 動的不安定性が存在する $\beta = -0.2$ 場合でのトンネル係数 $|T|^2$, $|R|^2$, $|\tilde{A}|^2$, $|\tilde{B}|^2$ のエネルギー E 依存性。横軸は、左端で $\epsilon_{\text{kin}} = 0$ となり右に行くにつれて ϵ_{kin} が増加する。これに対応して、横軸に沿ってエネルギー E の値は 0 から始まり、 $\text{Im}E$ が最初に増加し [(iii) の場合]、最大値 0.2 となり 0 まで減少し [(iv) の場合]、その後エネルギー E が実数に変化する [(ii) の場合]。純虚数エネルギー E が発生する領域は灰色で示す。左端 $E = 0$ で完全透過 ($|T|^2 = 1$) が起こり、完全反射 ($|\tilde{A}|^2 = 1$) が $E = 0.2i$ で起こることを示す。また、両パネルともに $U_0 = 2, \sigma = 0.5$ でのポテンシャル障壁のパラメタを用いた。ただし、完全透過と完全反射は U_0 と σ の値に依存しないことも数値的に確かめた。

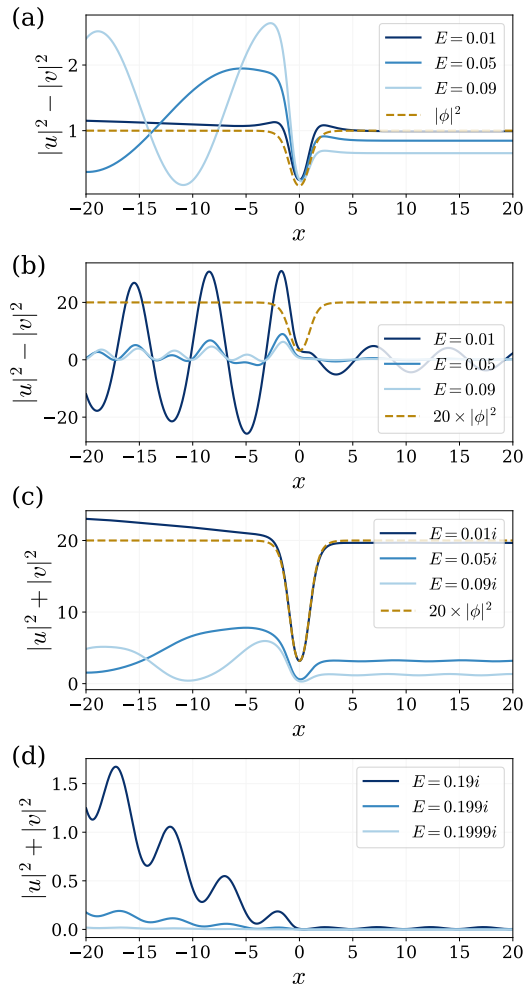


図. 4.4: 2成分 BEC におけるスピン波モードの準粒子波動関数を表す。実固有値モード (a),(b) の場合の $|u|^2 - |v|^2$ と、純虚数固有値モード (c),(d) の場合の $|u|^2 + |v|^2$ を示す。図 (a) と (b) は、(4.36) 式の漸近形を用いて得られた $\beta = 0.2, -0.2$ におけるゼロエネルギー極限の数値計算結果である [(i) と (ii) の場合]。入射エネルギーが $E \rightarrow 0$ になるにつれ、 $|u|^2 - |v|^2$ は (a) の $|\phi(x)|^2$ に近づくが、 $|u|^2 - |v|^2$ の x の依存性は (b) の $|\phi(x)|^2$ とは明らかに異なる。(c) と (d) は、 $\beta = -0.2$ として (4.37) 式の漸近形を用いて、それぞれ $E \rightarrow 0$ と $E \rightarrow i|\beta|$ 極限で計算した結果を表す [(iii) の場合]。(c) において、入射エネルギー $E \rightarrow 0$ につれて、 $|u|^2 + |v|^2$ は $|\phi(x)|^2$ に比例する。これは完全透過の条件と矛盾しない。(d) では、入射エネルギー E が $i|\beta|$ に近づくにつれて準粒子波動関数が小さくなる。これは入射波と反射波の破壊的な干渉により準粒子波動関数が強く抑制されていることを示す。また、全ての図に關して、 $U_0 = 2, \sigma = 0.5$ でのポテンシャル障壁を用いて計算した。

4.3 スピン 1 ポーラー BEC

4.3.1 モデル

本節ではスピン 1 BEC のポーラー相におけるトンネル問題を考える。この系のスピン波モードの BdG 方程式は、2 次ゼーマン効果 q_z 項を除いて、前節の 2 成分 BEC の場合と同じである。二次ゼーマン効果はスピン回転対称性を破るため、スピン波モードのスペクトルは $k = 0$ で有限の値を持ち、 $k = 0$ の固有値の値は q_z で実数か純虚数になる。そこで、トンネル効果の q_z 依存性に焦点を当て議論する。以下では前節で用いた変数を再定義し、結果として得られる BdG 方程式は q_z 項を除いて、前節と同じ形式になるようにする。

スピン 1 BEC のエネルギー汎関数は以下のように与えられる。

$$\mathcal{E}_{\text{spin-1}} = \int d\mathbf{x} \sum_m \left\{ \frac{\hbar^2}{2M} \left| \frac{\partial \Psi_m}{\partial x} \right|^2 + [U(x) + q_z m^2] |\Psi_m|^2 \right\} + \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} [c_0 n^2 + c_1 |\mathbf{F}|^2], \quad (4.41)$$

ここで、 Ψ_m は磁気副準位 $m = 1, 0, -1$ の凝縮波動関数、 M は原子の質量、 $U(x)$ はポテンシャル障壁、および

$$n(x) = \sum_m |\psi_m(x)|^2, \quad (4.42a)$$

$$\mathbf{F}(x) = \sum_{mm'} \Psi_m^*(x) \mathbf{S}_{mm'} \Psi_{m'}(x) \quad (4.42b)$$

$n(x)$ は凝縮体密度、 $\mathbf{F}(x)$ は $\mathbf{F}(x) = (F_x(x), F_y(x), F_z(x))$ で定義されるスピン密度ベクトルであり、 $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$ はスピン 1 のスピン自由度を表すパウリ行列である。相互作用係数 c_0, c_1 は以下のように与えられる。

$$c_0 = 4\pi\hbar^2 \frac{2a_2 + a_0}{3M} \quad (4.43a)$$

$$c_1 = 4\pi\hbar^2 \frac{a_2 - a_0}{3M} \quad (4.43b)$$

$a_{\mathcal{F}}$ は全スピン $\mathcal{F} = 0, 2$ チャンネルの s 波散乱長である。この系の基底状態の相は c_1, q_z の値で決まり、相図は先行研究 [133] などに記載されている。以下では、 $m = 0$ に凝縮した状態 (polar BEC) を考える。polar BEC は、 $q_z > \max(0, -2c_1 n)$ のとき系の基底状態であり、 (c_1, q_z) がこの領域から外れると系は動的不安定になる。

GP 方程式と BdG 方程式は前節と同様に線形安定性解析で求める。polar BEC の定常解

$$\begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_0 \\ \Psi_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

は以下の GP 方程式に従う。

$$\mu\Phi = \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dx^2} + U(x) + c_0 |\Phi|^2 \right] \Phi, \quad (4.45)$$

μ は化学ポテンシャルを表し、 $x \rightarrow \pm\infty$ で $U(x) \rightarrow 0$ と $|\Phi|^2 \rightarrow n_0$ (定数) となるため、一様な領域では $\mu = c_0 n_0$ になる。エネルギー、長さ、時間を μ , $\hbar/\sqrt{M\mu}$, μ/\hbar でリスケールし、無次元化する。凝縮体波動関数を $\Phi(x) = \sqrt{n_0}\phi(x)$ とし、(4.45) 式を以下のように書き換えることができる。

$$(\mathcal{L}_0 - 1 + |\phi|^2)\phi = 0, \quad (4.46)$$

\mathcal{L}_0 は (4.8) 式で定義され、運動項とポテンシャル項からなり定常解である (4.46) 式と (4.7) 式は同じであることがわかる。

以下で、新しく相互作用パラメータ β を導入する:

$$\beta := \frac{c_1}{c_0}. \quad (4.47)$$

凝縮体波動関数を $\Psi_m(x) = \sqrt{n_0}\psi_m(x)$ とし、無次元化した時間依存する GP 方程式は

$$i\frac{\partial\psi_{\pm 1}}{\partial t} = [\mathcal{L}_0 + 1 \pm \beta f_z + q_z]\psi_{\pm 1} + \frac{\beta}{\sqrt{2}}f_{\mp}\psi_0, \quad (4.48a)$$

$$i\frac{\partial\psi_0}{\partial t} = [\mathcal{L}_0 + 1]\psi_0 + \frac{\beta}{\sqrt{2}}(f_+\psi_{+1} + f_-\psi_{-1}), \quad (4.48b)$$

と書き直すことができる。また $f_+ = f_-^* = \sqrt{2}(\psi_1^*\psi_0 + \psi_0^*\psi_{-1})$ と $f_z = |\psi_1|^2 - |\psi_{-1}|^2$ である。凝縮体と微小揺らぎからなる

$$\begin{pmatrix} \psi_{+1} \\ \psi_0 \\ \psi_{-1} \end{pmatrix} = e^{-it} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \phi \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{u}e^{-iEt} + \mathbf{v}^*e^{+iE^*t} \right] \quad (4.49)$$

を (4.48) 式に代入し、 $\mathbf{u} = (u_{+1}, u_0, u_{-1})^T$ と $\mathbf{v} = (v_{+1}, v_0, v_{-1})^T$ の3成分スピノルからなる \mathbf{u} と \mathbf{v} に関して線形化を行い、polar BEC の BdG 方程式を導出する:

$$\begin{pmatrix} H_0 + H_1 & H_2 \\ -H_2^* & -[H_0 + H_1^*] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

また H_0, H_1, H_2 は

$$H_0 = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_0 - 1 + q_z & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_0 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{L}_0 - 1 + q_z \end{pmatrix}, \quad (4.51a)$$

$$H_1 = |\phi|^2 \begin{pmatrix} 1 + \beta & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \beta \end{pmatrix}, \quad (4.51b)$$

$$H_2 = \phi^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.51c)$$

である。6×6 行列の固有値方程式は3つの2×2の固有値方程式に分けることができる。つまり、密度波(フォノン)モード $u^d = u_0, v^d = v_0$ とスピン波(マグノン)モード $u_{\pm}^s = u_{\pm 1}, v_{\pm}^s = v_{\mp 1}$ を定義す

ると、BdG 方程式は式 (4.50) は以下のように書くことができる。

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_0 - 1 + 2|\phi|^2 & \phi^2 \\ -(\phi^*)^2 & -(\mathcal{L}_0 - 1 + 2|\phi|^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^d \\ v^d \end{pmatrix} = E^d \begin{pmatrix} u^d \\ v^d \end{pmatrix}, \quad (4.52)$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_0 - 1 + q_z + (1 + \beta)|\phi|^2 & \beta\phi^2 \\ -\beta(\phi^*)^2 & -(\mathcal{L}_0 - 1 + q_z + (1 + \beta)|\phi|^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\pm}^s \\ v_{\pm}^s \end{pmatrix} = E^s \begin{pmatrix} u_{\pm}^s \\ v_{\pm}^s \end{pmatrix}. \quad (4.53)$$

(4.52) 式で与えられる方程式はゼロエネルギー解 $u^d = -(v^d)^* = \phi$ を持ち、密度波 (phonon) は自発的 U(1) ゲージ対称性の破れに関する NG モードである。一方で、2 次ゼーマン効果により SO(3) スピン回転対称性が破れるため、 $q_z \neq 0$ ではスピン波モード (magnon) は NG モードではないことに注意する。 $q_z = 0, \beta > 0$ の場合に BdG 方程式 (4.53) を用いてトンネル効果を調べた先行研究があり、低エネルギー極限で完全透過が起こることが示されている [55, 132]。

q_z は有効的に化学ポテンシャルを 1 から $1 - q_z$ にシフトする役割をし、一様系では $k = 0$ でエネルギーギャップを開ける。これはボース凝縮が準粒子と異なる内部状態で起こるため、このようなことが可能である。 $q_z = 0$ での (4.53) 式は (4.15) 式と同じになる。

4.3.2 一様系でのスピン 1 BEC の Bogoliubov スペクトル

まずここでは $x \rightarrow \pm\infty$ での漸近解を得るために $U(x) = 0$ での BdG 方程式を解析的に解き、伝搬モードと減衰、発散モードを得る。 $(u^s, v^s)^T = (ue^{ikx}, ve^{ikx})^T$ と $\phi = 1$ を (4.53) 式に代入し、スピン波モードの BdG 方程式を得る。

$$\begin{pmatrix} \epsilon_k + q_z + \beta & \beta \\ -\beta & -(\epsilon_k + q_z + \beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = E^s \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (4.54)$$

この固有値方程式の固有値は

$$E^s = \sqrt{(\epsilon_k + q_z)(\epsilon_k + q_z + 2\beta)}, \quad (4.55)$$

である。 $q_z < \max(0, -2\beta)$ の場合、 E^s は波数 k のある領域において純虚数になり、系は動的に不安定になる。また動的に安定な条件である $q_z > \max(0, -2\beta)$ は polar 状態が基底状態である領域と一致する。

正の実固有値状態

正の実固有値に対し、4 つの線形独立の解が以下のように与えられる。

$$\begin{pmatrix} a_r \\ -b_r \end{pmatrix} e^{\pm ik_1 x} \text{ and } \begin{pmatrix} b_r \\ a_r \end{pmatrix} e^{\mp ik_2 x}, \quad (4.56)$$

a_r と b_r は (4.29a) 式と (4.29b) 式で定義され、 $k_{1,2}$ は

$$k_1 = \sqrt{2} \sqrt{+\sqrt{\beta^2 + E^2} - (\beta + q_z)}, \quad (4.57)$$

$$k_2 = \sqrt{2} \sqrt{-\sqrt{\beta^2 + E^2} - (\beta + q_z)}, \quad (4.58)$$

であり、(4.57) 式と (4.58) 式の右辺は実数か純虚数になりうる。 $k_{1,2}$ が純虚数の場合、 $k_{1,2} = iq_{1,2}$ と書き直し、 $q_{1,2} (> 0)$ を実数として扱う。(4.56) 式での対応する解は両方とも伝搬モード ($e^{\pm ik_{1,2}x}$) と、減衰もしくは発散モード ($e^{\mp q_{1,2}x}$) として表される。

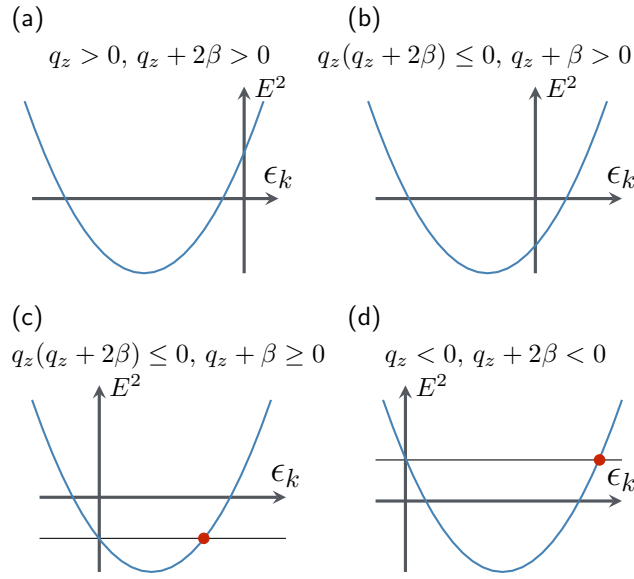


図. 4.5: polar BEC のスピン波モードのスペクトル [(4.55) 式] を表す。 E^2 を ϵ_k の関数として (a) $q_z > 0, q_z + 2\beta > 0$, (b) $q_z(q_z + 2\beta) \leq 0, q_z + \beta > 0$, (c) $q_z(q_z + 2\beta) \leq 0, q_z + \beta \geq 0$, (d) $q_z < 0, q_z + 2\beta < 0$. $E^2 > 0$ ($E^2 < 0$) は実数か純虚数固有値 E であることを注意する。(c) と (d) に書かれている赤点は固有値 E が $E = \sqrt{q_z(q_z + 2\beta)}$ であることを示し、透過確率が共鳴的に大きくなる点に対応する。

純虚数固有値状態

固有値を $E = i\Delta$, $\Delta \in \mathbb{R}$ として、 $|\Delta| < |\beta|$ を満たすように書き直すと、4つの解は以下のように入えられる:

$$\begin{pmatrix} b_c \\ a_c \end{pmatrix} e^{\pm ik_3 x}, \quad \begin{pmatrix} a_c \\ -b_c \end{pmatrix} e^{\pm ik_4 x}, \quad (4.59)$$

a_c と b_c は (4.32) 式で定義され、波数 $k_{3,4}$ は

$$k_3 = \sqrt{2} \sqrt{+\sqrt{\beta^2 - \Delta^2} - (\beta + q_z)}, \quad (4.60)$$

$$k_4 = \sqrt{2} \sqrt{-\sqrt{\beta^2 - \Delta^2} - (\beta + q_z)}. \quad (4.61)$$

である。(4.60) 式と (4.61) 式の右辺は実数か純虚数になりうる。 $k_{3,4}$ が純虚数の場合、 $k_{3,4} = iq_{3,4} (> 0)$ と書き直し、実数として使う。(4.56) 式での対応する解は伝搬モード ($e^{\pm ik_{3,4} x}$) と減衰もしくは減衰モード ($e^{\mp q_{3,4} x}$) として表される。

4.3.3 スピン 1polar BEC におけるスピン波モードのトンネル効果

ここでは polar BEC におけるスピン波モードのトンネル効果を調べる。前節と同様、入射波のエネルギー E 、入射運動量 k_{in} に対して、 $x \rightarrow \pm\infty$ での準粒子の波動関数の漸近形を作り、有限要素法を用いて BdG 方程式 (4.53) を数値的に解く。2次ゼーマンがある場合、エネルギー分散は図 4.5 に示さ

れるように4つの場合に分類分けされる: (a) $q_z > 0, q_z + 2\beta > 0$, (b) $q_z(q_z + 2\beta) \leq 0, q_z + \beta > 0$, (c) $q_z(q_z + 2\beta) \leq 0, q_z + \beta \geq 0$, (d) $q_z < 0, q_z + 2\beta < 0$. 第4.2.3節で記載した純虚数固有値モードの因果関係について、図4.5(d)を用いて議論するとわかりやすく、 $0 < E < \sqrt{q_z(q_z + 2\beta)}$ では(4.57)式と(4.58)式での k_1 と k_2 は両方とも正の実数で、 $k_2 < k_1$ を満たす。 $k = k_1$ (k_2) における群速度は正(負)のため、 e^{ik_1x} (e^{-ik_2x}) は右へ進む波を記述する。入射エネルギー E を純虚数に変化させると、 k_1 と k_2 はそれぞれ k_3 と k_4 に繋がる。(4.60)式と(4.61)式は(4.57)式と(4.58)式から得られ、入射エネルギー E の領域が複素数に拡張される。よって、 e^{ik_3x} と e^{-ik_4x} は同じ因果関係にあると考えるのが自然で、今回の場合の $q_z \rightarrow 0$ の極限である e^{ik_3x} と e^{-ik_4x} の因果関係を求めると、 e^{ik_3x} と e^{-ik_4x} の因果関係を求めることができる。

入射波のエネルギーと波数を変化させて反射率と透過率を計算し、 $q_z = 0$ を除いて完全透過が起きないことがわかった。図4.6(a)と図4.6(b)は図4.5(c)と図4.5(d)の場合のトンネル係数の振る舞いを示す。横軸は図4.3(b)と同様に $\epsilon_{k_{\text{in}}}$ が図の左端でゼロになり、右端へ行くにつれて $\epsilon_{k_{\text{in}}}$ が大きくなるように設定した。その結果、全ての範囲で $|T|^2 < 1$ になることがわかった。この結果は準粒子波動関数が凝縮体波動関数と一致するとき、完全透過が起こるという事実と矛盾しない。つまり、2次ゼーマン効果がスピン回転対称性を破るため、スピン波モードはこの系ではNGモードではない。一方で、 $|\text{Im}E|$ が最大になる点、つまり、図4.6(a)と図4.6(b)の $E = 0.25i$ と $E = 0.15i$ において完全反射が起こることがわかった。この完全反射はモデルに依らず動的不安定なモードの普遍的な性質であることを示唆する。また、透過率が図4.6(a)の $E = 0.2i$ と図4.6(b)の $E = 0.2$ で共鳴し大きくなっている。それらの点は波数 k_{in} が有限値で入射エネルギー $E = \sqrt{q_z(q_z + 2\beta)}$ に対応する。この点は図4.5(c)と図4.5(d)で赤点で示している。この点において漸近解の A と B 項の運動量がゼロになる。つまり、図4.5(c) [図4.5(d)] で示しているように $\text{Im}E > 0.2$ [$\text{Re}E < 0.2$] での伝搬モードは $\text{Im}E < 0.2$ [$\text{Re}E > 0.2$] で局在モードに変化する。この点での $|T|^2$ の上昇は A, B の項による共鳴として理解でき、透過確率のピーク幅はポテンシャル障壁に依存し、ポテンシャル障壁が大きいほど小さくなる。

4.4 Gross-Pitaevskii 方程式による実時間ダイナミクス

(4.6)式で与えられる2成分BECの時間依存するGP方程式を解くことにより、スピン波モードのトンネル効果の時間依存性を調べた。Bogoliubov 準粒子の振る舞いを調べるために、(2.64)式のように定義されるスピン波モード $(u^s, v^s)^T = (u_k e^{ikx}, v_k e^{ikx})^T$ の振幅を計算する:

$$\Lambda(t) = \int dx e^{-ikx} [\bar{u}_k \psi(x, t) - \bar{v}_k \psi^*(x, t)], \quad (4.62)$$

ここで、 $\psi = (\psi_1(x, t), \psi_2(x, t))^T$ は時間依存するオーダーパラメタであり、 $\bar{u}_k = (\bar{u}_k, -\bar{u}_k)$ と $\bar{v}_k = (\bar{v}_k, -\bar{v}_k)$ は一様系での準粒子波動関数、 (\bar{u}_k, \bar{v}_k) は入射エネルギー E での(4.15)式の左固有状態で、右固有固有状態 $(u_k, v_k)^T$ を表す。一様系の場合のBogoliubov解析では、 $|\Lambda(t)| \ll 1$ では、 $\Lambda(t) \approx \Lambda(0) \exp(iEt)$ である。

$x = 0$ のポテンシャル障壁でのトンネル効果を調べるために、 $x < 0$ に波数 k_{in} のスピン波揺らぎを加え、次のような初期状態から始まるダイナミクスを計算する:

$$\psi(x, 0) = \frac{\psi_0(x)}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \psi(x, 0) \Theta(-x), \quad (4.63a)$$

$$\delta \psi(x) = \delta \left[u_{k_{\text{in}}} e^{ik_{\text{in}}x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + v_{k_{\text{in}}}^* e^{-ik_{\text{in}}x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right], \quad (4.63b)$$

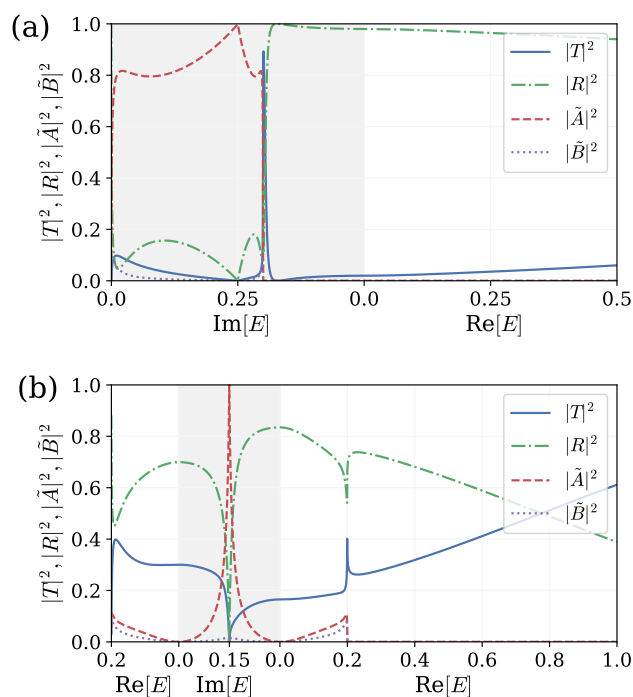


図. 4.6: polar BEC でのスピン波モードのトンネル効果。動的不安定モードのトンネル係数 $|T|^2, |R|^2, |\tilde{A}|^2, |\tilde{B}|^2$ の入射エネルギー E 依存性を表し、(a) $\beta = -0.25, q_z = 0.1, U_0 = 3, \sigma = 0.5$, (b) $\beta = -0.15, q_z = -0.1, U_0 = 2, \sigma = 0.5$ である。横軸は図 4.3(b) と同じように取る。灰色の領域は入射エネルギーが純虚数の領域である。透過率 $|T|^2$ は常に 1 より小さくなり、その値はポテンシャル障壁に依存する。両図において $E = i|\beta|$ で、完全反射 ($|\tilde{A}|^2 = 1$) が起こる。透過率が $E = \sqrt{q_z(q_z + 2\beta)}$ で共鳴的に大きくなり、それぞれ (a) では $E = 0.2i$ 、(b) では $E = 0.2$ に対応する。

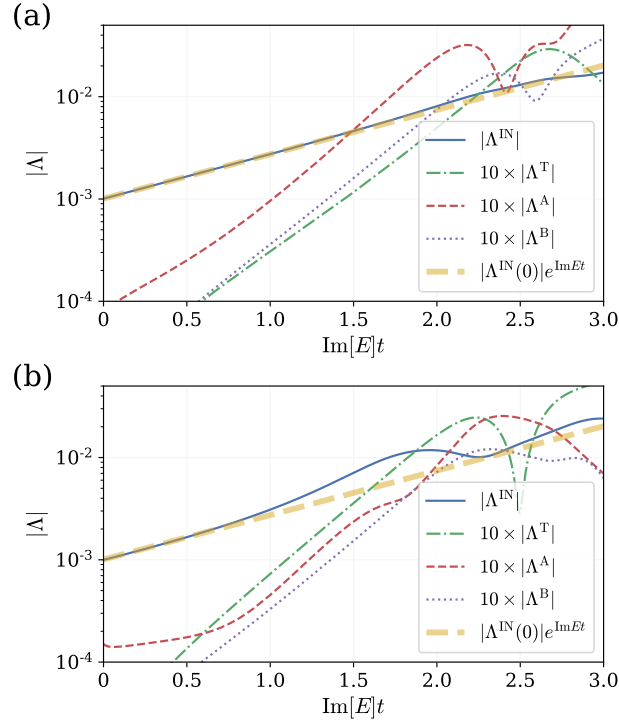


図. 4.7: ほぼ完全透過する領域 (a) と完全透過しない領域 (b) における動的不安定なスピン波モード [(4.64) 式] の振幅の時間発展。入射波数 $k_{\text{in}} = -0.11, 0.88$ として (4.63) 式で与えられる初期状態から時間発展させる。いずれの場合も、この揺らぎは $E = 0.05i$ の一様系の BdG 方程式の固有モードである。太い破線は、ポテンシャル障壁がない場合の直線領域における $|\Lambda^{\text{IN}}(0)|e^{\text{Im}Et}$ の成長を表す。ポテンシャル障壁の影響は (b) の方が顕著であり、 $|\Lambda^{\text{IN}}(t)|$ と $|\Lambda^{\text{IN}}(0)|e^{\text{Im}Et}$ では (b) の方が急激に大きくなる。全ての図で、 $\beta = -0.2, U_0 = 2, \sigma = 0.5, \delta = 1.0 \times 10^{-3}, L = 1600$ のパラメータを用いた。

ここで $\Theta(x)$ はヘビサイドステップ関数で $|\delta| \ll 1$ である。以下では、(iii) と (iv) の場合 [(4.37) 式と (4.38) 式] に焦点を当て、純虚数エネルギー E として、波数は $k_{\text{in}} = -k_4$ と k_3 とする。入射波、反射波 [(4.37) 式と (4.38) 式での A 項]、透過波 [同一の式での T と B 項] の成長について調べる。例えば、 $k_{\text{in}} = -k_4$ の場合、それぞれのモードの混ざり具合は以下のように定義される:

$$\Lambda^{\text{IN}}(t) = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^0 dx e^{+ik_4x} [\bar{\mathbf{u}}_{k_4} \boldsymbol{\psi}(x, t) - \bar{\mathbf{v}}_{k_4} \boldsymbol{\psi}^*(x, t)], \quad (4.64a)$$

$$\Lambda^{\text{A}}(t) = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^0 dx e^{+ik_3x} [\bar{\mathbf{u}}_{k_3} \boldsymbol{\psi}(x, t) - \bar{\mathbf{v}}_{k_3} \boldsymbol{\psi}^*(x, t)], \quad (4.64b)$$

$$\Lambda^{\text{T}}(t) = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} dx e^{+ik_4x} [\bar{\mathbf{u}}_{k_4} \boldsymbol{\psi}(x, t) - \bar{\mathbf{v}}_{k_4} \boldsymbol{\psi}^*(x, t)], \quad (4.64c)$$

$$\Lambda^{\text{B}}(t) = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} dx e^{-ik_3x} [\bar{\mathbf{u}}_{k_3} \boldsymbol{\psi}(x, t) - \bar{\mathbf{v}}_{k_3} \boldsymbol{\psi}^*(x, t)], \quad (4.64d)$$

$(\bar{\mathbf{u}}_{k_3}, \bar{\mathbf{v}}_{k_3}) = (-b_c, a_c)$ と $(\bar{\mathbf{u}}_{k_4}, \bar{\mathbf{v}}_{k_4}) = (a_c, b_c)$ は式 (4.30) で与えられる右固有状態に対応する左固有状

態である。\$L\$ はシステムサイズを表す。ここで、運動量 \$k_4\$ をもつ反射波の振幅 [(4.37) 式での \$R\$ 項] は

$$\Lambda^R(t) = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^0 dx e^{-ik_4 x} [\bar{u}_{k_4} \psi(x, t) - \bar{v}_{k_4} \psi^*(x, t)], \quad (4.64e)$$

で与えられる。入射エネルギー \$E\$ が純虚数で加えたゆらぎが動的不安定である場合、\$|\Lambda^R| = |\Lambda^{IN}|\$ を満たす。波数 \$k_{in} = k_3\$ での \$\Lambda^\alpha(t)\$ (\$\alpha = IN, A, T, B\$) も同様の考え方で定義する。

図 4.7 は、(a) ほとんど完全透過する領域 [波数 \$k_{in} = -0.11\$ とエネルギー \$E = 0.05i\$] と (b) 完全透過しない領域 [波数 \$k_{in} = 0.88\$ とエネルギー \$E = 0.05i\$]、つまり、それぞれ \$E \to 0\$ 極限で (iii) と (iv) の場合に漸近する場合での、ゆらぎの成長の結果を示す。2つの場合に関して、\$\delta = 1.0 \times 10^{-3}\$ と \$L = 1600\$ のパラメタを用いた。システムサイズがコヒーレント長より十分大きいため、初期振幅のポテンシャル障壁の影響は十分小さく、\$|\Lambda^{IN}(0)| \approx \delta\$ と \$|\Lambda^{T,A,B}(0)| \approx 0\$ である。ダイナミクスの初期において Bogoliubov 理論が有効であるため、\$|\Lambda^{IN}(t)|\$ は十分 \$|\Lambda^{IN}(0)| \exp(\text{Im}Et)\$ で近似可能である。しかし、時間発展するにつれてポテンシャル障壁近傍での反射による影響により一様解からのずれが大きくなる。図 4.7(a) と (b) の場合で、一様解からのずれはそれぞれ \$\text{Im}Et \sim 2.1\$ と \$0.9\$ の時間で顕著になる。その時間は \$[|\Lambda^{IN}(t)| - |\Lambda^{IN}(0)| e^{\text{Im}Et}] / |\Lambda^{IN}(t)| \approx 0.1\$ で得た。そのずれが図 4.7(b) の場合で顕著に成長したという結果は、反射率が定常解でのこのパラメタの結果 [図 4.3(b)] と一致する。また、他のモードの振幅 \$[|\Lambda^{T,A,B}(t)|]\$ は一様解での成長 \$\exp(\text{Im}Et)\$ よりも早く成長する。これは反射と透過するモードとしてポテンシャル障壁で生成されることを示している。

次に、完全反射のトンネル効果の時間依存性について調べる。完全反射の原因は、入射波と反射波の破壊的な干渉であるが、領域 \$x < 0\$ に一様なゆらぎが加わると、初期ゆらぎが指数関数的に大きくなる。完全反射する波数を \$k_{in}\$ として、入射エネルギー \$E = 0.2i\$、波数 \$k_{in} = 0.63\$ を選び、\$|\Lambda^\alpha(t)|\$ (\$\alpha = IN, A, T, B\$) の時間発展を図 4.8(a) に示す。完全反射の結果を明確にするために、他の波数の場合 [波数 \$k_{in} = 0.86\$、入射エネルギー \$E = 0.1i\$] を計算し、その結果を図 4.8(b) に示す。図 4.8(a) と (b) の両方の場合で、\$|\Lambda^{IN}(t)|\$ は \$|\Lambda^{IN}(0)| \exp(\text{Im}Et)\$ と長時間一致する。しかし、\$|\Lambda^T(t)|\$ の成長率において顕著になる: 図 4.8(a) での \$|\Lambda^T(t)|\$ は \$\exp(\text{Im}Et)\$ にほとんど比例するように指数関数的な成長を示すが、図 4.8(b) の場合は \$\exp(\text{Im}Et)\$ よりも早く成長する。前者の場合では、他のスピン波モードの振幅 (\$|\Lambda^A(t)|\$ と \$|\Lambda^B(t)|\$) もまた、\$\exp(\text{Im}Et)\$ より早く成長する。これらの結果は、完全反射が起こったときは領域 \$x < 0\$ のゆらぎが領域 \$x > 0\$ には伝わらないことが示唆する。実際、ポテンシャル障壁近傍の凝縮体波動関数は、図 4.8(c) と (d) に示すように振る舞う。これは図 4.8(a) (\$k_{in} = 0.63\$) と図 4.8(b) (\$k_{in} = 0.86\$) の場合での、\$\text{Im}Et = 4\$ の凝縮体波動関数 \$|\psi_{1,2}(x)|\$ である。図 4.8(c)[図 4.8(d)] の結果を見ると、\$x > 0\$ 領域の初期のゆらぎが領域 \$x > 0\$ に透過しない [透過する] ことがわかる。

上の結果を実験的に観測するために、(4.63) 式の代わりに以下の初期状態を考える。

$$\psi(x, 0) = \frac{\psi_0(x)}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta e^{ik_{in}x} \\ -\delta^2/\sqrt{2} \end{pmatrix} \Theta(-x). \quad (4.65)$$

この初期状態を以下のように用意することができる。

1. \$x = 0\$ にポテンシャル障壁がある系で成分 2 の定常解の BEC を用意: \$\psi = \psi_0(x)(0, 1)^T\$
2. 成分 1, 2 の粒子数密度が同じになるように短時間のラビ結合を導入: \$\psi = \psi_0(x)(1, 1)^T/\sqrt{2}\$
3. 成分 2 のごく一部の原子が成分 1 の運動量 \$k_{in}\$ の状態に移るように [60]、\$x < 0\$ 領域にだけ短時間だけラマン結合を導入し、(4.65) 式で与えられる状態にする

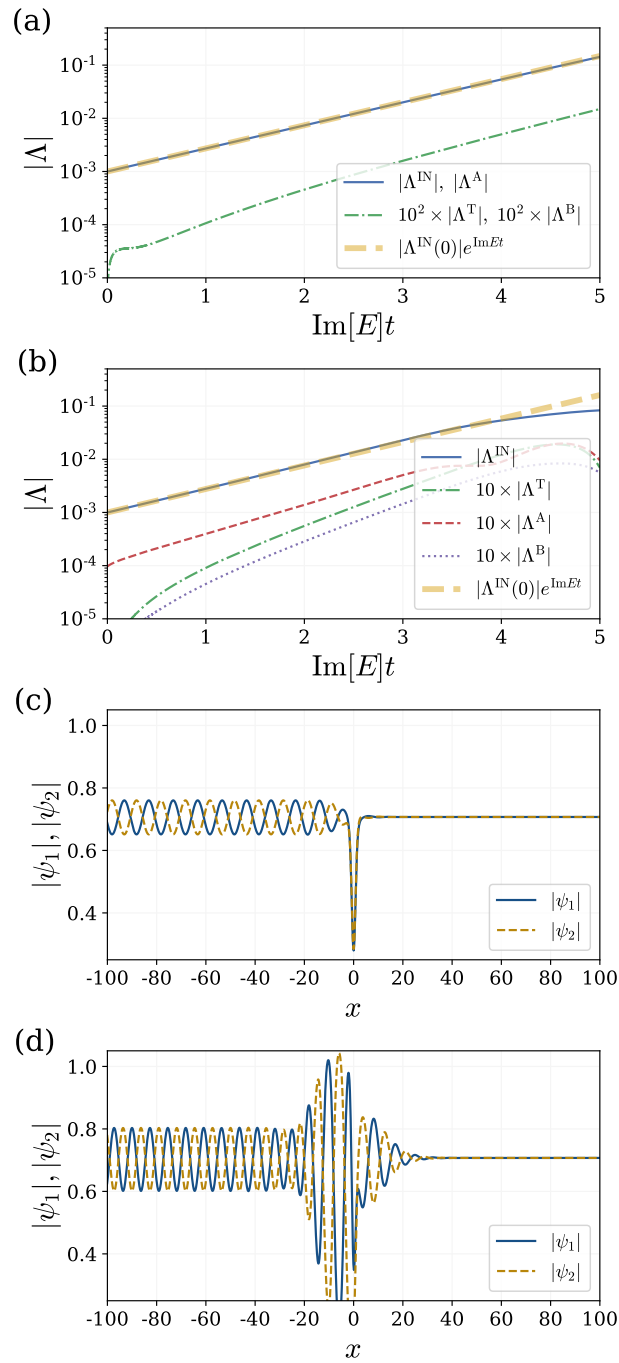


図. 4.8: (a) 初期ゆらぎが $E = 0.2i$ で波数 $k_{\text{in}} = 0.63$ の完全反射モードと (b) $E = 0.1i$ で波数 $k_{\text{in}} = 0.86$ の完全反射しないモードの場合でのスピン波モードの振幅の時間発展。(a) における $|\Lambda^{\text{T},\text{B}}(t)|$ は $\exp(\text{Im}Et)$ にほぼ比例するのに対し、(b) では $\exp(\text{Im}Et)$ よりも急激に成長する。この違いは透過率が 1 かそうでないかの違いである [本文参照]。(c),(d) (a) と (d) の場合のポテンシャル障壁近傍の $\text{Im}Et = 4$ での波動関数のスナップショット。(c) では、領域 $x > 0$ での波動関数は、領域 $x < 0$ での揺らぎの影響をほとんど受けていないのに対し、(d) では領域 $x < 0$ の初期ゆらぎが領域 $x > 0$ へ透過する。他のパラメータは図 4.7 で用いたものと同じである。

(4.65) 式からはじめたダイナミクスは図 4.7 と図 4.8 と定性的に同じであることも数値的に確認した。つまり、ノンゼロの反射係数 R は $|\Lambda^{\text{IN}}(t)|$ を指数関数的な成長 $\exp(\text{Im}Et)$ からずらさせ、完全反射する場合は領域 $x < 0$ のゆらぎは領域 $x > 0$ に透過しないことがわかる。 $E \rightarrow 0$ 極限で起こる完全透過は、それに対応するゆらぎの成長は、熱ゆらぎや量子ゆらぎによる成長と比較して非常に遅いため観測することが難しいが、完全反射するモードは最も早く成長するため、領域 $x > 0$ に透過しないという兆候は実験で観測可能であると考えられる。

4.5 結論

動的不安定な BEC におけるスピン波モードのトンネル効果を調べ、スピン波が NG モードであれば動的不安定性があっても完全透過が起こることを数値的に示した。初期状態の BEC が動的不安定な場合、BdG 方程式の固有値 E は複素数になる。そのため、これまで議論されてモデルにおいて、特定の領域の入射運動量に対して固有値 E は純虚数になる。数値計算による解析の結果、固有値 E と入射運動量の両方がゼロになる極限で完全透過が起こることがわかった。完全透過が起こる条件は、準粒子波動関数が凝縮波動関数と同じ形になることである。つまり、入射波が NG モードである必要がある。上記の条件を満たすと、純虚数 E を持つ動的不安定モードであっても $E \rightarrow 0$ の極限で完全透過を示す。一方、 $E = 0$ の場合でも入射運動量がノンゼロの場合には、完全透過は起きない。

$E \rightarrow 0$ での完全透過とは別に、 $|\text{Im}E|$ が最大になった点で完全反射が起こることも明らかにした。最大値の $|\text{Im}E|$ 近傍では、入射波とは異なる運動量を持つ反射波が存在する (A に比例する項)。完全反射が起こる時、入射波がこの反射波と破壊的な干渉を起こし、準粒子波動関数が強く抑制される。また、反射波がポテンシャル障壁の周囲で束縛状態に変化すると、透過率が共鳴的に増加することがわかった。

さらに時間依存する GP 方程式の数値シミュレーションの結果、トンネル効果はポテンシャル障壁の片側に与えた初期のスピン波モードの成長に影響を与えることを明らかにした。完全透過するモードは成長時間 $(\text{Im}E)^{-1}$ の長時間にわたって指数関数的に成長することがわかったが、他のより不安定なモードの成長の方が支配的であるため実験的には観測が困難である。一方、完全反射の特徴として、ポテンシャル障壁の片側の初期ゆらぎが他方に透過しないことがわかった。これは、完全反射は最も不安定なモード (成長が最も早い) で起きるため観測可能であると考えられる。

第5章 結語

物理学は素粒子や固体物理など様々な分野で大きな成功を取めているが、これらの研究は粒子数保存やエネルギー保存、つまりエルミート性が仮定されている。近年、エルミート系の拡張として外界と粒子のやり取りをする開放系を有効的に記述する非エルミート系の研究が非常に注目を集めている。非エルミート系の特徴として、複素スペクトルと対角化不可能な点(例外点)が出現することが挙げられる。この性質から非エルミート系は豊かな物理が現れる。原子気体 BEC は孤立系であるが BEC の低エネルギー励起である Bogoliubov 準粒子はボーズ統計性から非エルミートになり、BEC を不安定化させる動的不安定性を誘起する。このような背景の下、本博士論文は、BEC に現れる非エルミート性のもたらす物性解明を目的としてトポロジカル相と輸送現象に注目して研究を行った。第3章では、1次元 Bogoliubov 励起バンドに対するベリー位相の一般化、第4章では、動的不安定な BEC における Bogoliubov 準粒子のトンネル効果に関して議論した。以下に各研究の研究目的と主要な結果について記す。

原子気体ボース・アインシュタイン凝縮体におけるトポロジカル相

本研究は、動的不安定性が BEC の Bogoliubov 励起バンドのトポロジーに与える影響を明らかにするために、複素固有値と例外点が存在する場合に注目した。特に、ボゾンの Bogoliubov ハミルトニアンが常にもつ擬エルミート性と particle-hole 対称性以外に、空間反転対称性と時間反転対称性がある場合を考え、複素固有値と例外点が出現する場合におけるトポロジカル不変量に関して議論した。本研究で以下のことを明らかにした。

- 正規双直交基底を用いてトポロジカル不変量（ベリー位相と巻きつき数）を拡張した。ベリー位相が例外点で定義不可能という問題に対して、擬エルミート性の性質から例外点が波数の実軸上の点として存在することを見出し、複素運動量平面上で積分経路を取ることで例外点を避けてベリー位相を定義した。
- 時間反転演算子の構造を考慮すると1次元時間反転対称な系のトポロジカル不変量である巻きつき数が常に自明な値しか取り得ないことがわかった。
- バルクエッジ対応を確認するために、2つのトイモデル [時間反転対称な場合とそうでない場合、また両モデルともに空間反転対称性を有する] で数値的に調べた。その結果、複素固有値が存在する場合でも空間反転対称性に保護された端状態が存在し、数値的にバルクエッジ対応が成り立つことがわかった。

原子気体ボース・アインシュタイン凝縮体における輸送現象

BEC のトンネル効果は異常トンネル効果と呼ばれる現象がある。異常トンネル効果とは、BEC の NG モードである準粒子励起が低エネルギー極限で、ポテンシャル障壁を完全透過する現象である。現在までの BEC のトンネル効果の研究は動的安定な場合に限定されている。一方、近年の非エルミート物理の輸送現象に関する研究結果から異常トンネル効果を考察すると、例外点や動的不安定な系、つまり複素固有値モードが出現する領域で非エルミートとの協奏により豊かな物性をもたらすと期待できる。このような背景の下、本研究は、動的不安定な BEC の Bogoliubov 準粒子におけるトンネル効果に関して研究を行った。本研究で以下のことを明らかにした。

- 動的不安定な BEC において、入射エネルギーと入射運動量の両方がゼロになる極限で Bogoliubov 準粒子がポテンシャル障壁を完全透過することがわかった。ただし、完全透過が起こるためには、準粒子波動関数が凝縮波動関数と同じ形になる必要があるため、入射波が NG モードである必要がある。この条件により、入射波数がゼロの極限で入射エネルギーが虚軸に沿うゼロエネルギーになる場合にのみ完全透過が起こる。
- 純虚数の入射エネルギー $|\text{Im}E|$ が最大になる値で完全反射が起こることがわかった。このエネルギーでは入射波と反射波が一致することため、準粒子波動関数が強く抑制され完全反射が起こる。
- トンネル効果の実時間ダイナミクスの解析から、完全透過するモードの場合は、ポテンシャル障壁の影響をほとんど受けず、初期状態として与えた動的不安定な揺らぎがポテンシャル障壁の反対側にまで透過していくことがわかった。
- 完全反射するモードの場合は、ポテンシャル障壁の影響を強く受け、ポテンシャル障壁の反対側にその揺らぎが透過しないことがわかった。また、完全反射するモードは最も速く成長するモードであるため、このような特徴が実験で観測可能であることがわかった。

最後に今後の展望についてまとめる。BEC の Bogoliubov 準粒子系はボゾンの統計性により非エルミート系になる。本博士論文は BEC の非エルミート性がもたらす物性 (トポロジカル物性および輸送特性) を目的として研究を行なった。第3章の BEC におけるトポロジカル相の研究では複素固有値を伴う励起バンドに対してもトポロジカル不変量が定義できることがわかった。1次元系に限ったが TRS が破れた2次元ではチャーン数で特徴付けられる非自明な相が現れることがわかっている [11]。これはボゾン版の量子ホール相の存在を示唆し、非エルミート系での枠組みで Thouless-Kohmoto-Nightingale-Nijs (TKNN) 公式を定式化することは興味深い問題だと考える。また、非エルミート系のトポロジカル相の分類を皮切りに急速にこの量子相の理解が進み、近年の一連の研究で予言されている表面効果の検証や例外点によるギャップレス相、トポロジカル相間の端状態の実時間ダイナミクスなど様々な問題が考えられる。理論と実験を定量的に比較できる冷却原子系の特徴を活かし、BEC の Bogoliubov 準粒子系が非エルミート物理で予言されている現象の検証の場としてもさらに発展することを期待したい。

第4章の BEC の輸送現象の研究では、動的不安定な BEC の場合において完全透過と完全反射が起こることを発見した。この研究も1次元系の解析であるが、散乱理論を用いて高次元へ拡張可能である。高次元系への拡張だけでなく完全透過は自発的対称性の破れた系で入射波が NG モードであれば起こるという事実から、より一般的な議論もできると考えている。また、磁性体の低エネルギー励起であるスピン波 (マグノン) も BEC の BdG 方程式と同じ方程式で記述されるため固体電子系への応

用も考えられる。BEC に現れる動的不安定性は、磁性体では基底状態の不安定性と解釈できるため、ヒーティングや外部磁場等で磁性体を不安定化させ、複素固有値モードが出現する状況を作り出すことが可能である。スピンプンピング [134] を用いれば、スピン波を入射できるため固体電子系においても完全透過と完全反射が議論でき、今回明らかにした輸送現象が新しい整流作用によるトランジスタとして応用面での発展も期待したい。

付録A

A.1 複素波数空間における種々の対称性に関する証明

式 (3.10) で定義された $H(\kappa)$ の各南部空間のセクターを κ で展開する。

$$H^{(1)}(\kappa) = \sum_n c_n \kappa^n, \quad H^{(2)}(\kappa) = \sum_n d_n \kappa^n, \quad (\text{A.1})$$

c_n と d_n は、 $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ 次元の行列である。全体の行列 $H(\kappa)$ は、次のように展開される。

$$H(\kappa) = \sum_{n:\text{even}} \kappa^n \begin{pmatrix} c_n & d_n \\ -d_n^* & -c_n^* \end{pmatrix} + \sum_{n:\text{odd}} \kappa^n \begin{pmatrix} c_n & d_n \\ d_n^* & c_n^* \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Particle-hole Symmetry:

(A.2) 式の両辺から $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{-1} = \tau_1 K$ を演算すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{C}H(\kappa)\mathcal{C}^{-1} &= \sum_{n:\text{even}} (\kappa^*)^n \tau_1 \begin{pmatrix} c_n^* & d_n^* \\ -d_n & -c_n \end{pmatrix} \tau_1 + \sum_{n:\text{odd}} (\kappa^*)^n \tau_1 \begin{pmatrix} c_n^* & d_n^* \\ d_n & c_n \end{pmatrix} \tau_1 \\ &= \sum_{n:\text{even}} (\kappa^*)^n \begin{pmatrix} -c_n & -d_n \\ d_n^* & c_n^* \end{pmatrix} + \sum_{n:\text{odd}} (\kappa^*)^n \begin{pmatrix} c_n & d_n \\ d_n^* & c_n^* \end{pmatrix} \\ &= -H(-\kappa^*). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Time-reversal Symmetry:

波数 $k \in \mathbb{R}$ で $H(k)$ が TRS がある場合、 $\kappa = k \in \mathbb{R}$ の (A.2) 式を (3.5) 式に代入した結果、

$$U c_n^* U^{-1} = (-1)^n c_n, \quad (\text{A.4})$$

$$U d_n^* U = (-1)^n d_n, \quad (\text{A.5})$$

ここで (3.6) 式を用いた。(A.2) 式の両辺から \mathcal{T} と \mathcal{T}^{-1} を演算すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{T}H(\kappa)\mathcal{T}^{-1} &= \sum_{n:\text{even}} (\kappa^*)^n \begin{pmatrix} c_n & d_n \\ -d_n^* & -c_n^* \end{pmatrix} - \sum_{n:\text{odd}} (\kappa^*)^n \begin{pmatrix} c_n & d_n \\ d_n^* & c_n^* \end{pmatrix} \\ &= H(-\kappa^*). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Chiral Symmetry:

(A.3) 式と (A.6) 式から、

$$\Gamma H(\kappa)\Gamma^{-1} = \mathcal{C}H(-\kappa^*)\mathcal{C}^{-1} = -H(\kappa). \quad (\text{A.7})$$

Inversion Symmetry:

$k \in \mathbb{R}$ で $H(k)$ が空間反転対称性がある場合、 $\kappa = k \in \mathbb{R}$ の (A.2) 式を (3.8) 式に代入すると、

$$\mathcal{P} \begin{pmatrix} c_n & d_n \\ -d_n^* & -c_n^* \end{pmatrix} \mathcal{P}^{-1} = \begin{pmatrix} c_n & d_n \\ -d_n^* & -c_n^* \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

が得られる。 n は偶数で

$$\mathcal{P} \begin{pmatrix} c_n & d_n \\ d_n^* & c_n^* \end{pmatrix} \mathcal{P}^{-1} = - \begin{pmatrix} c_n & d_n \\ d_n^* & c_n^* \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

n は奇数である。(A.2) 式の両辺から \mathcal{P} と \mathcal{P}^{-1} を演算すると、

$$\begin{aligned} & \mathcal{P} H(\kappa) \mathcal{P}^{-1} \\ &= \sum_{n:\text{even}} \kappa^n \begin{pmatrix} c_n & d_n \\ -d_n^* & -c_n^* \end{pmatrix} - \sum_{n:\text{odd}} \kappa^n \begin{pmatrix} c_n & d_n \\ d_n^* & c_n^* \end{pmatrix} \\ &= H(-\kappa). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

である。

A.2 非エルミート系における総和則の証明

Bogoliubov 変換行列を用いると、

$$T^{\text{R}}(k) := \left(|u_{-\mathcal{N}}^{\text{R}}(k)\rangle \quad |u_{-\mathcal{N}+1}^{\text{R}}(k)\rangle \quad \cdots \quad |u_{\mathcal{N}}^{\text{R}}(k)\rangle \right) \quad (\text{A.11})$$

また、その逆行列は、

$$[T^{\text{L}}(k)]^\dagger := \begin{pmatrix} \langle u_{-\mathcal{N}}^{\text{L}}(k)| \\ \langle u_{-\mathcal{N}+1}^{\text{L}}(k)| \\ \vdots \\ \langle u_{\mathcal{N}}^{\text{L}}(k)| \end{pmatrix} = [T^{\text{R}}(k)]^{-1}, \quad (\text{A.12})$$

ベリー接続行列は以下のように書かれる。

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(k) &= \frac{i}{2} \left\{ [T^{\text{L}}(k)]^\dagger \partial_k T^{\text{R}}(k) + [T^{\text{R}}(k)]^\dagger \partial_k T^{\text{L}}(k) \right\} \\ &= \frac{i}{2} \left\{ [T^{\text{R}}(k)]^{-1} \partial_k T^{\text{R}}(k) + [T^{\text{L}}(k)]^{-1} \partial_k T^{\text{L}}(k) \right\} \\ &= \frac{i}{2} \left\{ \partial_k \ln T^{\text{R}}(k) + \partial_k \ln T^{\text{L}}(k) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

(3.16) 式の左辺から計算される。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \mathcal{A}(k) = \frac{i}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \partial_k \left\{ \ln \det [T^{\text{R}}(k) T^{\text{L}}(k)] \right\}. \quad (\text{A.14})$$

$[T^L(k)]^\dagger T^R(k) = \mathbf{1}$ の関係から、 $\det[T^L(k)] = 1/\det[T^R(k)]^*$ を得る。(A.14) 式の右辺から、

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} A(k) &= \frac{i}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \partial_k \left[\ln e^{2i\theta(k)} \right] \\ &= -\frac{\theta(\pi) - \theta(-\pi)}{2\pi}, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

ここで $\theta(k) := \arg \det[T^R(k)]$ である。 $T^R(k)$ が k の 2π の周期関数であるとき、 $\theta(\pi) - \theta(-\pi)$ は 2π の整数倍になる:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} A(k) = N \in \mathbb{Z}.$$

A.3 空間反転対称性に関係したトポロジカル不変量の証明

複素数の運動量での空間反転対称性は以下のようにになる:

$$\mathcal{P}H(\kappa)\mathcal{P}^{-1} = H(-\kappa). \quad (\text{A.16})$$

n_r 番目と $n_r + 1$ 番目のバンドでバンドギャップがあると仮定する。その時、 $1 \leq n \leq n_r$ の $|u_n^{\text{R,L}}(\kappa)\rangle$ が $H(\kappa)$ の固有状態である時、 $\mathcal{P}|u_n^{\text{R,L}}(\kappa)\rangle$ は $1 \leq m \leq n_r$ の $|u_m^{\text{R,L}}(-\kappa)\rangle$ で展開できる。

$$\mathcal{P}|u_n^{\text{R}}(\kappa)\rangle = \sum_{m=1}^{n_r} [U_{\mathcal{P}}^{\text{LR}}(-\kappa)]_{mn} |u_m^{\text{R}}(-\kappa)\rangle, \quad (\text{A.17a})$$

$$\mathcal{P}|u_n^{\text{L}}(\kappa)\rangle = \sum_{m=1}^{n_r} [U_{\mathcal{P}}^{\text{RL}}(-\kappa)]_{mn} |u_m^{\text{L}}(-\kappa)\rangle, \quad (\text{A.17b})$$

ここで変換行列は

$$[U_{\mathcal{P}}^{\text{LR}}(-\kappa)]_{mn} := \langle u_m^{\text{L}}(-\kappa) | \mathcal{P} | u_n^{\text{R}}(\kappa) \rangle, \quad (\text{A.18a})$$

$$[U_{\mathcal{P}}^{\text{RL}}(-\kappa)]_{mn} := \langle u_m^{\text{R}}(-\kappa) | \mathcal{P} | u_n^{\text{L}}(\kappa) \rangle \quad (\text{A.18b})$$

である。これは $n_r \times n_r$ 行列である。また、 $U_{\mathcal{P}}^{\text{RL}}(\kappa)U_{\mathcal{P}}^{\text{LR}}(\kappa)^\dagger = \mathbf{1}$ を満たす。上記の関係から、 $(1 \leq m, m' \leq n_r)$ の $[A^{\text{LR}}(\kappa)]_{mm'}$ と $[A^{\text{LR}}(-\kappa)]_{nn'}$ ($1 \leq n, n' \leq n_r$) を関係付けることができる:

$$\begin{aligned} [A^{\text{LR}}(-\kappa)]_{nn'} &= -i \langle u_n^{\text{L}}(-\kappa) | \partial_\kappa u_{n'}^{\text{R}}(-\kappa) \rangle \\ &= -i \sum_{m,\ell=1}^{n_r} [U_{\mathcal{P}}^{\text{RL}}(\kappa)]_{nm}^\dagger \langle \mathcal{P} u_m^{\text{L}}(\kappa) | \partial_\kappa \left([U_{\mathcal{P}}^{\text{LR}}(\kappa)]_{\ell n'} | \mathcal{P} u_\ell^{\text{R}}(\kappa) \rangle \right) \\ &= -i \sum_{m,\ell=1}^{n_r} [U_{\mathcal{P}}^{\text{RL}}(\kappa)]_{nm}^\dagger \langle u_m^{\text{L}}(\kappa) | \partial_\kappa u_\ell^{\text{R}}(\kappa) \rangle [U_{\mathcal{P}}^{\text{LR}}(\kappa)]_{\ell n'} \\ &\quad - i \sum_{m,\ell>0} [U_{\mathcal{P}}^{\text{RL}}(\kappa)]_{nm}^\dagger \partial_\kappa [U_{\mathcal{P}}^{\text{LR}}(\kappa)]_{\ell n'} \delta_{m\ell} \\ &= - \sum_{m,\ell=1}^{n_r} [U_{\mathcal{P}}^{\text{RL}}(\kappa)]_{nm}^\dagger [A^{\text{LR}}(\kappa)]_{m\ell} [U_{\mathcal{P}}^{\text{LR}}(\kappa)]_{\ell n'} \\ &\quad - i \sum_{m=1}^{n_r} [U_{\mathcal{P}}^{\text{RL}}(\kappa)]_{nm}^\dagger \partial_\kappa [U_{\mathcal{P}}^{\text{LR}}(\kappa)]_{mn'}, \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

よって、

$$\sum_{n=1}^{n_r} [\mathcal{A}^{\text{LR}}(-\kappa^*)]_{nn} = - \sum_{n=1}^{n_r} [\mathcal{A}^{\text{LR}}(\kappa)]_{nn} - i \text{tr}[U_{\mathcal{P}}^{\text{RL}}(\kappa)^\dagger \partial_\kappa U_{\mathcal{P}}^{\text{LR}}(\kappa)]. \quad (\text{A.20})$$

$\mathcal{A}^{\text{RL}}(\kappa)$ に対しても同様の関係が成り立つ。(A.20) 式の和を取ることと $\mathcal{A}^{\text{RL}}(\kappa)$ と合わせると次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{n_r} [\mathcal{A}(-\kappa)]_{nn} + \sum_{n=1}^{n_r} [\mathcal{A}(\kappa)]_{nn} \\ &= -\frac{i}{2} \left\{ \text{tr}[U_{\mathcal{P}}^{\text{RL}}(\kappa)^\dagger \partial_\kappa U_{\mathcal{P}}^{\text{LR}}(\kappa)] + \text{tr}[U_{\mathcal{P}}^{\text{LR}}(\kappa)^\dagger \partial_\kappa U_{\mathcal{P}}^{\text{RL}}(\kappa)] \right\} \\ &= -\frac{i}{2} \partial_\kappa [\ln \det[U_{\mathcal{P}}^{\text{LR}}(\kappa) U_{\mathcal{P}}^{\text{RL}}(\kappa)]] . \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

A.4 particle-hole 対称性に関係したトポロジカル不変量の証明

本文で導入した正ノルム、負ノルムの状態のラベル付けから、正ノルム状態 $|u_n^{\text{R,L}}(\kappa)\rangle$ ($n > 0$) は PHS から負ノルム状態 $|u_m^{\text{R,L}}(-\kappa^*)\rangle$ ($m < 0$) を用いて展開できる：

$$\mathcal{C} |u_{n>0}^{\text{R}}(\kappa)\rangle = \sum_{m<0} [U_{\mathcal{C}}^{\text{LR}}(-\kappa^*)]_{mn} |u_m^{\text{R}}(-\kappa^*)\rangle, \quad (\text{A.22a})$$

$$\mathcal{C} |u_{n>0}^{\text{L}}(\kappa)\rangle = \sum_{m<0} [U_{\mathcal{C}}^{\text{RL}}(-\kappa^*)]_{mn} |u_m^{\text{L}}(-\kappa^*)\rangle, \quad (\text{A.22b})$$

また、

$$[U_{\mathcal{C}}^{\text{LR}}(-\kappa^*)]_{mn} := \langle u_m^{\text{L}}(-\kappa^*) | \mathcal{C} |u_n^{\text{R}}(\kappa)\rangle, \quad (\text{A.23a})$$

$$[U_{\mathcal{C}}^{\text{RL}}(-\kappa^*)]_{mn} := \langle u_m^{\text{R}}(-\kappa^*) | \mathcal{C} |u_n^{\text{L}}(\kappa)\rangle \quad (\text{A.23b})$$

これは $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ 行列で、 $U_{\mathcal{C}}^{\text{RL}}(\kappa) U_{\mathcal{C}}^{\text{LR}}(\kappa)^\dagger = \mathbf{1}$ を満たす。上の関係を用いて、 $n, n' > 0$ に関して $[\mathcal{A}^{\text{LR}}(-\kappa^*)]_{nn'}$ を書き直すことができる。

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}^{\text{LR}}(-\kappa^*)]_{nn'} &= -i \langle u_n^{\text{L}}(-\kappa^*) | \partial_\kappa u_{n'}^{\text{R}}(-\kappa^*) \rangle \\ &= -i \sum_{m,\ell<0} [U_{\mathcal{C}}^{\text{RL}}(\kappa)]_{nm}^{\text{T}} \langle \mathcal{C} u_m^{\text{L}}(\kappa) | \partial_\kappa ([U_{\mathcal{C}}^{\text{LR}}(\kappa)]_{\ell n'}^* | \mathcal{C} u_\ell^{\text{R}}(\kappa) \rangle) \\ &= -i \sum_{m,\ell<0} [U_{\mathcal{C}}^{\text{RL}}(\kappa)]_{nm}^{\text{T}} \langle \mathcal{C} u_m^{\text{L}}(\kappa) | \partial_\kappa \mathcal{C} u_\ell^{\text{R}}(\kappa) \rangle [U_{\mathcal{C}}^{\text{LR}}(\kappa)]_{\ell n'}^* \\ &\quad - i \sum_{m,\ell<0} [U_{\mathcal{C}}^{\text{RL}}(\kappa)]_{nm}^{\text{T}} \partial_\kappa [U_{\mathcal{C}}^{\text{LR}}(\kappa)]_{\ell n'}^* \delta_{m\ell} \\ &= -i \sum_{m,\ell<0} [U_{\mathcal{C}}^{\text{RL}}(\kappa)]_{nm}^{\text{T}} \langle \partial_\kappa u_\ell^{\text{R}}(\kappa) | u_m^{\text{L}}(\kappa) \rangle [U_{\mathcal{C}}^{\text{LR}}(\kappa)]_{\ell n'}^* - i \sum_{m<0} [U_{\mathcal{C}}^{\text{RL}}(\kappa)]_{nm}^{\text{T}} \partial_\kappa [U_{\mathcal{C}}^{\text{LR}}(\kappa)]_{mn'}^* \\ &= \sum_{m,\ell<0} [U_{\mathcal{C}}^{\text{RL}}(\kappa)]_{nm}^{\text{T}} [\mathcal{A}^{\text{LR}}(\kappa)]_{m\ell}^* [U_{\mathcal{C}}^{\text{LR}}(\kappa)]_{\ell n'}^* - i \sum_{m<0} [U_{\mathcal{C}}^{\text{RL}}(\kappa)]_{nm}^{\text{T}} \partial_\kappa [U_{\mathcal{C}}^{\text{LR}}(\kappa)]_{mn'}^*, \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

以上から、

$$\sum_{n>0} [\mathcal{A}^{\text{LR}}(-\kappa^*)]_{nn}^* = \sum_{m<0} [\mathcal{A}^{\text{LR}}(\kappa)]_{mm} + i \text{tr} \left[U_C^{\text{RL}}(\kappa)^\dagger \partial_\kappa U_C^{\text{LR}}(\kappa) \right]. \quad (\text{A.25})$$

同様の関係が $\mathcal{A}^{\text{RL}}(\kappa)$ に対しても成り立つ。 $A_\pm(\kappa)$ が常に実数であることを考慮すると、(A.25) の和と $\mathcal{A}^{\text{RL}}(\kappa)$ 式から、

$$\begin{aligned} A_+(-\kappa^*) - A_-(\kappa) &= \frac{i}{2} \left\{ \text{tr} [U_C^{\text{RL}}(\kappa)^\dagger \partial_\kappa U_C^{\text{LR}}(\kappa)] + \text{tr} [U_C^{\text{LR}}(\kappa)^\dagger \partial_\kappa U_C^{\text{RL}}(\kappa)] \right\} \\ &= \frac{i}{2} \partial_\kappa [\ln \det [U_C^{\text{LR}}(\kappa) U_C^{\text{RL}}(\kappa)]] \\ &= -\partial_\kappa \theta_C(\kappa), \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

ここで、 $\theta_C(\kappa) := \arg[\det U_C^{\text{RL}}(\kappa)]$ である。途中式で $[U_C^{\text{RL/LR}}(\kappa)^\dagger] = [U_C^{\text{LR/RL}}(\kappa)]^{-1}$ の関係を用いた。

参考文献

- [1] Terumichi Ohashi, Shingo Kobayashi, and Yuki Kawaguchi. Generalized berry phase for a bosonic bogoliubov system with exceptional points. *Phys. Rev. A*, Vol. 101, p. 013625, Jan 2020.
- [2] Terumichi Ohashi and Yuki Kawaguchi. Perfect transmission and perfect reflection of bogoliubov quasiparticles in a dynamically unstable bose–einstein condensate. *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol. 90, No. 3, p. 034501, 2021.
- [3] Yuki Kawaguchi and Masahito Ueda. Spinor bose-einstein condensates. *Physics Reports*, Vol. 520, No. 5, pp. 253 – 381, 2012. Spinor Bose-Einstein condensates.
- [4] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer, New York, 1966.
- [5] L. Fallani, L. De Sarlo, J. E. Lye, M. Modugno, R. Saers, C. Fort, and M. Inguscio. Observation of dynamical instability for a bose-einstein condensate in a moving 1d optical lattice. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 93, p. 140406, Sep 2004.
- [6] LE Sadler, JM Higbie, SR Leslie, M Vengalattore, and DM Stamper-Kurn. Spontaneous symmetry breaking in a quenched ferromagnetic spinor bose–einstein condensate. *Nature (London)*, Vol. 443, No. 7109, p. 312, 2006.
- [7] Ramy El-Ganainy, Konstantinos G Makris, Mercedeh Khajavikhan, Ziad H Musslimani, Stefan Rotter, and Demetrios N Christodoulides. Non-hermitian physics and pt symmetry. *Nature Physics*, Vol. 14, No. 1, pp. 11–19, 2018.
- [8] Zin Lin, Hamidreza Ramezani, Toni Eichelkraut, Tsampikos Kottos, Hui Cao, and Demetrios N. Christodoulides. Unidirectional invisibility induced by \mathcal{PT} -symmetric periodic structures. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 106, p. 213901, May 2011.
- [9] Andreas P. Schnyder and Shinsei Ryu. Topological phases and surface flat bands in superconductors without inversion symmetry. *Phys. Rev. B*, Vol. 84, p. 060504, Aug 2011.
- [10] Zongping Gong, Yuto Ashida, Kohei Kawabata, Kazuaki Takasan, Sho Higashikawa, and Masahito Ueda. Topological phases of non-hermitian systems. *Phys. Rev. X*, Vol. 8, p. 031079, Sep 2018.
- [11] Kohei Kawabata, Ken Shiozaki, Masahito Ueda, and Masatoshi Sato. Symmetry and topology in non-hermitian physics. *Phys. Rev. X*, Vol. 9, p. 041015, Oct 2019.
- [12] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, and M. den Nijs. Quantized hall conductance in a two-dimensional periodic potential. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 49, pp. 405–408, Aug 1982.

- [13] Gregor Jotzu, Michael Messer, Rémi Desbuquois, Martin Lebrat, Thomas Uehlinger, Daniel Greif, and Tilman Esslinger. Experimental realization of the topological haldane model with ultracold fermions. *Nature*, Vol. 515, No. 7526, pp. 237–240, 2014.
- [14] G. Engelhardt and T. Brandes. Topological bogoliubov excitations in inversion-symmetric systems of interacting bosons. *Phys. Rev. A*, Vol. 91, p. 053621, May 2015.
- [15] Shunsuke Furukawa and Masahito Ueda. Excitation band topology and edge matter waves in bose-einstein condensates in optical lattices. *New Journal of Physics*, Vol. 17, No. 11, p. 115014, 2015.
- [16] Yu. Kagan, D. L. Kovrizhin, and L. A. Maksimov. Anomalous tunneling of phonon excitations between two bose-einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 90, p. 130402, Apr 2003.
- [17] L. Pitaevskii and S. Stringari. *Bose-Einstein Condensation and Superfluidity*, Vol. 164. Oxford University Press, Oxford, 2016.
- [18] C. J. Pethick and H. Smith. *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, 第 164 卷. Cambridge University Press, Cambridge, UK., 2008.
- [19] John F Allen and AD Misener. Flow of liquid helium ii. *Nature*, Vol. 141, No. 3558, pp. 75–75, 1938.
- [20] Pyotr Kapitza. Viscosity of liquid helium below the λ -point. *Nature*, Vol. 141, No. 3558, pp. 74–74, 1938.
- [21] F. London. On the bose-einstein condensation. *Phys. Rev.*, Vol. 54, pp. 947–954, Dec 1938.
- [22] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Observation of bose-einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, Vol. 269, No. 5221, pp. 198–201, 1995.
- [23] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle. Bose-einstein condensation in a gas of sodium atoms. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 75, pp. 3969–3973, Nov 1995.
- [24] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, and R. G. Hulet. Evidence of bose-einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 75, pp. 1687–1690, Aug 1995.
- [25] D. M. Stamper-Kurn, M. R. Andrews, A. P. Chikkatur, S. Inouye, H.-J. Miesner, J. Stenger, and W. Ketterle. Optical confinement of a bose-einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 80, pp. 2027–2030, Mar 1998.
- [26] Markus Greiner, Olaf Mandel, Tilman Esslinger, Theodor W Hänsch, and Immanuel Bloch. Quantum phase transition from a superfluid to a mott insulator in a gas of ultracold atoms. *nature*, Vol. 415, No. 6867, pp. 39–44, 2002.
- [27] Tomoki Ozawa, Hannah M. Price, Alberto Amo, Nathan Goldman, Mohammad Hafezi, Ling Lu, Mikael C. Rechtsman, David Schuster, Jonathan Simon, Oded Zilberberg, and Iacopo Carusotto. Topological photonics. *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 91, p. 015006, Mar 2019.

-
- [28] L Xiao, X Zhan, ZH Bian, KK Wang, X Zhang, XP Wang, J Li, K Mochizuki, D Kim, N Kawakami, et al. Observation of topological edge states in parity–time-symmetric quantum walks. *Nature Physics*, Vol. 13, No. 11, p. 1117, 2017.
- [29] Carl M. Bender and Stefan Boettcher. Real spectra in non-hermitian hamiltonians having \mathcal{PT} symmetry. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 80, pp. 5243–5246, Jun 1998.
- [30] Alois Regensburger, Christoph Bersch, Mohammad-Ali Miri, Georgy Onishchukov, Demetrios N Christodoulides, and Ulf Peschel. Parity–time synthetic photonic lattices. *Nature (London)*, Vol. 488, No. 7410, p. 167, 2012.
- [31] Kohei Kawabata, Yuto Ashida, and Masahito Ueda. Information retrieval and criticality in parity-time-symmetric systems. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 119, p. 190401, Nov 2017.
- [32] Yuto Ashida, Shunsuke Furukawa, and Masahito Ueda. Parity-time-symmetric quantum critical phenomena. *Nature communications*, Vol. 8, p. 15791, 2017.
- [33] Lei Xiao, Kunkun Wang, Xiang Zhan, Zhihao Bian, Kohei Kawabata, Masahito Ueda, Wei Yi, and Peng Xue. Observation of critical phenomena in parity-time-symmetric quantum dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 123, p. 230401, Dec 2019.
- [34] K. v. Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper. New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized hall resistance. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 45, pp. 494–497, Aug 1980.
- [35] Sho Higashikawa, Masaya Nakagawa, and Masahito Ueda. Floquet chiral magnetic effect. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 123, p. 066403, Aug 2019.
- [36] F. D. M. Haldane. Model for a quantum hall effect without landau levels: Condensed-matter realization of the "parity anomaly". *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 61, pp. 2015–2018, Oct 1988.
- [37] M. Mancini, G. Pagano, G. Cappellini, L. Livi, M. Rider, J. Catani, C. Sias, P. Zoller, M. Inguscio, M. Dalmonte, and L. Fallani. Observation of chiral edge states with neutral fermions in synthetic hall ribbons. *Science*, Vol. 349, No. 6255, pp. 1510–1513, 2015.
- [38] B. K. Stuhl, H.-I. Lu, L. M. Aycock, D. Genkina, and I. B. Spielman. Visualizing edge states with an atomic bose gas in the quantum hall regime. *Science*, Vol. 349, No. 6255, pp. 1514–1518, 2015.
- [39] Ryan Barnett. Edge-state instabilities of bosons in a topological band. *Phys. Rev. A*, Vol. 88, p. 063631, Dec 2013.
- [40] Bogdan Galilo, Derek K. K. Lee, and Ryan Barnett. Selective population of edge states in a 2d topological band system. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 115, p. 245302, Dec 2015.
- [41] Charles-Edouard Bardyn, Torsten Karzig, Gil Refael, and Timothy C. H. Liew. Chiral bogoliubov excitations in nonlinear bosonic systems. *Phys. Rev. B*, Vol. 93, p. 020502, Jan 2016.
- [42] T. Oshima and Y. Kawaguchi. Spin hall effect in a spinor dipolar bose-einstein condensate. *Phys. Rev. A*, Vol. 93, p. 053605, May 2016.

- [43] Bogdan Galilo, Derek K. K. Lee, and Ryan Barnett. Topological edge-state manifestation of interacting 2d condensed boson-lattice systems in a harmonic trap. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 119, p. 203204, Nov 2017.
- [44] Guang-Quan Luo, Andreas Hemmerich, and Zhi-Fang Xu. Bosonic topological excitations from the instability of a quadratic band crossing. *Phys. Rev. A*, Vol. 98, p. 053617, Nov 2018.
- [45] A. McDonald, T. Pereg-Barnea, and A. A. Clerk. Phase-dependent chiral transport and effective non-hermitian dynamics in a bosonic kitaev-majorana chain. *Phys. Rev. X*, Vol. 8, p. 041031, Nov 2018.
- [46] Ippei Danshita, Nobuhiko Yokoshi, and Susumu Kurihara. Phase dependence of phonon tunnelling in bosonic superfluid–insulator–superfluid junctions. *New Journal of Physics*, Vol. 8, No. 3, pp. 44–44, mar 2006.
- [47] Yoji Ohashi and Shunji Tsuchiya. Supercurrent behavior of low-energy bogoliubov phonons and the anomalous tunneling effect in a bose-einstein condensate. *Phys. Rev. A*, Vol. 78, p. 043601, Oct 2008.
- [48] Daisuke Takahashi and Yusuke Kato. Absence of anomalous tunneling of bogoliubov excitations for arbitrary potential barrier under the critical condensate current. *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol. 78, No. 2, p. 023001, 2009.
- [49] Shunji Tsuchiya and Yoji Ohashi. Anomalous enhancement of quasiparticle current near a potential barrier in a bose-einstein condensate. *Phys. Rev. A*, Vol. 78, p. 013628, Jul 2008.
- [50] Shunji Tsuchiya and Yoji Ohashi. Supercurrent induced by tunneling bogoliubov excitations in a bose-einstein condensate. *Phys. Rev. A*, Vol. 79, p. 063619, Jun 2009.
- [51] Yusuke Kato, Hiroshi Nishiwaki, and Akitake Fujita. Mechanism of anomalous tunneling in condensed bose system. *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol. 77, No. 1, p. 013602, 2008.
- [52] Shohei Watabe, Yusuke Kato, and Yoji Ohashi. Excitation transport through a domain wall in a bose-einstein condensate. *Phys. Rev. A*, Vol. 86, p. 023622, Aug 2012.
- [53] Shohei Watabe and Yusuke Kato. Anomalous scattering of low-lying excitations in a spin-1 bose-einstein condensate. *EPL (Europhysics Letters)*, Vol. 111, No. 5, p. 50008, sep 2015.
- [54] Shohei Watabe and Yusuke Kato. Reflection and refraction of bose-einstein-condensate excitations. *Phys. Rev. A*, Vol. 78, p. 063611, Dec 2008.
- [55] Shohei Watabe, Yusuke Kato, and Yoji Ohashi. Anomalous tunneling of collective excitations and effects of superflow in the polar phase of a spin-1 spinor bose-einstein condensate. *Phys. Rev. A*, Vol. 84, p. 013616, Jul 2011.
- [56] Shohei Watabe, Yusuke Kato, and Yoji Ohashi. Tunneling properties of bogoliubov mode and spin-wave modes in supercurrent states of a spin-1 ferromagnetic spinor bose-einstein condensate. *Phys. Rev. A*, Vol. 83, p. 033627, Mar 2011.

-
- [57] Takeru Nakayama, Ipei Danshita, Tetsuro Nikuni, and Shunji Tsuchiya. Fano resonance through higgs bound states in tunneling of nambu-goldstone modes. *Phys. Rev. A*, Vol. 92, p. 043610, Oct 2015.
- [58] Takeru Nakayama and Shunji Tsuchiya. Perfect transmission of higgs modes via antibound states. *Phys. Rev. A*, Vol. 100, p. 063612, Dec 2019.
- [59] Markus Greiner and Simon Fölling. Optical lattices. *Nature*, Vol. 453, No. 7196, pp. 736–738, 2008.
- [60] Y-J Lin, Rob L Compton, Karina Jiménez-García, James V Porto, and Ian B Spielman. Synthetic magnetic fields for ultracold neutral atoms. *Nature*, Vol. 462, No. 7273, pp. 628–632, 2009.
- [61] Y.-J. Lin, R. L. Compton, A. R. Perry, W. D. Phillips, J. V. Porto, and I. B. Spielman. Bose-einstein condensate in a uniform light-induced vector potential. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 102, p. 130401, Mar 2009.
- [62] Y-J Lin, K Jimenez-Garcia, and Ian B Spielman. Spin-orbit-coupled bose-einstein condensates. *Nature (London)*, Vol. 471, No. 7336, p. 83, 2011.
- [63] Chunji Wang, Chao Gao, Chao-Ming Jian, and Hui Zhai. Spin-orbit coupled spinor bose-einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 105, p. 160403, Oct 2010.
- [64] Dan M. Stamper-Kurn and Masahito Ueda. Spinor bose gases: Symmetries, magnetism, and quantum dynamics. *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 85, pp. 1191–1244, Jul 2013.
- [65] M. D. Barrett, J. A. Sauer, and M. S. Chapman. All-optical formation of an atomic bose-einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 87, p. 010404, Jun 2001.
- [66] M.-S. Chang, C. D. Hamley, M. D. Barrett, J. A. Sauer, K. M. Fortier, W. Zhang, L. You, and M. S. Chapman. Observation of spinor dynamics in optically trapped ^{87}Rb bose-einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 92, p. 140403, Apr 2004.
- [67] T. Kuwamoto, K. Araki, T. Eno, and T. Hirano. Magnetic field dependence of the dynamics of ^{87}Rb spin-2 bose-einstein condensates. *Phys. Rev. A*, Vol. 69, p. 063604, Jun 2004.
- [68] Fabrice Gerbier, Artur Widera, Simon Fölling, Olaf Mandel, and Immanuel Bloch. Resonant control of spin dynamics in ultracold quantum gases by microwave dressing. *Phys. Rev. A*, Vol. 73, p. 041602, Apr 2006.
- [69] S. R. Leslie, J. Guzman, M. Vengalattore, Jay D. Sau, Marvin L. Cohen, and D. M. Stamper-Kurn. Amplification of fluctuations in a spinor bose-einstein condensate. *Phys. Rev. A*, Vol. 79, p. 043631, Apr 2009.
- [70] Haruki Watanabe. Counting rules of nambu-goldstone modes. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, Vol. 11, No. 1, pp. 169–187, 2020.
- [71] Daisuke A. Takahashi and Muneto Nitta. Counting rule of nambu-goldstone modes for internal and spacetime symmetries: Bogoliubov theory approach. *Annals of Physics*, Vol. 354, pp. 101–156, 2015.

- [72] Yuto Ashida, Zongping Gong, and Masahito Ueda. Non-hermitian physics. *arXiv preprint arXiv:2006.01837*, 2020.
- [73] W D Heiss. The physics of exceptional points. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, Vol. 45, No. 44, p. 444016, 2012.
- [74] Carl M Bender. Making sense of non-hermitian hamiltonians. *Reports on Progress in Physics*, Vol. 70, No. 6, p. 947, 2007.
- [75] Ali Mostafazadeh. Pseudo-hermiticity versus pt symmetry: The necessary condition for the reality of the spectrum of a non-hermitian hamiltonian. *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 43, No. 1, pp. 205–214, 2002.
- [76] Ali Mostafazadeh. Pseudo-hermiticity versus pt-symmetry. ii. a complete characterization of non-hermitian hamiltonians with a real spectrum. *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 43, No. 5, pp. 2814–2816, 2002.
- [77] Ali Mostafazadeh. Pseudo-hermiticity versus pt-symmetry iii: Equivalence of pseudo-hermiticity and the presence of antilinear symmetries. *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 43, No. 8, pp. 3944–3951, 2002.
- [78] Ali Mostafazadeh. Exact pt -symmetry is equivalent to hermiticity. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, Vol. 36, No. 25, p. 7081, 2003.
- [79] Gal Harari, Miguel A. Bandres, Yaakov Lumer, Mikael C. Rechtsman, Y. D. Chong, Mercedeh Khajavikhan, Demetrios N. Christodoulides, and Mordechai Segev. Topological insulator laser: Theory. *Science*, Vol. 359, No. 6381, p. eaar4003, 2018.
- [80] Miguel A. Bandres, Steffen Wittek, Gal Harari, Midya Parto, Jinhan Ren, Mordechai Segev, Demetrios N. Christodoulides, and Mercedeh Khajavikhan. Topological insulator laser: Experiments. *Science*, Vol. 359, No. 6381, p. eaar4005, 2018.
- [81] Yosuke Takasu, Tomoya Yagami, Yuto Ashida, Ryusuke Hamazaki, Yoshihito Kuno, and Yoshiro Takahashi. PT-symmetric non-Hermitian quantum many-body system using ultracold atoms in an optical lattice with controlled dissipation. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, Vol. 2020, No. 12, 09 2020. 12A110.
- [82] M. Z. Hasan and C. L. Kane. Colloquium: Topological insulators. *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 82, pp. 3045–3067, Nov 2010.
- [83] Xiao-Liang Qi and Shou-Cheng Zhang. Topological insulators and superconductors. *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 83, pp. 1057–1110, Oct 2011.
- [84] Masatoshi Sato and Yoichi Ando. Topological superconductors: a review. *Reports on Progress in Physics*, Vol. 80, No. 7, p. 076501, may 2017.
- [85] N. R. Cooper, J. Dalibard, and I. B. Spielman. Topological bands for ultracold atoms. *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 91, p. 015005, Mar 2019.

-
- [86] Yi Chen Hu and Taylor L. Hughes. Absence of topological insulator phases in non-hermitian pt -symmetric hamiltonians. *Phys. Rev. B*, Vol. 84, p. 153101, Oct 2011.
- [87] Kenta Esaki, Masatoshi Sato, Kazuki Hasebe, and Mahito Kohmoto. Edge states and topological phases in non-hermitian systems. *Phys. Rev. B*, Vol. 84, p. 205128, Nov 2011.
- [88] Huitao Shen, Bo Zhen, and Liang Fu. Topological band theory for non-hermitian hamiltonians. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 120, p. 146402, Apr 2018.
- [89] Liang Feng, Ye-Long Xu, William S Fegadolli, Ming-Hui Lu, José EB Oliveira, Vilson R Almeida, Yan-Feng Chen, and Axel Scherer. Experimental demonstration of a unidirectional reflectionless parity-time metamaterial at optical frequencies. *Nature materials*, Vol. 12, No. 2, p. 108, 2013.
- [90] Tony E. Lee. Anomalous edge state in a non-hermitian lattice. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 116, p. 133903, Apr 2016.
- [91] Daniel Leykam, Konstantin Y. Bliokh, Chunli Huang, Y. D. Chong, and Franco Nori. Edge modes, degeneracies, and topological numbers in non-hermitian systems. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 118, p. 040401, Jan 2017.
- [92] Kohei Kawabata, Ken Shiozaki, and Masahito Ueda. Anomalous helical edge states in a non-hermitian chern insulator. *Phys. Rev. B*, Vol. 98, p. 165148, Oct 2018.
- [93] V. M. Martinez Alvarez, J. E. Barrios Vargas, and L. E. F. Foa Torres. Non-hermitian robust edge states in one dimension: Anomalous localization and eigenspace condensation at exceptional points. *Phys. Rev. B*, Vol. 97, p. 121401, Mar 2018.
- [94] Kohei Kawabata, Takumi Bessho, and Masatoshi Sato. Classification of exceptional points and non-hermitian topological semimetals. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 123, p. 066405, Aug 2019.
- [95] Joseph Schindler, Ang Li, Mei C. Zheng, F. M. Ellis, and Tsampikos Kottos. Experimental study of active lrc circuits with \mathcal{PT} symmetries. *Phys. Rev. A*, Vol. 84, p. 040101, Oct 2011.
- [96] Eric I. Rosenthal, Nicole K. Ehrlich, Mark S. Rudner, Andrew P. Higginbotham, and K. W. Lehnert. Topological phase transition measured in a dissipative metamaterial. *Phys. Rev. B*, Vol. 97, p. 220301, Jun 2018.
- [97] G. Barontini, R. Labouvie, F. Stubenrauch, A. Vogler, V. Guarrera, and H. Ott. Controlling the dynamics of an open many-body quantum system with localized dissipation. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 110, p. 035302, Jan 2013.
- [98] Takafumi Tomita, Shuta Nakajima, Ippei Danshita, Yosuke Takasu, and Yoshiro Takahashi. Observation of the mott insulator to superfluid crossover of a driven-dissipative bose-hubbard system. *Science Advances*, Vol. 3, No. 12, p. e1701513, 2017.
- [99] Huitao Shen and Liang Fu. Quantum oscillation from in-gap states and a non-hermitian landau level problem. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 121, p. 026403, Jul 2018.

- [100] Yoshihiro Michishita and Robert Peters. Equivalence of effective non-hermitian hamiltonians in the context of open quantum systems and strongly correlated electron systems. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 124, p. 196401, May 2020.
- [101] Zheng Wang, Yidong Chong, John D Joannopoulos, and Marin Soljačić. Observation of unidirectional backscattering-immune topological electromagnetic states. *Nature*, Vol. 461, No. 7265, p. 772, 2009.
- [102] Y. Onose, T. Ideue, H. Katsura, Y. Shiomi, N. Nagaosa, and Y. Tokura. Observation of the magnon hall effect. *Science*, Vol. 329, No. 5989, pp. 297–299, 2010.
- [103] Hosho Katsura, Naoto Nagaosa, and Patrick A. Lee. Theory of the thermal hall effect in quantum magnets. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 104, p. 066403, Feb 2010.
- [104] Ryuichi Shindou, Ryo Matsumoto, Shuichi Murakami, and Jun-ichiro Ohe. Topological chiral magnonic edge mode in a magnonic crystal. *Phys. Rev. B*, Vol. 87, p. 174427, May 2013.
- [105] Ryuichi Shindou, Jun-ichiro Ohe, Ryo Matsumoto, Shuichi Murakami, and Eiji Saitoh. Chiral spin-wave edge modes in dipolar magnetic thin films. *Phys. Rev. B*, Vol. 87, p. 174402, May 2013.
- [106] Masaru Onoda, Shuichi Murakami, and Naoto Nagaosa. Hall effect of light. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 93, p. 083901, Aug 2004.
- [107] C. Strohm, G. L. J. A. Rikken, and P. Wyder. Phenomenological evidence for the phonon hall effect. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 95, p. 155901, Oct 2005.
- [108] L. Sheng, D. N. Sheng, and C. S. Ting. Theory of the phonon hall effect in paramagnetic dielectrics. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 96, p. 155901, Apr 2006.
- [109] H. Pu, C. K. Law, J. H. Eberly, and N. P. Bigelow. Coherent disintegration and stability of vortices in trapped bose condensates. *Phys. Rev. A*, Vol. 59, pp. 1533–1537, Feb 1999.
- [110] Biao Wu and Qian Niu. Landau and dynamical instabilities of the superflow of bose-einstein condensates in optical lattices. *Phys. Rev. A*, Vol. 64, p. 061603, Nov 2001.
- [111] Yuki Kawaguchi and Tetsuo Ohmi. Splitting instability of a multiply charged vortex in a bose-einstein condensate. *Phys. Rev. A*, Vol. 70, p. 043610, Oct 2004.
- [112] M V Berry. Classical adiabatic angles and quantal adiabatic phase. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, Vol. 18, No. 1, p. 15, 1985.
- [113] Shunyu Yao and Zhong Wang. Edge states and topological invariants of non-hermitian systems. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 121, p. 086803, Aug 2018.
- [114] Shunyu Yao, Fei Song, and Zhong Wang. Non-hermitian chern bands. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 121, p. 136802, Sep 2018.
- [115] JC Garrison and Ewan M Wright. Complex geometrical phases for dissipative systems. *Physics Letters A*, Vol. 128, No. 3-4, pp. 177–181, 1988.

-
- [116] Ali Mostafazadeh. A new class of adiabatic cyclic states and geometric phases for non-hermitian hamiltonians. *Physics Letters A*, Vol. 264, No. 1, pp. 11–17, 1999.
- [117] Alexei A. Mailybaev, Oleg N. Kirillov, and Alexander P. Seyranian. Geometric phase around exceptional points. *Phys. Rev. A*, Vol. 72, p. 014104, Jul 2005.
- [118] Guido van Miert and Carmine Ortix. Excess charges as a probe of one-dimensional topological crystalline insulating phases. *Phys. Rev. B*, Vol. 96, p. 235130, Dec 2017.
- [119] Liang Fu and C. L. Kane. Topological insulators with inversion symmetry. *Phys. Rev. B*, Vol. 76, p. 045302, Jul 2007.
- [120] M. Aidelsburger, M. Atala, S. Nascimbène, S. Trotzky, Y.-A. Chen, and I. Bloch. Experimental realization of strong effective magnetic fields in an optical lattice. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 107, p. 255301, Dec 2011.
- [121] A Yu Kitaev. Unpaired majorana fermions in quantum wires. *Physics-Uspeski*, Vol. 44, No. 10S, p. 131, 2001.
- [122] Masatoshi Sato, Yoshiro Takahashi, and Satoshi Fujimoto. Non-abelian topological order in s -wave superfluids of ultracold fermionic atoms. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 103, p. 020401, Jul 2009.
- [123] Yuval Oreg, Gil Refael, and Felix von Oppen. Helical liquids and majorana bound states in quantum wires. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 105, p. 177002, Oct 2010.
- [124] Takahiro Fukui, Yasuhiro Hatsugai, and Hiroshi Suzuki. Chern numbers in discretized brillouin zone: Efficient method of computing (spin) hall conductances. *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol. 74, No. 6, pp. 1674–1677, 2005.
- [125] W. P. Su, J. R. Schrieffer, and A. J. Heeger. Solitons in polyacetylene. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 42, pp. 1698–1701, Jun 1979.
- [126] Ken Shiozaki and Masatoshi Sato. Topology of crystalline insulators and superconductors. *Phys. Rev. B*, Vol. 90, p. 165114, Oct 2014.
- [127] D.L. Kovrizhin. Exact form of the bogoliubov excitations in one-dimensional nonlinear schrödinger equation. *Physics Letters A*, Vol. 287, No. 5, pp. 392 – 396, 2001.
- [128] Y. Shin, M. Saba, M. Vengalattore, T. A. Pasquini, C. Sanner, A. E. Leanhardt, M. Prentiss, D. E. Pritchard, and W. Ketterle. Dynamical instability of a doubly quantized vortex in a bose-einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 93, p. 160406, Oct 2004.
- [129] H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, J. Stenger, S. Inouye, A. P. Chikkatur, and W. Ketterle. Observation of metastable states in spinor bose-einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 82, pp. 2228–2231, Mar 1999.
- [130] E. Nicklas, M. Karl, M. Höfer, A. Johnson, W. Muessel, H. Strobel, J. Tomkovič, T. Gasenzer, and M. K. Oberthaler. Observation of scaling in the dynamics of a strongly quenched quantum gas. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 115, p. 245301, Dec 2015.

- [131] Joon Hyun Kim, Sang Won Seo, and Y. Shin. Critical spin superflow in a spinor bose-einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 119, p. 185302, Oct 2017.
- [132] Shohei Watabe and Yusuke Kato. Transmission of excitations in a spin-1 bose-einstein condensate through a barrier. *Phys. Rev. A*, Vol. 83, p. 053624, May 2011.
- [133] Akiyuki Tokuno and Shun Uchino. Magnetic resonance spectroscopy and characterization of magnetic phases for spinor bose-einstein condensates. *Phys. Rev. A*, Vol. 87, p. 061604, Jun 2013.
- [134] Yaroslav Tserkovnyak, Arne Brataas, Gerrit E. W. Bauer, and Bertrand I. Halperin. Nonlocal magnetization dynamics in ferromagnetic heterostructures. *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 77, pp. 1375–1421, Dec 2005.

出版論文

1. Terumichi Ohashi, Shingo Kobayashi, and Yuki Kawaguchi, “Generalized Berry phase for a bosonic Bogoliubov system with exceptional points”, *Phys. Rev. A*, 101, 1 (2020).
2. Terumichi Ohashi and Yuki Kawaguchi, “Perfect Transmission and Perfect Reflection of Bogoliubov Quasiparticles in a Dynamically Unstable Bose-Einstein Condensate”, arXiv:2009.05998. To appear in *Journal of the Physical Society of Japan*.

謝辞

本研究は多くのお方に支えにより進めることができました。まずはじめに、指導教員である川口由紀教授に深く感謝致します。川口教授には研究全般にわたり非常に丁寧なご指導を頂きました。研究に行き詰まった時は根気強く議論して解決の糸口を与えて下さったり、いつも洞察力に富んだ指摘を頂きました。また発表資料の作成、論文作成に関しても膨大なコメントを頂き、大変多くのことを学ばせて頂きました。研究室外の活動に関しても、国際会議の参加や短期滞在などの機会を頂き、研究者として多くの経験を積ませて頂きました。こうした環境を用意して頂いたおかげで、多くのお方と出会い、自分で研究したいと思うテーマを見つけ、こうして形にすることができました。また、RAとして雇って頂き、金銭的な支援も受けました。田仲由喜夫教授には、セミナーを通じて有益なコメントを頂きました。また、田仲教授の研究室セミナーや講義での姿に非常に刺激を受けました。理化学研究所の小林伸吾氏には共同研究を通じて、特にトポロジカル相について非常に多くのことを学びました。いつも私の拙い疑問に丁寧に答えて下さいました。矢田圭司助教には、特にセミナーを通じて有益なコメントを頂きました。名古屋大学大学院理学研究科 St 研究室の山影相助教には、特に固体物理の演習の TA を通じて、固体物理に関する多くのことを学びました。TA 終了後も研究など気にかけて下さいました。藤本和也特任助教には、冷却原子系全般の質問に丁寧に答えて頂きました。田村駿特任助教、中河西特任助教、鈴木修博士には、議論を通じて非常に多くのことを学びました。秘書である木村薫さん、元秘書である三輪正代さんには、事務的な手続きだけでなく、研究以外のことに快く相談に乗って頂きました。また田仲川口研究室を卒業した先輩方は熱心に研究や勉強をするお方が多く、非常に刺激を受けました。同期、後輩にも研究以外の面でとてもお世話になりました。

最後に、家族から精神的、経済的な支えが無ければ研究を続けることができませんでした。大変感謝しております。この場をお借りして研究を通じてお世話になった全てのお方に感謝申し上げます。誠にありがとうございました。