

2020 年度 学位論文

ロケット用ターボポンプの
バランスピストン機構の
モデルの拡張と動的安定性



名古屋大学大学院工学研究科

機械理工学専攻

平木 博道

目次

第1章 緒言	8
1.1 ロケット用ターボポンプの特徴	8
1.2 ポンプの軸推力釣り合わせ機構	10
1.3 ロケット用ポンプのバランスピストン機構	14
1.4 軸方向安定性評価の取組	15
1.5 本論文の目的と構成	18
第2章 バランスピストン機構の1次元動特性モデルの実験による評価	20
2.1 本章の目的	20
2.2 1次元モデルの方程式	20
2.2.1 1次元モデルの構成	20
2.2.2 方程式の線形化	22
2.2.3 バランスピストン室の圧力応答	23
2.2.4 固有値および減衰比の算出	23
2.3 実験による検証方法の検討	24
2.3.1 実験装置の原理	24
2.3.2 実験装置の構成	26
2.4 実験装置	27
2.4.1 実験装置の諸元	27
2.4.2 実験パラメータ	29
2.5 実験結果	30
2.5.1 自励振動の挙動	30
2.5.2 動的安定性の評価	32
2.6 本章のまとめ	35
第3章 1次元モデルを用いた動的安定性と性能の双方を考慮した設計方法	36
3.1 本章の目的	36
3.2 バランスピストン機構の動的安定性と性能の評価指標	36
3.3 設計方法	38
3.3.1 計算方法	38

3.3.2 計算条件	40
3.4 設計指針の検討	44
3.4.1 パラメータと評価項目の相関	44
3.4.2 解の分布	46
3.4.3 動的安定性判別指標	47
3.4.4 軸方向剛性と動的安定性の関係	49
3.4.5 実験結果からの考察	51
3.5 本章のまとめ	51
第4章 インペラの弾性変形モードを考慮した安定性評価	53
4.1 本章の目的	53
4.2 インペラ弾性変形を模擬した簡易モデル	55
4.3 計算条件	59
4.4 板厚および体積弾性率の影響	60
4.5 減衰比に関する考察	66
4.5.1 一般的なばね力と減衰力の位相	66
4.5.2 圧力荷重応答の位相	67
4.5.3 はりの剛性の影響	68
4.5.4 周波数の影響	69
4.6 本章のまとめ	71
第5章 インペラの弾性変形とバランスピストン室の流体音響を考慮した 連成モードの安定性評価	72
5.1 本章の目的	72
5.2 モデルおよび連成方法	72
5.2.1 インペラの有限要素モデル	72
5.2.2 バランスピストン室流体の音響モデル	74
5.2.3 有限要素モデルと流体音響モデルの連成	76
5.3 計算方法	77
5.3.1 変位を入力とした計算	77
5.3.2 連成シミュレーション	78
5.3.3 計算条件	78

5.4	バランスピストン室の圧力応答	80
5.4.1	圧力応答の位相とエネルギー収支	80
5.4.2	はり全体のエネルギー収支	83
5.5	連成シミュレーション	86
5.5.1	自励振動の挙動	86
5.5.2	動的安定性評価	88
5.6	パラメータの影響	90
5.7	本章のまとめ	92
6	章 結論	93
	謝辞	96
	参考文献	97
	付録 A はりの振動モードの解析方法	104

Nomenclature

A_{BP}	バランスピストン荷重面積
b	はりの幅
β	はりの傾き
c	バランスピストン室流体の音速
c_0	外部減衰
C_{d1}	No1 オリフィス流量係数
C_{d2}	No2 オリフィス流量係数
D_1	No1 オリフィス直径
D_2	No2 オリフィス直径
E	はりの材料のヤング率
E_n	はりの n 番目の要素における振動一周期のエネルギー収支
eps	つり合い位置 (オリフィス総隙間に対する相対値)
η_v	体積効率
F	バランスピストン室圧力荷重
f_a	バランスピストン室の気柱振動周波数
F_{BM}	バランスピストン機構の荷重調整余裕
F_{OUT}	バランスピストン機構以外の荷重
f_s	はりの曲げ振動周波数
f_{sc}	安定性判別式
g	重力加速度
G_{BP}	バランスピストン通過流量 (質量流量)
G_{PUMP}	ポンプ流量 (質量流量)
h	はりの厚さ
\mathbf{K}	はりの有限要素モデルにおける剛性マトリクス
K_b	簡易はりモデルにおける等価剛性
K_f	バランスピストン室流体の体積弾性率
K_{ST}	線形解析により算出される軸方向剛性

L	はりの長さ
M	はりの有限要素モデルにおける質量マトリクス
m_0	ロータ質量
m_b	簡易はりモデルにおける等価質量
m_r	剛体部質量
N	はり要素の分割数
ω	振動周波数
P	バランスピストン室圧力
P_0	つり合い位置におけるバランスピストン室圧力
P_1, P_{IN}	No1 オリフィス上流圧力
P_2, P_{OUT}	No2 オリフィス下流圧力
P_{SW}	バランスピストン室内の旋回損失
ΔP	$P_1 - P_2$
Q_1	No1 オリフィス通過流量
Q_2	No2 オリフィス通過流量
$Q_x, Q_{xR}, Q_{xR2}, Q_{xB}, Q_p, Q_{pR}$	線形解析における諸係数
ρ	バランスピストン室流体の密度
ρ_s	はりの材質の密度
t	時間
$\theta_x, \theta_{xB}, \theta_p$	圧力応答の位相
U_1	No1 オリフィス通過流速
U_2	No2 オリフィス通過流速
u	バランスピストン室流体の流速
v	はりの速度
V_0	バランスピストン室容積
V_K	V_0/K_f
x	ロータ変位, はりの変位
x_{10}	つり合い位置における No1 オリフィス隙間
x_{20}	つり合い位置における No2 オリフィス隙間
x_{all}	バランスピストンオリフィス総隙間

x_r	剛体部変位
x_b	簡易はりモデルの代表変位
z	はりモデルの位置座標
ζ	減衰比

第1章 緒言

1.1 ロケット用ターボポンプの特徴

日本における大型の液体ロケットの開発は、1970年代に米国の技術導入から始まり、1975年にN-Iロケット、1981年にN-IIロケットの打ち上げがおこなわれた[1]。その後、国内の液体水素と液体酸素を燃料とする高性能な液体ロケットエンジンの実現を目指し、H-Iロケットの2段用エンジンとしてLE-5エンジンが開発された。後継機のH-IIロケットでは、1段用の液体水素・液体酸素のエンジンのLE-7エンジン、また2段用エンジンの改良型であるLE-5Aエンジンの開発がおこなわれた[2]。その後、両エンジンは改良を重ねられ、現在はLE-5B-2エンジン、LE-7Aエンジン[3]として、H-IIの改良型であるH-IIAロケットに使用されている[4][5][6]。また、次世代のH3ロケットでは、同じく液体水素・液体酸素を燃料とする1段用のLE-9エンジンの開発が進められており[7]、大型ロケットにとって高性能の液体ロケットエンジンは必要不可欠な存在である。

液体ロケットエンジンは、推進薬を燃焼させ、高速のガスにして噴射することで、推進薬のもつ化学エネルギーを推進力に変換するものである。推進薬の燃焼圧力が高い程、よりガスを増速させることが可能なため[8]、ロケットエンジンの性能を向上できる。しかし、ロケットの大半を占める推進薬タンクの圧力を上げることは強度的に困難なため、推進薬を吸い込み圧力を上昇させるポンプが必要となる[8][9]。ロケットの推進薬の流れを示したエンジンサイクルの系統図の例をFig.1.1に示す[10]。タンクより入ってきた推進薬は、酸化剤（液体酸素）用のターボポンプ（Oxidizer Turbopump, OTP）、燃料（液体水素）用のターボポンプ（Fuel Turbopump, FTP）でそれぞれ昇圧される。燃料の一部は、高温の燃焼ガスからの保護のために燃焼室（Combustion Chamber, CC）の冷却流路を通った後、燃焼室に噴射される。燃焼室で燃焼した後、ノズルから高速のガスとして排出され、推力に変換される。また、燃料室の冷却を経た燃料の一部は、FTPおよびOTPのタービンを駆動するガスとして使用される。

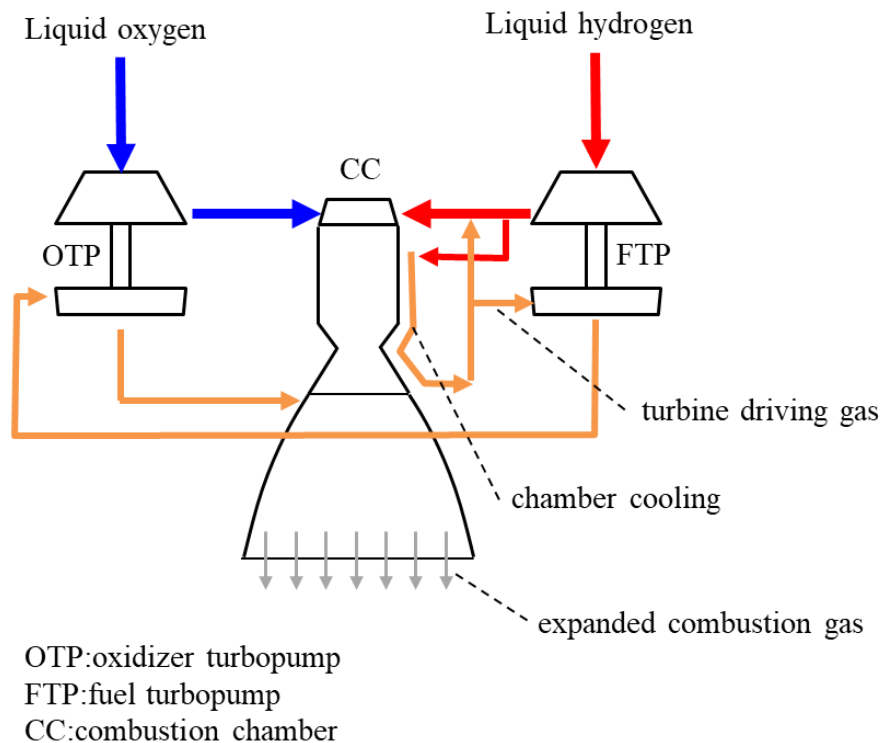


Fig.1.1 Schematic of liquid rocket engine (Expander Bleed cycle) [10]

ロケットエンジンに用いられるターボポンプは、液体水素や液体酸素といった極低温の推進薬を昇圧し燃焼室へと送る重要な役割を担う部品である。ターボポンプの性能がロケットエンジンの性能に直結するため、ロケットエンジンの中で最も重要なコンポーネントのひとつである。ロケット用ターボポンプの断面図を Fig.1.2 に示す。ターボポンプは、推進薬の圧力上昇を担うポンプ部、高温高压のガスから駆動力を取り出すタービン部、それらを結合するシャフト、シャフトを支持する軸受から構成される。ポンプ部は、推進薬を吸い込むためのインデューサと呼ばれる軸流式の羽根車と、インペラと呼ばれる遠心式の羽根車の組み合わせからなる[2]。

ロケット用ターボポンプの特徴として、高い吐出圧が必要とされること、重量とサイズの制約から高回転数で設計されること、作動流体が極低温の推進薬であり軸受に潤滑油が使用できないことなどが挙げられる。ポンプで発生する高い吐出圧は軸方向に大きなスラストを発生させる一方で、極低温の特殊な環境下で使用されるターボポンプ用の軸受は特殊な潤滑方式を用いており[11]、軸方向の大きなスラストを支持することが困難である。そのため、軸スラストを調整するための工夫が必要となる。

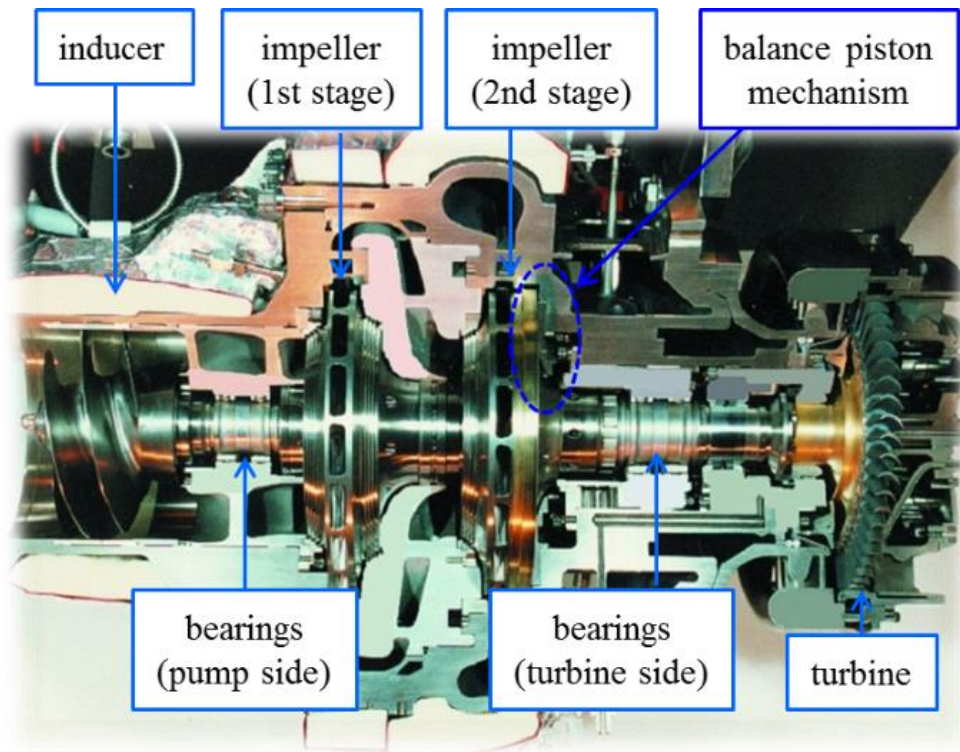


Fig.1.2 Rocket engine turbopump (hydrogen turbopump) [69]

1.2 ポンプの軸推力釣り合わせ機構

一般的に、ポンプは流体を昇圧する機構であり、その昇圧量が大きくなるほど軸方向に発生する荷重は大きくなる。遠心形羽根車（インペラ）の両側に発生する荷重の概要を Fig.1.3 に示す[12][13]。インペラ前面には、圧力の高いインペラ出口から圧力の低いインペラ入口へ戻る漏れ流れが発生する。この流れは回転方向の旋回速度成分を有しており、旋回による遠心力により、外径側から内径側に流れるに従って圧力損失（旋回損失）が発生する。また、インペラ前面の最内径側にはこの漏れ流れを低減するための狭い隙間が設けられており、絞りによる圧力損失が発生する。インペラ背面側は、前面側と同様、外径側から内径側に従って旋回損失により圧力が降下していく（多段ポンプの場合、流れの向きが前面と反対の、内径側から外径側の方向になる場合もある）。一般的に、インペラ前面側は圧力の低いポンプ入口の領域を有するため、背面側の方が圧力

荷重としては大きくなり、インペラ背面から前面の方向に軸方向荷重が発生する。ポンプに発生する軸方向の圧力荷重はポンプの成立性に関わる重要設計事項であり、軸方向の荷重を精度よく予測する研究[14]~[18]や、軸方向荷重に影響する隙間の流れに関する研究[19]~[23]がおこなわれてきた。

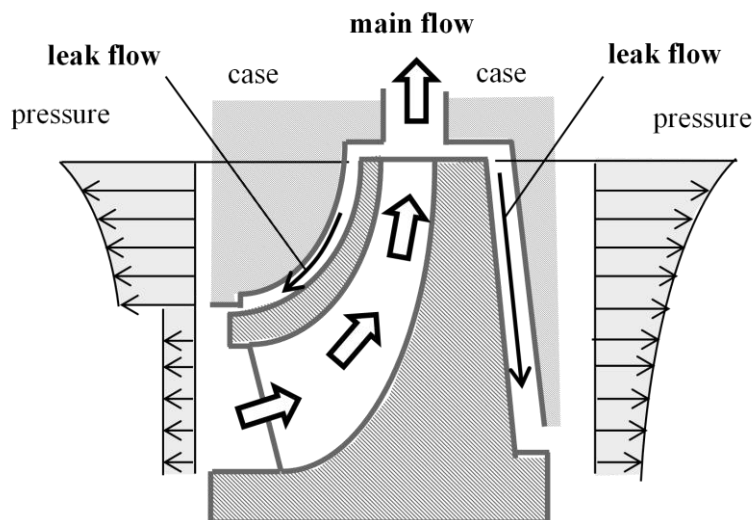


Fig.1.3 Axial thrust of impeller [13]

この軸方向荷重は、スラスト軸受のような外部機構により荷重を受ける方法の他に、インペラ前面や背面の圧力分布を調整することで荷重をバランスさせる方法がある。インペラ背面の圧力荷重を低減する方法の一つとして、Fig.1.4 にバランスホールの構造を示す。インペラ背面に絞り部を設けた上で、インペラの内径側に背面から流路に貫通する穴（バランスホール）を設定する。内径側の圧力を低下させることで、背面側の圧力を低減することができる。バランスホールの径や、インペラ背面の絞り部の径により、圧力荷重の調整が可能である。また、Fig.1.5 に示すように、インペラ背面に裏ばねを設けることで、流体のポンプ効果（旋回の促進）により内径側の圧力を低下させる方法や、裏ばねとは逆に流体の旋回を阻害する溝をケーシング側に設け、旋回損失を制御するケースもある[24]~[28]。

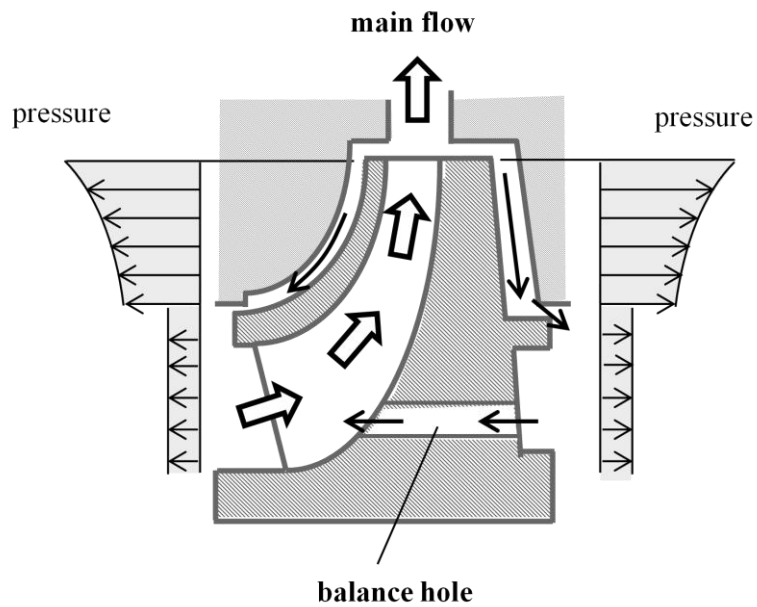


Fig.1.4 Balance hole [13]

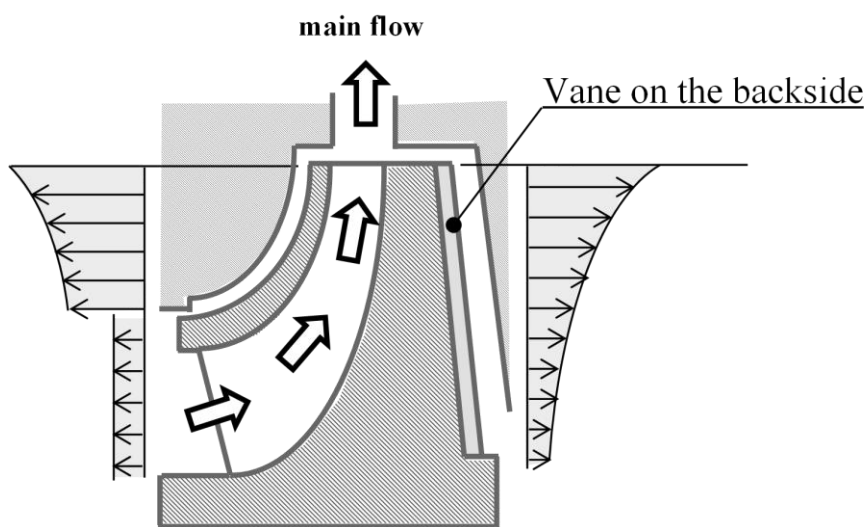
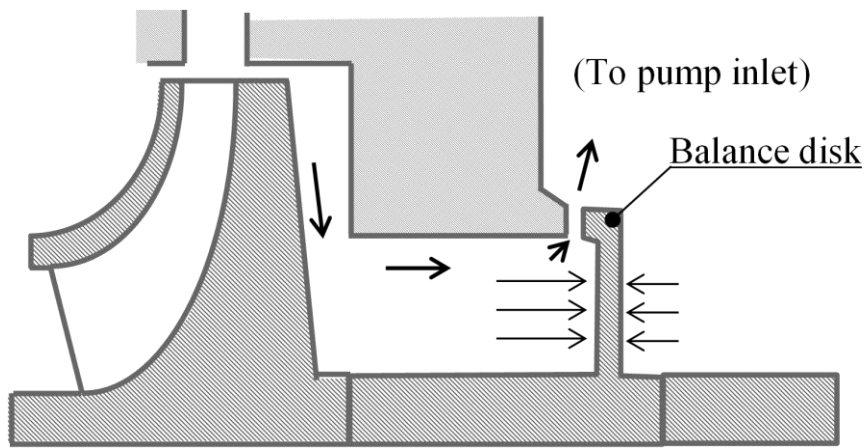


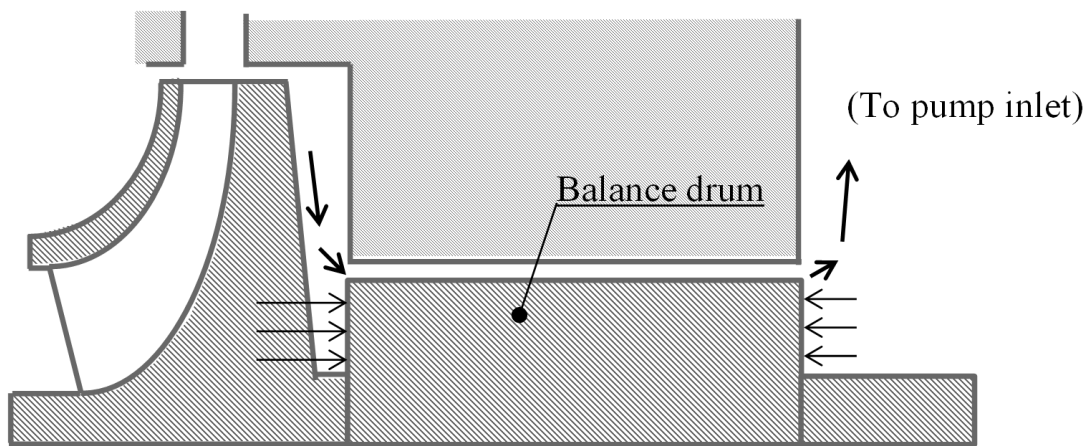
Fig.1.5 Vane on the backside of the impeller [13]

多段ポンプに用いられるバランス機構としては、Fig.1.6 に示すバランスディスクおよびバランスドラムがある[29]~[31]。Fig.1.6(a)に示すバランスディスクは、回転軸側に設けられたディスク状の部品により、インペラの軸スラストと反対方向の荷重を生み出す機構である。回転軸側が軸方向にわずかに動くことが可能であり、静止しているケーシ

ング側と回転軸側の隙間によりバランスディスク上流の圧力が変化するため、軸方向の荷重を自動調整することが可能である。Fig.1.6(b)に示すバランスドラムは、径方向の隙間（環状隙間）により絞りを設けたものであり、隙間の可変調整機構はないものの、ドラム状の部品に作用する荷重により軸方向荷重をバランスする。



(a) Balance disk



(b) Balance drum

Fig.1.6 Axial thrust balancing device for pump [12]

1.3 ロケット用ポンプのバランスピストン機構

一般の流体機械と同様、ロケット用ターボポンプにおいても 1.2 節で述べたような軸推力の釣り合わせをする必要がある。ただし、ロケット用ターボポンプはサイズの制約から高速回転で運転するよう設計されるため、軸振動の観点、またターボポンプのサイズを小さくするという観点から、バランスディスクなどの比較的大掛かりな軸推力バランス装置を採用することは難しい場合が多い。また、インペラ出口からの漏れ流れは、軸受やシールの冷却に使用されるため、ターボポンプの内部の漏れ流れの流路（内部循環流路）は分岐が多く複雑となる[32][33]。

1.2 節で述べたような内部循環流路の各要素をモデル化し[32][34]、軸推力を精度よく推定しバランスするための取組はなされているものの、内部循環流路の複雑さから完全にバランスをさせることは難しい。比較的内部循環流路がシンプルで、かつ吐出圧の低い LE-5 エンジンの OTP では、バランスホールのみで軸方向荷重を調整している[35]という例はあるものの、通常のロケット用ターボポンプでは、バランスピストン機構と呼ばれる軸推力の自動調整機構が用いられる[36]~[40]。

バランスピストン機構の原理を Fig.1.7 に示す。バランスピストン機構は、インペラ外径側の No1 オリフィス、内径側の No2 オリフィスという 2 箇所の絞り機構と、その間のバランスピストン室から構成される。インペラ出口から No1 オリフィス、バランスピストン室、No2 オリフィスへと流体が流れることで圧力損失が発生する。ロータ全体が軸方向に動くことが可能な構造になっている。Fig.1.7 の左方向（インペラ背面から前面の方向）にロータが動くと、No1 オリフィス隙間が狭く、No2 オリフィス隙間が広がる。これにより、No1 オリフィスの圧力損失が増加するため、バランスピストン室の圧力が低下し、インペラ背面の圧力荷重が低下する。逆に、Fig.1.7 の右方向にロータが動いた場合は、No1 オリフィス隙間が広く、No2 オリフィス隙間が狭くなる。これによりバランスピストン室の圧力が増加するため、インペラ背面の圧力荷重が増加する。このように、ロータが変位した方向と逆向きに圧力荷重が変化するため、軸方向荷重が自動的に調整される。原理はバランスディスクに近いが、インペラ背面を利用して設置するため、構造としては簡素となる。

なお、ポンプに関する JIS 規格では「バランスドラム」のことを「バランスピストン」と呼称する[41]ことがあり、ロケット用ターボポンプにおける「バランスピストン機構」

は一般的な流体機械で用いられる「バランスピストン」とは異なるものである。しかし、ロケット用ターボポンプでは開発初期より「バランスピストン機構」の名称が定着しており、他の用語を用いることはかえって混乱を招く恐れがあるため、本論文では「バランスピストン機構」の用語を使用するものとする。

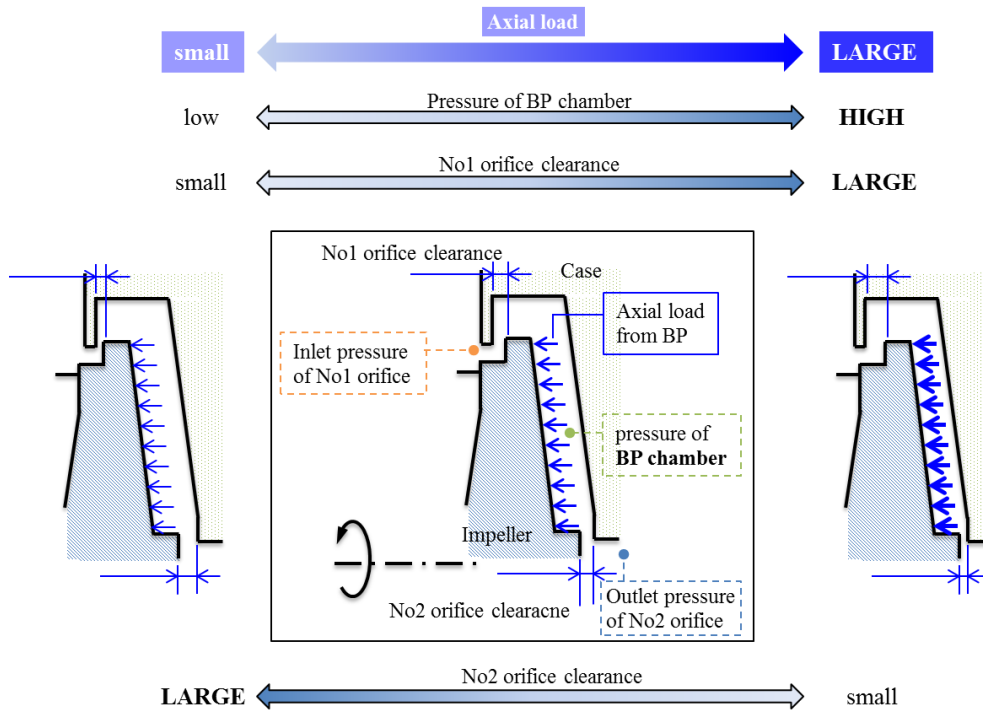


Fig.1.7 Balance piston mechanism

1.4 軸方向安定性評価の取組

バランスピストン機構は、1.3節で述べたように軸方向荷重の自動調整機能を有しており、静的には安定な特性を持っている。しかし、動的な特性としては不安定になる場合があり、ロケットエンジンの燃焼試験において振動問題が発生してきた[42]。燃焼試験で発生した事例[42]では、試験の開始後から軸方向の変位が急激に振動を始めたため、供試体保護の観点から燃焼試験が中断される事態となった。このように、軸方向の振動軸方向の振動が過大となった場合、No1オリフィスやNo2オリフィスが接触し、ケーシングやインペラを損傷するリスクがある。更には、本来圧力による軸方向荷重が印加されない軸受に対して過大な荷重が発生し、軸受を損傷することでターボポンプが作動不能に陥る可能性がある。そのため、軸方向の振動問題は、ロケットエンジンの正常な

作動を維持するために解決しなければならない課題である。

ロケット用ターボポンプは、サイズに比して出力が大きいことから、エネルギー密度が高く、ひとたび振動問題がおこると容易には解決できず、多大な労力が必要となる。本論文で対象とする軸方向の振動に限らず、径方向振動や流体的な振動の問題は、開発フェーズから運用フェーズに至るまで、数多く発生してきた[43]~[47]。特に、径方向の振動問題では、インペラやシールなどの要素により発生する流体力が不安定化に寄与する[48][49]ことが知られており、実験的、解析的な研究がおこなわれている[50]~[55]。

軸方向の流体力についても、インペラ前面や背面の隙間流れに関して流体力を把握するための研究がおこなわれてきた[56]~[59]。また、バランスピストンの流路に対し、バルクフローモデル用いた解析[60][61]や CFD を用いて特性を調べる研究[62][63]がおこなわれている。

一方で、バランスピストン機構は No1 および No2 オリフィス隙間が変化することで軸方向の荷重を調整するものであり、オリフィスの隙間変化が動特性に支配的である、という考え方に基づいた研究についてもおこなわれている[64]~[69]。Fig.1.8 に示すように、バランスピストン室の圧力を中間圧力で代表して表現し、変位（オリフィス隙間の変化）によるバランスピストン室圧力の変化に主眼を置いたモデルである。

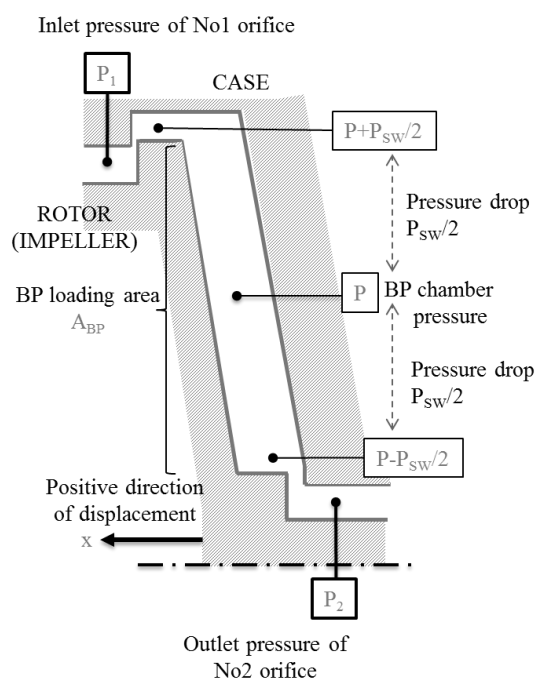


Fig.1.8 one-dimensional model of Balance piston

これらの研究により、バランスピストン室流体の圧縮性が安定性に影響していることが明らかとなってきた。ターボポンプの作動流体である液体水素は、比較的圧縮性が大きい流体である。Fig.1.9 に示す通り、水や液体酸素と比較すると、体積弾性率が小さい。このような液体水素の特性（圧縮性）に起因し、ロータが変位した際のバランスピストン室圧力の応答が遅れ、軸方向に不安定となりうる。

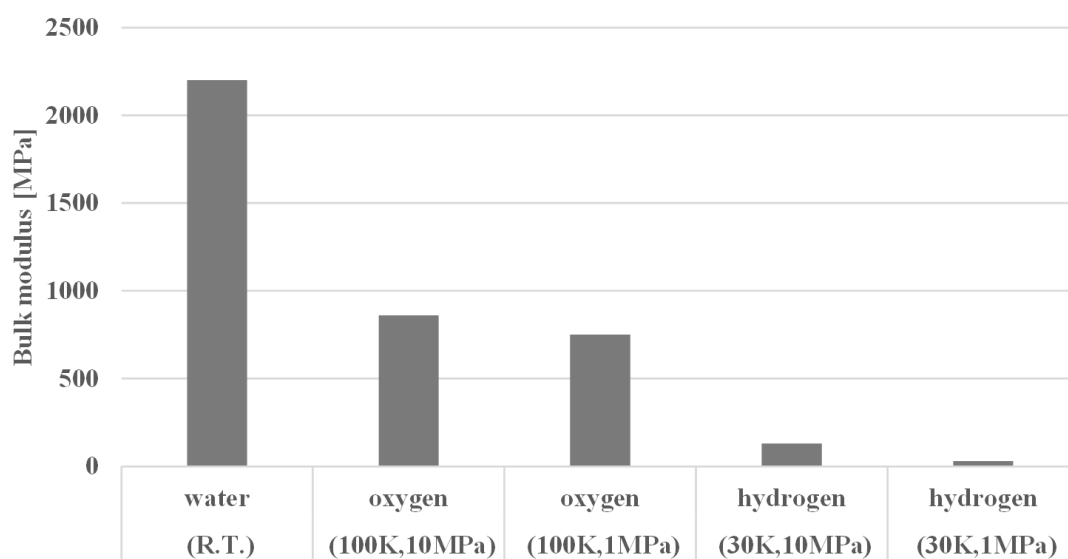


Fig.1.9 Comparison of bulk modulus

以上の研究により、バランスピストン機構が軸方向に不安定化するメカニズムが把握されてきたものの、未だ実験的な検証や設計的な知見の検討がなされていない部分も多い。そもそも、軸方向の振動問題は、ロケット用ターボポンプの問題をきっかけに研究が進められてきたが、それまでの研究事例はあまりみられない。産業用ポンプにおいて、バランスディスクを用いたポンプで軸方向の振動が発生したという報告もあるが、その詳細なメカニズムや対策についてはあまり詳細な記述はない[70]。実験的な検証は事例が少なく、パラメータの影響を個別に検証するなどのモデルの検証はおこなわれていない。また、軸方向の安定性と、設計的に必要な性能との関連についての研究は十分とは言えない。

更に、オープンインペラを用いた H3 ロケットのターボポンプの開発において軸方向

の振動問題が発生している[71]。従来の1次元モデルによる振動モードと異なる点がみられたことから、大口径のオープンインペラの採用[71][72]により、インペラの弾性変形が無視できなくなり、安定性に影響した可能性や、バランスピストン室流体の音響モードがインペラの弾性変形と連成した可能性などが考えられているが、これらの事象についての研究はおこなわれていない。

1.5 本論文の目的と構成

1.4 節で述べたように、バランスピストン機構に関するこれまでの研究により、以下の事象が明らかになっている。

- ・1次元的なモデルを用いた検討より、動的な不安定化はバランスピストン室流体の圧縮性に起因していること
- ・上記のメカニズムは、1次元的なモデルを用いることにより概ね検討可能であること

一方で、以下の課題については未だに十分な検討がされていない。

- ・実験的な検証事例が少ないこと（特に、パラメータの影響を詳細に実験的に調査した研究）
- ・不安定化のメカニズムから実際の製品設計をどうすべきか、の指針が十分明らかになっていない
- ・開発で新しく発生した不適合要因として挙げられている、インペラの弾性変形や流体音響の影響が明らかになっていない

本論文は、ロケット用ターボポンプの設計をするにあたり、バランスピストン機構の動的安定性に関する評価ができるようにしたい、との動機に端を発している。本論文の目的は、既存研究ではあまり評価されてこなかった以下の3つの項目である。

- (1) バランスピストン機構の1次元モデルの実験的な検証
- (2) バランスピストン機構の性能と動的安定性を両立する設計指針の提案
- (3) 従来考慮されてこなかった軸方向の動的安定性に関わる要素（弾性変形や音響振動）を考慮した評価

各章の概要を以下に示す。

第2章では、既存の1次元モデルによる動的安定性評価手法を検証するため、簡易的

な実験装置により 1 次元モデルと実験結果の比較をおこなう。従来、ターボポンプの試験は大掛かりな試験設備が必要であり、実験には多大な費用と期間が必要であった。そこで、圧縮性のある流体である空気を用いることで、バランスピストン機構の不安定現象を模擬可能な簡易的な実験装置を考案した。考案した装置を用いた実験結果と、1 次元モデルから予測される安定性およびパラメータが安定性に与える影響を比較し、妥当性を議論する[75].

第 3 章では、第 2 章で検証した 1 次元モデルを用いて、バランスピストン機構の性能と動的安定性の関係について調査する。従来、ターボポンプの設計は性能優先であり、動的安定性はほぼ設計が完了するフェーズ、もしくは実験でトラブルが発生してから評価する、といった状態であった。本章では、設計の初期段階から動的安定性を評価項目として考慮できる手法として、計算負荷の小さい線形解析を用いたモンテカルロシミュレーションを実施する。性能と動的安定性が両立する条件（解空間）を調査し、設計指針について議論する[76].

第 4 章では、軸方向の安定性に影響を与える要素として考えられるインペラの弾性変形に着目する。第 3 章までの 1 次元モデルを拡張し、弾性変形を考慮したモデルを考案した上で、弾性変形モードの動的安定性を議論する[77].

第 5 章では、インペラの弾性変形とバランスピストン室流体の音響振動が連成について検討する。バランスピストン室の流体が径方向に圧力分布を持つモードと、弾性変形モードの形状が比較的近いことから、両者が連成して不安定化する可能性が考えられる。弾性変形を考慮可能な FEM モデルと、流体の音響振動が考慮可能な特性曲線法を用い、連成シミュレーションを実施する。シミュレーションによる軸方向の振動の挙動を調べることで、弾性変形と音響振動の連成による不安定化現象の有無について議論する[78].

第 2 章 バランスピストン機構の 1 次元動特性モデルの実験による評価

2.1 本章の目的

本章では、バランスピストン機構の 1 次元動特性モデルについて、実験的に検証した結果を示す。1 次元動特性モデルは、CFD 解析との比較[67]や実際のターボポンプの試験結果との比較[42]により、その有用性が示されているものの、実験的にパラメータの影響を詳細に調査するなどの検証は未だ十分とは言えない。しかし、実際のターボポンプにおけるバランスピストン機構の環境を模擬するためには多大な費用と期間が必要であり、実験的な検証の機会が限定されてきた。本章では簡易的にバランスピストン機構の特性を模擬する装置について示した上で、実験結果を 1 次元動特性モデルと比較する。

2.2 1 次元モデルの方程式

2.2.1 1 次元モデルの構成

1 次元動特性モデル[64][67]に用いられる圧力および変位を Fig.2.1 に示す。No.1 オリフィス上流圧 P_1 および No.2 オリフィス下流圧 P_2 は境界条件として与え、バランスピストン室圧 P はオリフィスで発生する圧力損失およびバランスピストン室内の旋回損失から計算される。インペラに印加されるバランスピストン室圧力 P による軸方向の荷重 F は、バランスピストン室の圧力を P で代表し、バランスピストン室荷重面積 A_{BP} をかけることで算出する。軸方向のロータ変位 x は以下の方向を正方向として定義する。

- ・ No.1 オリフィス隙間が小さくなる方向
- ・ No.2 オリフィス隙間が大きくなる方向
- ・ バランスピストン室容積が大きくなる方向

1 次元モデルの模式図を Fig.2.2 に示す。質量 M を持ったロータの変位 x は可変オリフィスである No1 および No2 オリフィスの隙間と連動しており、オリフィス隙間の変化に伴いバランスピストン室圧力 P および圧力荷重 F が変化するモデルである。

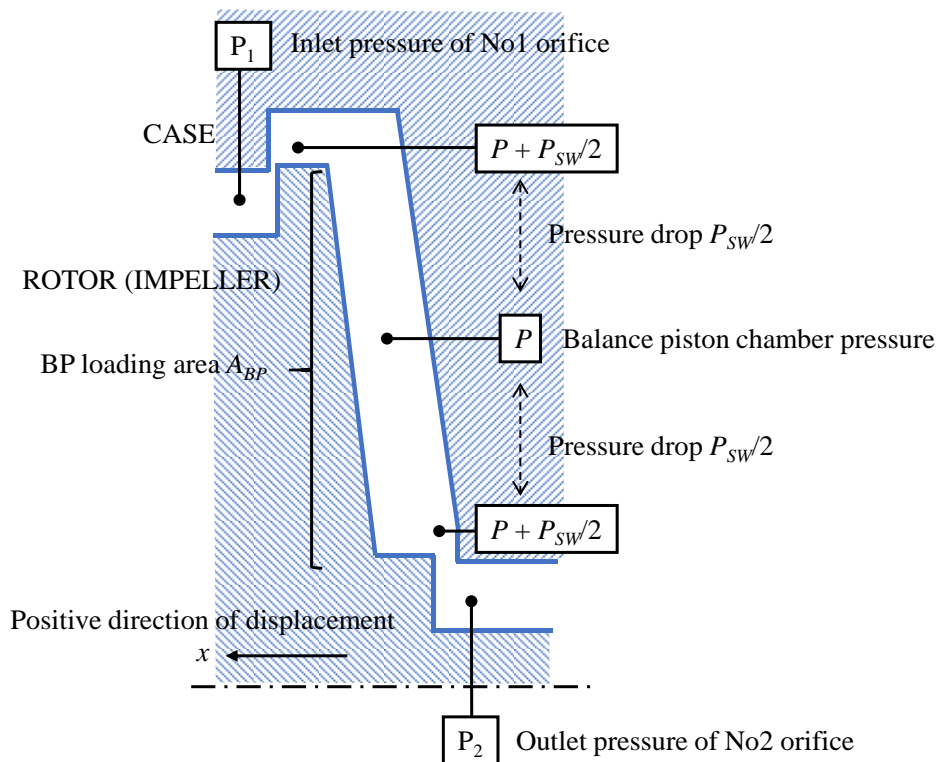


Fig.2.1 One-dimensional model of Balance piston

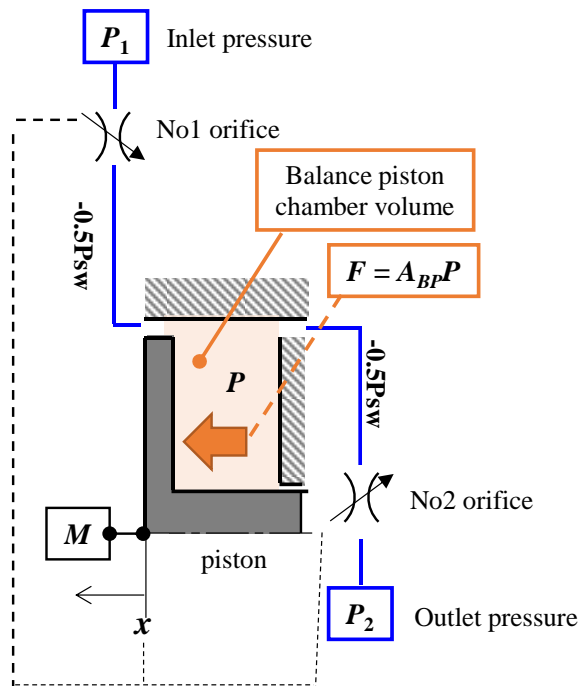


Fig.2.2 Diagram of one-dimensional model

2.2.2 方程式の線形化

バランスピストン機構に関して基礎となる式を式(2.1)～式(2.3)に示す。バランスピストン室の圧力変化は、式(2.1)右辺に示すバランスピストン室に流入する流体の収支および容積変化に加え、体積弾性率 K_f とバランスピストン室容積 V_0 の逆数をかけたもので表される。No1 オリフィスよりバランスピストン室に流入する流量は Q_1 、No2 オリフィスより流出する流量は Q_2 、バランスピストン室の容積変化はバランスピストン室荷重面積 A_{BP} にロータ速度 dx/dt をかけたものである。式(2.2)は No1 および No2 オリフィスでの圧力損失の式を示している。式(2.3)はオリフィスを通過する流体の流量と、オリフィスの絞り部の断面積の関係を示している。No1 および No2 オリフィスの流量係数は C_{d1} 、 C_{d2} 、流速は U_1 、 U_2 で表す。静的なつり合い点における No1 および No2 オリフィスの軸方向の隙間は x_{10} 、 x_{20} とした。

$$\frac{dP}{dt} = \frac{K_f}{V_0} \left(Q_1 - Q_2 - A_{BP} \frac{dx}{dt} \right) \quad (2.1)$$

$$P_1 - P = \frac{1}{2} \rho U_1^2, \quad P - P_2 = \frac{1}{2} \rho U_2^2 \quad (2.2)$$

$$Q_1 = U_1 C_{d1} \pi D_1 (x_{10} - x), \quad Q_2 = U_2 C_{d2} \pi D_2 (x + x_{20}) \quad (2.3)$$

これらの式を整理し、軸方向変位とバランスピストン室圧力の関係を導出する。式(2.1)に式(2.2)および式(2.3)を代入すると式(2.4)が得られる。式(2.4)の右辺に含まれる変位 x 、バランスピストン室圧力 P について、線形化した上で整理すると式(2.5)となる。ここで、 Δx および ΔP は式(2.6)で表され、平衡点の値である P_0 、 x_0 からの変動成分を示す。式(2.5)中に示す係数は、式(2.7)～(2.9)で定義するものとする。

$$\frac{dP}{dt} = \frac{K_f}{V_0} \left\{ \left(\frac{2}{\rho} \right)^{0.5} (P_1 - P)^{0.5} C_{d1} \pi D_1 (x_{10} - x) - \left(\frac{2}{\rho} \right)^{0.5} (P - P_2)^{0.5} C_{d2} \pi D_2 (x + x_{20}) - A_{BP} \frac{dx}{dt} \right\} \quad (2.4)$$

$$V_K \frac{dP}{dt} = -Q_x \Delta x - Q_p \Delta P - A_{BP} \frac{dx}{dt} \quad (2.5)$$

$$P = \Delta P + P_0, \quad x = \Delta x + x_0 \quad (2.6)$$

$$V_K = V_0/K_f \quad (2.7)$$

$$Q_x = \left(\frac{2}{\rho}\right)^{0.5} (P_1 - P)^{0.5} C_{d1} \pi D_1 + \left(\frac{2}{\rho}\right)^{0.5} (P - P_2)^{0.5} C_{d2} \pi D_2 \quad (2.8)$$

$$Q_p = \left(\frac{2}{\rho}\right)^{0.5} \frac{C_{d1} \pi D_1 (x_{10} - x_0)}{2(P_1 - P)^{0.5}} - \left(\frac{2}{\rho}\right)^{0.5} \frac{C_{d2} \pi D_2 (x_0 + x_{20})}{2(P - P_2)^{0.5}} \quad (2.9)$$

2.2.3 バランスピストン室の圧力応答

林ら[64]では、上記の式を元にバランスピストン機構に働く外部荷重に対する応答を伝達関数を用いて評価し、安定・不安定を判別した。本論文では、バランスピストン室の圧力応答の特徴を分析するために、まずは変位に対する圧力の応答に着目して式を整理していく。変位 x が単振動する場合を考え、圧力 P の応答の位相差を θ 、応答振幅を a_p とすると、 Δx および ΔP は式(2.10)で表される。式(2.10)を式(2.5)に代入した上で整理すると、変位 Δx に対する荷重応答 ΔF は、 ΔP に荷重面積 A_{BP} を乗じたものであり、式(2.11)のように表現できる。式(2.11)右辺の荷重応答は複素数で表現されており、虚部の値が荷重応答の減衰力成分に相当する。虚部の値が負の場合は正の減衰、正の場合は負の減衰となるため、虚部の符号により流体力の減衰の正負が判別できる。

$$\Delta x = e^{j\omega t}, \quad \Delta P = a_p e^{j\omega t} \quad (2.10)$$

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = A_{BP} \frac{\Delta P}{\Delta x} = -A_{BP} \frac{Q_x + j\omega A_{BP}}{Q_p + j\omega V_K} \quad (2.11)$$

2.2.4 固有値および減衰比の算出

バランスピストン室の圧力応答が不安定になった場合、実際の現象としてはロータを含む系としてある固有値をもった自励振動が発生することになる。そのため、圧力応答

の特性だけでなく、系としての固有値や減衰についても算出できることが望ましい。式(2.12)に示す運動方程式と、流体と変位の関係式である式(2.5)を連立した方程式の解を λ とすると式(2.13)となり、これを整理して式(2.14)が導かれる。この特性方程式の解を求めることより、ロータの質量 m_0 を考慮したバランスピストン機構としての軸方向の固有振動数および減衰比 ζ を求めることが可能である。式(2.12)中の減衰係数 c_0 はバランスピストン以外の外部減衰要素であるが、通常のターボポンプにおいては軸方向の動きに対して大きく減衰を発生する要素はなく、また液体水素といった非常に粘性の小さい流体中で作動することから粘性減衰を期待できないため、本論文ではゼロとした。

$$m_0 \frac{d^2x}{dt} + c_0 \frac{dx}{dt} = F \quad (2.12)$$

$$m_0 \lambda^2 + c_0 \lambda = \Delta F = -A_{BP} \frac{Q_x + \lambda A_{BP}}{Q_p + \lambda V_K} \quad (2.13)$$

$$(m_0 V_K) \lambda^3 + (c_0 V_K + m_0 Q_p) \lambda^2 + (c_0 Q_p + A_{BP}^2) \lambda + A_{BP} Q_x = 0 \quad (2.14)$$

本章では、式(2.4)および式(2.12)を線形化することなく直接時系列で計算するシミュレーションについても並行して実施した。

2.3 実験による検証方法の検討

2.3.1 実験装置の原理

バランスピストン機構の実験的な検証をおこなうにあたり、実験装置のコンセプトを Fig.2.3 に示す。ターボポンプにおけるバランスピストン機構はインペラ背面部分に設置され、No1 および No2 オリフィス、バランスピストン室、圧力荷重を受けるインペラを備えている。バランスピストン機構に焦点を絞るため、これらの要素のみを模擬した構成とした。No1 および No2 オリフィスとバランスピストン室を設けた上で、インペラ部分は羽根車ではなく圧力荷重を受ける面積のみを模擬するディスク形状とした。

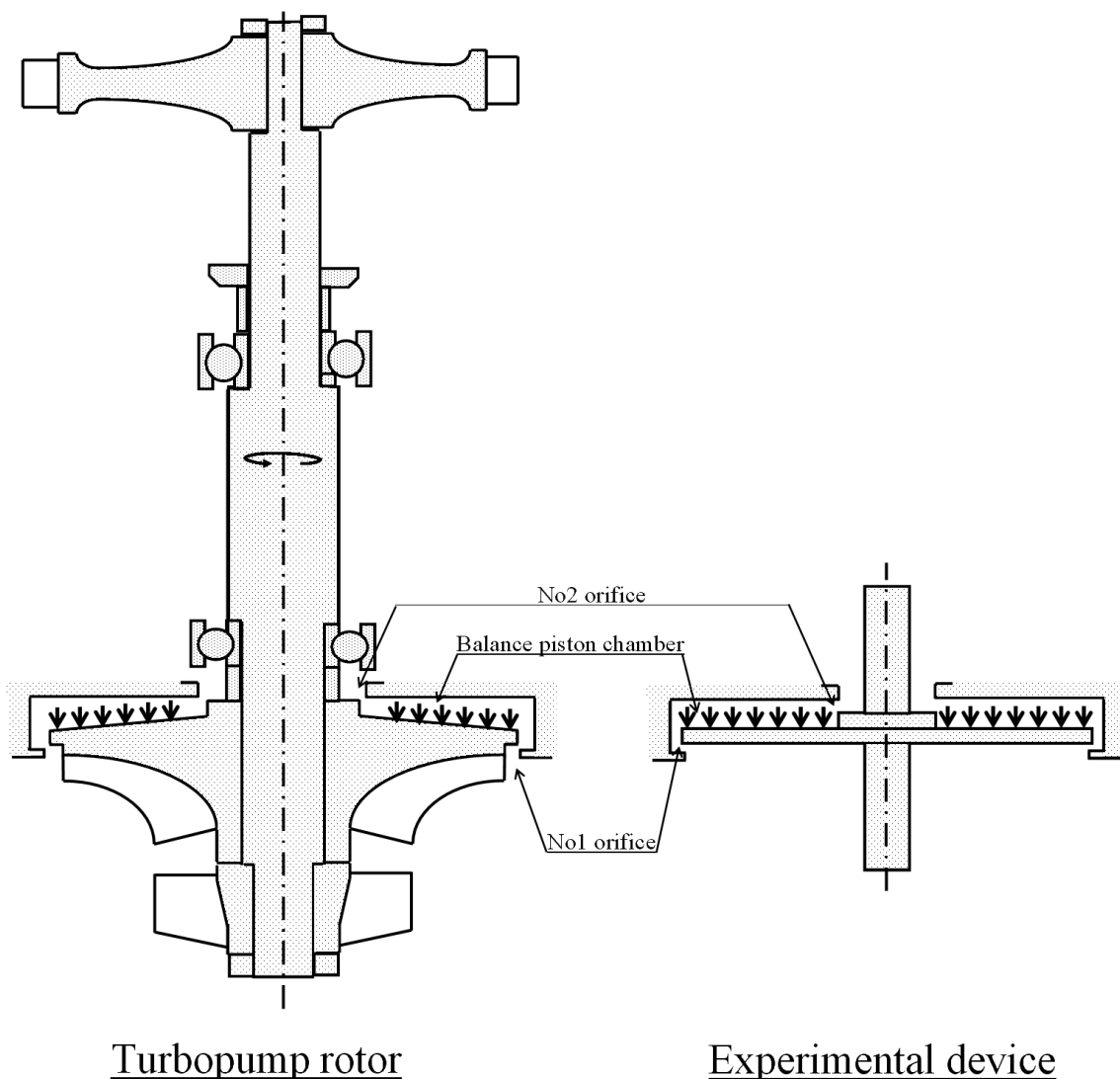


Fig. 2.3 Concept of experimental device of balance piston mechanism

軸方向の荷重が調整される原理を Fig.2.4 に示す. No1 オリフィス上流と No2 オリフィス下流に圧力差を設けることで, No1 オリフィスから No2 オリフィスへと流体の流れが生じる. ピストン下側は No1 オリフィス上流圧力 P_1 を受け, ピストン上側はバランスピストン室圧力 P および No2 オリフィス下流圧 P_2 を受けるため, No1 および No2 オリフィスでの圧力損失の分, 圧力荷重はピストン下側から上側に押す方向が大きくなる. しかし, ピストン部分の重量 mg がピストン上側から下側に向けて作用するため, 圧力荷重とピストン重量が同等となる位置で静的にバランスする. ピストンに作用する荷重は式(2.15)で表される.

$$P_1 \frac{\pi}{4} D_1^2 - m_0 g = P A_{BP} + P_2 \frac{\pi}{4} D_2^2 \quad (2.15)$$

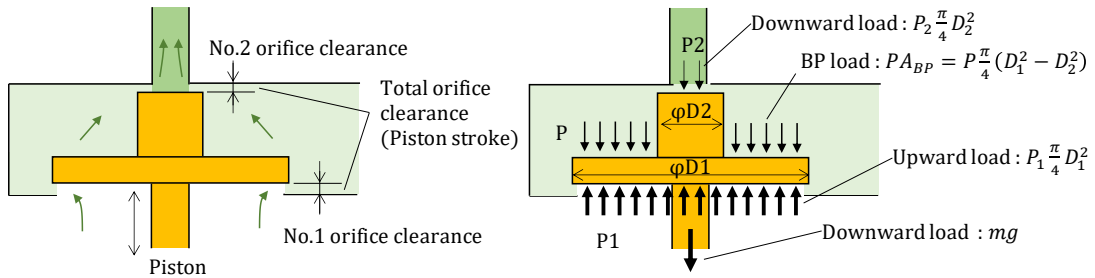


Fig. 2.4 Force balance of experimental device

2.3.2 実験装置の構成

実験装置の構成を Fig.2.5 に示す。ピストンの上部にはバランスピストン機構を模擬した円形の環状隙間である No.2 オリフィスおよび No1 オリフィスが設けられており、両オリフィスの間はケーシングにより囲まれてバランスピストン室を形成している。ピストンのシャフト部分は上下方向に滑らかに可動するようリニアベアリングにより支持されている。ピストンの上下方向の動きは No1 および No2 オリフィスの隙間の合計値（以後、総隙間と呼ぶ）の範囲で動くようになっている。

本実験装置は、圧縮性を有する空気を流体として用いる。一般家庭用掃除機を No2 オリフィス下流に設置し バランスピストンの上下流に差圧を発生させた。No.2 オリフィス下流圧およびバランスピストン室圧力は負圧となる。

ピストン室の位置およびバランスピストン室圧力は、ピストンの最下部に設置する円形状の板を装着することで調整することができる。また、バランスピストン室は付加容積を加えることで、容積を調整可能な構造とした。

No.1 オリフィス上流は常に大気圧であり一定とみなせるが、バランスピストン室圧および No.2 オリフィス下流圧は圧力センサ（共和電業、PGM-02KG）を用いて計測した。バランスピストンを通過する流量は、No.2 オリフィス下流に設置した流量計（SMC、PFMB7202）を用いて計測した。ピストンの変位は、下部に設置した渦電流変位センサにより計測した。

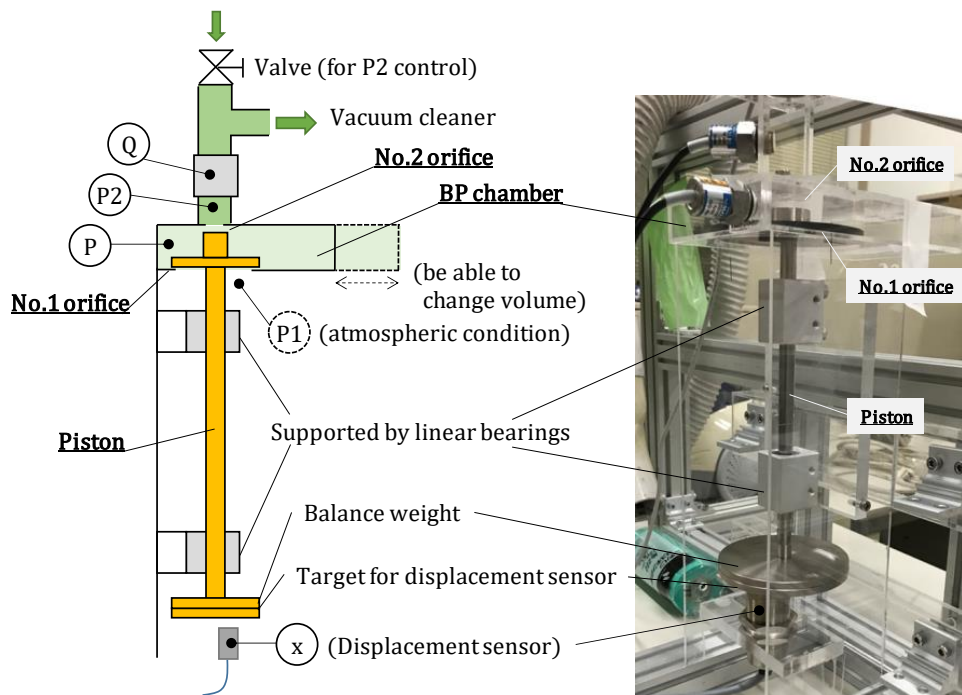


Fig. 2.5 Experimental device of Balance Piston mechanism

2.4 実験装置

2.4.1 実験装置の諸元

実験装置の諸元を Table 2.1 に示す。バランスピストン機構において、オリフィス隙間とバランスピストン室圧力による荷重の関係を示したものを荷重特性曲線と呼ぶこととする。この曲線は、式(2.4)において動的な成分をゼロとした場合の関係式から求まるものである。本実験装置における荷重特性曲線を Fig. 2.6 に示す。No1 オリフィス隙間が狭い領域では、バランスピストン室圧力が小さくなるため、圧力荷重が小さい。No1 オリフィス隙間が大きいほど、No1 オリフィスでの圧力損失が小さくバランスピストン室の圧力荷重が大きくなる。Fig. 2.6 中の黒丸プロットは、装置の設計点を示している。通常のロケット用ターボポンプのバランスピストン設計では、外部荷重の予測ずれや変化に対して対応可能なよう、圧力荷重が荷重特性曲線の中間付近となるように設計されるため、今回の実験装置についてもそのように設計した。Table 2.1 中に示した No.1 および No.2 オリフィスの流量係数については、後述する実験の結果を踏まえ、0.9 とした。

Table 2.1 Specifications of experiment device and experimental conditions

Item		Value	Unit	
D_1	No.1 orifice diameter	0.090		m
D_2	No.2 orifice diameter	0.025		m
V_0	Balance Piston chamber volume	300	$\times 10^{-6}$	m^3
$P_1 - P_2 (\Delta P)$	(No.1 upstream pressure)– (No.2 downstream pressure)	3	$\times 10^3$	Pa
$x_{all} (= x_{10} + x_{20})$	Total orifice clearance	1.7	$\times 10^{-3}$	m
m_0	Piston mass	0.8		kg
K_f	Bulk modulus of air	0.14		MPa
ρ	Density of air	1.3		kg/m^3
C_{d1}	Flow coefficient of No.1 orifice	0.9		–
C_{d2}	Flow coefficient of No.2 orifice	0.9		–

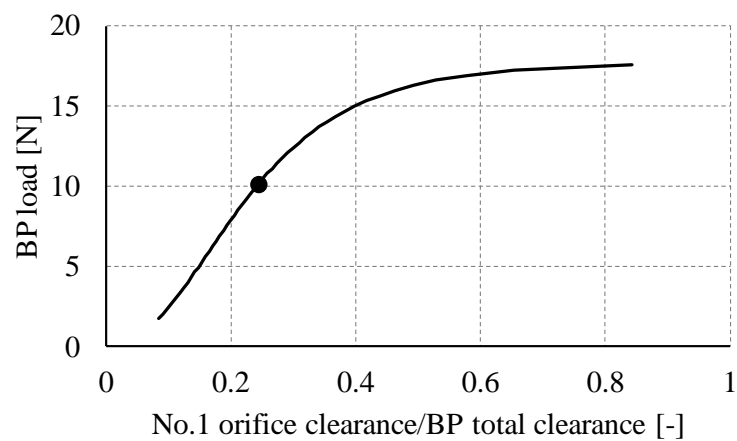


Fig. 2.6 Balance Piston load characteristic

2.4.2 実験パラメータ

実験条件は Table 2.1 に示した値を基本とした上で、一部のパラメータについては値を変化させて実験を実施した。変化させたパラメータおよび範囲を Table 2.2 に示す。

バランスピストン室容積 V_0 は、バランスピストン室流体の圧力応答の遅れおよび動的安定性に大きく影響することが明らかとなっており [64][67]、パラメータとして選定した。バランスピストン室容積 V_0 は脱着可能な付加容積部の大きさを変更することで調整した。

バランスピストンの上下流の差圧およびバランスピストン総隙間は、既存研究で安定性への影響が示されており [69]、パラメータとした。上下流の差圧は実験装置の最上部に設けられたバルブ開度を変化させることで調整した。上下流差圧を調整する場合、ピストンのつり合い位置、すなわちつり合い位置における No1 オリフィス隙間が変化するため、Table 2.2 に示すようにピストン質量 m_0 を変更して調整した。ピストン質量 m_0 はピストン最下部の円板状の重りの交換により変更した。バランスピストン総隙間（ピストンのストローク）は、ピストンの No2 オリフィス部の構造部材の長さを交換することで調整した。

Table 2.2 Parameter ranges of experimental conditions

Item	Nominal value	Parameter range	Unit	
V_0	300	200 ~ 500	$\times 10^{-6}$	m^3
$P_1 - P_2 (\Delta P)$	3	2 ~ 6	$\times 10^3$	Pa
$x_{all} (= x_{10} + x_{20})$	1.7	1.2 ~ 2.7	$\times 10^{-3}$	m
m_0	0.8	0.5~1.8		kg

2.5 実験結果

2.5.1 自励振動の挙動

実験の結果、一部の条件ではピストンに外乱を加えると自励振動が発生することが確認された。ピストンの自励振動が発生した状態では、変位や圧力などの実験条件の平均値が、自励振動が発生していない状態と比較して変化したため、以下の方法により実験を実施した。

① 静特性データの取得

自励振動が発生しないよう、ピストンに外乱を加えることなく実験装置を作動させて安定した状態とした。その上で10秒間データを取得した。10秒間のデータの平均値を実験条件の設定値とした。

② 動特性データの取得

ピストンに外乱を加え、その後の挙動を確認した。自励振動に発展した場合、振幅が一定のリミットサイクルとなった状態から、10秒間データを取得した。FFT処理により周波数や振幅を算出した。

実験結果の一例を Fig.2.7 に示す。自励振動の発生がみられない時系列データを左側に、自励振動の発生がみられた時系列データを右側に示している。自励振動の発生がみられない場合は、No.1 オリフィス隙間が 0.38mm 付近で、No.2 オリフィス下流圧は-3kPa 付近であり、変位・圧力共に安定した状態となっている。自励振動の発生がみられる場合は、No.1 オリフィス隙間がほぼゼロから 1.2mm の範囲で振動する様子が確認できる。バランスピストン室圧 P についても、変位と同様に振動している。シミュレーションと実験結果の比較を Fig.2.8 に示す。No1 オリフィス隙間、すなわち変位の振動波形はおおむね一致している。シミュレーションと実験結果の差異としては、シミュレーションで境界条件とした No.2 オリフィス下流圧 P_2 が、実験結果では下側にアンダーシュートしている点が挙げられるものの、それ以外は実験とシミュレーションでよく一致している。変位とバランスピストン室圧力のリサージュ波形を Fig.2.8 に示す。No.1 オリフィス隙間が狭い 0.2 以下 (No1 オリフィス隙間が取りうる最大の値を 1 とした場合) の領域を除けば、両者の軌跡はほぼ一致している。

No2 オリフィス下流圧力のアンダーシュートは、自励振動の発生により No1 および

No2 オリフィスの隙間が変化するため、実験装置の配管システムのレジスタンスが変化し、掃除機の吸引特性により圧力変化が発生したものと考えられる。この下流圧力のアンダーシュートは、Fig.2.8 のリサージュで示されるように No1 オリフィス隙間が小さい領域でのバランスピストン室圧力に影響を与えているものの、範囲が限定的であり、バランスピストン室圧力の振動波形はシミュレーションと実験結果で概ね似た波形を示している。後述するように、軸方向の固有値や安定性は計算結果とよく一致しており、アンダーシュートによる影響は少ないと考えられる。

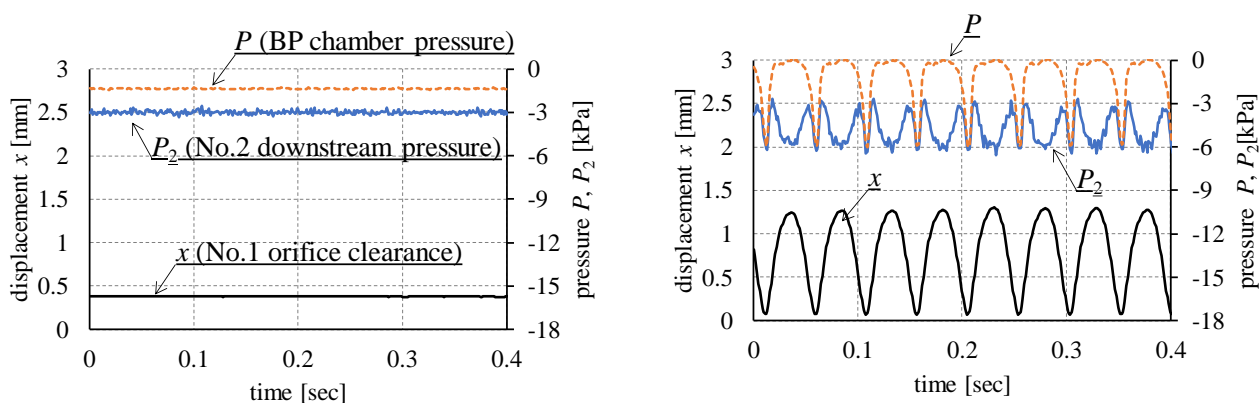


Fig.2.7 Experimental results of piston displacement x (No.1 orifice clearance) and pressure P, P_2 ($\Delta P = 3000$ Pa, $x_{all} = 1.7$ mm, $V_0 = 300$ cm³)

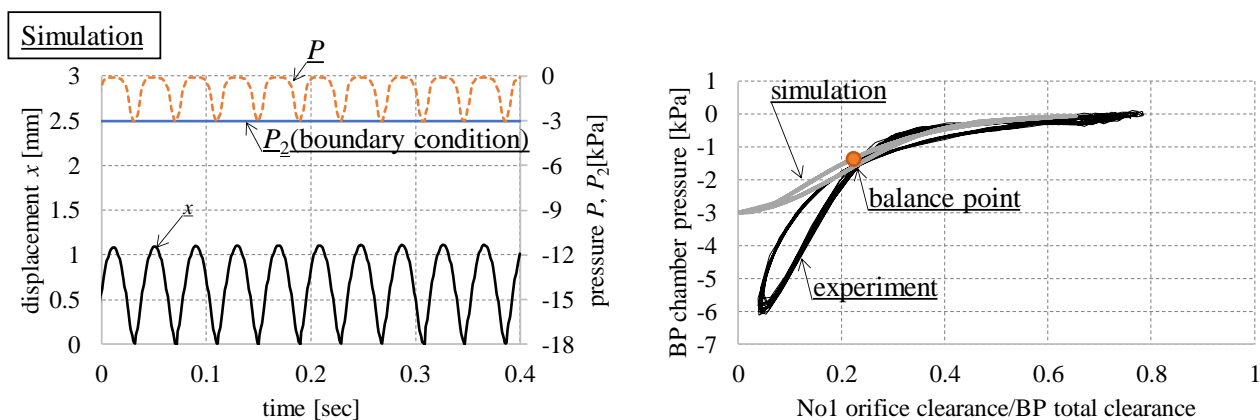


Fig.2.8 Simulation results (left) and Lissajous curves of No.1 orifice clearance and Balance Piston chamber pressure (right)

2.5.2 動的安定性の評価

実験パラメータを変化させた場合の結果を Fig.2.9～Fig.2.11 に示す。図中には線形解析およびシミュレーションの結果についても記載した。線形解析を実施した際、式(2.14)の特性方程式を解いて得られる1つの実根と2つの共役複素根のうち、一つの複素根から得られる実部と虚部の値を用いて減衰比を計算した。なお、実解は振動しない解であり本論文では議論しない。

Fig.2.9～2.11 において、左側のグラフは各結果の動的安定性を示すものであり、左軸の減衰比は線形解析により計算した値、右軸の振幅は実験・シミュレーション共に FFT 処理したデータのうち最大周波数での振幅を示している。

Fig.2.9 にバランスピストン室容積 V_0 を変化させた場合の結果を示す。200cc における減衰比はほぼゼロであり、バランスピストン室容積 V_0 の増加と共に低下する。実験結果の振幅は 200cc で自励振動の発生は見られず、300cc 以降は No1 オリフィス最大隙間の 25～50%程度の振幅が確認された。シミュレーションの振幅は 200～500cc まで、いずれの条件においても振動振動が発生した。安定・不安定の境界付近である 200cc の条件では、実験とシミュレーションに差異がみられるが、それ以外の条件での振幅は概ね一致している。自励振動が発生した場合の周波数は、線形解析、シミュレーション、実験の順に高く、20～30Hz 付近の値となった。自励振動の周波数は軸方向の剛性である荷重特性曲線（変位と圧力荷重の関係）の傾きにより影響を受ける。Fig.2.6 に示す変位と圧力のリサージュをみると、つり合い点から右側の No1 オリフィス隙間が大きい領域では勾配が大きく低下しており、変位により特性が変化する非線形な特性となっている。シミュレーションと実験の結果が、線形解析よりも周波数が小さいのは、この勾配が低下する領域があることで、軸方向の剛性が下がる効果が発生したためであると考えられる。

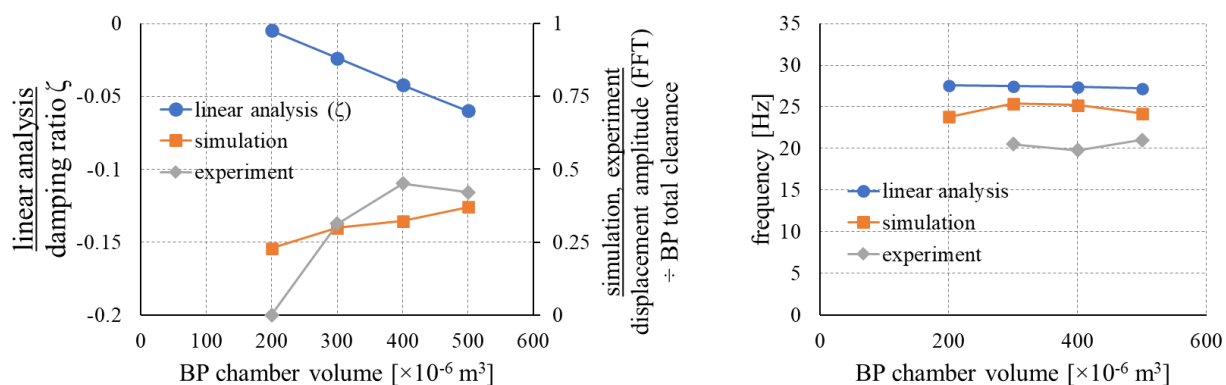


Fig.2.9 Effect of Balance Piston chamber volume V_0

Fig.2.10 にバランスピストン総隙間 x_{all} を変化させた場合の結果を示す. 3.2mm の場合, 線形解析・シミュレーション・実験のいずれも安定である. 2.7mm では実験のみが安定であるものの, 総隙間 x_{all} が大きくなると安定化するという傾向は一致している. 周波数については, 総隙間 x_{all} が大きくなると周波数が低下する傾向がみられる. Fig.2.12(a)に示すように, 総隙間 x_{all} が大きくなると, バランスピストン室圧力荷重の上限と下限は変化しない一方, 変位の変化幅は大きくなる方向に変化する. これにより, 軸方向の剛性が低下するため, 固有値が低下するものと考えられる.

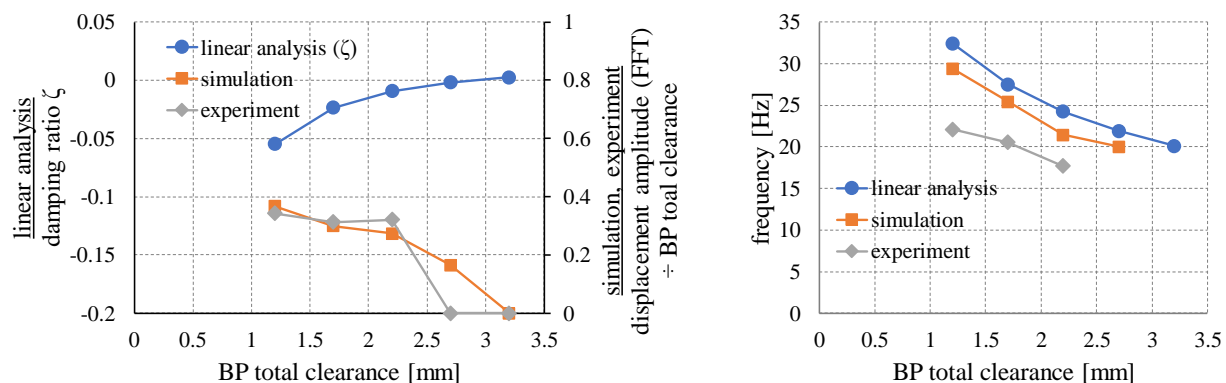


Fig.2.10 Effect of Balance Piston total clearance x_{all}

Fig.2.11 に, No1 オリフィス上流圧 P_1 と No2 オリフィス下流圧 P_2 の差圧 ΔP を変化させた場合の結果を示す. 2kPa の条件では, 線形解析の減衰比はゼロ付近であり, 安定・不安定の境界付近となる. この条件においては, シミュレーションと実験で差異がみられるものの, 3kPa 以上の条件ではシミュレーションと実験のいずれも自励振動が

発生した。周波数に関する大小関係は上述した 2 種類のパラメータの場合と同じである。Fig.2.12(b)に、上下流差圧 ΔP を変化させた場合の荷重特性曲線を示す。上下流差圧 ΔP を大きくした場合、変位に対する圧力荷重の勾配が大きくなり剛性が増加することがわかる。しかし、本実験の実施方法では、上下流差圧 ΔP の変化に対応してつり合い位置を調整するため、ピストンの質量を調整している。上下流差圧 ΔP が大きい場合にはピストン質量も大きくなるため、軸方向の剛性増加による効果が打ち消され、周波数がほぼ変化しない結果となっている。

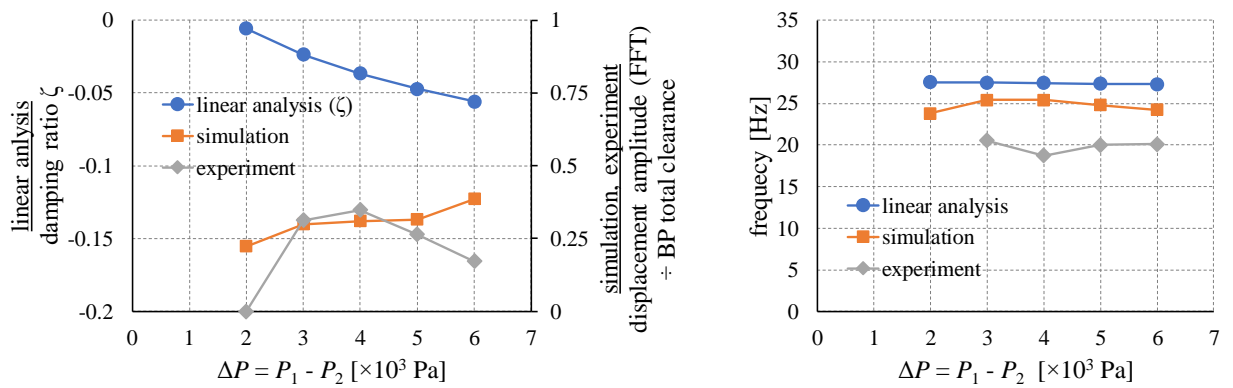


Fig.2.11 Effect of pressure difference between No.1 upstream and No.2 downstream $\Delta P (P_1-P_2)$

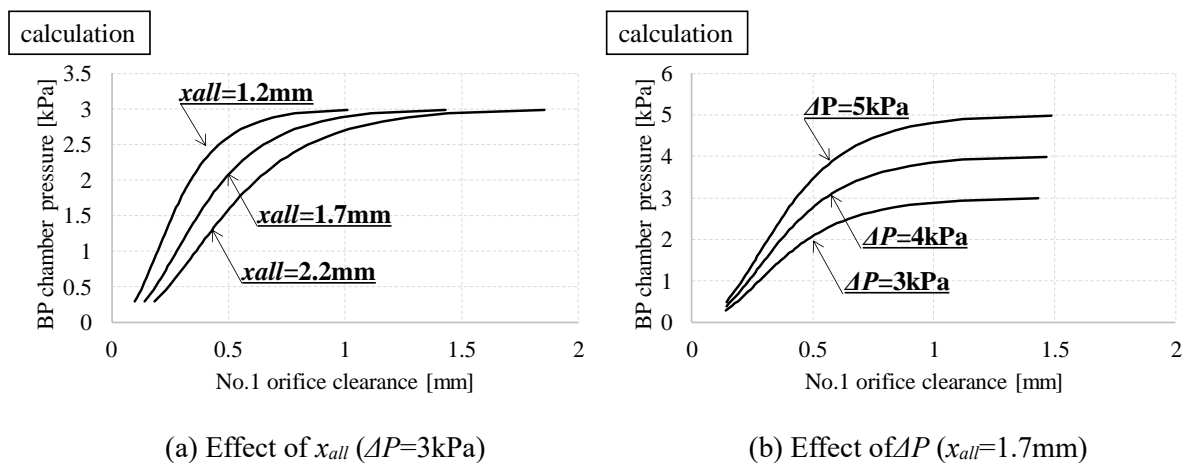


Fig.2.12 Effect of Balance Piston total clearance x_{all} (left) and pressure difference ΔP (right)

2.6 本章のまとめ

本章では、バランスピストン機構の1次元動特性モデルを検証するための実験装置を示し、モデルによる解析の結果と実験結果を比較し、検証した。バランスピストン機構のパラメータの変化による安定性の変化が、1次元的なモデルにより予測可能であることを実験的に確認した。バランスピストン室容積の増加、バランスピストン総隙間の減少、上下流差圧の増加は軸方向の安定性を低下させ、自励振動が発生することが実験的に検証された。結果として、バランスピストン機構の1次元的なモデル化の有用性を確認することができた。

バランスピストン機構の実験をする際、ロケット用ターボポンプの実機環境を用意するためには多大な費用と期間が必要となるが、本章で示した簡易的な実験装置により1次元的なバランスピストン機構の特性の再現が可能であることを示した。

第3章 1次元モデルを用いた動的安定性と性能の双方を考慮した設計方法

3.1 本章の目的

本章では、バランスピストン機構の設計において考慮すべき動的安定性と性能の関係について議論する。従来のロケット用ターボポンプ設計においては、軸スラストの調整能力やポンプ効率といった性能面にのみが着目されてきた。近年のバランスピストン機構に関わる研究により、動的安定性の評価がなされるようになってきたものの、設計フェーズの最終段階で実施される傾向がある。その段階においては、ハードウェアの諸元が概ね決定された状態であり、設計に大きく出戻りが出ない範囲でパラメータを調整することになる。このような性能優先の設計方法の問題点を明らかにするために、設計パラメータを網羅的に変化させた線形解析を実施し、設計的に成立する範囲を把握すると共に、バランスピストン機構の性能と動的安定性の関係について考察した。

3.2 バランスピストン機構の動的安定性と性能の評価指標

Fig.3.1 にロケット用ターボポンプの内部循環流路の一例を示す。圧力の高いターボポンプのインペラ出口からは、圧力の低いターボポンプ入口に循環する流れが発生する。インペラ背面に設置されたバランスピストン機構はこの流れを利用しており、No1 オリフィスおよび No2 オリフィスでの圧力損失によりバランスピストン室の圧力荷重が調整される。ロータ全体としては、バランスピストン室圧力による軸方向の荷重以外に、インデューサやインペラ前面、タービンといった他の部位で発生する荷重（以下、外部荷重 F_{OUT} と記す）が作用し、両者がつりあうことで軸方向にバランスする。バランスピストン室圧力による荷重は、軸方向の変位により変化するのに対し、外部荷重 F_{OUT} は通常変位に対する影響を受けにくく、一定として取り扱う。

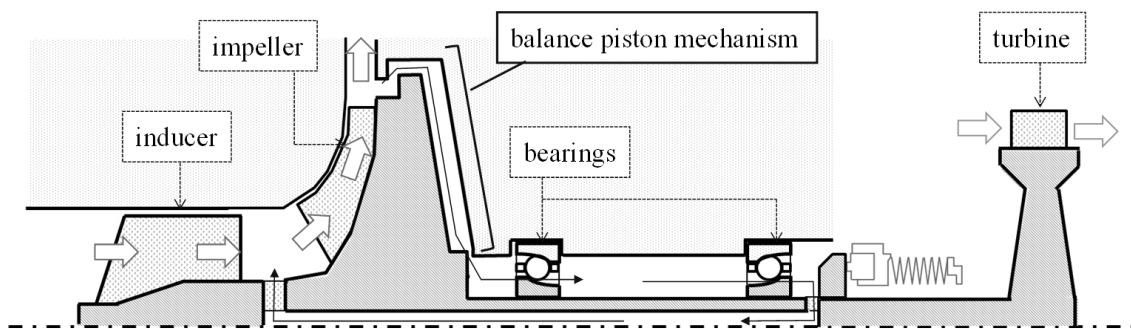


Fig.3.1 Recirculation flow in turbopump system

バランスピストン機構の設計上、重要な性能および性質として、以下の3つの項目が挙げられる。

・荷重調整能力 F_{BM}

Fig.3.2 に示す荷重特性曲線 (No1 オリフィス隙間とバランスピストン室圧力荷重の関係を示したもの) において、バランスピストン室圧力荷重が外部荷重 F_{OUT} とつり合う点と、バランスピストン室圧力荷重の上下限值との差を、荷重調整能力 F_{BM} と定義する。上下限との差は上限と下限で2つの値があるが、値の小さい方 (調整能力が少ない方) とする。

・体積効率 η_V

ポンプ主流の流量を G_{PUMP} 、バランスピストン通過流量を G_{BP} 、とし、式(3.1)により定義する。

$$\eta_V = 1 - \frac{G_{BP}}{G_{PUMP}} \quad (3.1)$$

・減衰比 DR

軸方向の動的安定性を示す指標であり、線形解析により計算する。

上記の項目のうち、荷重調整能力 F_{BM} と体積効率 η_V は静的な特性であり、従来からバランスピストン機構の設計において評価されてきた項目である。

第1章で述べた通り、ポンプの軸方向荷重の予測は従来から様々な研究がおこなわれているものの、予測精度には限界がある。荷重調整能力 F_{BM} が大きいほど、外部荷重 F_{OUT} の予測ずれや変化に対して対応が可能であり、バランスピストン機構の性質として

望ましい。

バランスピストン機構はターボポンプの内部循環流れを利用しており、No1 および No2 オリフィスを通過する流量は、最終的にポンプ入口へと循環する。結果として、バランスピストン機構で利用する流体は、インペラ出口で昇圧した状態からポンプ入口の圧力が低い状態へと変化するため、ポンプ動力としては損失となる。ターボポンプの動力損失はロケットエンジン全体の性能低下に寄与するため、バランスピストン通過流量 G_{BP} は小さいほど望ましく、すなわち η_V は大きいほうが望ましい特性である。

減衰比 DR は、軸方向の自励振動防止のために正の値となるよう設計する必要がある。

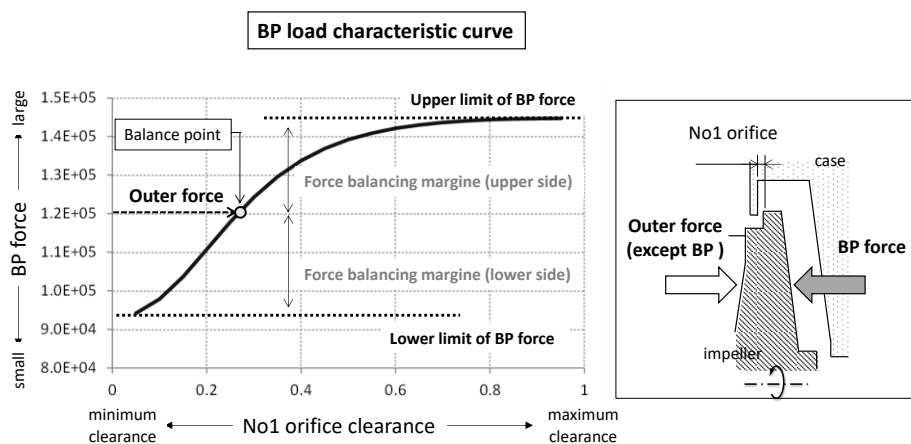


Fig.3.2 Relation between No1 orifice clearance and balance piston force

3.3 設計方法

3.3.1 計算方法

前節で述べた評価項目の計算方法について述べる。

まず、静的なつりあい点の状態を求める。つり合い点では、バランスピストン室圧力 P_0 による荷重と外部荷重 F_{OUT} が等しい状態であることから、式(3.2)によりバランスピストン室圧力 P_0 を計算する。

$$P_0 = \frac{F_{OUT}}{A_{BP}} \quad (3.2)$$

静的なつりあい点では、No1 および No2 オリフィスの流量は等しい。2章の式(2.2)，式(2.3)を用いると，式(3.3)が成立する。

$$P_1 - P = \frac{1}{2}\rho U_1^2, \quad P - P_2 = \frac{1}{2}\rho U_2^2 \quad (2.2)$$

$$Q_1 = U_1 C_{d1} \pi D_1 (x_{10} - x), \quad Q_2 = U_2 C_{d2} \pi D_2 (x + x_{20}) \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{\zeta\rho}\right)^{0.5} (P_1 - 0.5P_{SW} - P_0)^{0.5} \pi D_1 (x_{all} - x_0) \\ & = \left(\frac{2}{\zeta\rho}\right)^{0.5} (P_0 - 0.5P_{SW} - P_2)^{0.5} \pi D_2 x_0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

式(3.3)をつり合い点における No1 オリフィス隙間 x_0 について整理すると，式(3.4)が得られる。

$$x_0 = \frac{x_{all} D_1 (P_1 - 0.5P_{SW} - P_0)^{0.5}}{(P_1 - 0.5P_{SW} - P_0)^{0.5} D_1 + (P_0 - 0.5P_{SW} - P_2)^{0.5} D_2} \quad (3.4)$$

荷重調整能力 F_{BM} の計算には，バランスピストン室の圧力荷重の最大値（No1 オリフィス隙間が最も大きい状態）と最小値（No1 隙間が最も小さい状態）が必要である。式(3.3)を，つり合い点のバランスピストン室圧力 P_0 について整理すると式(3.5)が得られる。

$$P = \frac{D_1^2 (x_{all} - x)^2 (P_1 - 0.5P_{SW}) + D_2^2 x^2 (0.5P_{SW} + P_2)}{D_1^2 (x_{all} - x)^2 + D_2^2 x^2} \quad (3.5)$$

バランスピストン室の圧力荷重の最大値は $x = 0$ の場合であり，この時のバランスピストン室圧力は $P = P_1 - 0.5P_{SW}$ である。最小値は $x = x_{all}$ の場合であり，この時のバランスピストン室圧力は $P = 0.5P_{SW} + P_2$ である。以上より，荷重調整能力 F_{BM} は式(3.6)で表すことができる。

$$F_{BM} = \min \{ (P_1 - 0.5P_{SW})A_{BP} - F_{OUT}, \quad F_{OUT} - (0.5P_{SW} + P_2)A_{BP} \} \quad (3.6)$$

式(3.6)に式(3.2)代入し，式(3.7)が得られる。

$$F_{BM} = \min \{ (P_1 - 0.5P_{SW} - P_0)A_{BP}, (P_0 - 0.5P_{SW} - P_2)A_{BP} \} \quad (3.7)$$

体積効率 η_V は、つり合い点におけるバランスピストン室圧力 P_0 と No1 オリフィス隙間 x_0 を式(2.2), 式(2.3)に代入してバランスピストン通過流量 Q_1 を求めた上で, $G_{BP} = \rho Q_1$ として式(3.1)に代入することで計算できる。

減衰比 DR は、2章で示した線形解析手法を用い、式(2.14)の特性方程式により計算する。特性方程式の根としては、1つの実根と2つの共役複素根が得られる。ここでは振動する根に注目するため、共役複素根の虚部と実部の値を用いて減衰比を計算した。

$$(m_0 V_K) \lambda^3 + (c_0 V_K + m_0 Q_p) \lambda^2 + (c_0 Q_p + A_{BP}^2) \lambda + A_{BP} Q_x = 0 \quad (2.14)$$

3.3.2 計算条件

バランスピストン機構の設計パラメータとしては、Fig.3.3 に示すパラメータを選定した。ターボポンプの設計においては、インペラ径や出口圧力はエンジンシステム要求から決定されるものであり、バランスピストン機構として設計自由度のあるパラメータとした。

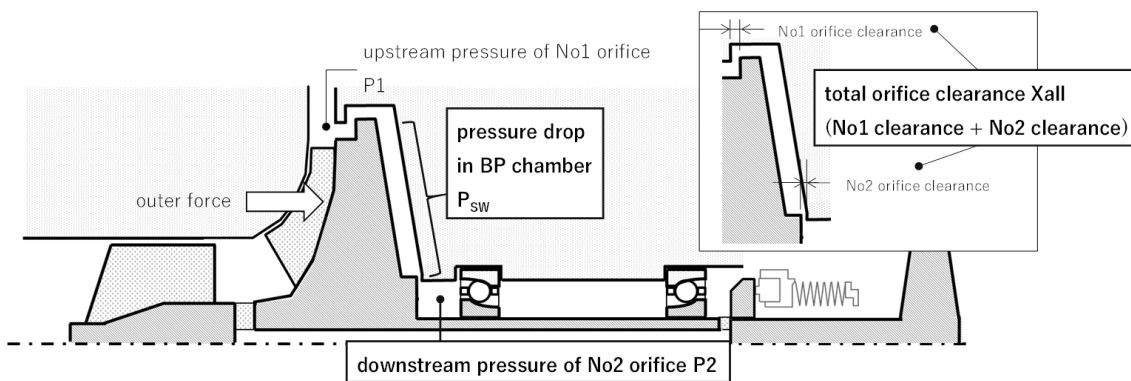


Fig.3.3 Design parameter of balance piston

本章で検討対象としたターボポンプ仕様の概略を Table 3.1 に示す。推力 30tonf 級液体水素ターボポンプを想定した。ターボポンプ仕様を元に、インペラの前面シュラウド

やタービンで発生する外部荷重 F_{OUT} を推定した。

Table 3.1 Specifications of the turbopump

Item	Value	Unit
Number of inducer stage	1	-
Number of impeller stage	1	-
Rotational speed	65,000	rpm
Pump inlet pressure	0.2	MPa
Impeller diameter	173	mm
Pump flow rate (G_{PUMP})	9.3	kg/s
Turbine inlet pressure	1.7	MPa
Turbine outlet pressure	1	MPa
Turbine diameter	140	mm

Table 3.2 に設計パラメータを、Table 3.3 に設計パラメータ以外の計算条件を示す。
Table 3.2 のパラメータは、表中に示す値の範囲で変化させた。

Table 3.2 Design parameter values

Parameter	Symbol	Upper limit	Lower limit	Unit
Total BP orifice clearance	x_{all}	600	300	$\times 10^{-6}$ m
Outlet pressure of No2 orifice	P_2	4.5	2	MPa
Pressure drop in balance piston chamber	P_{SW}	4	0.1	MPa

Table 3.3 Calculation conditions

Item	Symbol	Value	Unit
Pressure loss coefficient	ζ	1.5625	-
Fluid density	ρ	70	kg/m ³
Bulk modulus	K_f	50	MPa
Balance piston chamber volume	V_0	4.0e-05	m ³
Diameter of No1 orifice	D_1	0.173	m
Diameter of No2 orifice	D_2	0.06	m
Inlet pressure of No1 orifice	P_1	9	MPa
Mass of rotor	m_0	6	kg
Outer force	F_{OUT}	1.1e+05	N

計算の流れを Fig.3.4 に示す。設計パラメータを Table3.2 に示す範囲で網羅的に変化させるモンテカルロ法 (Monte Carlo Method, 以下 MCM と記す) により計算を実施した。これにより、設計パラメータと評価項目の関係を把握することを狙いとした。設計パラメータの値は乱数を用いて決め、計算点数は 10000 点とした。評価項目は 3.2 節に述べた 3 つの項目とし、各項目については Table 3.4 に示す制約条件を設定した。

MCM により計算された結果を「解」、解のうち制約条件を満たすものを「許容解」(feasible solution) と呼ぶこととする。また、計算結果 10000 点のうち荷重調整余裕 F_{BM} が負の値、すなわち静的にバランスしない解が発生する。これらの解については議論の対象外とした。

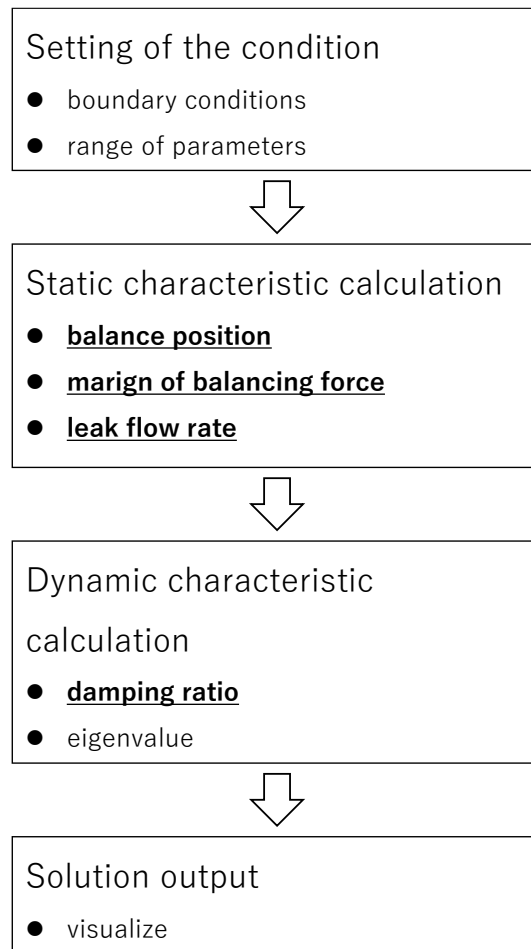


Fig.3.4 Evaluation flow

Table 3.4 Evaluation criteria

Item	Criteria
Force balance margin	$F_{BM} > F_{OUT} * 10\%$
Volumetric efficiency	$\eta_V \geq 0.9$
Damping ratio	$DR > 0$

3.4 設計指針の検討

3.4.1 パラメータと評価項目の相関

設計パラメータと評価項目の関係を Fig.3.5~3.7 に示す。MCM により計算された解をプロットしており、Table 3.4 の制約を満足しない解を含んでる。縦軸に示した3つの評価項目は、いずれも大きい方が望ましい特性である。

Fig.3.5 はオリフィス総隙間 x_{all} が評価項目に与える影響を示している。荷重調整能力 F_{BM} は全体的にプロットが分布しており、感度がないといえる。体積効率 η_V はグラフとして右肩下がり（負の相関）であり、減衰比 DR は右肩上がり（正の相関）である。

Fig.3.6 および Fig.3.7 は旋回損失 P_{SW} と No2 オリフィス下流圧 P_2 の影響を示している。両者の傾向は類似しており、荷重調整能力 F_{BM} に対しては右下がり、体積効率 η_V と減衰比 DR に対しては右上がりの感度がある。

既存研究[66]では、オリフィス総隙間 x_{all} を大きくすると安定化し、旋回損失 P_{SW} を小さくすると不安定な方向に変化する結果が示されている。これらの傾向は、Fig.3.5(c), Fig.3.6(c)の傾向と一致する。

Fig.3.5~3.7 に示された感度から、いずれの設計パラメータも全ての評価項目を改善する感度は持たず、トレードオフの関係にある（一つの評価項目を改善すると他が悪化する相反関係を持つ）といえる。

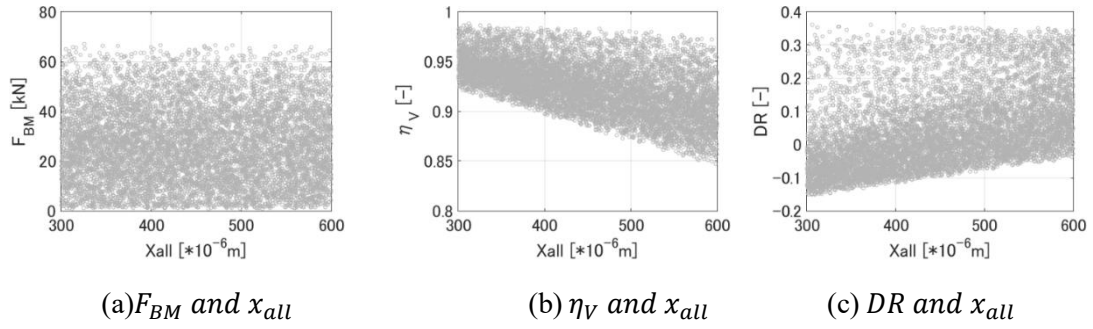


Fig.3.5 Evaluation items and x_{all}

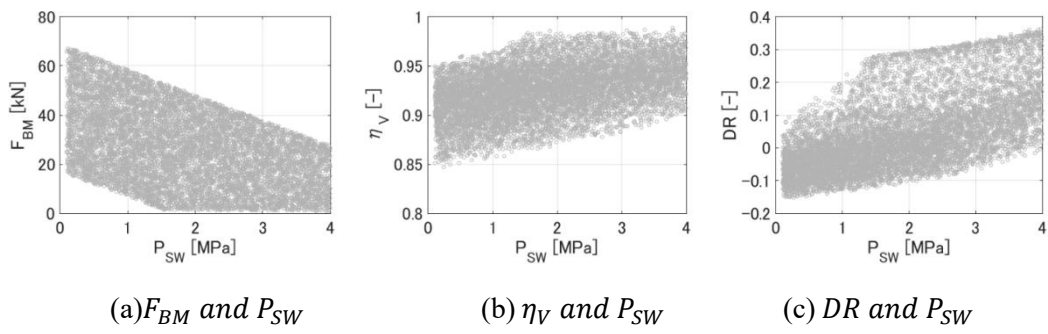


Fig.3.6 Evaluation items and P_{SW}

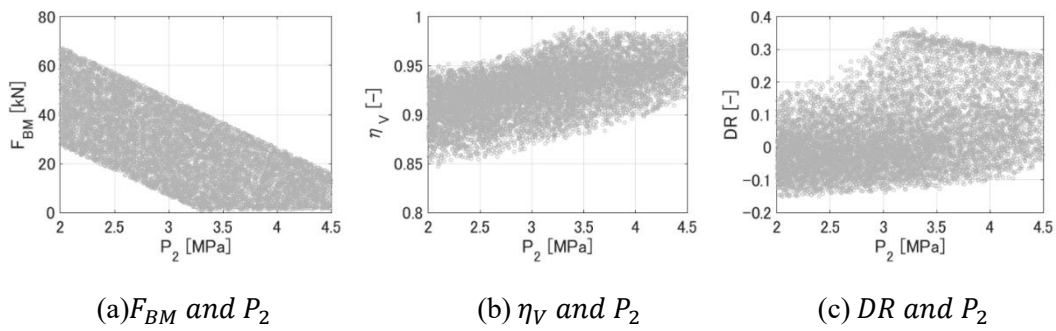


Fig.3.7 Evaluation items and P_2

3.4.2 解の分布

3つの評価項目のお互いの関係 Fig.3.8 に示す. 色の濃い点は制約条件を満足する許容解, 色の薄いプロットは制約を満足しない解を示している. Fig.3.8(a)より, 荷重調整能力 F_{BM} と体積効率 η_V はトレードオフ関係にあることが分かる. Fig.3.8(b)についても同様, 荷重調整能力 F_{BM} と減衰比 DR がトレードオフ関係にある. Fig.3.8(c)のに示した体積効率 η_V と減衰比 DR は, 全体的には緩やかな正の相関がみられる.

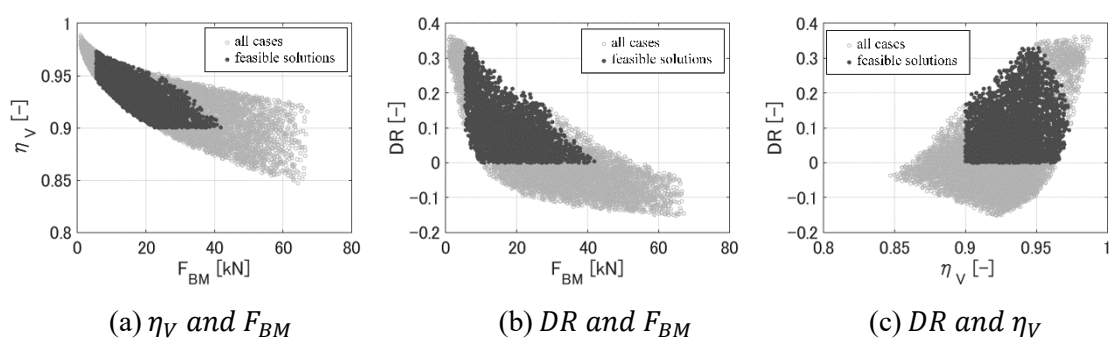
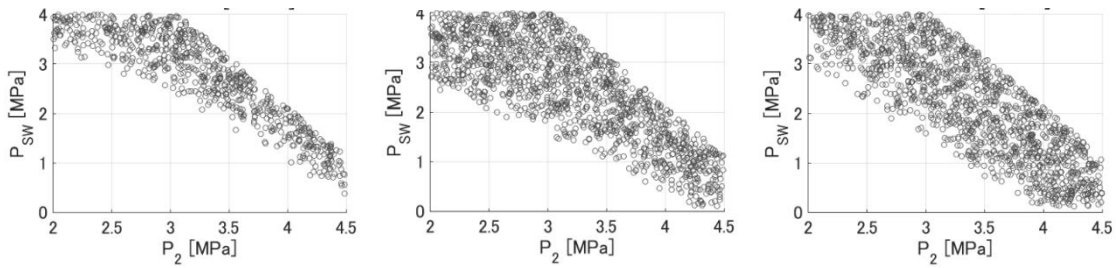


Fig.3.8 Relations between evaluation items

設計パラメータのどの範囲に制約条件を満たす許容解が分布するかを分析するため, Fig.3.9 のような整理をおこなった. 横軸に No2 オリフィス下流圧 P_2 , 縦軸に旋回損失 P_{SW} をとり, オリフィス総隙間 x_{all} を $300 \sim 400 [\times 10^{-6} \text{m}]$, $400 \sim 500 [\times 10^{-6} \text{m}]$, $500 \sim 600 [\times 10^{-6} \text{m}]$ の3段階に分け, 3つのグラフで表示した. 許容解の分布は, No2 オリフィス下流圧 P_2 と旋回損失 P_{SW} で負の相関をもっており, オリフィス総隙間 x_{all} が大きいほど, 許容解の範囲が増える傾向にある.



(a) $x_{all} = 300 \sim 400 [\times 10^{-6}\text{m}]$ (b) $x_{all} = 400 \sim 500 [\times 10^{-6}\text{m}]$ (c) $x_{all} = 500 \sim 600 [\times 10^{-6}\text{m}]$

Fig. 3.9 Distributions of parameters (feasible solutions only)

以上のように、バランスピストン機構の設計で考慮すべき評価項目はトレードオフの関係にあり、Fig.3.9の許容解の分布が示す通り全ての制約条件を満足する設計パラメータの範囲は限定されている。従来ターボポンプ設計では、荷重調整能力 F_{BM} や体積効率 η_V が優先的に検討され、減衰比 DR は最後に評価されることが多かった。しかし、性能のみを優先してパラメータを選択し設計を進めた場合には、許容解の存在する範囲が非常に狭い状態から動的安定性が成立するような調整をせざるを得ない可能性がある。また、例えば設計的に成立させることができたとしても、その後の設計進捗や実験結果の反映、また設計予測の不確実性により成立解が無くなってしまいうケースがある。あらかじめ、設計が成立する範囲を把握することで、成立範囲に対して余裕がどの程度あるのか、を確保しておくことが望ましい。本章で示したMCMを用いた網羅的計算手法は、許容解の存在する範囲を把握することができるため、各評価項目に対してバランスの良い設計パラメータを選択することが可能である。

3.4.3 動的安定性判別指標

本項では、評価項目の荷重調整能力 F_{BM} と減衰比 DR がトレードオフ関係となる理由について、理論解析の式から考察し、安定性判別の指標について検討する。荷重調整能力 F_{BM} は式(3.6)で示した通り、設計パラメータである No2 オリフィス下流圧 P_2 と巡回損失 P_{SW} との関係が明確となっている。一方、減衰比 DR は特性方程式を解いた結果により求まるものであり、設計パラメータとの関係を式の上で明確に表現することが困難

である．そこで，減衰比 DR に代替する動的安定性の指標を検討するため，バランスピストン室圧力荷重の応答の式(2.11)に着目する．

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = A_{BP} \frac{\Delta P}{\Delta x} = -A_{BP} \frac{Q_x + j\omega A_{BP}}{Q_p + j\omega V_K} \quad (2.11)$$

既存研究[67]ではバランスピストン室圧力の荷重応答の減衰の正負は，式(2.11)右辺の虚部の符号により決定される．虚部の符号が負の場合は安定で正減衰である．式(2.11)右辺の虚部の符号は複素数としての位相により決まるため，分子と分母の位相に着目する．分子の位相を θ_x ，分母の位相を θ_p とすると，右辺の位相 θ は以下の式(3.8)で表される．

$$\theta = \arg \frac{Q_x + j\omega A_{BP}}{Q_p + j\omega V_K} = \theta_x - \theta_p \quad (3.8)$$

$$\theta_x = \tan^{-1} \left(\frac{\omega A_{BP}}{Q_x} \right), \quad \theta_p = \tan^{-1} \left(\frac{\omega V_K}{Q_p} \right) \quad (3.9)$$

式(3.8)，(3.9)で示した各位相は Q_x ， Q_p ， A_{BP} ， V_K ， ω により決まるが，これらのパラメータは全て正の値を取るため

$$0 < \theta_x, \theta_p < \pi/2 \quad (3.10)$$

となる．よって

$$-\pi/2 < \theta < \pi/2 \quad (3.11)$$

となる．

バランスピストン室圧力荷重応答の減衰の正負を示す θ と，設計パラメータの関係を考察するため， θ の大きさを示す指標として安定判別式 f_{SC} を式(3.12)で定義する．

$$f_{SC} = \frac{\tan \theta_x}{\tan \theta_p} - 1 = \frac{A_{BP} Q_p}{Q_x V_K} - 1 \quad (3.12)$$

θ の正負は θ_x と θ_p の大小関係で決まり，更に θ_x と θ_p の大小関係は安定判別式 f_{SC} の符号と対応するため，安定判別式 f_{SC} の符号により安定・不安定の判別することができる．

ここで設計パラメータと安定判別式 f_{SC} の関係について考える．No2 オリフィス下流

圧 P_2 と旋回損失 P_{SW} の値を小さくすると、式(3.6)から荷重調整能力 F_{BM} は大きくなる。一方、式(2.9)から Q_p は小さくなり、式(2.8)から Q_x は大きくなることがわかる。

$$Q_x = \left(\frac{2}{\rho}\right)^{0.5} (P_1 - P)^{0.5} C_{d1} \pi D_1 + \left(\frac{2}{\rho}\right)^{0.5} (P - P_2)^{0.5} C_{d2} \pi D_2 \quad (2.8)$$

$$Q_p = \left(\frac{2}{\rho}\right)^{0.5} \frac{C_{d1} \pi D_1 (x_{10} - x_0)}{2(P_1 - P)^{0.5}} - \left(\frac{2}{\rho}\right)^{0.5} \frac{C_{d2} \pi D_2 (x_0 + x_{20})}{2(P - P_2)^{0.5}} \quad (2.9)$$

これにより、安定判別式 f_{SC} の値は小さく負になりやすい、すなわち不安定側に変化する。以上のように、線形解析の数式上から、荷重調整能力 F_{BM} と動的安定性の指標である安定判別式 f_{SC} がトレードオフ関係にあるといえる。

計算結果から、安定判別式 f_{SC} が減衰比 DR の指標として有効であるかを検証するため、Fig.3.10 に安定判別式 f_{SC} と減衰比 DR の関係を示す。安定と不安定の境界付近では両者に相関がみられており、安定判別式 f_{SC} の有効性を確認できた。

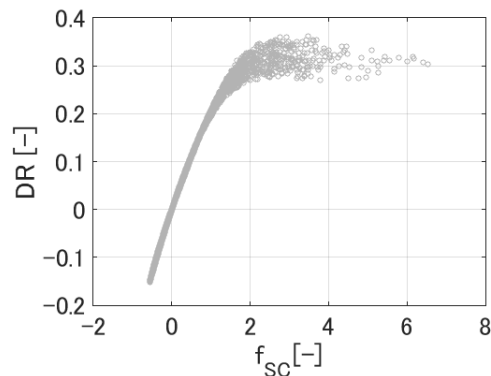


Fig.3.10 Relation between f_{SC} and DR

3.4.4 軸方向剛性と動的安定性の関係

本項では、更なる設計指針の検討として、バランスピストン機構の軸方向剛性 K_{ST} に着目する。軸方向剛性 K_{ST} は変位の変化に対する荷重の変化を示すものであり、Fig.3.2 に示す荷重特性曲線の傾きである。線形解析の式の上では、式(2.11)で $\omega = 0$ とした場合の荷重応答であり、式(3.13)で表現される。

$$K_{ST} = A_{BP} \frac{Q_x}{Q_p} \quad (3.13)$$

式(3.12)で示される安定判別式 f_{SC} に対し、式(3.13)を代入すると式(3.14)が得られる。

$$f_{SC} = \frac{A_{BP}^2}{V_K K_{ST}} - 1 \quad (3.14)$$

このように、安定性判別式 f_{SC} を用いることで、軸方向剛性との関係を式の上で明確にすることが可能である。式の形から、安定判別式 f_{SC} の正負は軸方向剛性 K_{ST} の大きさにより影響を受けることが分かる。軸方向剛性 K_{ST} が大きいくほど安定判別式 f_{SC} が負の値になりやすいと言える。Fig.3.11は、計算結果を軸方向剛性 K_{ST} と減衰比 DR の関係として整理したものである。両者には強い相関がみられ、軸方向剛性 K_{ST} が大きいくほど減衰比 DR が小さくなっていることがわかる。バランスピストン機構は、軸方向の荷重を調整するために流体的なばねの特性を持たせたものであり、軸方向の剛性は本来のバランスピストン機構の役割を果たすために必要不可欠なものである一方、軸方向剛性 K_{ST} を強化すると不安定化するという性質をもつと言える。この性質は、線形解析の式の上から導き出されるものであり、バランスピストン機構の諸元によらず汎用的に適用できる知見と考えられる。

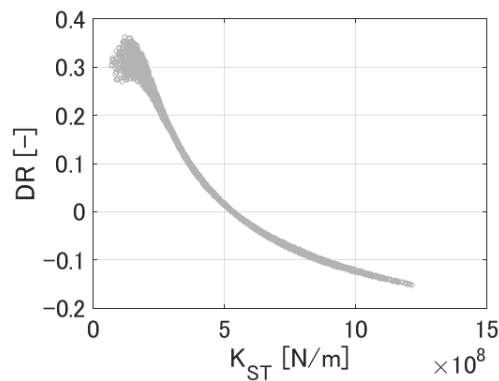


Fig.3.11 Relation between K_{ST} and DR

3.4.5 実験結果からの考察

前項までに述べた評価項目の関連性について、2章で示した実験結果を用いて検証した。2章の実験結果を各評価項目の相関という観点で整理しなおしたものを Fig.3.12 に示す。横軸はバランスピストン流量 Q ，縦軸は荷重調整余裕 F_{BM} を示しており，カラーコンターは線形解析により計算した減衰比 ζ ，○や×のプロットは実験結果である。バランスピストン機構の性能としては図の左上の領域が望ましいが，動的安定性である減衰比 ζ は左上の領域ほど低く，実験結果も左上の領域で自励振動が発生する結果となっている。以上のことから，実験的にも荷重調整能力 F_{BM} と動的安定性がトレードオフ関係にあることが確認された。

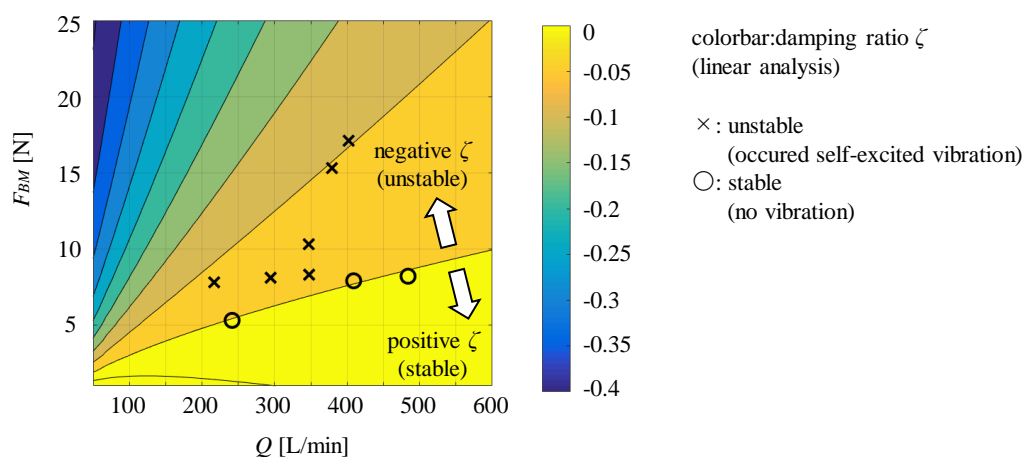


Fig.3.12 Relation between flow rate Q , force balance margin F_{BM} and damping ratio ζ

3.5 本章のまとめ

バランスピストン機構の1次元線形解析モデルを用いたモンテカルロシミュレーションを実施し，性能と動的安定性の関係について考察した。

・バランスピストン機構の性能の指標のひとつである荷重調整能力は，動的安定性である減衰比とトレードオフ関係にある。また，荷重調整能力と効率，いずれも性能の指標であるが，こちらについてもトレードオフ関係にある。

- ・性能のみを優先してパラメータを選択すると、制約条件を満足する範囲が狭くなり、余裕の持った設計をすることができなくなる。全ての評価項目を同時に考慮し、成立する範囲を把握しておくことが有効である。
- ・制約条件を満足する設計パラメータの範囲を把握するには、各評価項目を同時に考慮した網羅的計算をおこない、解の分布を可視化することが有効である。
- ・動的安定性の指標として検討した安定判別式を用いることで、減衰比の正負を判別可能なことを示した。また、軸方向の剛性は減衰比と強い相関があり、動的安定性の確保のためには過度な高剛性設計は回避すべきである。

第4章 インペラの弾性変形モードを考慮した安定性評価

4.1 本章の目的

3章までで述べてきたように、バランスピストン機構の軸方向振動問題は、バランスピストン室の圧力を一様と仮定し、またインペラを含むロータを一つの剛体とみなす1次元モデルで動的安定性を評価する手法が検討されてきた。この手法により、軸方向の動的安定性に関する研究は大きく進んだと言える。一方で、大口径のオープンインペラを採用したH3ロケットの1段エンジン用ターボポンプにおいては、ロータ全体が振動するモードではなく、ロータの変位が小さくインペラ部分の振動が支配的なモードも観察されており、このようなモードの評価には1次元モデルでは検討が難しく、モデルの拡張が必要である。本章および次章では、3章まで議論してきた1次元モデルを拡張し、インペラの弾性変形やバランスピストン室の音響振動を考慮するモデルを検討していく。

Fig.4.1 にバランスピストン機構と、各振動モードの概要を示す。Fig.4.1(b)の剛体モードはインペラ全体が軸方向に移動する。Fig.4.1(c)の弾性変形モードは、インペラの振動モードのうち、0直径節の軸方向に均一に振れるモード（いわゆるアンブレラモード [73]）である。一般的に、ターボポンプのロータ質量はインペラ質量より大きいため、インペラ外径側が大きく変位し、内径側のロータ部分の変位が小さいモードである。No2オリフィスの隙間変化は小さいものの、No1オリフィスの隙間変化があり、かつインペラ弾性変形によるバランスピストン室容積の変化が発生する。剛体モードと同様、No1オリフィスの隙間変化による圧力荷重のフィードバックが発生するため、不安定化する可能性が考えられる。

上記の弾性変形モードは、インペラの剛性により、全体が均一に振れる剛体モードよりも高周波数となるため、今まで問題とならなかった流体の音響モードとの連成の可能性が考えられる。Fig.4.1(d)に示すバランスピストン室流体の音響振動モードは、一般的な閉端の気柱振動モードであり、モードの腹がNo1オリフィス側に位置するため、Fig.4.1(c)のインペラ弾性変形モードとの連成が懸念される。

本章では、まずインペラの弾性変形のみを考慮した場合の影響について検討し、その

後, 5章でバランスピストン室流体の音響振動を加えて考慮した場合の影響について議論する.

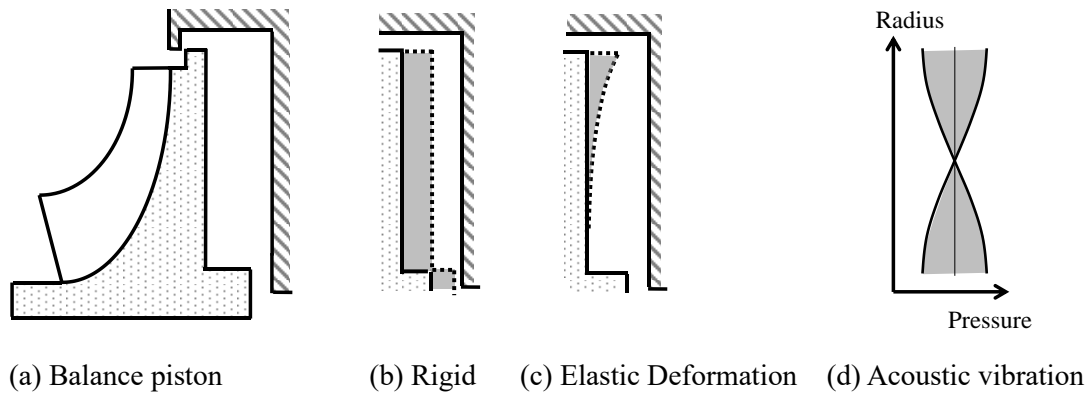
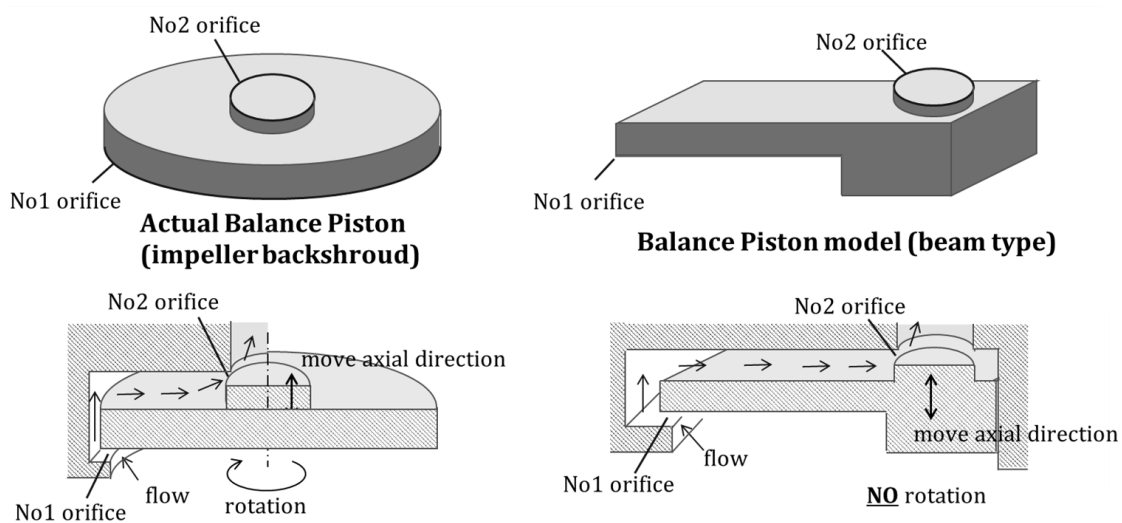


Fig.4.1 Vibration mode of impeller and balance piston chamber fluid

インペラ弾性変形モードの動的安定性に対する評価を簡易的に実施するため, 円板状のインペラをはり状に置き換えたモデルで検討する. Fig.4.2 に両者の比較を示す. 実際のバランスピストン機構は, 円形状のインペラ背面に設置され, No1 および No2 オリフィスは環状隙間となっている. 本章では, インペラの弾性変形の1次モードにフォーカスするため, はり状のモデルとし, はりの先端でNo1オリフィスが形成される. はりモデルでは実際のバランスピストン機構と異なり回転はしないが, 軸方向に動く点は一致している.



(a) Actual balance piston of turbopump

(b) Beam type studied in this section

Fig.4.2 Beam type model of balance piston mechanism

4.2 インペラ弾性変形を模擬した簡易モデル

はり形状のバランスピストン機構の変位，圧力の定義を Fig.4.3 に示す．バランスピストン機構を 1 次元的にモデル化するにあたり，これまで議論してきた剛体モードとの差異を比較するため，Fig.4.4 に示す 3 つのモデルを検討した．

1 つ目は，Fig.4.4(a)に示す剛体モデルであり，前章までに議論してきたモデルと同じものである．2 つ目は，Fig.4.4(b)に示すはりモデルであり，はりの弾性変形の剛性と，曲げモードの等価質量のみを考慮したものである．はりの根元は拘束されており，先端のみが 1 次の曲げモードで変形する挙動を単純化している．Fig.4.4(c)は(b)と(c)を組み合わせたモデルであり，はりの曲げの変形と，ロータ部の剛体の変位する両方の動きを含んでいる．

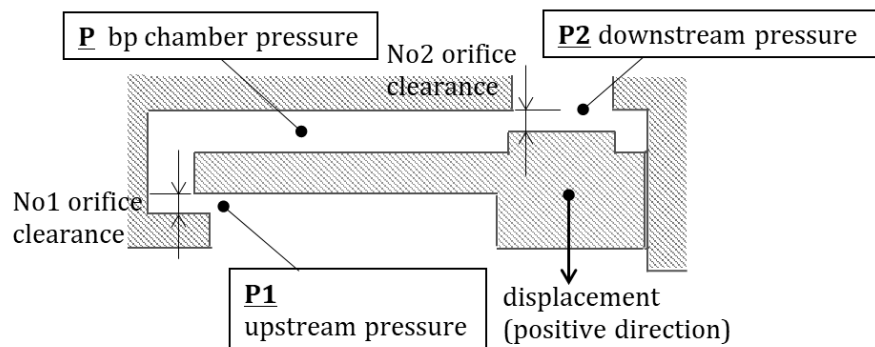


Fig.4.3 Definition of clearance, displacement and pressure

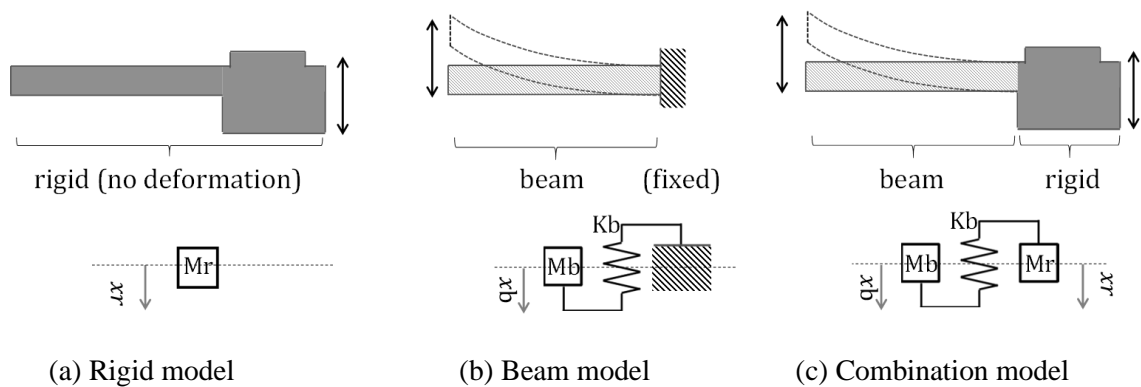


Fig.4.4 One-dimensional model of balance piston (3 models)

上記の3つのモデルに対応する運動方程式および流体の式を示す。

剛体モデル (Rigid Model) について、式(4.1)に運動方程式、式(4.2)に流体の式を示す。

No1 オリフィスが円形ではなく直線形状のため、右辺括弧内第1項のオリフィス隙間面積に該当する部分の記述が一部異なるが、それ以外は2章で述べたものと同一である。

[剛体モデル (Rigid Model)]

$$M \frac{d^2 x_r}{dt} = P A_{BP} - F_{OUT} \quad (4.1)$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{K_f}{V_0} \left(C_{d1} b (x_{10} - x_r) \sqrt{\frac{2(P_1 - P)}{\rho}} - C_{d2} \pi D_2 (x_{20} + x_r) \sqrt{\frac{2(P - P_2)}{\rho}} - A_{BP} \frac{dx_r}{dt} \right) \quad (4.2)$$

はりモデル (Beam Model) について、式(4.3)および式(4.4)に運動方程式と流体の式を示す。式(4.3)の K_b は、はりの曲げに対する等価剛性である。式(4.4)については、No2 オリフィス隙間が固定となるため、はり先端の変位 x_b は No1 オリフィス隙間にのみ影響を与える。

[はりモデル (Beam Model)]

$$M_b \frac{d^2 x_b}{dt^2} + K_b x_b = P A_{BP} \quad (4.3)$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{K_f}{V_0} \left(C_{d1} b (x_{10} - x_b) \sqrt{\frac{2(P_1 - P)}{\rho}} - C_{d2} \pi D_2 x_{20} \sqrt{\frac{2(P - P_2)}{\rho}} - \alpha A_{BP} \frac{dx_b}{dt} \right) \quad (4.4)$$

組み合わせモデル (Combination Model) について、運動方程式および流体の式を式(4.5)と式(4.6)に示す。これらの式は、はり先端の変位 x_b とロータに相当する剛体部分の変位 x_r の2つの変位を含む。

[組み合わせモデル (Combination Model)]

$$M_b \frac{d^2 x_b}{dt^2} + K_b (x_b - x_r) = P A_{BP}, \quad M_r \frac{d^2 x_r}{dt^2} + K_b (x_r - x_b) = -F_{OUT} \quad (4.5)$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{K_f}{V_0} \left(C_{d1} b (x_{10} - x_b) \sqrt{\frac{2(P_1 - P)}{\rho}} - C_{d2} \pi D_2 (x_{20} + x_r) \sqrt{\frac{2(P - P_2)}{\rho}} \right. \\ \left. - A_{BP} \frac{dx_r}{dt} - \alpha A_{BP} \left(\frac{dx_b}{dt} - \frac{dx_r}{dt} \right) \right) \quad (4.6)$$

各モデルについて、流体の式の線形化をおこなう。2章と同様、圧力と変位の変動成分に着目して整理する。

剛体モデルの場合は式(4.7)となり、2章で示した式(2.5)とほぼ同一である。ただし、本章のはりモデルでは No1 オリフィスの隙間形状が直線状になっているため、変位の係数 Q_x は式(4.8)に示す Q_{xR} に、圧力の係数 Q_p は式(4.9)に示す Q_{pR} に置き換わったものとなる。

[剛体モデル (Rigid Model) 線形化]

$$V_K \frac{dP}{dt} = -Q_{xR} \Delta x - Q_{pR} \Delta P - A_{BP} \frac{dx}{dt} \quad (4.7)$$

$$Q_{xR} = \left(\frac{2}{\rho} \right)^{0.5} (P_1 - P)^{0.5} C_{d1} b + \left(\frac{2}{\rho} \right)^{0.5} (P - P_2)^{0.5} C_{d2} \pi D_2 \quad (4.8)$$

$$Q_{pR} = \left(\frac{2}{\rho} \right)^{0.5} \frac{C_{d1} b (x_{10} - x_0)}{2(P_1 - P)^{0.5}} - \left(\frac{2}{\rho} \right)^{0.5} \frac{C_{d2} \pi D_2 (x_0 + x_{20})}{2(P - P_2)^{0.5}} \quad (4.9)$$

はりモデルの場合は式(4.10)となる。式の形は剛体モデルと類似だが、変位の係数が式(4.11)に示す Q_{xB} に置き換わっている点、右辺第3項の速度の項にはり先端の変位による体積変化の割合を示す係数 α がかけられている点が異なる。固有値および減衰比を求めるための特性方程式は式(4.12)となる。

[はりモデル (Beam Model) 線形化]

$$V_K \frac{dP}{dt} = -Q_{xB} \Delta x_b - Q_{pR} \Delta P - \alpha A_{BP} \frac{dx_b}{dt} \quad (4.10)$$

$$Q_{xB} = \left(\frac{2}{\rho}\right)^{0.5} (P_1 - P)^{0.5} C_{d1} b \quad (4.11)$$

$$A_{BP} Q_{xB} + Q_{pR} K_B + (V_k K_B + A_{BP}^2 \alpha) \lambda + Q_{pR} M_B \lambda^2 + V_k M_B \lambda^3 = 0 \quad (4.12)$$

はりと剛体の組み合わせモデルの場合は式(4.13)となる。式中の係数 Q_{xR2} は式(4.14)で定義する。特性方程式は式(4.15)で表される。

[組み合わせモデル (Combination Model) 線形化]

$$V_K \frac{dP}{dt} = -Q_{xB} \Delta x_b - Q_{xR2} \Delta x_r - Q_{pR} \Delta P - (A_{BP} - \alpha A_{BP}) \Delta x_r \\ - (A_{BP} - \alpha A_{BP}) \frac{dx_r}{dt} - \alpha A_{BP} \frac{dx_b}{dt} \quad (4.13)$$

$$Q_{xR2} = \left(\frac{2}{\rho}\right)^{0.5} (P - P_2)^{0.5} C_{d2} \pi D_2 \quad (4.14)$$

$$A_{BP} K_b (Q_{xB} + Q_{xR}) + A_{BP}^2 K_b \lambda + \{Q_{pR} K_b (M_b + M_r) + A_{BP} Q_{xB} M_r\} \lambda^2 \\ + \{K_b V_k (M_b + M_r) + A_{BP}^2 M_r \alpha\} \lambda^3 + Q_{pR} M_b M_r \lambda^4 \\ + M_b M_r V_k \lambda^5 = 0 \quad (4.15)$$

4.3 計算条件

前節で示したモデルの計算を実施するにあたり、使用した各物理量の一覧を Table 4.1 に示す。剛体モデルの既存研究[64][67]において、動的安定性への影響が大きいことが

明らかになっているバランスピストン室容積をパラメータとした。また、はりの板厚は小さくなるほど曲げ剛性が低下するため、弾性変形の影響が大きくなることが予測される。弾性変形の動的安定性への影響を確認するため、こちらもパラメータとして値を変化させた。

Table 4.1 Specification of calculation

Item	Description	Value	Unit
m	mass of piston*	1	kg
b	beam width	0.05	m
h	beam thickness	parameter	m
L	beam length	0.2	m
P_1	No1 upstream pressure	2000	Pa
P_2	No2 outlet pressure	0	Pa
ρ_b	beam density	2700	kg/m ³
E_b	beam Young's modulus	200	GPa
ρ	fluid density	1.2	kg/m ³
K_f	fluid bulk modulus	0.14	MPa
V_0	BP chamber volume	parameter	cc
X_{all}	total orifice clearance	0.003	m

* Including mass of beam part.

** Beam material is Aluminum. Working fluid is air.

4.4 板厚および体積弾性率の影響

4.2 節で示した各モデルについて、バランスピストン室容積を増やした時の根軌跡を計算した。また、板厚の影響を確認するため、Table 4.2 に示すように、板厚を変えて Case1~4 の条件で計算した。根軌跡の結果を Fig.4.5~4.8 に示す。剛体モデルとはりモデルの場合、特性方程式を解くと 1つの実根と 2つの共役な複素根が得られるが、ここ

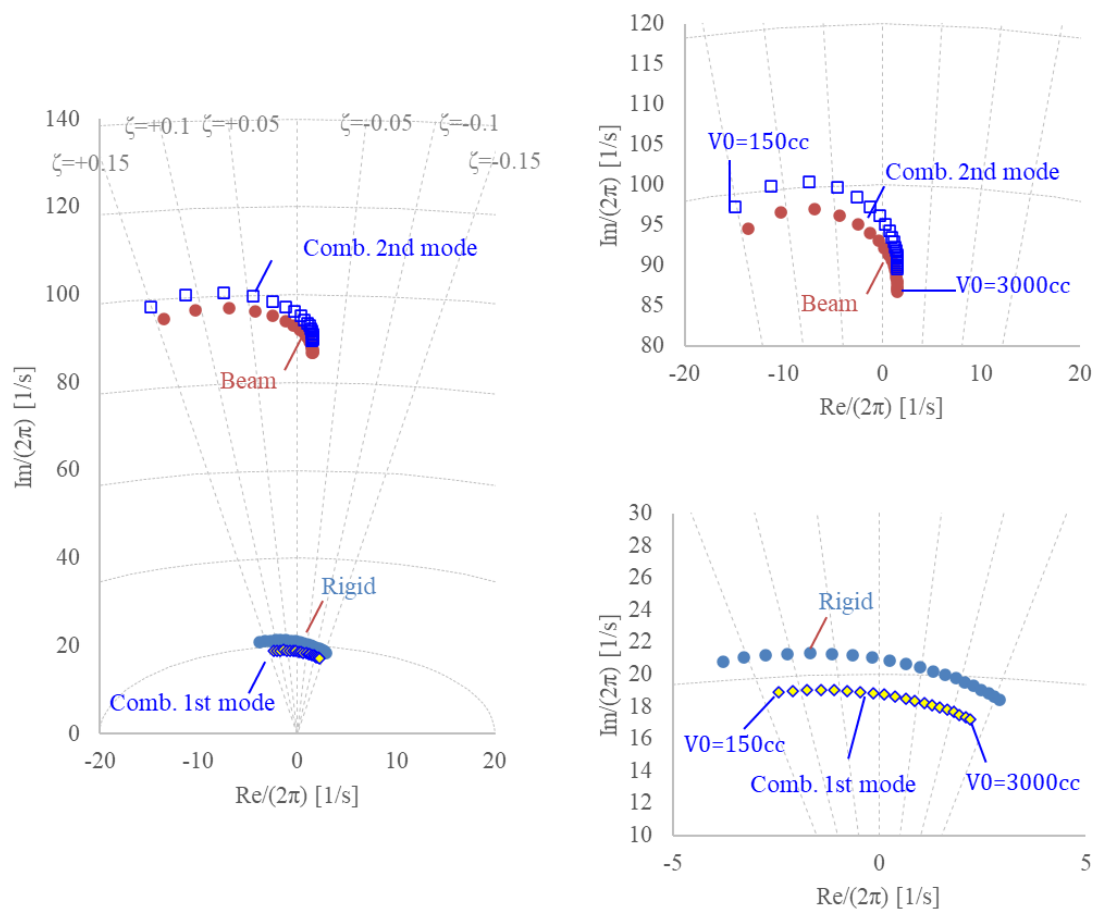
で議論の対象となるのは複素根であり、振動しない実根は取り上げない。また、2つの複素根は虚部の正負が異なるのみで動的安定性を議論する際には片方のみを見ればよく、ここでは虚部が正の根をプロットした。組み合わせモデルでは、1つの実根と2組(4つ)の共役な複素根が得られるが、同様の考え方にに基づき、虚部が正の複素根2つをプロットした。

また、Table 4.2 中に示す Fq1, Fq2 は、組み合わせモデル (Combination モデル) の 1st mode と 2nd mode の固有値 (減衰比がゼロ付近の結果) を示しており、両者の比率は 5~13 程度となった。

Table 4.2 Calculation cases and results (beam thickness h and frequency Fq1, Fq2)

		Case1	Case2	Case3	Case4
h	mm	4	7	10	12
Fq1	Hz	19	21	21	21
Fq2	Hz	95	156	227	278
Fq2/Fq1	-	5.0	7.5	10.7	13.1

Fig.4.5(a)は、Case1 における各モデルの根軌跡を全てプロットしている。横方向の曲線は原点からの距離が一定の線、放射状の線は減衰比一定の線を示す。剛体モデル (Rigid) と組み合わせモデル (Comb) の 1st mode (固有値の小さい側) は 20Hz 付近に、はりモデル (Beam) と組み合わせモデル (Comb) の 2nd mode (固有値の大きい側) は 80~100Hz 付近に位置している。Fig.4.5(b)は固有値の大きい側、小さい側の軌跡を拡大したものである。剛体モデルと組み合わせモデルの 1st mode は、いずれもバランスピストン室容積を増やすと徐々に実部が正の領域に変化、すなわち不安定側に変化していく。1st mode の方が剛体モデルよりもやや固有値が小さいが、根軌跡は概ね一致している。はりモデルと 2nd mode についても根軌跡は概ね一致しており、バランスピストン室容積の増加と共に不安定側に変化する。ただし、変化量は剛体モデルや 1st mode より小さい。



(a) Root locus (over all)

(b) Root locus (enlarged)

Fig.4.5 Results of Case 1 (beam thickness $h = 4\text{mm}$)

Fig.4.6 は Case2 における根軌跡を示している。剛体モデルと組み合わせモデルの 1st mode はほぼ一致しており、Case1 と同様、バランスピストン室容積の増加と共に不安定化している。はりモデルと組み合わせモデルの 2nd mode は 150~160Hz 付近に位置し、バランスピストン室容積の増加による影響は Case1 よりも小さくなっている。

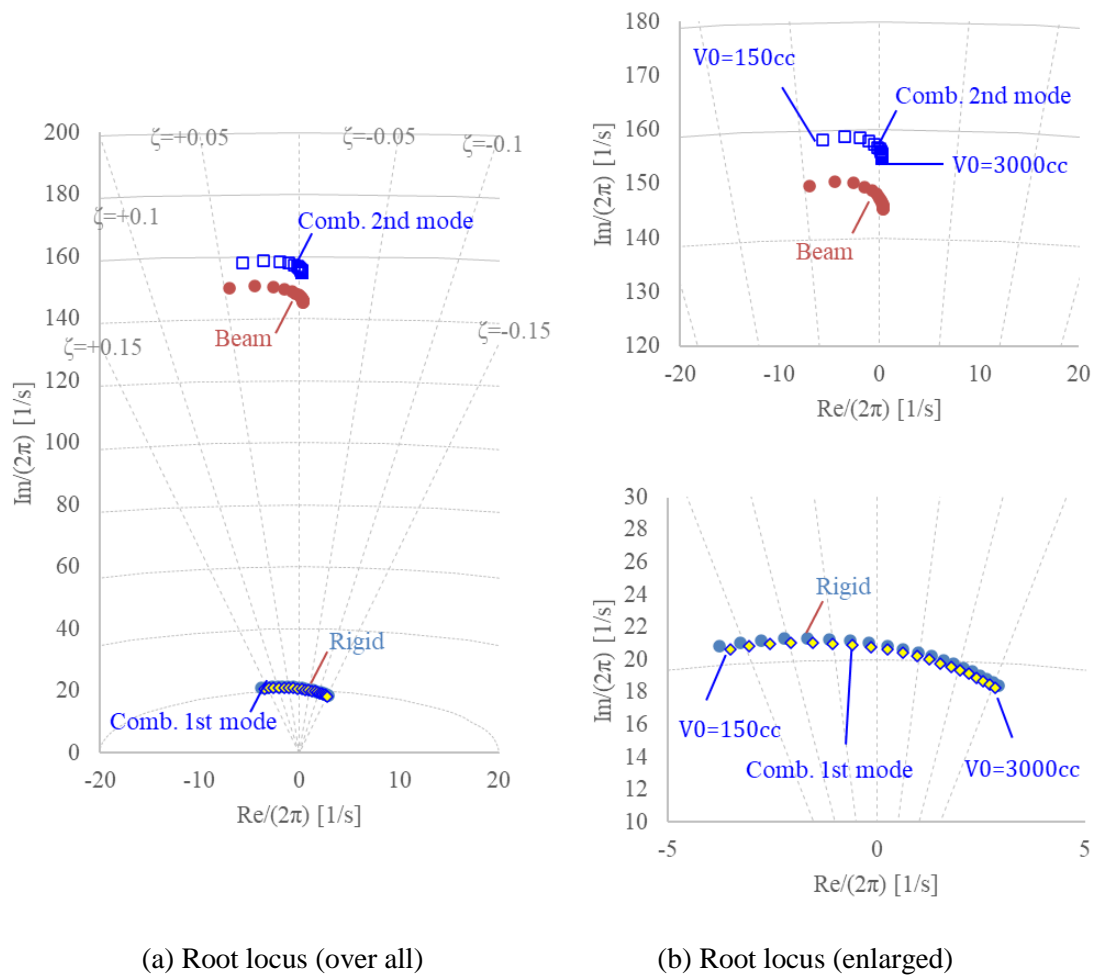
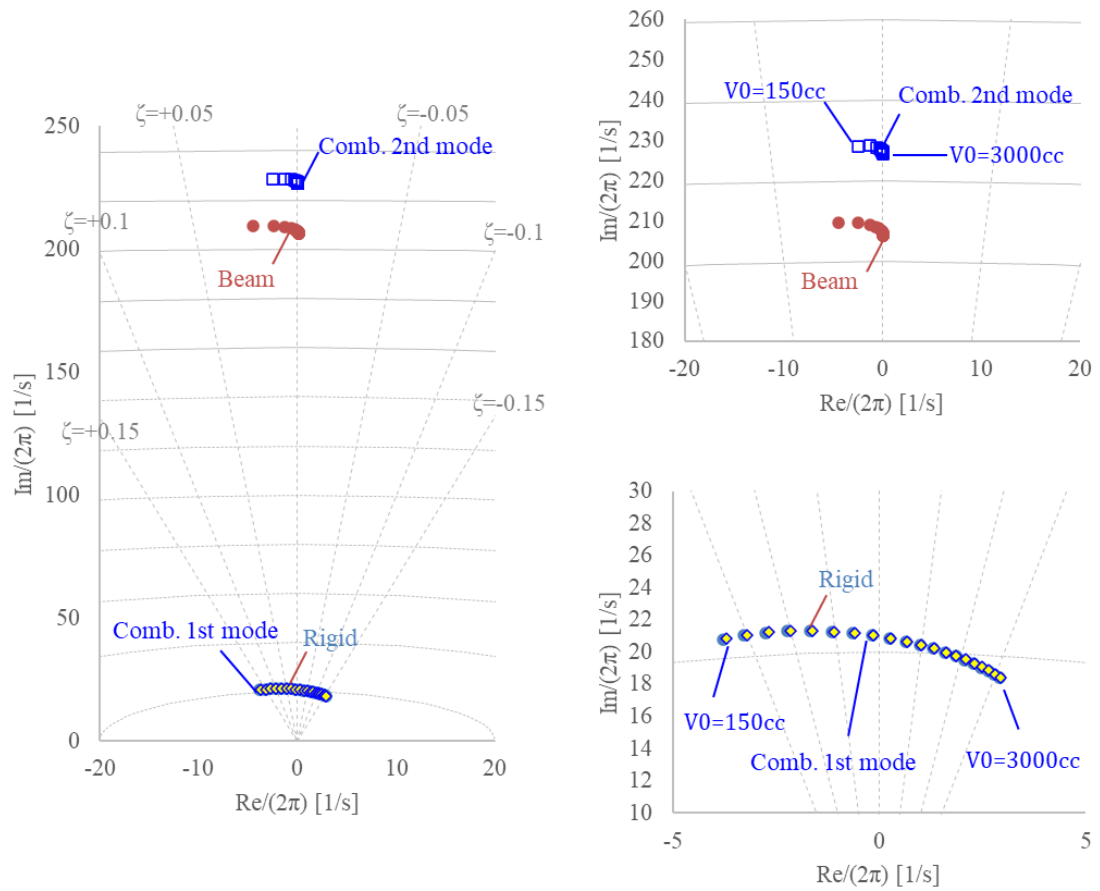


Fig.4.6 Results of Case 2 (beam thickness $h = 7\text{mm}$)

Case3, Case4 の結果を Fig.4.7, 4.8 に示す. Case3, Case4 はそれぞれはりの板厚が 10mm, 12mm の場合の結果であり, 板厚の増加と共にはりモデルと組み合わせモデルの 2nd mode の固有値が増加する, またバランスピストン室容積の増加による影響が小さくなる傾向がみられる.



(a) Root locus (over all)

(b) Root locus (enlarged)

Fig.4.7 Results of Case 3 (beam thickness $h = 10mm$)

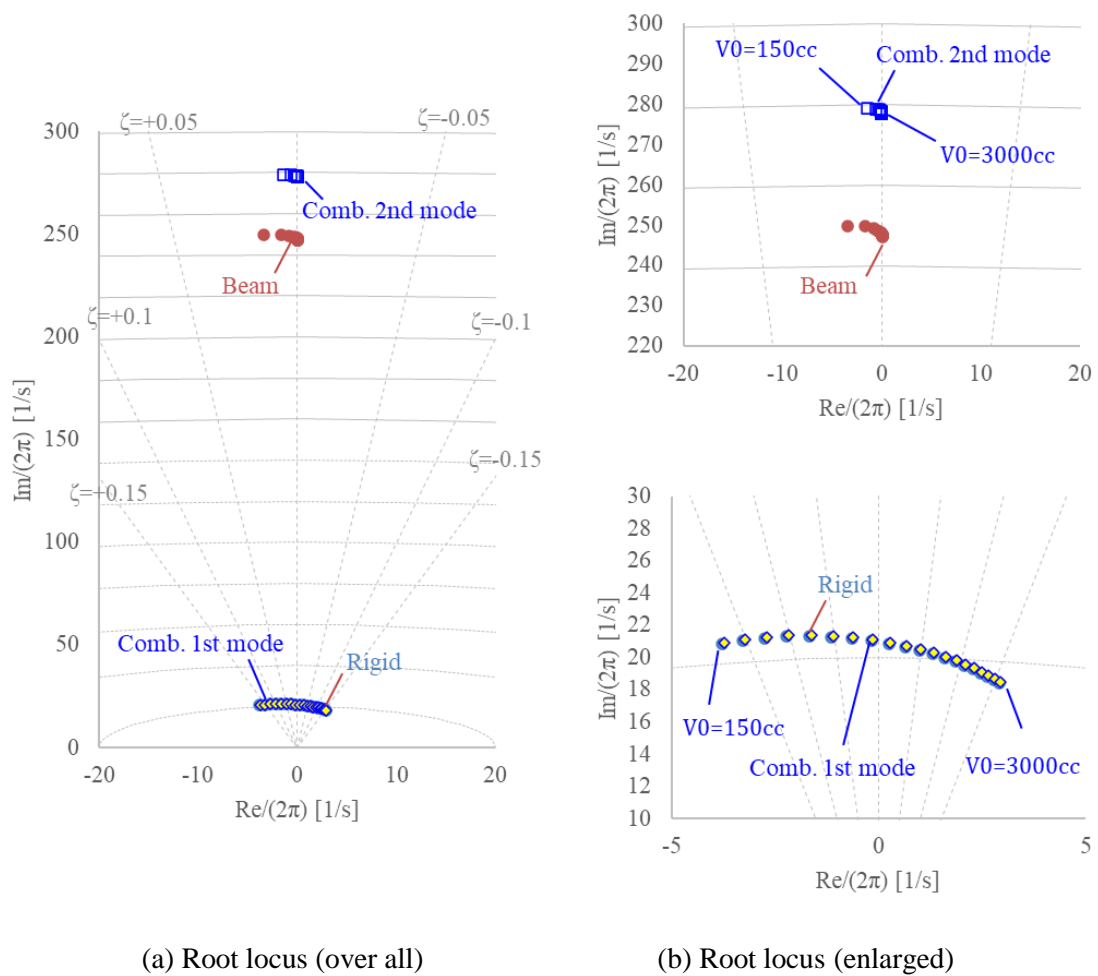


Fig.4.8 Results of Case 4 (beam thickness $h = 12\text{mm}$)

組み合わせモデルに関し、横軸を 1st mode の減衰比、縦軸を 2nd mode の減衰比としたグラフを Fig.4.9 に示す。板厚が最も大きい Case4 では、2nd mode の減衰比はほぼゼロで変化しないが、板厚が小さくなるにつれて 2nd mode の減衰比変化が大きくなり、Case1 では 1st mode と同程度の感度になっている。また、安定と不安定が切り替わる付近では 1st mode が安定で 2nd mode が不安定な領域が一部存在するものの、全体的には概ね減衰比の正負は一致している。

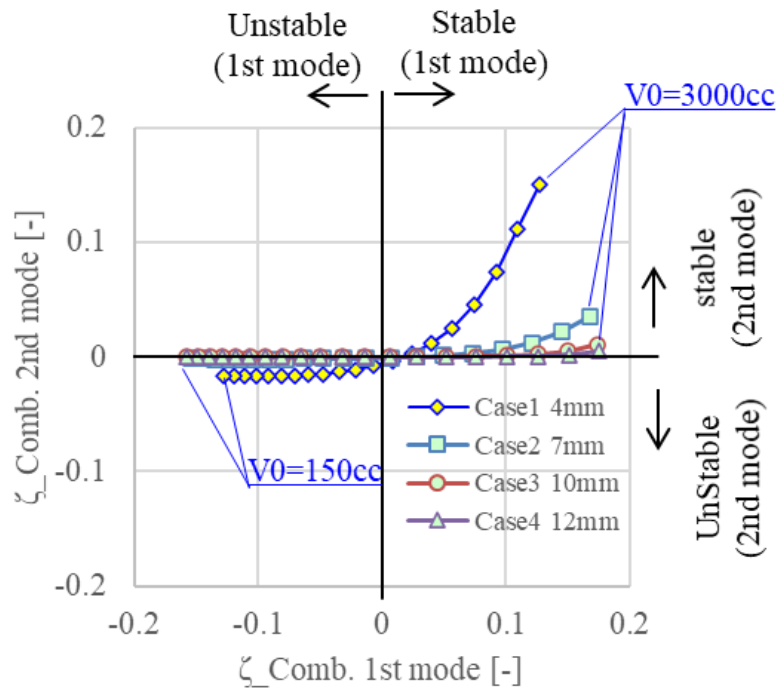


Fig.4.9 Relation between damping ratio of 1st mode and 2nd mode (Combination model)

4.5 減衰比に関する考察

4.5.1 一般的なばね力と減衰力の位相

本節では、組み合わせモデルの 1st モードと 2nd モードの安定性の違いについて、変位に対する荷重応答という観点から、線形解析の数式を用いて分析する。前項の結果から、1st モードは剛体モデル、2nd モードははりモデルと概ね一致することが分かっていることから、式の形が比較的簡易な剛体モデルとはりモデルを分析する。

分析を実施するにあたり、一般的なばねおよび減衰要素の模式図を Fig.4.10(a)に示す。Fig.4.10(a)のばね、減衰要素の左端境界に調和変位を与えた場合、応答する力は式(4.16)に示す形となり、荷重を変位で割ると式(4.17)となる。虚部が減衰係数と周波数、実部がばね剛性を表す。流体力応答の虚部の正負を観察することで、流体力の動的安定性、すなわち負減衰か正減衰かを判別可能である。

$$F = -c\dot{x} - kx \quad (4.16)$$

$$\frac{F}{x} = -i\omega c - k \quad (4.17)$$

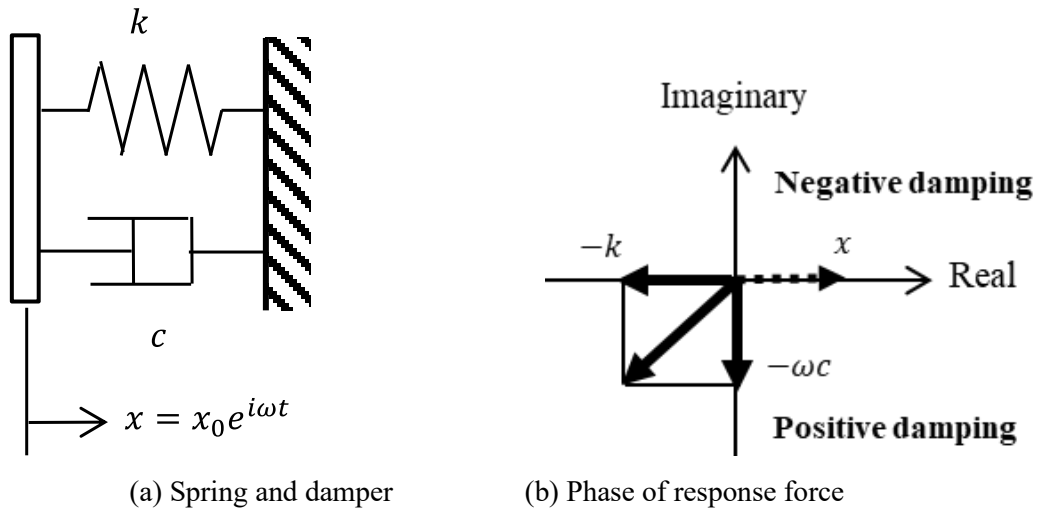


Fig.4.10 Response force of spring and damping element

4.5.2 圧力荷重応答の位相

剛体モデルの圧力応答は、は2章に示した式(2.11)とほぼ同様であり、式(4.18)の形に整理することができる。ここで、流体力の減衰成分の正負は、式(4.18)右辺の複素数の偏角、すなわち Fig.4.11(a)に示す分子の角度 θ_{xR} および分母の角度 θ_p の差分により決定される。式(4.19)の通り、 $0 < \theta_{xR}$, $\theta_p < \pi/2$ となるよう定義した。 $\theta_{xR} > \theta_p$ であれば、Fig.4.11(b)のように、虚部が負の値となり、正減衰すなわち動的に安定である。

[剛体モデル (Rigid Model) 圧力荷重応答]

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = -A_{BP} \frac{Q_{xR} + i\omega A_{BP}}{Q_{pR} + i\omega V_k} \quad (4.18)$$

$$\theta_{xR} = \arg(-Q_{xR} - i\omega A_{BP}) - \pi = \text{atan}\left(\frac{\omega A_{BP}}{Q_{xR}}\right), \quad \theta_p = \text{atan}\left(\frac{\omega V_k}{Q_{pR}}\right) \quad (4.19)$$

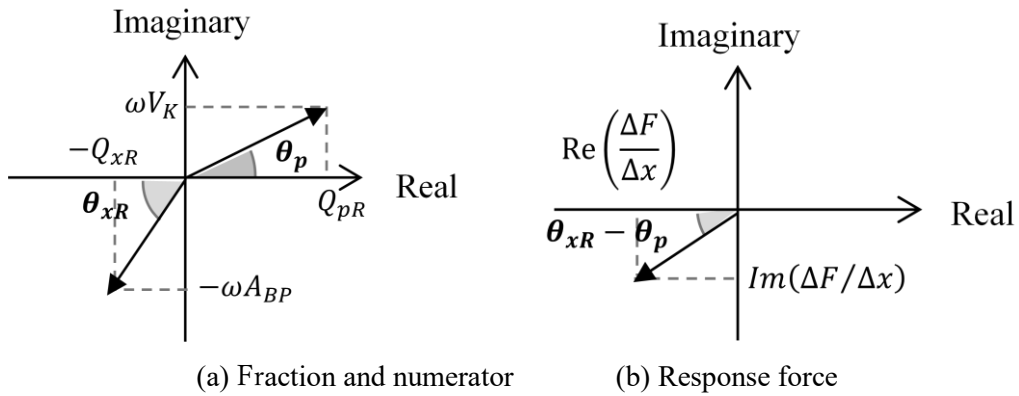


Fig.4.11 Phase of response force – rigid model

はりモデルの荷重応答は，式(4.10)を整理することで式(4.20)の形に整理することができる．右辺第一項は，剛体モデルと同じくバランスピストン室の圧力応答であり，右辺第二項ははりの曲げ剛性による荷重応答である．剛体モデルとはりモデルの差異は，はりモデルの場合ははりの等価剛性項 K_b が加わること，周波数 ω が高いことが挙げられる．

[はりモデル (Beam Model) 圧力荷重応答]

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = -A_{BP} \frac{Q_{xB} + i\omega\alpha A_{BP}}{Q_{pR} + i\omega V_k} - K_b \quad (4.20)$$

$$\theta_{xB} = \text{atan}\left(\frac{\omega\alpha A_{BP}}{Q_{xB}}\right) \quad (4.21)$$

4.5.3 はりの剛性の影響

はりの剛性 K_b の影響について検討する． Fig.4.12 に示す通り，右辺第一項の虚部の正負は θ_{xB} と θ_p の大小関係により決まる．そこにはりの剛性 K_b が加わることになるが，虚部の正負に影響はなく，実部の絶対値が増加する効果がある．荷重応答ベクトルの角度は減衰比を示していることから，はりの剛性 K_b により減衰比の絶対値は小さくなるものの，減衰比の正負には影響しないと言える．

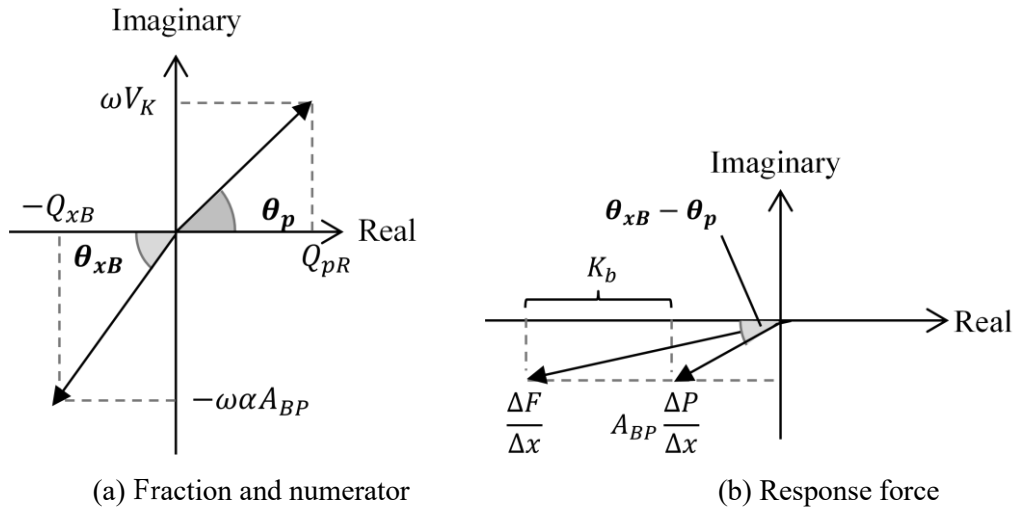


Fig.4.12 Phase of response force – beam model

4.5.4 周波数の影響

固有周波数 ω が大きいことによる安定性への影響を考察するため、線形解析により計算した θ_x (θ_{xR} , θ_{xB}), θ_p の値を調査した。Fig.4.13 に、剛体モデルにおける θ_{xR} と θ_p の値を示す。横軸のバランスピストン室容積の増加と共に θ_p が増加する一方、 θ_{xR} はほぼ変化しないため、 $V_0=1300\text{cc}$ 付近で θ_p が θ_x を上回る（負減衰となる）。

一方、Fig.4.14(a)に示すはりモデル（はりの板厚 $h=15\text{mm}$ ）における θ_{xB} と θ_p の値をみると、横軸に示すバランスピストン室容積の増加に伴い、 θ_p のみが増加する傾向がみられる。これは剛体モデルと同様である。はりモデルの固有周波数 ω は剛体モデルより大きいため、 θ_{xB} , θ_p は共に大きくなっている一方、両者の大小関係が切り替わる点（正減衰と負減衰の閾値）は 1200cc 付近であり、剛体モデルとあまり変わらない結果となっている。Fig.4.14(b)ははりの板厚 $h=4\text{mm}$ の場合の結果であり、 θ_{xB} と θ_p の値ははりの板厚 $h=15\text{mm}$ の場合よりもやや小さくなっているものの、減衰の正負の切り替わりの点はほぼ同じである。

これまでのはりの剛性 K_b に関する考察と、圧力荷重応答の位相 θ_x および θ_p の考察から、はりモデルの減衰比は、減衰比の絶対値が剛体モデルよりも小さくなるが、安定／不安定の閾値は剛体モデルと大きく差異がない、と言える。これは、剛体モデル（低周波数モード）の安定化を図れば、はりモデル（高周波モード）の安定化に対して効果があるということを示している。

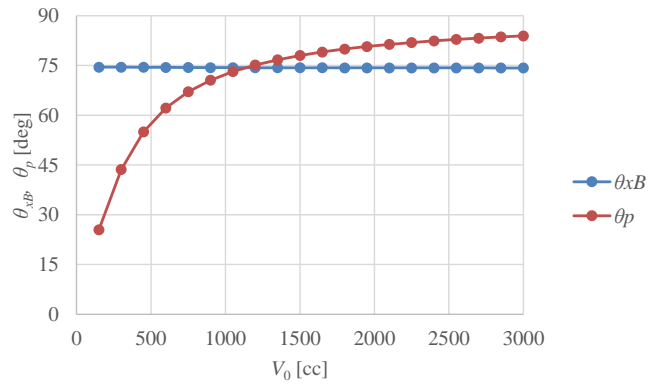
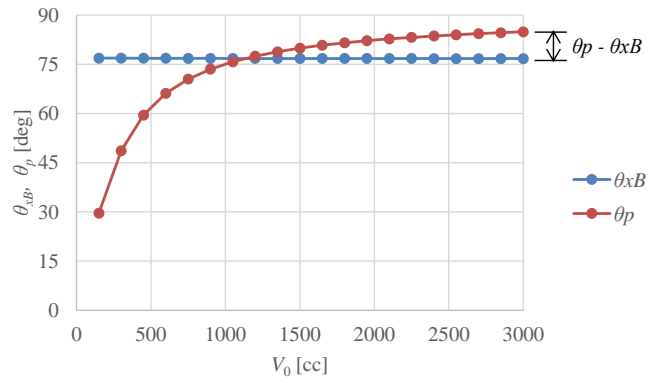
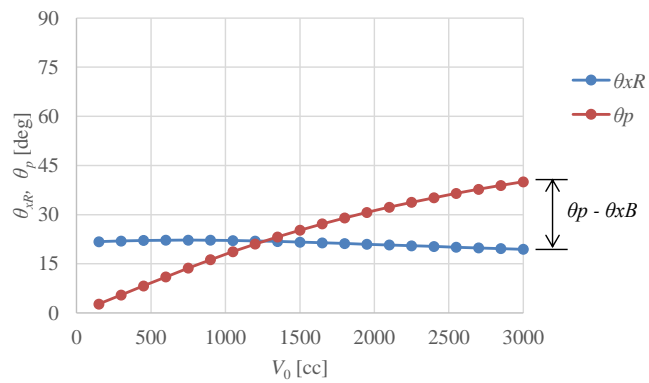


Fig.4.13 θ_{xB} and θ_p (rigid model)



(a) Beam thickness $h = 15$ mm



(b) Beam thickness $h = 4$ mm

Fig.4.14 θ_{xB} and θ_p (beam model)

4.6 本章のまとめ

本章では、バランスピストン機構が設置されるインペラの弾性変形に着目し、はり状のモデルを用いて弾性変形の影響について検討した。はりの等価質量および等価剛性に置き換えた集中定数系のモデルで線形解析を実施することで安定性を調査した。剛体モデル、はりモデル、剛体とはりの組み合わせモデルの3つについて調査し、はりの曲げに関する安定性の特性および従来の剛体モデルとの差異について考察した。

- ・はりと剛体と組み合わせたモデルでは、周波数の異なる2つのモードが現れるが、低周波数のモードは前章まで議論してきた剛体モデルと同様の傾向を、高周波数のモードははりモデルと同様の傾向を示す。
- ・高周波数のモードは、はりの剛性が高いほどバランスピストン室容積の影響を受けにくく減衰比の絶対値が小さくなる。
- ・一方、はりの剛性の大小は、減衰比の正負には影響しない。
- ・はりモデル（高周波数のモード）の減衰比は、減衰比の絶対値が剛体モデル（低周波数のモード）よりも小さくなるが、安定／不安定の閾値は剛体モデルと大きく差異がない。すなわち、剛体モデル（低周波数モード）の安定化を図れば、はりモデル（高周波モード）の安定化に対しても効果があると言える。

第5章 インペラの弾性変形とバランスピストン室の流体音響を考慮した連成モードの安定性評価

5.1 本章の目的

前章では、バランスピストン室流体の圧力は均一であるとの仮定に基づいてインペラの弾性変形影響について議論した。しかし、Fig.4.1(d)に示した通り、バランスピストン室の音響振動モードとインペラの弾性変形モードの山が一致した場合には連成する可能性が考えられる。本章では、インペラの弾性変形モードに加えて、バランスピストン室内の流体音響振動を考慮し、両者の連成モードの安定性について議論する。インペラの弾性変形は前章と同じくはり状のモデルで考慮することとし、有限要素法によりモデル化する。また、流体は特性曲線法を用いることで音響的な計算を実施する。有限要素法と特性曲線法の連成シミュレーションによる安定性評価に加え、変位を入力とした流体の応答計算を実施し、エネルギー収支に着目して減衰の正負を判別する手法を用いて調査した。

5.2 モデルおよび連成方法

5.2.1 インペラの有限要素モデル

本章におけるバランスピストン機構のモデルの概要を Fig.5.1 に示す。インペラ部分は前章と同じくはりモデルとし、 z 方向（No1 オリフィスから No2 オリフィスの方向）に要素数 N で分割する。 z と垂直方向（No1 および No2 オリフィスの隙間が変化する方向）の各節点における変位を x_n 、要素の回転角度を β_n とし、これらの変位 x_n と回転角度 β_n を含む変位ベクトル \mathbf{x} を式(5.1)で定義する。運動方程式は変位ベクトル \mathbf{x} を用いて式(5.2)のように表される。式中の \mathbf{M} は質量マトリクス、 \mathbf{K} は剛性マトリクスであり、各マトリクスの成分ははりの形状から計算した[74]。境界条件として、各節点にバランスピストン室圧力による荷重と、反対方向の No1 オリフィス上流圧力に荷重を設定し

た. 上記に加えて, はりの根元の節点には一定の外部荷重を設定しており, 静的にはこれらの境界条件として設定した圧力荷重が釣り合う位置 (オリフィス隙間) に移動することになる. また, はり根元の節点にはロータ質量 m_0 を集中質量として加え, 根元の節点の傾きはゼロとして拘束した.

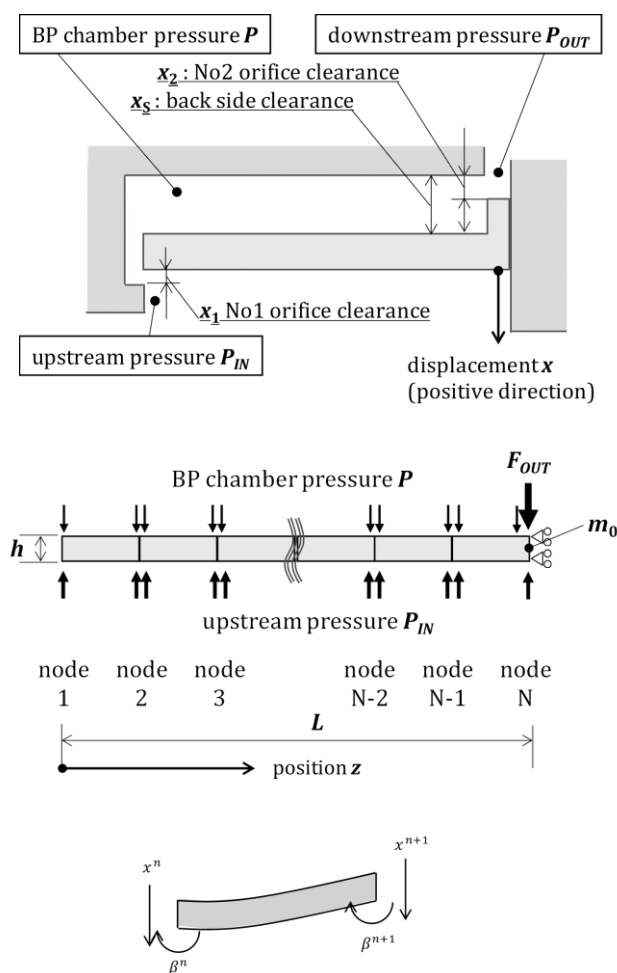


Fig.5.1 Pressure and displacement definition and FEM model

$$\mathbf{x} = (x^1, \beta^1, x^2, \beta^2, \dots, x^N, \beta^N)^T \quad (5.1)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (5.2)$$

5.2.2 バランスピストン室流体の音響モデル

流体に関する連続の式と運動方程式を用い、特性曲線法により式を簡易化し、差分形式で表現する[48].

連続の式を式(5.3)に示す. ρ は流体密度, A は流路断面積, u は流体の流速であり, z は流れ方向に定義する. 式(5.3)を展開し, 両辺を流路断面積 A で割ると式(5.4)が得られる.

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho A u)}{\partial z} = 0 \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\rho u}{A} \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\rho}{A} \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (5.4)$$

ここで, 音速の関係式(5.5)[48]を用い, 式(5.4)に代入して両辺を ρ で割ると, 式(5.6)が得られる.

$$d\rho = \frac{dP}{c^2} \quad (5.5)$$

$$\frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{u}{\rho c^2} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{u}{A} \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (5.6)$$

次に, 式(5.6)の流体の運動方程式の両辺を ρ で割り, 式(5.8)の形に整理する.

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (5.8)$$

連続の式(5.6)に λ を掛けたものと, 運動方程式(5.8)の和をとり, 式(5.9)の形に整理する.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (u + \lambda) \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\lambda}{\rho c^2} \left\{ \frac{\partial P}{\partial t} + \left(u + \frac{c^2}{\lambda} \right) \frac{\partial P}{\partial z} \right\} + \frac{\lambda u}{A_0} \frac{dA_0}{dz} + \frac{\lambda}{A_0} \frac{dA_0}{dt} \\ = 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

$\lambda=c$ の時および $\lambda=-c$ の時, 式(5.9)は式(5.10)および式(5.11)となる.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u+c)\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho c}\left\{\frac{\partial P}{\partial t} + (u+c)\frac{\partial P}{\partial z}\right\} + \frac{uc}{A_0}\frac{dA_0}{dz} + \frac{c}{A_0}\frac{dA_0}{dt} = 0 \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u-c)\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{\rho c}\left\{\frac{\partial P}{\partial t} + (u-c)\frac{\partial P}{\partial z}\right\} - \frac{uc}{A_0}\frac{dA_0}{dz} - \frac{c}{A_0}\frac{dA_0}{dt} = 0 \quad (5.11)$$

ここまで流体の連続の式と運動方程式を用いて整理してきたが、ここで式(5.12)に示す特性曲線に沿った微分を用いることで、式(5.13)および(5.14)を得ることができる。

$$\frac{\partial}{\partial t} + (u \pm c)\frac{\partial}{\partial z} = \frac{d}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} = u \pm c \quad (5.12)$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho c}\frac{dP}{dt} + \frac{uc}{A_0}\frac{dA_0}{dz} + \frac{c}{A_0}\frac{dA_0}{dt} = 0 \quad (5.13)$$

$$\frac{du}{dt} - \frac{1}{\rho c}\frac{dP}{dt} - \frac{uc}{A_0}\frac{dA_0}{dz} - \frac{c}{A_0}\frac{dA_0}{dt} = 0 \quad (5.14)$$

式(5.13), (5.14)を差分形式にしたものが式(5.15), (5.16)となる。

$$u_{III} = \frac{u_I + u_{II}}{2} + \frac{P_I - P_{II}}{2\rho c} - \frac{cdt}{2}\left\{u_I\left(\frac{1}{A_0}\frac{dA_0}{dz}\right)_I - u_{II}\left(\frac{1}{A_0}\frac{dA_0}{dz}\right)_{II}\right\} - \frac{cdt}{2}\left\{\left(\frac{1}{A_0}\frac{dA_0}{dt}\right)_I - \left(\frac{1}{A_0}\frac{dA_0}{dt}\right)_{II}\right\} \quad (5.15)$$

$$P_{III} = \frac{P_I + P_{II}}{2} + \frac{\rho c}{2}(u_I - u_{II}) - \frac{\rho c^2 dt}{2}\left\{u_I\left(\frac{1}{A_0}\frac{dA_0}{dz}\right)_I + u_{II}\left(\frac{1}{A_0}\frac{dA_0}{dz}\right)_{II}\right\} - \frac{\rho c^2 dt}{2}\left\{\left(\frac{1}{A_0}\frac{dA_0}{dt}\right)_I + \left(\frac{1}{A_0}\frac{dA_0}{dt}\right)_{II}\right\} \quad (5.16)$$

式中のI, II, IIIの添え字は, Fig.5.2 の模式図に示す時間 t と座標 z の位置を示しており, IIIにおける流速と圧力は, 時間的に上流のI, IIの流速と圧力により計算することができる。

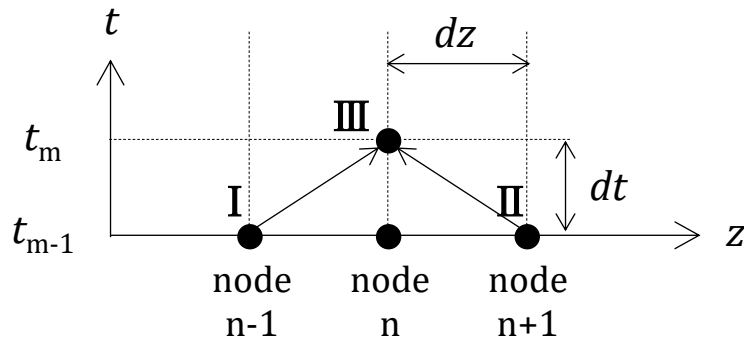


Fig.5.2 Method of characteristics

一般的な気柱振動の場合，開口端の条件では端部の圧力は境界圧力と同じとなるが，バランスピストン室の両端には No1 および No2 オリフィスが設置されており，オリフィスの上流圧力および下流圧力とは圧力が異なる．No1 オリフィス直下流の節点では，No1 オリフィスから流入する流量を z 方向の断面積で割った値となるよう流速を決定した．同様に，No2 オリフィス直上流の節点では No2 オリフィスから流出する流量を z 方向の断面積で割った値となるようにした．

5.2.3 有限要素モデルと流体音響モデルの連成

有限要素モデルと流体モデルは，共に要素の分割数を 100 とした．時間刻みは特性曲線法的前提となる関係 ($dt=dz/c$) から決定しており， dz の値は固定であるが， dt の値は音速 c に応じて変化することになる．

特性曲線法は，前項で示した通り 1 ステップ前の圧力および流速の情報を元に逐次計算を進めていくため，収束計算は不要である．有限要素モデルでは，時間刻みを大きく取った場合にも収束安定性を確保するため，ニューマーク β 法を用いて収束計算をおこなった．Fig.5.3 に，有限要素モデルと流体モデルの情報のやりとりの方法を示す．特性曲線法の計算をおこなう際にははりの変位と速度の情報が必要となるが，これらは流速や圧力と同じく 1 ステップ前の情報を用いて計算した．流体側で計算した圧力は，そのステップにおける荷重条件として有限要素モデルへ反映して計算した．

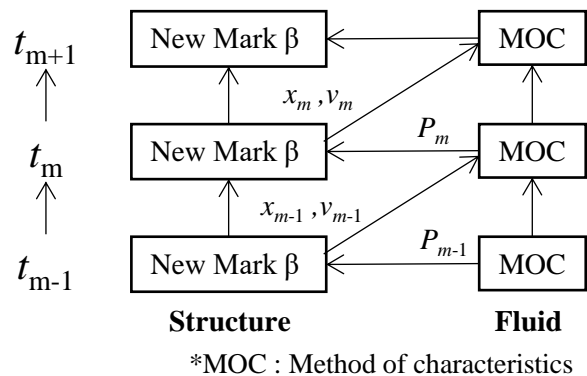


Fig.5.3 Coupling calculation method

5.3 計算方法

5.3.1 変位を入力とした計算

計算方法としては、本項で示す変位を入力とした計算と、次項に示す連成シミュレーションの2通りの方法を採用した。

変位を入力（境界条件）として与え、その時の流体圧力の応答を求めることで特性を把握する手法は、バランスピストン機構だけでなく、シールやインペラなどの流体要素の特性を調査する手法として広く用いられている[49]～[63]。構造と流体を同時に計算する連成シミュレーションの場合には、正減衰の場合には振動が発生しないため安定の度合いを評価することが難しい一方、変位入力の場合は圧力応答の位相を分析することで、負減衰か正減衰か、またその大きさを判別し、安定性を評価することが可能である。

本章においても、バランスピストン室圧力の応答の安定性を調べるため、変位をある振幅・周波数で境界条件として入力し、流体モデルのみを計算する手法を用いた。この計算を実施する場合には、5.2.1項および5.2.3項で述べた有限要素モデルおよび有限要素モデルとの連成はおこなわず、5.2.2項の流体モデルの計算のみとした。

入力としたはりの変位を Fig.5.4 に示す。図中には各 z 位置における変位の最大値、最小値、中間値の3本の線を表示しており、最大値と最小値の間で調和振動するよう設

定した。各 z 座標における変位振幅の大きさは、はりの 1 次の曲げモードを解析的に求めており、最大変位となる No1 オリフィス側の節点については、バランスピストン隙間に対して十分小さくなるよう 0.01mm とした。変位の周波数については、解析的に求めた値である 2.6kHz とした。はりの 1 次の曲げモードの計算方法については、付録 A に示す。

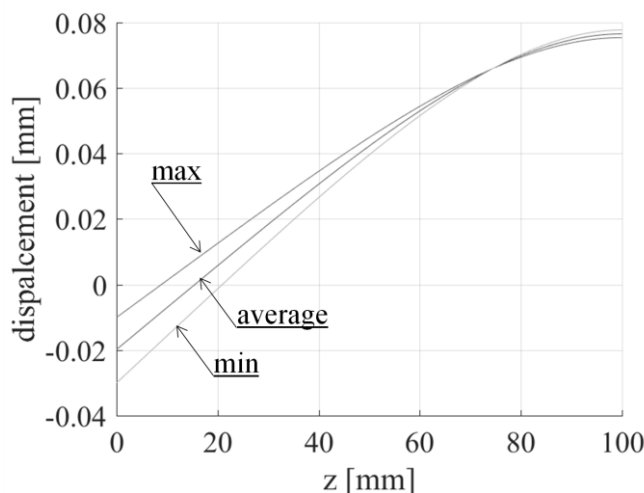


Fig.5.4 Displacement of the beam (input)

5.3.2 連成シミュレーション

2 つ目の計算方法は、5.2 節で述べた有限要素モデルと流体モデルを連成させた時系列のシミュレーションである。次項に述べる計算条件を設定し、変位および圧力が静定した状態から、ステップ状の荷重変化を加え、その後の変位や圧力の挙動を確認した。

5.3.3 計算条件

計算条件を Table 1 に示す。表中の構造に関する条件は、5.3.2 項の連成シミュレーションでのみ使用し、5.3.1 項の変位を入力とする計算では使用しない。表中に”parameter”と表示があるものは、パラメータとして値を変化させて影響を確認した項目である。パラメータに選定した項目としては、本章で着目する弾性変形と音響振動に影響の大きい

はりの板厚 h および音速 c , 前章までの議論で剛体モードでの安定性に影響することが分かっている No1 オリフィス上流圧 P_{IN} およびバランスピストン室容積 V_0 を選んだ。音速 c を変化させる際は, 剛体モードにおいて安定性への影響が大きいことがわかっている体積弾性率 K_f が一緒に変化しないよう, 式(5.17)の関係を維持するように密度 ρ の値を変化させた。

$$K_f = \rho c^2 \quad (5.17)$$

Table 5.1 Calculation conditions

Category	Item	Value	Unit	Remarks
Structure	b	300	mm	Used in coupling simulation only
	E	200	GPa	Used in coupling simulation only
	h	30 (parameter)	mm	Used in coupling simulation only
	L	100	mm	Used in coupling simulation only
	m_0	20	kg	Used in coupling simulation only
	ρ_s	8200	kg/m ³	Used in coupling simulation only
Fluid	c	350 (parameter)	m/s	
	ϵ_{ps}	0.4	-	
	K_f	19	MPa	
	ρ_f	K_f/c^2	kg/m ³	
	P_{IN}	5 (parameter)	MPa	
	P_{OUT}	0	MPa	
	V_0	30 (parameter)	cc	
	x_{all}	0.5	mm	
Common	N	100	-	

5.4 バランスピストン室の圧力応答

5.4.1 圧力応答の位相とエネルギー収支

本節では、5.3.1 項で説明した方法により、はりの変位を一定振幅・周波数で入力（境界条件）とした場合の、バランスピストン室の圧力応答について示す。音速 c の値が 1000m/s, 350m/s, 200m/s の場合の結果を Fig.5.5~5.7 に示す。各図において、(a)は横軸に z 方向の位置、縦軸に圧力振幅をとったバランスピストン室圧力応答の波形であり、振動の 1/8 周期刻みで圧力波形を同一のグラフに描いたものである。色が濃く太い線から、時間と共に色が薄く細い線へと波形が変化していく。(b)は、変位を基準として圧力応答の位相を示している。圧力応答の位相が -180° よりも遅れている状態であれば負減衰（不安定化力として作用する状態）である。

負減衰か正減衰かの判別は位相を確認することで可能であるが、はりの要素により減衰の正負が異なる場合には、はり全体としての減衰の正負の判別が困難である。そのため、圧力荷重によるはりへのエネルギー収支に着目し、はりの各部分が 1 周期でする仕事量 E_n を式(5.18)により計算し、位相と同じグラフにプロットした。

$$E_n = \int_{t=T_0}^{t=T_0+T} p_n(t) A_{BPn} x_n(t) dt \quad (5.18)$$

E_n は、 z 方向に分割した n 番目の要素について圧力荷重 $p_n(t) A_{BPn}$ に変位 $x_n(t)$ を乗じたものを 1 周期積分した値である。 E_n が負の値の場合、はりにエネルギーが流入することになるため、負減衰として作用していると言える。後述するように、はり全体としての減衰の正負の判別には、 E_n を合計しはり全体のエネルギー収支を計算した値を用いる。

Fig.5.5 は音速 c が 1000m/s の場合の結果である。バランスピストン室内の圧力応答は、 z 方向の位置によらずほぼ均一であり、変位周波数に対して圧力伝播の速度が十分大きい状態と言える。No1 オリフィス ($z=0\text{mm}$) 付近の領域では、位相が進む側であること、 E_n が正の値であることから、この領域の圧力応答は正減衰として作用している。一方、No2 オリフィス ($z=100\text{mm}$) 側の領域では、位相が遅れる側であり、 E_n が負の値であることから、負減衰である。

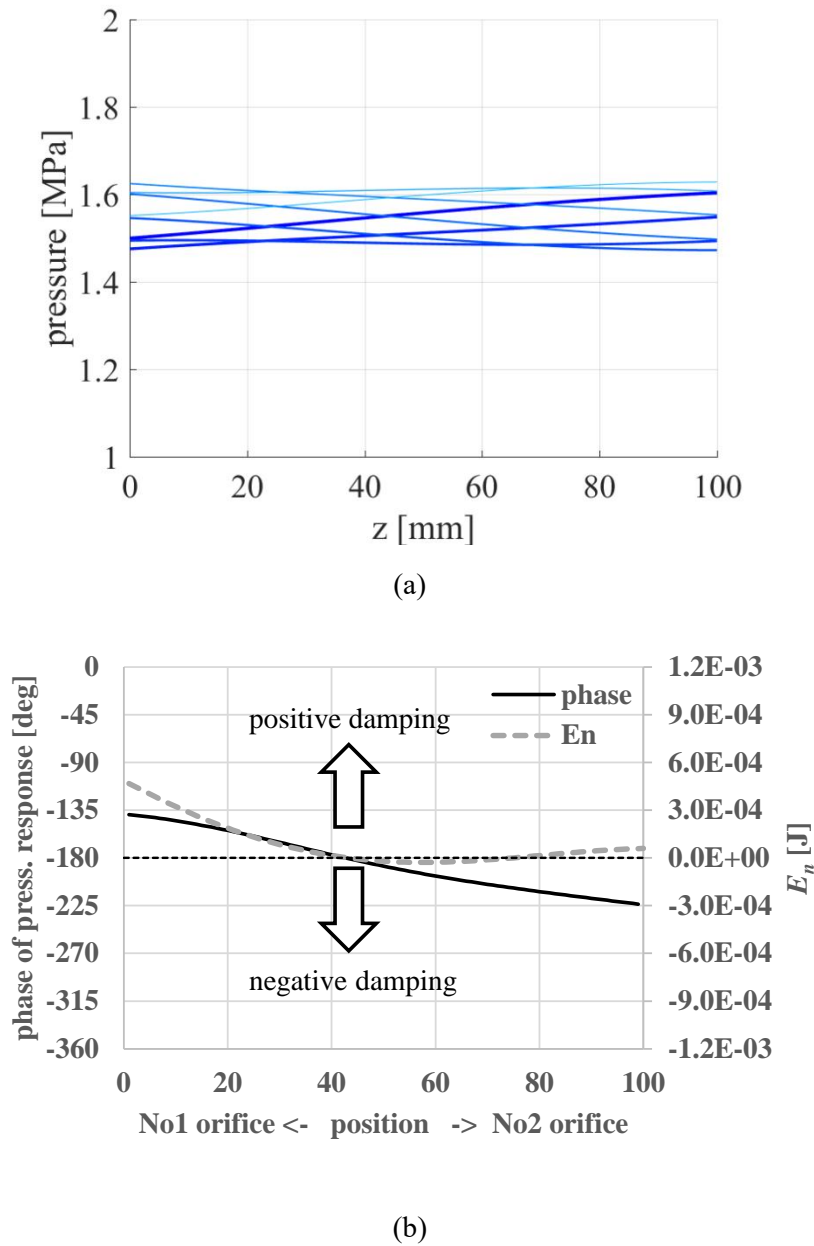


Fig.5.5 Pressure response ($c=1000$ [m/s])

Fig.5.6 は音速 c が 350m/s の場合の結果である。バランスピストン室内の圧力応答は、No1 オリフィス ($z=0$ mm) 付近と No2 オリフィス ($z=100$ mm) 付近の両端に圧力応答のピークが見られる。Fig.5.6(b)に示した圧力応答の位相は、No1 オリフィス ($z=0$ mm) から No2 オリフィス ($z=100$ mm) にかけて徐々に遅れている。変位周波数に対し、流体圧力の伝播する速度である音速が遅く、位相遅れが発生しているものと考えられる。この位相遅れの影響により、音速 c が 1000m/s の時よりも E_n が 負の側にシフトしており、

動的に不安定な傾向になっていることがわかる。

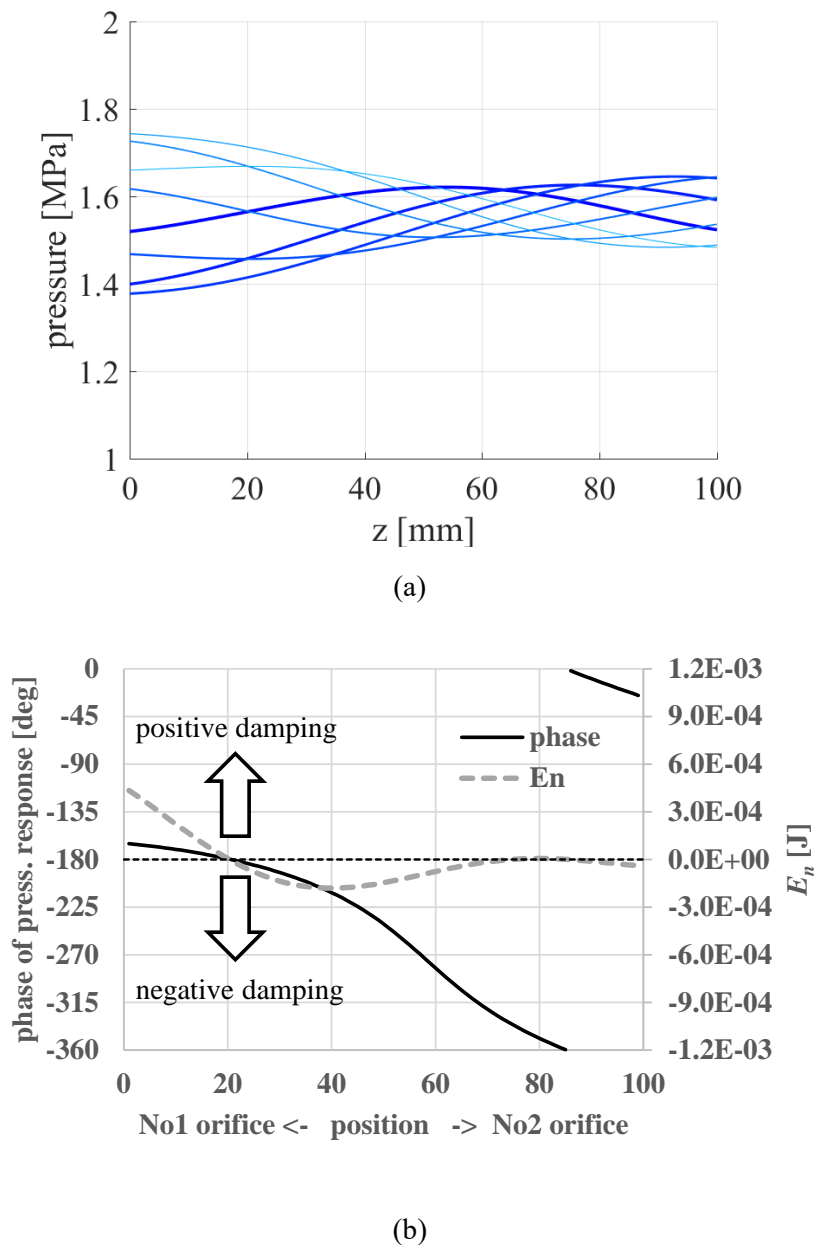
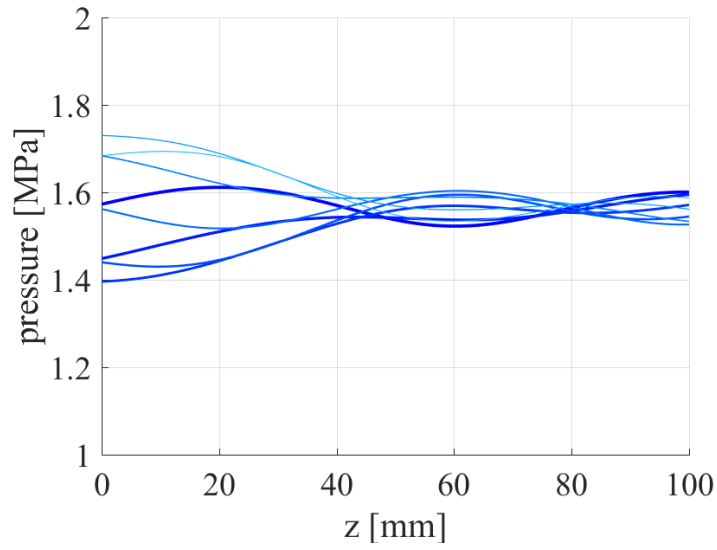
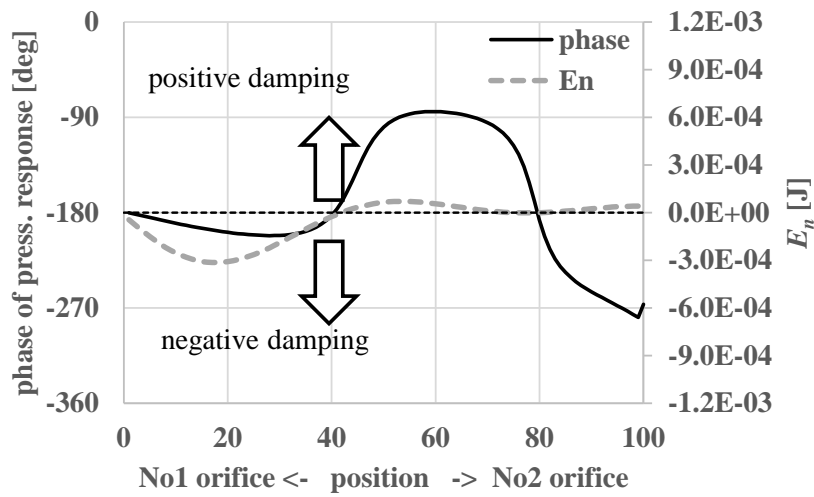


Fig.5.6 Pressure response ($c=350$ [m/s])

Fig.5.7 は音速 c を更に遅くし、200m/s とした場合の結果である。圧力応答の節が 2 つ発生しており、気柱振動の次数が増えたような挙動となっている。圧力応答の位相は、応答の節を境目として位相が反転しており、それに対応して E_n の正負も反転している。



(a)



(b)

Fig.5.7 Pressure response ($c=200[m/s]$)

5.4.2 はり全体のエネルギー収支

前項で示したように、 E_n の値は z の値により正負が変化しており、Fig5.5～5.7のグラフだけでははり全体として、流体力が正減衰として作用しているのか、負減衰として作用しているのか、の判別が難しい。そこで、各 z 位置の E_n の値を積算することで、はり

全体としてのエネルギー収支 ΣE_n を計算し、着目するはりの振動モードに対する減衰の正負を判別することを試みた。数値シミュレーションとの整合性については 5.5.2 項で議論する。

結果を Fig.5.8 に示す。音速 c が大きい領域では、Fig.5.5 に示した通り位相遅れが小さく安定な特性の領域が大きいことから、 ΣE_n は正の値となっている。音速の値が 400m/s を下回る付近から、 ΣE_n の値は負に転じている。これは、Fig.5.9 に示したように、圧力応答の位相遅れが顕著になることで、 ΣE_n が負の領域が増加したことに起因すると考えられる。

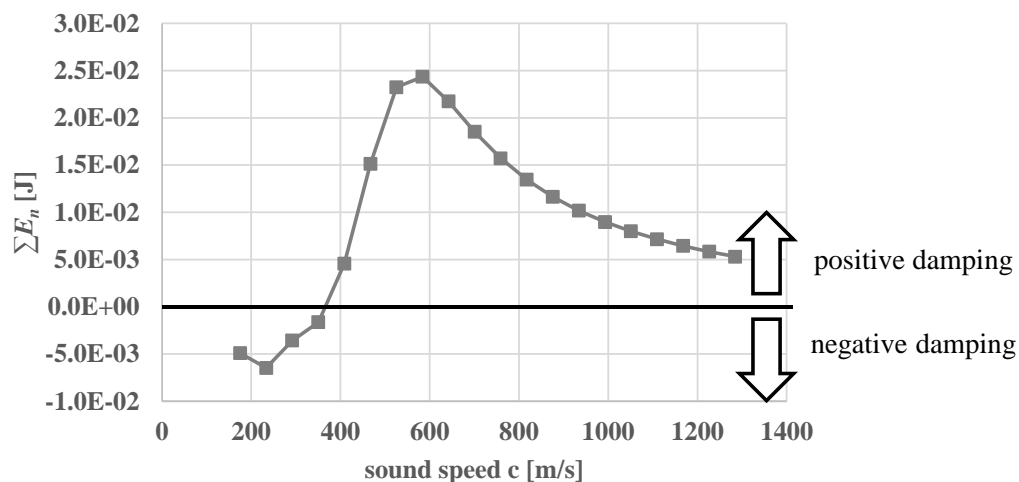
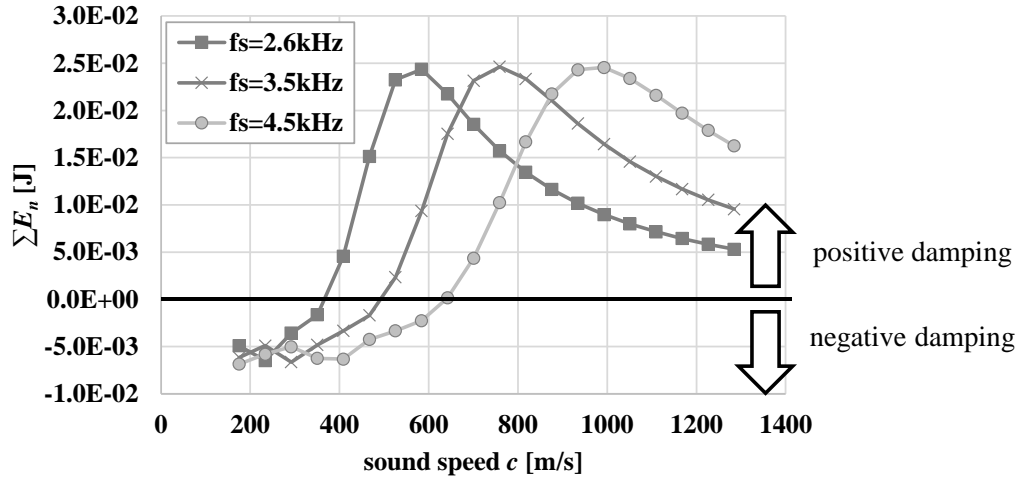
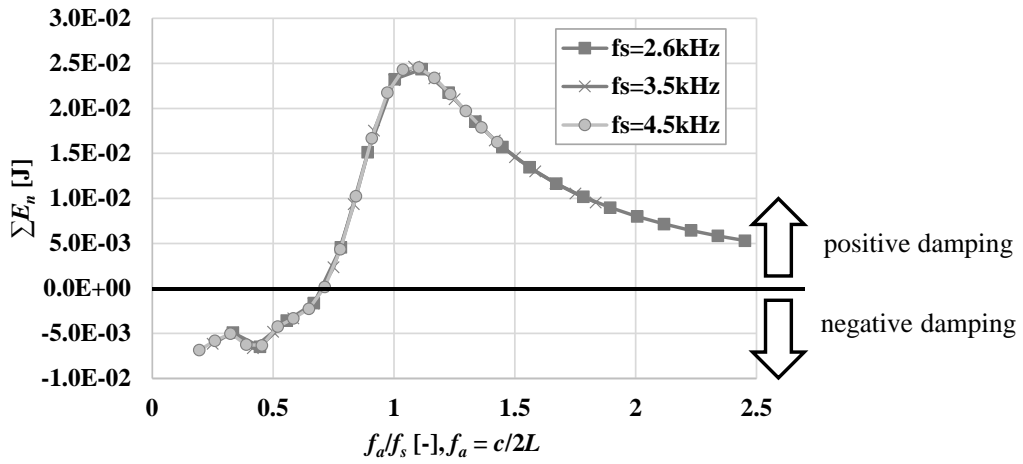


Fig.5.8 Effect of sound speed on ΣE_n

次に、変位周波数の影響を確認するため、変位周波数 f_s を変化させて計算した。結果を Fig.5.9(a)に示す。変位周波数 f_s が大きいほど、横軸の音速 c が大きい方向にシフトするような傾向が見られた。前項で述べたように ΣE_n の正負は圧力伝播の速度（音速）が影響しており、上記の音速 c が大きい側にシフトする傾向は、変位周波数が大きくなると相対的には圧力伝播の速度が遅くなるためと考えられる。そこで、横軸を変位周波数 f_s と音速 c から求まる気柱振動周波数 $f_a (=c/2L)$ の比で整理した。結果を Fig.5.9(b)に示す。 ΣE_n の値は、変位周波数 f_s に依存せずほぼ同一の挙動を示しており、 ΣE_n の値は f_a/f_s による影響が支配的であると言える。



(a) horizontal axis: sound speed c



(b) horizontal axis: f_a/f_s , $f_a = c/2L$

Fig.5.9 Effect of displacement frequency (f_s) on ΣE_n

5.5 連成シミュレーション

5.5.1 自励振動の挙動

構造を含めた時系列の連成シミュレーションの結果を示す。Fig.5.10 は、No1 オリフィス下流（はりの先端）側のバランスピストン室圧力およびはりの変位を示している。 $t=0$ においてステップ状の外力変化が加わった後、徐々に振幅が発達し自励振動の挙動を示している。 $t=0.04$ 以降はほぼ一定の振幅のリミットサイクルとなっている。

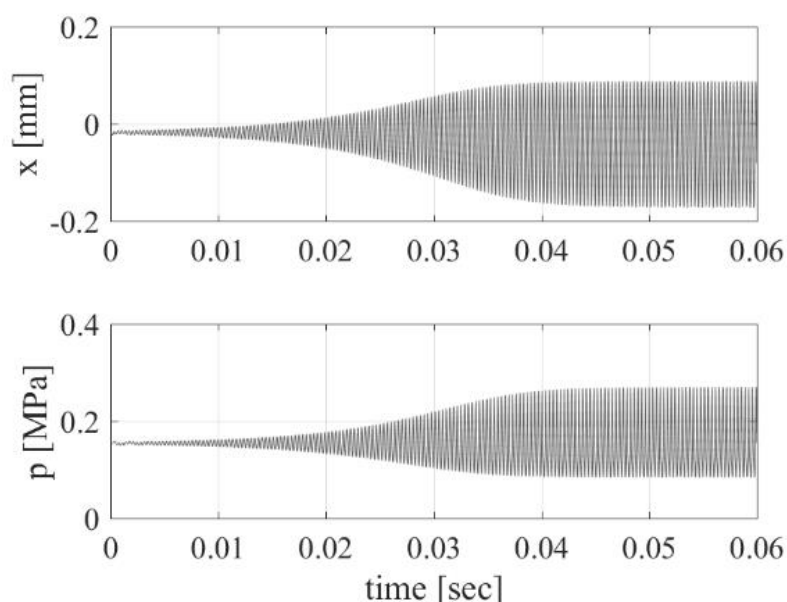
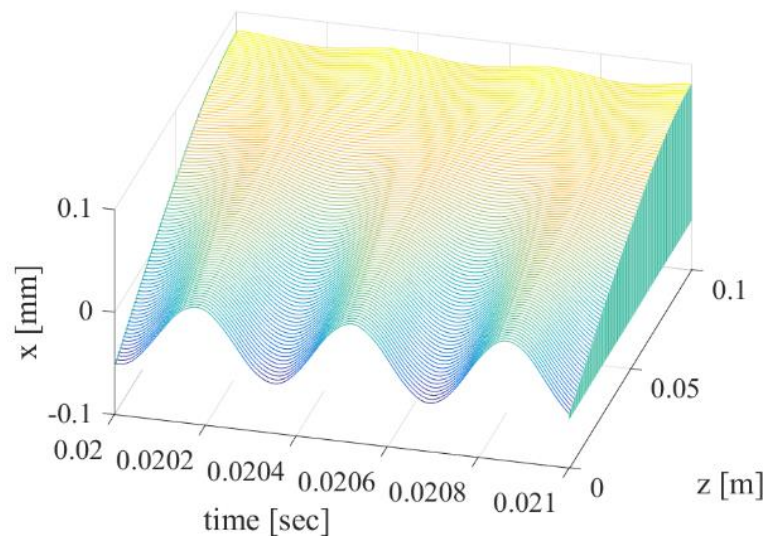
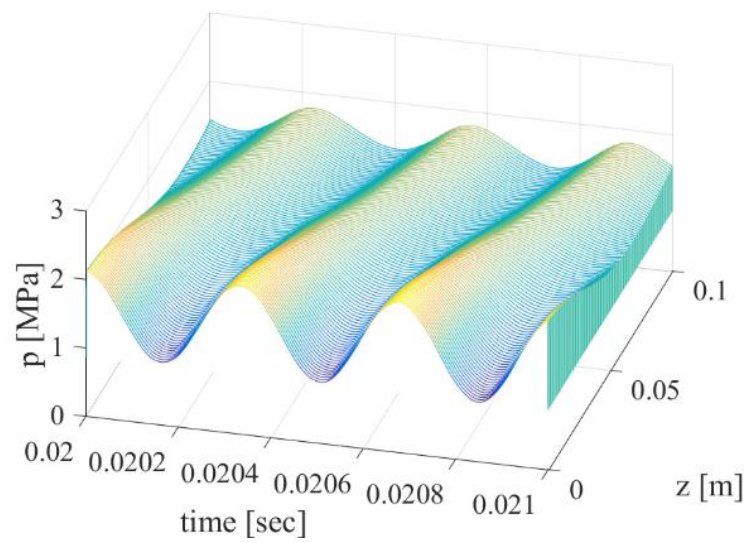


Fig.5.10 Displacement (top) and pressure (bottom) at beam tip

Fig.5.11 に、時系列の変位と圧力の挙動を 3 次元的に表現したものを示す。横軸は時間 t 、縦軸ははりの変位 x もしくはバランスピストン室圧力 p 、奥行き方向の軸ははりの位置を示す座標 z とした。変位 x の振幅は No1 オリフィス ($z=0\text{mm}$) 側が大きく、No2 オリフィス ($z=0.1\text{m}$) 側が小さい状態であり、1 次の曲げモードの様相を示している。バランスピストン室圧力 p は No1 オリフィス ($z=0\text{mm}$) 側から No2 オリフィス ($z=0.1\text{m}$) 側にかけて、連続的に圧力の山が伝播するような様相を示している。



(a) displacement x



(b) balance piston chamber pressure p

Fig.5.11 Three dimensional plot of x and p

5.5.2 動的安定性評価

時系列の連成シミュレーション結果から、変位の振幅に着目して動的安定性の評価をおこなった。自励振動の発生した条件において、No1 オリフィス側（はり先端）の変位の振幅を読み取り、時間的な推移を整理した結果を Fig.5.12 に示す。音速 c の値を変化させて計算しており、計算条件は気柱振動周波数 f_a ($=c/2L$) と観察された変位周波数 f_s の比率により示している。

Fig.5.12 に示すいずれの条件においても、時間と共に変位の振幅が増加する傾向がみられる一方、振幅の発達速度は、 f_a/f_s が小さいほど大きい傾向を示している。また、変位振幅が一定となるリミットサイクルに到達した状態の振幅の値は、 f_a/f_s が小さいほど大きい。 f_a/f_s が 0.7 より大きい条件では自励振動は発生しておらず、Fig.5.9 で示した減衰の正負の閾値と一致している。

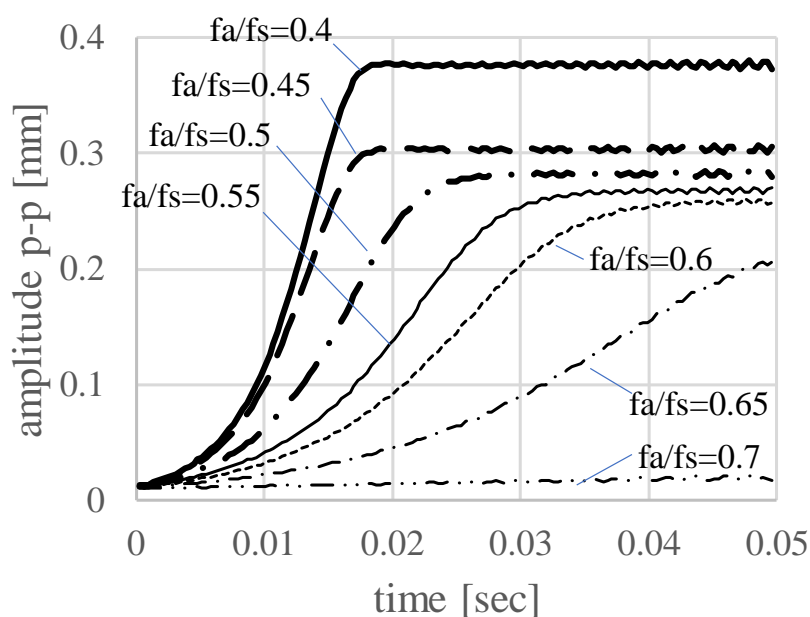


Fig.5.12 Amplitude of displacement

次に、はりの振動周波数が変化した場合の動的安定性について確認するため、はりの板厚 h を変えて計算した。結果を Fig.5.13 に示す。縦軸の減衰比は、Fig.5.12 で示した振幅の発達具合から、対数減衰率を算出して用いた。横軸は気柱振動周波数 f_a ($=c/2L$) と観察された変位周波数 f_s の比率で整理した。変位を入力した計算では、Fig.5.9 で示した通り f_a/f_s が小さい領域で ΣE_n が負の値 (=動的に不安定) となった。シミュレーションの結果である Fig.5.13 はこの結果と一致しており、 f_a/f_s が 0.7 以下の領域で不安定な特性を示している。一方、変位を入力した計算の Fig.5.9 では、 ΣE_n の値は f_a/f_s により支配される結果となっているのに対し、シミュレーションの結果である Fig.5.13 では板厚 h が大きいほど減衰比の絶対値が小さくなり、安定側にシフトする傾向がみられる。これは、エネルギー収支が同一であっても、はりの振動周波数が大きいと振幅の発達に必要なエネルギーが大きくなるため、結果として減衰比の絶対値が低下していると考えられる。

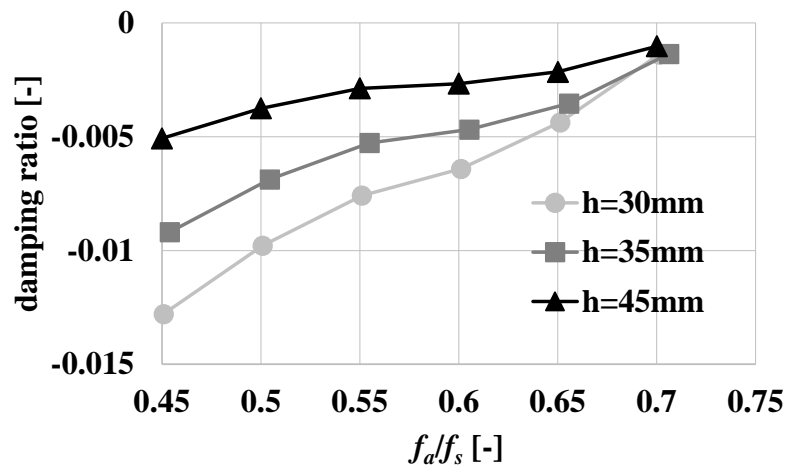
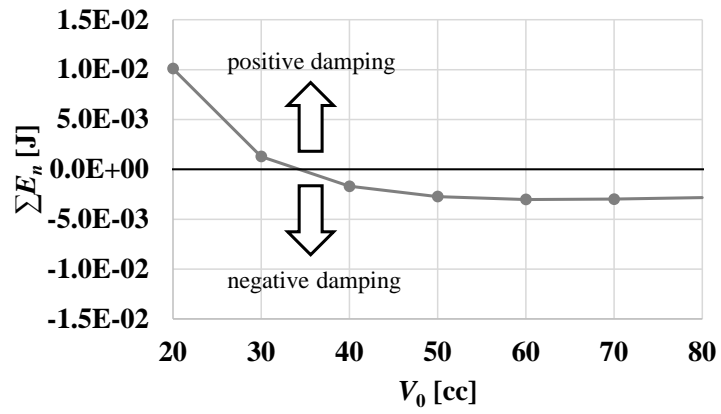


Fig.5.13 Effect of beam thickness h

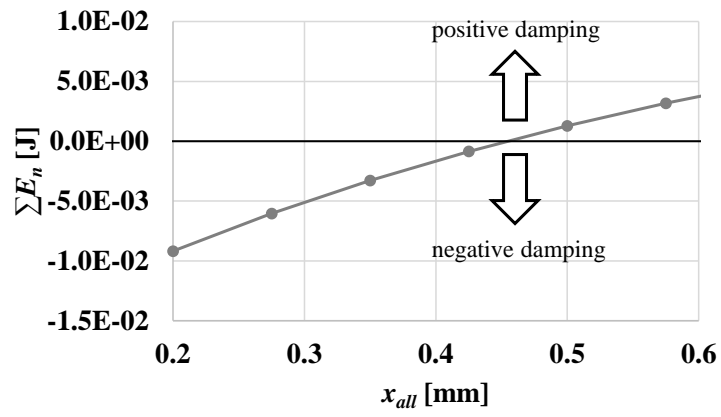
5.6 パラメータの影響

最後に、安定性に影響するパラメータを調査した。計算手法としては 5.3.1 項に示した変位を入力する計算方法を採用し、 ΣE_n の値により減衰の正負を判別した。バランスピストン機構の剛体モードの安定性に影響のあるパラメータ[69]について、本章のモデルにおける影響を確認した。

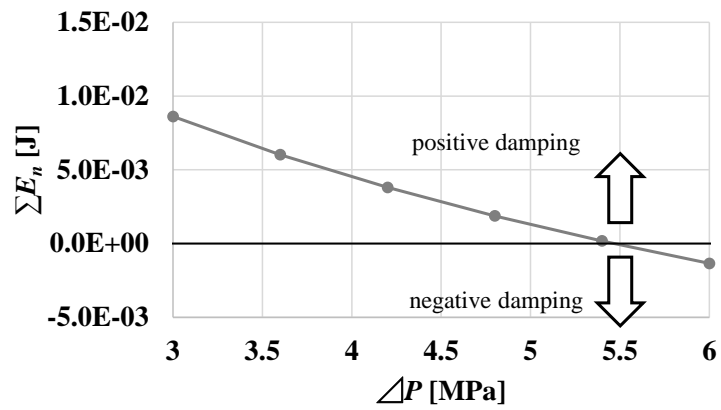
計算結果を Fig.5.14 に示す。Fig.5.14 (a)に示したバランスピストン室容積 V_0 の影響については、 V_0 が大きくなるほど不安定化する傾向がみられた。Fig.5.14 (b)のバランスピストンオリフィス総隙間 x_{all} については、大きい程安定化する傾向となった。Fig.5.14 (c)は No1 オリフィス上流と No2 オリフィス下流の圧力差 ΔP の影響であり、大きい程不安定側に変化した。これらの各パラメータの影響は剛体モードの場合と同様であり、剛体モードへの対策をとることで、弾性変形を伴う自励振動への対策にもなると考えられる。



(a) Effect of V_0



(b) Effect of x_{all}



(c) Effect of ΔP

Fig.5.14 Effect of design parameter

5.7 本章のまとめ

インペラの0直径節のモード（直径上の節がゼロ，すなわち周方向に均一に変形するモード）に着目したはり形状の単純化モデルと，バランスピストン室流体の音響モデルを用い，弾性変形と流体音響振動の連成について検討した．

- ・弾性変形の振動周波数に対して流体の音響振動周波数が小さい領域においては，流体圧力の応答は不安定となる．

- ・はりの板厚が大きく弾性変形の周波数が高くなるほど減衰比は増加し，安定側に変化することが分かった．

- ・バランスピストン機構の設計パラメータによる感度を調査した結果，今回着目したモードについては，いずれも弾性変形や流体音響を考慮しない剛体モードと同じ方向の感度であることがわかった．剛体モードの自励振動に対処することで，弾性変形を伴う自励振動の対策にもなると考えられる．

第6章 結論

本論文の目的は、ロケット用ターボポンプに用いられるバランスピストン機構の動的安定性について、既存研究ではみられない以下の3つの項目について検討をおこない、知見を得た。

- (1) バランスピストン機構の1次元モデルを、パラメータの影響を含めて実験的に検証した。
- (2) バランスピストン機構の性能と動的安定性を両立する設計指針を提案した。
- (3) 従来考慮されてこなかった軸方向の動的安定性に関わる要素（弾性変形や音響振動）を考慮したモデルを用い、動的安定性を評価した。

以下に、各章の内容をまとめる。

2章では、バランスピストン機構の1次元動特性モデルを検証するための実験装置を示し、モデルによる解析の結果と実験結果を比較し、検証した。バランスピストン機構のパラメータの変化による安定性の変化が、1次元的なモデルにより予測可能であることを実験的に確認した。バランスピストン室容積の増加、バランスピストン総隙間の減少、上下流差圧の増加は軸方向の安定性を低下させ、自励振動が発生することが実験的に検証された。結果として、バランスピストン機構の1次元的なモデル化の有用性を確認することができた。また、バランスピストン機構の実験をする際、ロケット用ターボポンプの実機環境を用意するためには多大な費用と期間が必要となるが、本章で示した簡易的な実験装置により1次元的なバランスピストン機構の特性の再現が可能であることを示した。

3章では、バランスピストン機構の1次元動特性モデルを用いたモンテカルロシミュレーションを実施し、性能と動的安定性の関係について考察した。制約条件を満足する設計パラメータの範囲を把握するため性能と動的安定性を同時に考慮した網羅的な計算をおこない、解の分布を示した。荷重調整能力と減衰比はトレードオフ関係にあり、荷重調整能力を重視して設計すると減衰比が制約を満足する範囲が狭くなり、設計的な余裕が少なくなることが分かった。また、理論解析の式から導かれる安定判別式により減衰比の正負を判別可能であること、軸方向の剛性は減衰比と強い相関があり、動的な安定性を確保するには剛性を過度に高くする設計を避けるべきであることを示した。

4章では、バランスピストン機構が設置されるインペラの弾性変形に着目し、はり状のモデルを用いて弾性変形の影響について検討した。はりの等価質量および等価剛性に置き換えた集中定数系のモデルで線形解析を実施することで安定性を調査した。剛体モデル、はりモデル、剛体とはりの組み合わせモデルの3つについて調査し、はりの曲げに関する安定性の特性および従来の剛体モデルとの差異について考察した。はりと剛体を組み合わせたモデルでは、周波数の異なる2つのモードが現れるが、低周波数のモードは前章まで議論してきた剛体モデルと同様の傾向を、高周波数のモードははりモデルと同様の傾向を示すことが分かった。また、高周波数のモードは、はりの剛性が高いほどバランスピストン室容積の影響を受けにくく減衰比の絶対値が小さくなる一方、減衰比の正負には影響しないことを確認した。はりモデル(高周波数のモード)の減衰比は、減衰比の絶対値が剛体モデル(低周波数のモード)よりも小さくなるが、安定/不安定の閾値は剛体モデルと大きく差異がないことを示した。すなわち、剛体モデル(低周波数モード)の安定化を図れば、はりモデル(高周波モード)の安定化に対しても効果があることがわかった。

5章では、バランスピストン機構を備えたインペラの0直径節の振動モードに着目し、はり形状に単純化したモデルを用いてはり構造とバランスピストン室流体の音響の連成振動について検討した。構造周波数に対し音響周波数が小さいと流体圧力応答は不安定な特性を示すが、構造の周波数が高いほど減衰比の絶対値は小さくなることを確認した。バランスピストン機構の設計パラメータの安定、不安定への影響を確認したところ、いずれも剛体モード(弾性変形や音響を考慮しないモード)と同じ傾向を示した。剛体モードへ対策をとることで、弾性変形を伴う不安定振動への対策になることを示した。

以上の結果により、本論文で目的とした事項についての知見を得ることができたと考えられる。

今後の展望としては、本論文で得られた知見をロケット用ターボポンプの設計に生かし、設計時に動的安定性を考慮することで製品開発における振動不適合を低減していくことが挙げられる。本論文で示された、性能と動的安定性の両方を考慮した設計方法により、設計パラメータの成立範囲をあらかじめ把握し制約に対して余裕のある設計点を選択することができ、設計条件の変更や実験結果の反映による出戻りを防止し、設計期間を短縮することが可能である。また、従来評価できなかったインペラの弾性変形やバランスピストン室流体の音響振動の影響を評価することで、試験での不適合発生を未然

に防ぎ、製品開発期間の短縮化に貢献することが期待される。

謝辞

本論文は、筆者が宇宙航空研究開発機構に出向中に取り組んだバランスピストン機構の研究をきっかけとしています。出向中に研究の基本的な進め方や心構えについてご指導頂きました吉田義樹様、またバランスピストン研究に興味を持って博士課程入学のお話を頂き、多大なご指導を頂きました井上剛志教授に、深く感謝致します。

バランスピストンに関する研究の進め方については、出向中に一緒のチームであった内海政春先生、川崎聡様に多くのご助言を頂きました。研究の遂行にあたっては、実験装置の製作や論文の推敲について名古屋大学大学院工学研究科機械システム工学専攻の藪井将太先生にご助力を頂き、実験を完遂することができました。また、三菱重工業の皆様には、博士課程に挑戦することについて応援を頂きました。ご支援を頂きました皆様に感謝申し上げます。

最後に、業務が多忙な中、研究を進め論文を書く気力を与えてくれた妻と長男に感謝します。

参考文献

- [1] 前村 孝志, 渥美 正博, 日本の液体ロケットエンジン開発, 高温学会誌, 第 33 卷, 第 5 号 (2007 年 9 月), pp229-236.
- [2] 今野 彰, わが国の液体ロケットエンジンの現状と今後の展望, ターボ機械, 第 21 卷, 第 3 号 (1993 年 3 月), pp138-145
- [3] 岸本 健治, 吉田 裕宣, 深堀 修, 大東 弘幸, 安藤 清, 福島 幸夫, 改良型 LE-7 エンジンの開発, 三菱重工技報, Vol.33, No.3 (1996-5), pp194-197
- [4] 平田 邦夫, 大型汎用ロケット「H-IIA」の開発, 日本航空宇宙学会誌, 第 46 卷, 第 531 号 (1998 年 4 月), pp191-197
- [5] 谷口 勲嗣, 梶浦 健治, 前村 孝志, 平田 邦夫, H-IIA ロケットの開発, 三菱重工技報, Vol.35, No.5 (1998-9), pp340-343
- [6] 岸本 健治, 吉田 裕宣, 長谷川 恵一, H-IIA ロケット用エンジン (LE-7A, LE-5B) の開発, 三菱重工技報, Vol.35, No.5 (1998-9), pp344-345
- [7] 奈良 登喜雄, 恩河 忠興, 新津 真行, 瀧田 純也, 佐藤 晃浩, 根来 延樹, H3 ロケットの開発ー世界で叩けるロケットを目指してー, 三菱重工技報, Vol.54, No. 4 (2017), pp30-37
- [8] 宮澤政文, 宇宙ロケット工学入門, 2016, 朝倉書店, p.52
- [9] 上條 謙二郎, 野坂 正隆, 液体ロケットターボポンプ, 日本航空宇宙学会誌, 第 36 卷, 第 417 号 (1998 年 10 月), pp443-450
- [10] 岸本 健治, 上段用液体ロケットエンジン LE-5 シリーズ, 日本航空宇宙学会誌, 第 47 卷, 第 548 号 (1999 年 9 月), pp145-149
- [11] 野坂 正隆, ロケット用ターボポンプの軸受と軸シール, ターボ機械, 第 15 卷, 第 6 号 (1987 年 6 月), pp351-pp359
- [12] J.F.Gulich, Centrifugal Pumps, 2010, Springer
- [13] 大橋秀雄, 流体機械, 1971, 森北出版, p.133-134
- [14] 黒川 淳一, 豊倉 富太郎, 遠心形ターボ機械の軸スラストに関する研究(第 1 報, 諸因子の効果について), 日本機械学会論文集 (第 2 部), 第 41 卷, 第 346 号 (1975 年 6 月), pp1753-1762
- [15] 黒川 淳一, 豊倉 富太郎, 遠心形ターボ機械の軸スラストに関する研究(第 2 報,

- 軸スラスト制御のための一方法), 日本機械学会論文集 (第 2 部), 第 41 巻, 第 346 号 (1975 年 6 月), pp1763-1769
- [16] 黒川 淳一, 豊倉 富太郎, 遠心形ターボ機械の軸スラストの算定法, ターボ機械, 第 3 巻第 2 号 (1975 年 3 月), pp602-611
- [17] 松井 純, 黒川 淳一, 伊東 由高, 遠心ポンプおよびポンプ水車の軸スラスト予測, 日本機械学会論文集 (B 編), 73 巻 732 号 (2007-8), pp.1663-1669
- [18] 黒川 淳一, ターボ機械の軸スラスト, ターボ機械, 第 5 巻, 第 10 号 (1997 年 10 月), pp.596-606
- [19] 黒川 淳一, 豊倉 富太郎, 遠心形ターボ機械の漏れ損失および円板摩擦損失について, ターボ機械, 第 4 巻, 第 5 号 (1976 年 6 月), pp.302-310
- [20] 黒川 淳一, 佐久間 真人, 容器内回転円板にそう狭いすきま流れ, 日本機械学会論文集 (B 編), 53 巻, 492 号 (1987-8), pp.2468-2476
- [21] 黒川 淳一, 豊倉 富太郎, 新庄 正明, 容器内回転円板にそう非定常流れの研究 (第 1 報, 起動時の流れ), 日本機械学会論文集 (B 編), 46 巻, 409 号 (1980-9), pp.1626-1635
- [22] 黒川 淳一, 豊倉 富太郎, 石綿 良三, 杉浦 正明, 容器内回転円板にそう非定常流れの研究 (第 2 報, 停止時の過渡流れ), 日本機械学会論文集 (B 編), 47 巻, 413 号 (1981-1), pp.44-49
- [23] 黒川 淳一, 豊倉 富太郎, 新庄 正明, 松尾 和芳, 容器内回転円板に沿う流れに及ぼす表面あらかの影響, 日本機械学会論文集 (B 編), 44 巻, 380 号 (1978-4), pp.1283-1291
- [24] 松井 純, 黒川 淳一, 阿部 平志郎, 松本 一成, J-Groove による遠心ポンプの軸スラスト制御, 日本機械学会論文集 (B 編), 74 巻, 738 号 (2008-2), pp.317-322
- [25] 木村 俊哉, 川崎 聡, 島垣 満, 内海 政春, 後藤 公成, 遠心羽根車シュラウド隙間流れに対するスワールブレーカの効果, 日本機械学会論文集 (B 編), 78 巻, 787 号 (2012-3), pp.576-587
- [26] 香川 修作, 黒川 淳一, 松井 純, 低比速度遠心ポンプにおける背面放射溝の効果と小型化, ターボ機械, 第 35 巻, 第 12 号 (2007 年 12 月), pp.728-736
- [27] 黒川 淳一, 浅い放射溝による旋回流の制御, ターボ機械, 第 27 巻, 第 6 号 (1999 年 6 月), pp.321-328

- [28] Dominik Lefor, Jan Kowalski, Boris Kutschelis, Thomas Herbers, Ronald Mailach, OPTIMIZATION OF AXIAL THRUST BALANCING SWIRL BREAKERS IN A CENTRIFUGAL PUMP USING STOCHASTIC METHODS, Proceedings of the ASME 2014 4th Joint US-European Fluids Engineering Division Summer Meeting (FEDSM2014), August 3-7, 2014, Chicago, Illinois, USA
- [29] 横山 重吉, 松浦 聡, 遠心ポンプ用推力バランスディスクの運転特性に関する研究, ターボ機械, 第 10 巻, 第 2 号 (1982 年 2 月), pp.68-75
- [30] 近藤 忠, 縁の下の力持ち 高圧ポンプー技術と構造編ー, エバラ時報, No.251 (2016-4), pp8-12
- [31] 小林 滋明, ボイラ給水ポンプの最近の動向, ターボ機械, 第 8 巻, 第 4 号 (1980 年 4 月), pp.217-223
- [32] 黒川 淳一, 上條 謙二郎, 志村 隆, ロケット用液酸ポンプの水力性能と軸スラスト性能の総合解析, 日本機械学会論文集 (B 編), 57 巻, 538 号 (1991-6), pp.2018-2026
- [33] Katherine Van Hooser, John Bailey and Alok Majumdar, NUMERICAL PREDICTION OF TRANSIENT AXIAL THRUST AND INTERNAL FLOWS IN A ROCKET ENGINE TURBOPUMP, AIAA 99-2189, 35th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, 20-24 June 1999, Los Angeles, California
- [34] Takashi Shimura, Satoshi Kawasaki, Masaharu Uchiumi, Toshiya Kimura and Jun Matsui, INTERNAL FLOW AND AXIAL THRUST BALANCING OF A ROCKET PUMP, Transactions of the ASME Journal of Fluids Engineering, APRIL 2012, Vol. 134 / 041103-1
- [35] 上條 謙二郎, 橋本 亮平, 志村 隆, 山田 仁, 渡辺 光男, 渡辺 義明, 長谷川 敏, 液酸・液水ロケットエンジン用液酸ターボポンプの試作研究, 航空宇宙技術研究所報告, NAL TR-588 (1979 年 10 月)
- [36] 上條 謙二郎, ロケットの液体水素ポンプ, 水素エネルギーシステム誌, Vol.30, No.2(2005), pp.16-22
- [37] 青木 宏, LE-5B エンジンターボポンプ, ターボ機械, 第 29 巻, 第 3 号 (2001 年 3 月), pp.168-175
- [38] 志村 隆, 長谷川 敏, LE-7 液酸ターボポンプの軸推力釣合わせ, 日本航空宇宙学会誌, 第 41 巻, 第 477 号 (1993 年 10 月), pp.590-596

- [39] 青木 宏, 志村 隆, 藁科 彰吾, 上條 謙二郎, 極低温上段エンジン用ターボポンプの設計および開発, 日本航空宇宙学会論文集, Vol.53, No.617 (2005), pp.257-265
- [40] Scheer, D.D., Huppert, M.C., Vieri, F., Farquhar, J., Keller, R.B., Jr., NASA SP-8125, LIQUID ROCKET ENGINE AXIAL-FLOW TURBOPUMPS, NASA, Washington, D.C., 1978
- [41] JIS B 0131:2017, ターボポンプ用語
- [42] 長尾 直樹, 川崎 聡, 南里 秀明, 沖田 耕一, 安富 義展, ロケットターボポンプにおけるロータの軸方向動的不安定の抑制に関する実験的考察 (第一報), ターボ機械, 第 48 巻, 第 4 号 (2020 年 4 月), pp.193-200
- [43] 吉田 誠, 長谷川 敏, 志村 隆, 橋本 亮平, LE-7 液酸ターボポンプの振動測定, ターボ機械, 第 18 巻, 第 2 号 (1990 年 2 月), pp.79-85
- [44] 岡安 彰, 太田 豊彦, 尾池 守, 藤田 敏彦, LE-7 用液水ターボポンプ 軸系振動問題と対策, ターボ機械, 第 26 巻, 第 8 号 (1998 年 8 月), pp.456-462
- [45] 今野 彰, 坂爪 則夫, LE-7 エンジンターボポンプと 8 号機失敗の原因, ターボ機械, 第 29 巻, 第 3 号 (2001 年 3 月), pp.139-146
- [46] 吉田 誠, LE-7 液体酸素ターボポンプの軸振動に関する研究, 東北大学博士論文 (2000 年 3 月)
- [47] 太田 豊彦, LE-7 液体水素ターボポンプの振動と抑制に関する研究, 東北大学博士論文 (2000 年 9 月)
- [48] C.E.Brennen, HYDRODYNAMICS OF PUMPS, 1994, Concepts ETI, Inc.
- [49] 江口 真人, 遠心ポンプの振動 流体现象とロータダイナミクス, エバラ時報, No.221 (2008-10), pp.22-31
- [50] 岩壺 卓三, 盛 本成, 松本 俊郎, ポンプ用平行環状シールの静および動特性の実験的研究 (第 1 報, 静特性およびロータ回転速度による動特性への影響), 日本機械学会論文集 (C 編), 55 巻, 510 号 (1989-2), pp.310-316
- [51] 岩壺 卓三, 盛 本成, 松本 俊郎, ポンプ用平行環状シールの静および動特性の実験的研究 (第 2 報, 同心ふれまわり時の動特性), 日本機械学会論文集 (C 編), 55 巻, 510 号 (1989-2), pp.317-322
- [52] 岩壺 卓三, 茨木 隆次, 梁 保錫, 川井 良次, ポンプ用シールの動特性に関する

- る研究 (第 5 報, 入口旋回流を考慮した多段平行みぞ付シールの場合), 日本機械学会論文集 (C 編), 52 巻, 474 号 (1986-2), pp.456-464
- [53] Takuzo Iwatsubo, Ryoji Kawai, Naoya Kagawa, Tetsuya Kakiuchi, and Kazuki Takahara, ANALYSIS OF DYNAMIC CHARACTERISTICS OF FLUID FORCE INDUCED BY LABYRINTH SEAL, TAM Instability WS (1984), pp211-234.
- [54] 長尾直樹, 江口真人, 内海政春, 吉田義樹, ロケットターボポンプ用ロータダイナミクス試験機の開発, 日本機械学会 2013 年度年次大会 講演論文集 (2013.9 岡山)
- [55] 長尾直樹, 江口真人, 内海政春, 吉田義樹, ターボポンプに作用するロータダイナミック流体力の計測, ターボ機械, 第 40 巻, 第 7 号 (2012 年 7 月)
- [56] D.W.Childs, FLUID-STRUCTURE INTERACTION FORCES AT PUMP-IMPELLER-SHROUD SURFACES FOR AXIAL VIBRATION ANALYSIS, Transactions of the ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol.113, January 1991, pp.108-115
- [57] 吉田 義樹, 木村 俊哉, 川崎 聡, 軸方向に振動する遠心羽根車に働く流体力の動特性に関する研究動向, ターボ機械, 第 41 巻, 第 10 号 (2013 年 10 月), pp.593-601
- [58] 辻本良信, 吉田義樹, 山本健太, 遠心羽根車の軸方向の振動に伴って生じる非定常流体力 隙間流れの影響, 大阪大学修士論文 (2003 年 3 月)
- [59] 堀口 祐憲, 上野 圭徳, 高橋 康太郎, 宮川 和芳, 辻本 良信, 回転しながら軸方向に振動する円盤と静止円盤の間の半径方向隙間流れの動特性, ターボ機械, 第 37 巻, 第 1 号 (2009 年 1 月) pp.52-62
- [60] 杉山 敬幸, 金子 成彦, バランスピストンの動特性に関する研究, 日本機械学会 Dynamics and Design Conference 2013 USB 論文集 (2013.8 福岡)
- [61] 大西 樹, 金子 成彦, 作動流体の圧縮性を考慮したターボポンプで発生する軸方向振動の運動モデルの構築, 日本機械学会 Dynamics and Design Conference 2015 USB 論文集 (2015.8 弘前)
- [62] 木村 俊哉, 川崎 聡, 志村 隆, 内海 政春, 林 光昭, 松井 純, 軸方向に振動するバランスピストンに作用する非定常流体力の数値解析, 日本機械学会論文集 (B 編), 78 巻, 787 号 (2012-3), pp.588-597
- [63] 木村 俊哉, 石井 貴大, 後藤 公成, 吉田 義樹, 軸方向に振動するバランスピ

- ストンに作用する非定常流体力の数値解析(第二報:ロータ前面及び背面の動特性), 日本機械学会論文集, Vol.80, No.809 (2014)
- [64] 林 光昭, 都丸 裕司, 川崎 聡, 志村 隆, 内海 政春, バランスピストン機構による軸方向振動の安定性に関する検討, ターボ機械, 第 41 巻, 第 10 号 (2013 年 10 月), pp.625-632
- [65] Satoshi Kawasaki, Takashi Shimura, Masaharu Uchiumi, Mitsuaki Hayashi, Jun Matsui, UNSTEADY RESPONSE OF FLOW SYSTEM AROUND BALANCE PISTON IN A ROCKET PUMP, Progress in Propulsion Physics 4 (2013), pp.457-466
- [66] Takashi Shimura, Satoshi Kawasaki, Masaharu Uchiumi, Toshiya Kimura, Mitsuaki Hayashi, Jun Matsui, STABILITY OF AN AXIAL THRUST SELF-BALANCING SYSTEM, ASME Journal of Fluids Engineering, January 2013, Vol.135
- [67] 平木 博道, 内海 政春, 木村 俊哉, 吉田 義樹, バランスピストン機構の軸方向減衰特性に関する理論的検討, ターボ機械, 第 43 巻, 第 2 号 (2015 年 2 月), pp.76-82
- [68] 平木 博道, 内海 政春, バランスピストン機構の軸方向振動の固有値に関する理論的検討, ターボ機械, 第 43 巻, 第 6 号 (2015 年 6 月), p.358-366
- [69] 平木 博道, 内海 政春, ロケット用ターボポンプの軸方向振動に関する検討, 日本機械学会 Dynamics and Design Conference 2015 USB 論文集 (2015.8 弘前)
- [70] Bilyk, D. W., STABILITY OF AXIAL OSCILLATION IN PUMPS USING HYDROSTATIC BEARINGS, I Mech E (1992), C432/005, pp215-226
- [71] 水野 勉, 小口 英男, 新井山 一樹, 四宮 教行, H3 ロケット 1 段エンジン LE-9 ターボポンプの開発, IHI 技報, Vol.57, No.3 (2017), pp.58-64
- [72] 水野 勉, 小林 聡, 小口 英男, LE-X エンジン用ターボポンプの研究, IHI 技報, Vol.49, No.3 (2009), pp.178-181
- [73] 工藤 健, 塩幡 宏規, 松下 修己, 藤原 浩幸, 桜井 茂雄, 依田 秀夫, タービンロータの軸曲げと翼アンブレラモードの連成振動の実験的研究, 日本機械学会論文集, Vol.80, No.812 (2014)
- [74] 小松 敬治, 機械構造振動学, 2009, p.105
- [75] 平木 博道, 井上 剛志, 藪井 将太, バランスピストン機構の軸方向安定性に関する実験的研究, 日本機械学会論文集, Vol.85, No.876, 2019

- [76] 平木 博道, 内海 政春, 川崎 聡, 井上 剛志, 動特性を考慮したターボポンプのバランスピストン設計についての考察, ターボ機械, Vol.44, No.4 (2016), pp.231-241.
- [77] Hiraki, H., Inoue, T., Yabui, S., INFLUENCE OF IMPELLER'S ELASTIC DEFORMATION ON THE STABILITY OF BALANCE PISTON MECHANISM OF ROCKET TURBOPUMP
- [78] 平木 博道, 井上 剛志, 藪井 将太, バランスピストン機構のインペラ弾性変形と音響振動の連成を考慮した軸方向振動の検討, ターボ機械 (2021 掲載予定)
- [79] 近藤 恭平, 振動論, 1993, p.129

付録 A はりの振動モードの解析方法

A.1 目的

本付録では、5章においてはりの変位を入力とした計算をする際に、はりの振動モード形状を算出した方法について示す。

A.2 モデル

Fig.A.1 に示すはりのモデルについて、曲げ振動モードを考える。

- ・ はり左端の z 座標を 0, 右端の z 座標を l とする
- ・ 左端は自由端, 右端は回転のみを拘束 (変位は自由) し, 質量 m が付与されている

はりの曲げ振動の方程式は式(A.1), 境界条件は式(A.2)となる [79].

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right) + \rho_s A_b \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$x = 0; \frac{\partial^3 x}{\partial z^3} = 0, \quad x = l; \frac{\partial x}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.2})$$

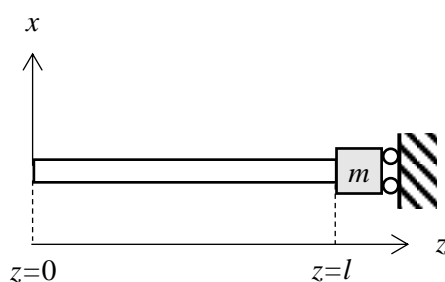


Fig.A.1 Beam model

A.3 形状関数

はりの曲げ振動モードの形状関数 $h(z)$ は以下の式により表現できる [79].

$$h(z) = D_1 \cos \beta z + D_2 \sin \beta z + D_3 \cosh \beta z + D_4 \sinh \beta z \quad (\text{A.3})$$

形状関数の 1 階微分, 2 階微分, 3 階微分は以下の式で表される.

$$h'(z) = \beta \{-D_1 \sin \beta z + D_2 \cos \beta z + D_3 \sinh \beta z + D_4 \cosh \beta z\} \quad (\text{A.4})$$

$$h''(z) = \beta^2 \{-D_1 \cos \beta z - D_2 \sin \beta z + D_3 \cosh \beta z + D_4 z\} \quad (\text{A.5})$$

$$h'''(z) = \beta^3 \{D_1 \sin \beta z - D_2 \cos \beta z + D_3 \sinh \beta z + D_4 \cosh \beta z\} \quad (\text{A.6})$$

A.4 境界条件および式の整理

はり左端の境界条件より, $z=0$ で曲げモーメントがゼロとなるため, 式(A.5)より

$$h''(0) = \beta^2 \{-D_1 + D_3\} = -D_1 + D_3 = 0 \quad (\text{A.7})$$

すなわち,

$$D_1 = D_3 \quad (\text{A.8})$$

が成り立つ. また, $z=0$ でせん断力がゼロとなるため, 式(A.6)より

$$h'''(0) = \beta^3 \{-D_2 + D_4\} = -D_2 + D_4 = 0 \quad (\text{A.9})$$

すなわち,

$$D_2 = D_4 \quad (\text{A.10})$$

が成り立つ.

次に, はり右端の境界条件について検討する. $z=l$ で回転がゼロとなるため, 式(A.4), (A.8), (A.10)より

$$\begin{aligned}
h'(l) &= \beta\{-D_1 \sin \beta l + D_2 \cos \beta l + D_1 \sinh \beta l + D_2 \cosh \beta l\} \\
&= \beta\{D_1(-\sin \beta l + \sinh \beta l) + D_2(\cos \beta l + \cosh \beta l)\} = 0
\end{aligned} \tag{A.11}$$

となるため，式(A.12)が得られる．

$$D_2 = D_1 \frac{\sin \beta l - \sinh \beta l}{\cos \beta l + \cosh \beta l} \tag{A.12}$$

次に， $z=l$ における曲げモーメントと中立軸の曲率の関係は

$$M(l, t) = -EI \frac{\partial^2 x(l, t)}{\partial z^2} \tag{A.13}$$

であり，せん断力は

$$F(l, t) = \frac{\partial M(l, t)}{\partial z} = -EI \frac{\partial^3 x(l, t)}{\partial z^3} \tag{A.14}$$

と表される．はり右端では慣性力=せん断力となるため，式(A.15)が成り立つ．

$$m\ddot{x}(l) = -F(l, t) = EI \frac{\partial^3 x(l, t)}{\partial z^3} \tag{A.15}$$

ここで，はりの変位 x を式(A.16)で表現する．

$$x = h(z)g(t) \tag{A.16}$$

式(A.14)および固有振動数 p_r を用いると式(A.17)となる．

$$\ddot{x} = h(z)\ddot{g}(t) = -p_r^2 h(z)g(t) = -p_r^2 x \tag{A.17}$$

以上より，式(A.6)，(A.8)，(A.10)，(A.15)，(A.17)を用いて式(A.18)が得られる．

$$-mp_r^2 h(l)g(t) = EI\beta^3\{D_1 \sin \beta l - D_2 \cos \beta l + D_1 \sinh \beta l + D_2 \cosh \beta l\}g(t) \tag{A.18}$$

ここで，式(A.3)，(A.8)，(A.10)より

$$h(l) = D_1 \cos \beta l + D_2 \sin \beta l + D_1 \cosh \beta l + D_2 \sinh \beta l \tag{A.19}$$

であるから，式(A.18)とあわせて式(A.20)となる．

$$\begin{aligned}
& -mp_r^2\{D_1(\cos \beta l + \cosh \beta l) + D_2(\sin \beta l + \sinh \beta l)\} \\
& = EI\beta^3\{D_1(\sin \beta l + \sinh \beta l) + D_2(-\cos \beta l + \cosh \beta l)\}
\end{aligned} \tag{A.20}$$

式(A.20)を整理することにより，式(A.21)が得られる．

$$\begin{aligned}
& D_1 \left\{ \cos \beta l + \cosh \beta l + \frac{EI\beta^3}{mp_r^2} (\sin \beta l + \sinh \beta l) \right\} \\
& + D_2 \left\{ \sin \beta l + \sinh \beta l + \frac{EI\beta^3}{mp_r^2} (-\cos \beta l + \cosh \beta l) \right\} = 0
\end{aligned} \tag{A.21}$$

これに式(A.12)を代入して式(A.22)とする．

$$\begin{aligned}
& D_1 \left[\cos \beta l + \cosh \beta l + \frac{EI\beta^3}{mp_r^2} (\sin \beta l + \sinh \beta l) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\sin \beta l - \sinh \beta l}{\cos \beta l + \cosh \beta l} \left\{ \sin \beta l + \sinh \beta l \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{EI\beta^3}{mp_r^2} (-\cos \beta l + \cosh \beta l) \right\} \right] = 0
\end{aligned} \tag{A.22}$$

$D_1 \neq 0$ として式(A.22)を整理すると式(A.23)となる．

$$\begin{aligned}
& (\cos \beta l + \cosh \beta l)(\cos \beta l + \cosh \beta l) \\
& + \frac{EI\beta^3}{mp_r^2} (\cos \beta l + \cosh \beta l)(\sin \beta l + \sinh \beta l) \\
& + (\sin \beta l - \sinh \beta l)(\sin \beta l + \sinh \beta l) \\
& + \frac{EI\beta^3}{mp_r^2} (-\cos \beta l + \cosh \beta l)(\sin \beta l - \sinh \beta l) = 0
\end{aligned} \tag{A.23}$$

式(A.23)の左辺を展開して整理すると，式(A.24)となる．

$$\begin{aligned}
& \cos^2 \beta l + 2 \cos \beta l \cosh \beta l + \cosh^2 \beta l \\
& + \frac{EI\beta^3}{mp_r^2} (\cos \beta l \sin \beta l + \sin \beta l \cosh \beta l + \cos \beta l \sinh \beta l \\
& + \cosh \beta l \sinh \beta l) + \sin^2 \beta l - \sin \beta l \sinh \beta l + \sin \beta l \sinh \beta l \\
& - \sinh^2 \beta l \\
& + \frac{EI\beta^3}{mp_r^2} (-\cos \beta l \sin \beta l + \sin \beta l \cosh \beta l + \cos \beta l \sinh \beta l \\
& - \cosh \beta l \sinh \beta l) \\
& = \cos^2 \beta l + \sin^2 \beta l + \cos \beta l \cosh \beta l - \sin \beta l \sinh \beta l + \sin \beta l \sinh \beta l \\
& + \cosh^2 \beta l - \sinh^2 \beta l \\
& + \frac{EI\beta^3}{mp_r^2} (\cos \beta l \sin \beta l + \sin \beta l \cosh \beta l + \cos \beta l \sinh \beta l \\
& + \cosh \beta l \sinh \beta l - \cos \beta l \sin \beta l + \sin \beta l \cosh \beta l \\
& + \cos \beta l \sinh \beta l - \cosh \beta l \sinh \beta l) \\
& = 2 + 2 \cos \beta l \cosh \beta l + 2 \frac{EI\beta^3}{mp_r^2} (\sin \beta l \cosh \beta l + \cos \beta l \sinh \beta l)
\end{aligned} \tag{A.24}$$

以上より，式(A.25)が求まる．

$$1 + \cos \beta l \cosh \beta l + \frac{EI\beta^3}{mp_r^2} (\sin \beta l \cosh \beta l + \cos \beta l \sinh \beta l) = 0 \tag{A.25}$$

固有振動数 p_r は以下の式で計算される．

$$p_r = \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho_s A_b}} \tag{A.26}$$

これを式(A.25)に代入し，式(A.27)が得られる．

$$1 + \cos \beta l \cosh \beta l + \frac{\rho_s A_b}{m\beta} (\sin \beta l \cosh \beta l + \cos \beta l \sinh \beta l) = 0 \tag{A.27}$$

A.5 値の計算

βl をパラメータとして式(A.27)左辺の値を計算し、値がゼロとなる点を求めた。Fig.A.2 に示す曲線と横軸の交点が求めるべき βl の値である。

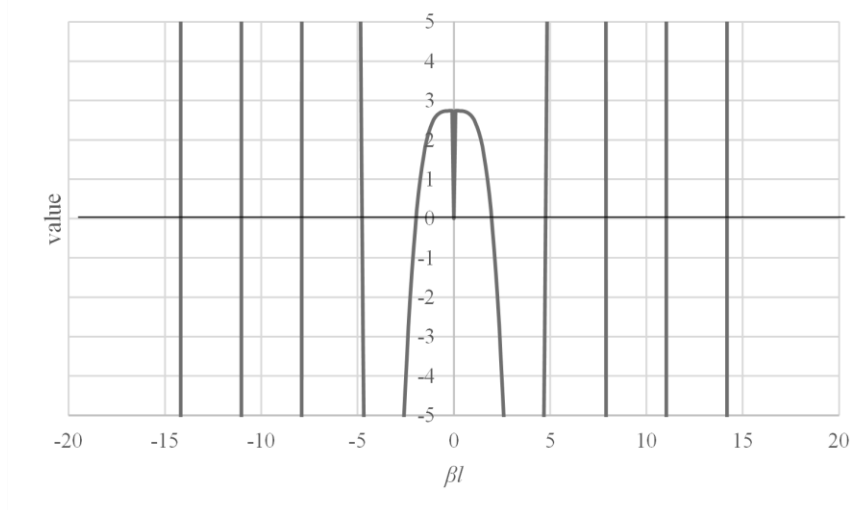


Fig.A.2 Calculation of βl

A.6 固有振動数の計算

計算に用いた値を Table A.1 に示す。 E ははりの材料の縦弾性係数[N/m²]、 I は断面 2 次モーメント[m⁴]、 ρ_s ははり材料の密度[kg/m³]、 A_b ははりの断面積[m²]である。

Table A.1 Specification

b	[m]	0.3
h	[m]	0.03
I	[m ⁴]	6.75.E-07
E	[Pa]	2.00E+11
A	[m ²]	0.009
ρ	[kg/m ³]	8200
L	[m]	0.1
m	[kg]	20

また、 βl の値から各周波数を計算した結果を Table A.2 に示す。

Table A.2 Frequency of each mode

mode	f [Hz]	p [rad/s]	β	βL
1st	2619	16457	19.6	2.0
2nd	15478	97248	47.7	4.8
3rd	42475	266879	79.0	7.9
4th	82784	520146	110.3	11.0
5th	136534	857871	141.6	14.2

A.7 モード形状

本文 5.2 節における有限要素シミュレーションで計算したはりの変位振幅と、上記の計算により求めたはりのモード形状の比較を Fig.A.3 に示す。両者はよく一致している。参考に、1 次～5 次のモード形状を Fig.A.4 に示す。

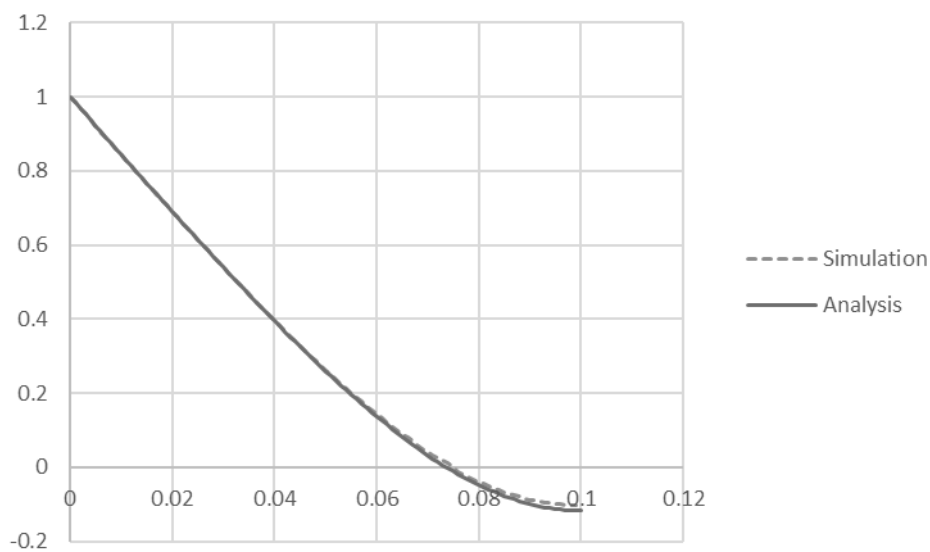


Fig.A.3 Comparison of mode shapes

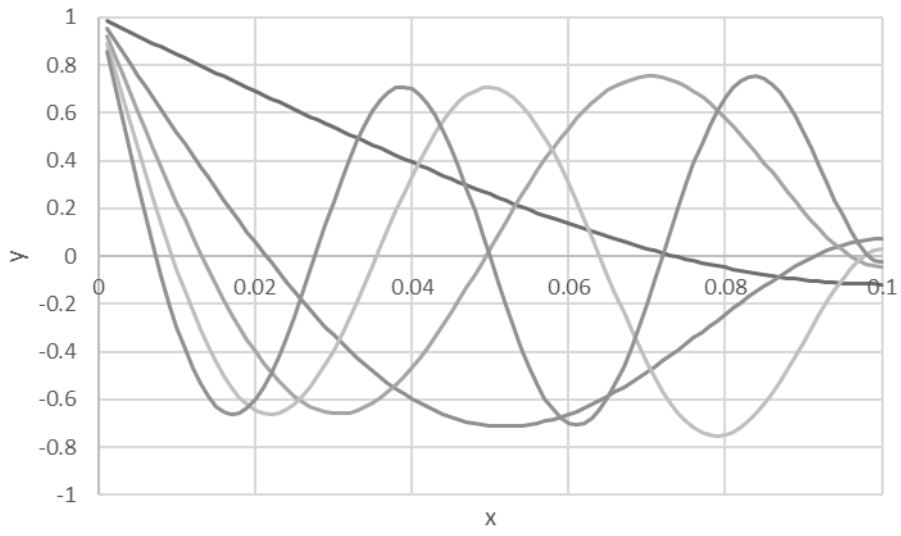


Fig.A.4 Mode shape (1st mode to fifth mode)