論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※　　　第　　　号

氏　　　名　　青木　利隆

論　文　題　目

Two-term silting complexes over algebras with small Loewy length and complete special biserial algebras
(短い Loewy 列を持つ多元環と完備特殊双列多元環上の 2 項準傾複体)

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
中　西　知　樹

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（数理科学）
中　岡　宏　行

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（数理科学）
太　田　啓　史

協　力　委　員　東京大学大学院数理科学研究科　教授　博士（理学）
伊　山　　修

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

森田理論は２つの環の加群圏の同値を射影生成元を用いて特徴付ける。その類似として、傾理論は２つの環の導来圏の同値を傾複体 (tilting complex) を用いて特徴付ける。傾複体を準傾複体 (silting complex) まで拡張することにより、直和因子を取り替えて新しい準傾複体を構成する変異操作が可能となる。基本的な準傾複体の同型類の集合は自然な半順序を持ち、その Hasse 箙の矢が変異に対応する。体 k 上の有限次元代数 A と有限生成射影加群の圏 $\operatorname{proj} A$ に対し、

$$\cdots \to 0 \to P^{-1} \xrightarrow{f} P^{0} \to 0 \to \cdots \tag{1}$$

$(P^{-1}, P^{0} \in \operatorname{proj} A)$ という形をした複体を２項複体と呼び、その Grothendieck 群 $K_0(\operatorname{proj} A)$ におけるクラスを g ベクトルと呼ぶ。例えば傾加群は２項準傾複体を与える。基本的２項準傾複体の同型類の集合 2-silt$A$ と、A の関手的有限なねじれ類の集合の間に全単射が存在する。また２項準傾複体の直和因子の g ベクトルが生成する錐を集めて、$K_0(\operatorname{proj} A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ の扇 $\mathcal{F}(A)$ が構成される。2-silt$A$ が有限であること（g 有限）と、$\mathcal{F}(A)$ が完備であることは同値である。

青木氏の学位申請論文は４部構成であり、第１章と第２章では、A の根基 J が小さな場合を扱っており、第３章と第４章では特別な順 (tame) 表現型の代数を扱っている。

• 第１章の内容

基本的な有限次元代数 A の原始冪等元の完全系を $e_1, \ldots, e_n$ とする。A の２項準傾複体 (1) に対し、各射影加群 e_iA は P^{-1} と P^0 の片方にのみ直和因子として現れ、それにより 2-silt$A$ は 2^n 個の部分集合 2-silt$_\varepsilon A$ ($\varepsilon \in \{\pm 1\}^n$) に分割される。青木氏は第１章で、$J^2 = 0$ を満たす代数 A（以下 RSZ（radical square zero）と呼ぶ）に対し、2-silt$A$ と A のねじれ類の全体 tors$A$ を調べた。青木氏は各 ε に対して RSZ な遺伝代数 $A^!_\varepsilon$ を定め、A に関する様々な問題が $A^!_\varepsilon$ に帰着されることを示した。具体的には、$A^!_\varepsilon$ の忠実なねじれ類の集合 fa-tors$A^!_\varepsilon$ と基本的傾 $A^!_\varepsilon$ 加群の同型類の集合 tilt$A^!_\varepsilon$ に対し、全単射 tors$A \simeq \bigsqcup_{\varepsilon \in \{\pm 1\}^n}$ fa-tors$A^!_\varepsilon$ と 2-silt$A \simeq \bigsqcup_{\varepsilon \in \{\pm 1\}^n}$ tilt$A^!_\varepsilon$ を構成し、これらの Hasse 箙を記述した。応用として足立による g 有限な RSZ 代数の特徴付けが得られる。

• 第２章の内容（足立氏との共同研究）

有限次元代数 A の k 双対が両側 A 加群として A と同型であるときに、対称代数と呼ぶ。青木氏は第２章で、$J^3 = 0$ を満たす代数閉体上の対称代数 A のうち、g 有限なものを分類した。分類は A の箙で与えられ、ディンキン型と奇数 n に対する $\widetilde{A}_{n-1}$ 型の他に５種類の型が存在する。

• 第３章の内容（百合草氏との共同研究）

特殊双列代数 (special biserial algebra) は順表現型の代表例であり、直既約加群の同型類の分類が知られている。その特別なクラスの gentle 代数は点付き曲面の分割から定めることができ、団代数 (Fomin-Shapiro-Thurston) や位相的深谷圏 (Haiden-Katzarkov-Kontsevich) との関連から近年盛んに研究されている。青木氏は第３章で、特殊双列代数 A に対し、扇 $\mathcal{F}(A)$ が $K_0(\operatorname{proj} A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ で稠密である（g 順）ことを示した。証明は A が gentle 代数の場合に帰着され、曲面上のラミネーションと $K_0(\operatorname{proj} A)$ の間の全単射が用いられる。この結果は、曲面の三角形分割から定まる代数に対する百合草の結果を gentle 代数まで拡張する。この論文の後、百合草-Plamondon は任意の順表現型代数が g 順であることを示したが、証明の手法は全く異なる。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

- 第 4 章の内容

Brauer 木代数は、曲面に埋め込まれた木（Brauer 木）から定まる対称な特殊双列代数であり、有限群のモジュラー表現論に起源を持つ。青木氏は第 4 章で、n 本の辺を持つ Brauer 木代数に対して、2-silt$A$ の位数が $\binom{2n}{n}$ であることを証明した。より詳しく端点から出る辺 d における g ベクトルの成分が j であるような 2-silt$A$ の元の個数が $\binom{2n-|j|-1}{n-1}$ であることまで示されている。証明には、足立-相原-Chan による曲面上の完備なラミネーションと A の 2 項準傾複体の間の全単射が用いられる。2-silt$A$ の位数は浅芝-水野-中島も少し後に求めているが、手法は全く異なる。

以上の諸結果は、傾理論において新しい知見を与えるものであり、学位論文として十分な内容を持つものである。また、2021 年 2 月 9 日に行われた学位審査セミナーも青木氏の結果が非専門家にもよく伝わるように工夫されたものであり、質問に対する応答も的確なものであった。以上によって、学位審査委員会は学位を授与するべきであるものと判断する。