別紙４

報告番号	※　　　　　第　　　　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目 F-matrices in cluster algebras and their applications
（団代数における F 行列とその応用）

氏　　名 行田　康晃

論 文 内 容 の 要 旨

団代数は，2000 年初頭に Fomin-Zelevinsky によって導入された，「団変数」と呼ばれる元から生成される可換代数である．団変数とは，ある特定の変数を「変異」という操作をもちいて繰り返し変換したもの全体のことであり，この団変数と変異がなす構造が満たす種々の性質やその応用を調べることが，団代数理論の研究における主題である．この団代数における変異の構造は，他分野の数学の様々な文脈において現れることが知られており，例えば多元環の表現論，双曲幾何，微分方程式，結び目理論，整数論といった分野において応用されている．

団代数の変異構造を知るための重要なツールとして，「d ベクトル」，「c ベクトル」，「g ベクトル」，（あるいはそれらを横に並べて行列とした「D 行列」，「C 行列」，「G 行列」），そして「F 多項式」があげられる．全ての団変数はローラン多項式の形をとることが知られており，d ベクトルはこのローラン多項式の分母の単項式の指数をベクトルにしたものである．これらは有限型のルート系と良い全単射対応を持っており，団代数黎明期から盛んに考察されてきた．一方，c ベクトル，g ベクトル，C 行列，G 行列，F 多項式は 2006 年に Fomin-Zelevinsky によって導入された団変数の係数や次数などから定まるベクトル族（行列族）や多項式族である．彼らはこれらのベクトルと多項式を初期条件から漸化式を用いて団変数と独立に定義できることを示し，さらに逆にこれらのベクトルと多項式から元の団変数を復元する「分離公式」を発見した．これにより，変異の構造はこれらの族に帰着されることがわかり，以降はこれらについても盛んに研究されている．

「f ベクトル」は，2007 年に Fu-Keller が Fomin-Zelevinsky の予想を否定的に解決する際にはじめて明示的に定義された F 多項式の主要項の次数ベクトルである．そして，このベクトルの性質に関する研究は，2018 年に藤原と著者が f ベクトルを横に並べた「F 行列」を導入することにより本格的に始まった．当論文は，著者とその周辺で行われてきた f ベクトル，F 行列に関する研究について述べたものである．

当論文は，1 章から 6 章の全 6 章構成である．1 章では団代数の導入と論文構成の説明を行い，2 章では 3 章から 6 章における主結果を述べるために必要な団代数における基本的な性質を述べている．3 章以降は著者とその共同研究者らによる結果を記述している．

3 章では，f ベクトルと F 行列の定義を行ったのち，F 行列の持つ自己双対性について述べる．F 行列の自己双対性とは，ある F 行列の転置行列が別の団代数のある F 行列に一致する性質である．2011 年に C 行列の転置が別の団代数の G 行列に一致することを Nakanishi-Zelevinsky が発見していたが，この性質はその F 行列による類似であるといえる．この性質を証明する過程で，通常の変異とは逆の，基準となる初期条件を変異によってずらす「初期変異」という変換

を導入し，これによる F 行列の漸化式を与えた．また，交換行列の正負を入れ替えたもの同士の C 行列，G 行列，F 行列の間に成立する関係式を導出した．この研究は名古屋大学の藤原祥吾氏との共同研究である，

4 章では，f ベクトル，F 行列の一意性について議論する．元々，著者の F 行列導入の目的は F 多項式の性質を行列の演算や操作を用いて調べるためであった．しかし，F 行列は F 多項式の主要項以外の情報を全て削除したものであるため，この行列が F 多項式の本質的な情報を持っている行列かどうかという点については疑問の余地がある．そこで，F 行列から対応する団変数の集合が一意的に定まるかという問題を考えた．団変数が一意的に定まれば，F 多項式は団変数から定義される多項式であることから一意的に決定されることがわかる．著者は，2 通りのアプローチを用いてこの問題の部分的な解決を与えた．1 つ目のアプローチは，点付き曲面の三角形分割から定まる団代数の F 行列を，点付き曲面上の情報に落とし込んで解決する方法である．F 行列（f ベクトル）の成分は，三角形分割を構成する弦同士の最小の交差回数に一致することが 2019 年に百合草によって示されており，この最小交差回数の情報から点付き曲面上の弦を特定する方法を与え，F 行列の一意性予想を点付き曲面から定まる団代数に対して肯定的に解決した．これは東北大学の百合草寿哉氏との共同研究である．2 つ目のアプローチは，d ベクトルと f ベクトルの一致を用いる方法である．有限型団代数，階数 2 の団代数については，F 行列と D 行列が実質的に同じものであることを示し，d ベクトルに関する 2011 年の Nakanishi-Stella の一意性の結果を経由して F 行列の一意性予想を肯定的に解決した．さらに，特に階数 2 の団代数に関しては f ベクトルから F 多項式を具体的に復元する手順を与えた．これは 2011 年の Lee-Schiffler, 2012 年の Lee-Li-Zelevinsky の，ダイクパスを用いた d ベクトルから団変数の具体的表示を与える方法の類似である．

5 章では，F 行列（f ベクトル）の成分を用いてクラスター変数の間に定まる「整合性次数」と呼ばれる関数の一般化を与えることを考える．整合性次数は，元々は Fomin-Zelevinsky が 2001 年に与えた 1 つの団代数の団変数のペア全体上の自然数値関数であり，団代数のペアが

1. ある団に包含されるときはそのペアに対しては 0 を返し，
2. 1 回の変異で移り変わる関係にあるときは 1 を返す

という性質を持っている．Fomin-Zelevinsky はこれを用いて 2002 年に有限型の団代数の分類を行っている．この関数は元々は有限型ルート系の言葉を用いて記述されたものであり，そのため有限型の団代数にしか定まっていないものであった．この関数の一般の団代数への拡張については，2013 年に Ceballos-Pilaud が整合性次数を d ベクトルを用いて与えられることを発見し，2018 年に Cao-Li が Ceballos-Pilaud の定義を一般の団代数にも拡張できることを示していた．当論文では，この f ベクトルによる類似を与えたうえで，d ベクトルによる拡張との比較を行なっている．たとえば，d ベクトルによる拡張は上記の 2.の性質を満たさないが，f ベクトルによる拡張については主要なクラスの団代数に対してはこの性質を満たしていることを示した．この研究は四川大学の Changjian Fu 氏との共同研究である．

6 章では，F 行列の双対性に関する整数論への応用を述べる．Stern-Brocot 木，Calkin-Wilf 木は共に正の既約有理数全体を頂点集合として持つ無限完全二分木である．この 2 つの木は構成方法が異なるにもかかわらず性質がよく似ており，2000 年代からこの 2 つの木の間に存在する関係を調べる研究がなされてきた．団代数の文脈においては，特に Stern-Brocot 木と 1 点付きトーラスの三角形分割の間に関係があることが 2011 年に Nájera Chávez によって指摘されていた．当論文ではこの Stern-Brocot 木が f ベクトルとその変異から得られることを示し，また双対的に，Calkin-Wilf 木が f ベクトルとその初期変異から得られることを示した．