論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　　　　　第　　　　号

氏　　　　　名　　行田　康晃

論　文　題　目

F-matrices in cluster algebras and their applications
(団代数における F 行列とその応用)

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（数理科学）
太　田　啓　史

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
中　西　知　樹

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（理学）
高　橋　　亮

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（理学）
柳　田　伸　太　郎

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

2000 年初頭に Fomin-Zelevinsky によって導入されたクラスター代数は、ルート系と密接に関連した可換代数の一種であるが、例えば双曲幾何、微分方程式など一見互いに関係しないような数学のさまざまな分野に横断的に現れる代数的組み合わせ論的構造として、現在さまざまな観点から活発に研究が進められている。クラスター変数は、反対称化可能行列とある変数の集合からなる種子 (seed) から出発し、その変異 (mutation) を繰り返して得られる変数の集合であり、クラスター変数と変異がなす構造の解明が基本的な問題である。

各種子に付随して C 行列、G 行列、F 多項式（たち）と呼ばれるものが決まるが、逆に種子は C 行列、G 行列、F 多項式たちから復元できることが知られており、これらはクラスター代数の研究において基本的なものとなっている。F 多項式は、n 変数 (n は反対称化可能行列のサイズ）のモニックな整数係数多項式であり、主要項が単項式であることが知られている。本論文では、F 多項式の主要項の次数ベクトルである f ベクトルを並べて得られる n 次正方行列（F 行列）に着目することにより、F 行列の性質といくつかの応用に関する一連の研究成果をまとめている。f ベクトルと F 行列はこのように F 多項式から直ちに定義されるものだが、申請者が研究を始める以前は Fomin-Zelevinsky (2007) および Fu-Keller (2010) によるある特別なクラスター代数に対する結果を除いて、特に着目されずその重要性は認識されていなかった。しかし、以下でみるように本論文で得られた結果はその視点が研究の新しいよい道筋を与えることを示唆している。主な結果は、

(1) F 行列の自己双対性（藤原祥吾氏との共同研究）
(2) F 行列から種子は一意に定まるかという問題に対するいくつかの場合の肯定的な解決（行田氏自身の研究および百合草寿哉氏との共同研究）
(3) 有限型クラスター代数のクラスター変数の対に対して定まる「整合性次数」を、有限型とは限らない場合に F 行列を用いて新しい一般化を与えたこと（Changjian Fu 氏との共同研究）
(4) 全ての既約分数全体を重複なく表す無限木として知られている 2 つの木（Stern-Brocot 木と Calkin-Wilf 木）の関係が、F 行列の自己双対性の応用として理解できるという整数論への応用（行田氏自身の研究）

である。

(1) F 行列は、初めに一つ定めた初期種子と任意の種子のペアにより定まるが、申請者らは初期種子と任意の種子の役割を入れ替える「初期変異」を考え、それによって得られる F 行列と元の F 行列との間に簡単な関係（F 行列の双対性）があることを示した。これは、中西-Zelevinsky(2012) により知られていた C 行列と G 行列の間の双対性の F 行列の場合の類似である。この結果は SIGMA 誌 (2019) において公表済である。

(2) 申請者は、F 行列が種子を一意的に定めるであろうと予想し、点付き曲面に付随するクラスター代数の場合、および有限型クラスター代数、階数 2 のクラスター代数の場合に肯定的に解決している。以上の結果は Annals of Combinatorics 誌 (2020) および arXiv において公表済である。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

(3)「整合性次数」は元来 Fomin-Zelevinsky により有限型ルート系に対して定義され、そこから定まる一般化された結合多面体と有限型クラスター複体との対応を経由して、有限型クラスター代数の分類において本質的な役割を果たした。申請者らは、必ずしも有限型とは限らない一般のクラスター複体から出発し、F 行列の情報を用いて「整合性次数」の新しい一般化を構成し、期待すべき基本性質のほとんどが成り立つことを示した。特に、先行して (f ベクトルとある場合に一致するが一般には異なる) d ベクトルの情報を用いて Cao-Li(2020) により構成されていた「整合性次数」では成立しなかった基本性質の一つが成り立つようになったことは、F 行列による一般化がよい候補であることを示唆しており今後の研究が期待される。以上の結果は arXiv において公表済である。

(4) 申請者は 1 点穴あきトーラスの三角形分割に付随して決まるクラスター代数から出発し、変異により得られる f ベクトルから Stern-Brocot 木が得られ、一方、初期変異から得られる f ベクトルから Calkin-Wilf 木が得られることを示し、両者の関係は (1) の結果である F 行列の双対性に他ならないことを示した。Chávez (2013) により上記クラスター代数の C 行列・G 行列と Stern-Brocot 木との関係が研究されていたが、f ベクトルの情報から Stern-Brocot 木および Calkin-Wilf 木を記述したこと、更に F 行列の双対性から両者の関係を明らかにした本結果は十分に斬新である。以上の結果は arXiv において公表済である。

以上のように、申請論文はクラスター代数の基礎と応用に対する様々な基本的あるいは斬新な知見を与えるものであり、学位論文として十分な内容を持つものである。本論文に関する公開審査会を 2021 年 1 月 29 日に行った (新型コロナウイルス感染予防のため Zoom による) が、背景説明を含め主結果とその証明のあらすじが非専門家にも伝わるように工夫され、また質問に対する応対も的確であり、申請者が博士の学位を取得するに足る高い学識を有することを確認した。以上により、本学位審査委員会は、申請者に博士（数理学）の学位が授与されるべきと判断する。