論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　　　　　第　　　　号

氏　　　　名　　埴原　紀宏

論　文　題　目

Cluster categories of formal dg algebras and hereditary Calabi-Yau categories
(形式的 dg 代数の団圏と遺伝的カラビ・ヤウ三角圏)

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
岡　田　聡　一

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（数理科学）
中　岡　宏　行

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（理学）
石　井　　亮

協 力 委 員　東京大学大学院数理科学研究科　教授　博士（理学）
伊　山　　修

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

近年，団圏 (cluster category) あるいは d 団圏 ($d \in \mathbb{N}$) と呼ばれる三角圏が代数の表現論を中心として盛んに研究されている．これはシフト関手 $[d]$ を Serre 関手にもつ d-Calabi–Yau 三角圏であり，適切な仮定の下で d 団傾対象と呼ばれる傾対象の類似物を持つ．2 団圏は団代数の圏化で重要な役割を果たすものであり，非輪状箙 Q の道代数に対して Buan–Marsh–Reineke–Reiten–Todorov (2006) によって導入された．道代数は遺伝的（大域次元が 1 以下）であるが，より一般の大域次元が有限な有限次元代数 A については，A の d 団圏 $\mathcal{C}_d(A)$ が，導来圏 $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} A)$ の自己同値 ν_d による軌道圏 $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} A)/\nu_d$ の三角包絡として Keller, Amiot, Guo らによって導入された．彼らはより一般に，次数付き微分代数（以下 dg 代数と呼ぶ）R が $(d+1)$-Calabi–Yau である場合に，完全導来圏 $\operatorname{per} R$ のある Verdier 商として団圏 $\mathcal{C}(R)$ を導入し，d-Calabi–Yau 性や d 団傾対象の存在などの基礎理論を構築した．また，A からは導来前射影代数と呼ばれる $(d+1)$-Calabi–Yau dg 代数 $\Pi_{d+1}(A)$ が構成されるが，その団圏 $\mathcal{C}(\Pi_{d+1}(A))$ が d 団圏 $\mathcal{C}_d(A)$ と一致することも示されている．

本論文は，Calabi–Yau dg 代数の新しいクラスを与えその団圏を研究した Part 1 と，遺伝的 Calabi–Yau 圏に対する森田型定理を与えた Part 2，の 2 部から構成されている．各 Part の内容はそれぞれ独立した論文として arXiv で公開されており，ともに団圏に関する新しい研究成果がまとめられている．

• Part 1 の内容

申請者は，Part 1 において，Calabi–Yau dg 代数の新しいクラスを与え，その団圏の軌道圏としての表示について次のような結果を得ている．非正次数つき代数 $R = \bigoplus_{i \leq 0} R_i$ に対して，R を微分が 0 の dg 代数とみなしたものを R^{dg} と表す.（記述を簡単にするために以下では R は Noether 環であると仮定する.）

まず，申請者は，R が次数付き代数として $(d+1)$-Calabi–Yau であり a 不変量 a をもつならば，R^{dg} は符号による捻れつきの $(d+a+1)$-Calabi-Yau dg 代数となることを示した（1 つ目の主結果）.

次に，申請者は，導来圏 $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod}^{\mathbb{Z}} R)$ が準傾部分圏 $\mathcal{M} := \operatorname{add}\{R(-i)[i] : i \in \mathbb{Z}\}$ をもち，$\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{qgr} R)$ が $(d+a)$ 団傾部分圏 $\mathcal{M}$ をもつことを示している．一方，源–毛利の結果から，$\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{qgr} R)$ は傾対象 $T := \bigoplus_{i=0}^{a-1} R(i)$ をもち，特にその自己準同型環 A に対して三角同値 $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{qgr} R) \simeq \mathcal{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} A)$ が存在する．よって，$\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{qgr} R)$ の次数シフト関手 (1) は $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} A)$ の自己同値 F を与えるが，申請者は，F が ν_d の a 乗根を与え，さらに団圏 $\mathcal{C}(R^{\mathrm{dg}})$ が軌道圏 $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} A)/\nu_{d+a}^{-1/a}$ の三角包絡を与えることを証明した（2 つ目の主結果）.

さらに，申請者は，A 加群 $U = \operatorname{Hom}_{\operatorname{qgr} R}(T, T(-1))$ による自明な拡大代数 $B = A \oplus U$ が Gorenstein 代数であることを示し，その特異圏 $\mathcal{D}_{\mathrm{sg}}(B)$ と団圏 $\mathcal{C}(R^{\mathrm{dg}})$ の間の三角同値を構成した（3 つ目の主結果）.

• Part 2 の内容

環 A の導来圏は傾対象 A を持ち，逆に適切な条件のもと傾対象 T を持つ三

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

角圏は，T の自己準同型環の導来圏と三角同値になる．同様に，有限次元代数 A の d 団圏は，適切な条件のもと d 団傾対象を持つ d-Calabi–Yau 三角圏になるが，その自己準同型環は A よりも大きな代数となるため，逆の部分はそのままでは成立しない．しかし，Keller–Reiten (2008) は，d-Calabi–Yau 三角圏 $\mathcal{T}$ とその d 団傾対象 T に対して，T の自己準同型環が箙の道代数 kQ と同型でさらに $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(T[i], T) = 0$ $(1 \leq i \leq d-2)$ をみたすならば，$\mathcal{T}$ は kQ の d 団圏と三角同値であることを示している．また，Keller–Murfet–Van den Bergh (2011) は，より技術的な条件の下で同様の結果を得ている．

申請者の Part 2 での主結果は，d-Calabi–Yau 三角圏 $\mathcal{T}$ とその d 団傾対象 T に対して，$H := \mathrm{End}_{\mathcal{T}}(\bigoplus_{i=0}^{d-2} T[-i])$ が遺伝的でかつ有限表現型の環直和因子を持たないときに，H の d 団圏の類似物である三角圏 $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\, H)/\nu_d^{-1/(d-1)}$ と $\mathcal{T}$ が三角同値であることを証明したことである．上で述べた Keller–Reiten や Keller–Murfet–Van den Bergh の結果の仮定からは，H が遺伝的であることが導かれ，有限表現型はごく少数であるため，申請者の結果は上の結果の大部分を含む，非常に強力な結果であると言える．

以上の諸結果は，団圏と団傾理論の研究において新しい知見を与えるものであり，学位論文として十分な内容を持つものである．2021 年 2 月 8 日に本論文に関する公開学位審査セミナーを行い，明快な講演と的確な質疑応答を通じて，申請者が博士の学位を取得するに足る高い学識を有することを確認した．

以上により，学位審査委員会は，申請者には博士（数理学）の学位が授与される資格があるものと判断する．