別紙４

報告番号	※　　　　　第　　　　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目　Renormalized values and desingularized values　of the multiple zeta function
（多重ゼータ関数の繰込み値と特異点解消値）

氏　　　名　小見山　尚

論　文　内　容　の　要　旨

多重ゼータ関数とは、Riemann ゼータ関数の級数の定義を一般化することで得られる複素多変数関数である。この関数の正の整数点における特殊値は多重ゼータ値と呼ばれ、調和積やシャッフル積と呼ばれる関係式を満たすことが知られている。2000 年代初頭、Zhao と秋山，江上，谷川によって独立に、この関数が複素空間全体へ有理型に解析接続できることが証明された。また、秋山，江上，谷川により多重ゼータ関数が無数の極を持つことも示されている。彼らの結果から負の整数点のほとんどはこの関数の極に位置することも分かるため、これらの点における多重ゼータ関数の特殊値を決定することは出来ないが、これらの点における意味のある値を与える方法がこれまでに幾つか提唱されてきた。

古庄，小森，松本，津村は多重ゼータ関数の無数にある極をすべて消し去った関数として、特異点解消関数と呼ばれる複素多変数関数を導入した。彼らはこの特異点解消関数の負の整数点における特殊値を、負の整数点における多重ゼータ関数の特殊値として提唱した。この特殊値は特異点解消値と呼ばれる。一方、これとは独立に Guo, Zhang は、多重ゼータ値が調和積を満たすことに着目し、調和積を満たすように負の整数点における多重ゼータ関数の特殊値を定義した。彼らの用いた手法は Connes, Kreimer によって導入された摂動論的場の量子論における Hopf 代数的な繰込み法に基づいているため、彼らの導入した特殊値は繰込み値（以下 GZ 繰込み値と書く）と呼ばれる。現在までに、この繰込み値とは異なる繰込み値が Manchon, Paycha や Ebrahimi-Fard, Manchon, Singer によっても与えられている（以下それぞれの特殊値を

MP 繰込み値や EMS 繰込み値と書く)。しかしこれらの繰込み値の明示式は一般には与えられておらず、特異点解消値やこれらの繰込み値の間の具体的な関係についても考察されていなかった。本論文は、多重ゼータ関数の特殊値として導入されたこれらの間の関係やその性質を具体的に与えることが目的である。

第 1 章では、多重ゼータ関数の定義やその解析接続、特異点解消関数や特異点解消値の定義とその性質についてまとめた。

第 2 章では、EMS 繰込み値について扱っている。まず、EMS 繰込み値を定義するために必要な Hopf 代数と、この Hopf 代数から Laurent 級数環への準同型写像、及び Connes, Kreimer の理論の中核をなす代数的 Birkhoff 分解について説明した。次に、この Hopf 代数の余積の明示式を具体的に求めることで、EMS 繰込み値の漸化式を明示的に与えた。また、得られた EMS 繰込み値の漸化式と特異点解消値の漸化式を比較することで、EMS 繰込み値と特異点解消値が等価になる、すなわち互いをもう一方の有限線形和により表し合えることを証明した。さらに、この等価性と特異点解消値の明示公式を用いて、EMS 繰込み値が Bernoulli 数によって明示的に与えられることも示した。

第 3 章では特異点解消関数の関数等式を扱っている。まず、上記の EMS 繰込み値と特異点解消値の等価性を用いて、特異点解消値が EMS 繰込み値の満たす関係式を満たすことを証明した。この特異点解消値の関係式と、古庄, 小森, 松本, 津村の論文で証明されている 2 変数の特異点解消関数と Riemann ゼータ関数の関数関係式に基づいて、特異点解消関数の関数関係式を組み合わせ論的な手法と解析的な手法の 2 通りの方法により証明した。

第 4 章では、EMS 繰込み値と調和積を満たす繰込み値の間の関係を扱っている。Ebrahimi-Fard, Manchon, Singer, Zhao の論文において、調和積を満たす繰込み値が無限に存在することが示されており、Singer の論文でこれらと EMS 繰込み値の間の関係について問題提起がなされていた。そこでこの Singer による問題を定式化し、調和積を満たす繰込み値を任意に取ったとき、EMS 繰込み値がこの繰込み値の有限線形和により表されることを示した。