論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　　　　　第　　　　号

氏　　　　　名　　小見山　尚

論　文　題　目

Renormalized values and desingularized values of the multiple zeta function
(多重ゼータ関数の繰込み値と特異点解消値)

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
松　本　耕　二

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（理学）
古　庄　英　和

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
菅　野　浩　明

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　特任准教授　Ph.D.
Bachmann Henrik

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

多重ゼータ関数はリーマンゼータ関数を一般化した多変数複素関数であり、この関数の正の整数点における特殊値は多重ゼータ値と呼ばれ近年盛んに研究されている。この多変数複素関数は無数に極を持つことが知られているが、負の整数点のほとんどはこの極に含まれているために、負の整数点での値を単純に定義することができない。多重ゼータ関数の負の整数点での「特殊値」の良い定義を与えることは、現在の多重ゼータ関数の研究において非常に基本的な問題の一つとされている。この「良い特殊値」として Connes-Kreimer (2000) の Hopf 代数を用いた繰り込み法を用いて構成される繰り込み値が数種類知られている。一方で古庄-小森-松本-津村 (2017) の特異点解消法を使って構成される特異点解消値という負の整数点の特殊値も知られている。

小見山氏の学位論文では、Ebrahimid-Fard, Manchon, Singer (2017) によって構成された EMS 繰り込み値と上述の特異点解消値との等価性、この等価性より派生する特異点解消多重ゼータ関数の関数関係式、EMS 繰り込み値と他のタイプの繰り込み値の関連性について論じている。氏の論文は 5 章からなり、第 0 章では多重ゼータ関数の負の整数点での特殊値に関する研究の背景と論文の主結果を簡潔に紹介してあり、第 1 章では特異点解消ゼータ関数と特異点解消値についての先行研究がまとめられている。第 2 章から第 4 章までが氏が得た結果であり, 第 2 章、第 3 章 1 節と 2 節、第 3 章 3 節の内容が副論文 1 篇ずつに対応している。第 4 章は現在進行中の研究結果がまとめられている。

第 2 章では、EMS 繰り込み値と特異点解消値の等価性を示している。正確には、EMS 繰り込み値の母関数 $Z_{\mathrm{EMS}}(t_1,\ldots,t_n)$ と特異点解消値の母関数 $Z_{\mathrm{FKMT}}(t_1,\ldots,t_n)$ が

$$Z_{\mathrm{EMS}}(t_1,\ldots,t_n)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1-e^{-t_1-\cdots-t_n}}{t_i+\cdots+t_n}Z_{\mathrm{FKMT}}(-t_1,\ldots,-t_n)$$

という非常に明快な関係式で繋がっていることが示されている。EMS 繰り込み値とは多重ポリログ関数より作られる Hopf 代数に Connes-Kreimer の繰り込み法を適用することにより得られる多重ゼータ関数の「特殊値」であり、特異点解消値とは古庄-小森-松本-津村により多重ゼータ関数の特異点解消を目的にして導入された「特異点解消」多重ゼータ関数の特殊値である。氏の結果は本来異なる目的で導入された二種類の「値」を関連付ける意外な結果である。証明は EMS 達が導入した Hopf 代数の余積の非常に緻密な記述からなっている。この等価性により EMS 繰り込み値の全ての負整数点での一般値が完全に決定されたことも重要な帰結である。

第 3 章においては、特異点解消多重ゼータ関数の関数関係式について扱っている。3.1 節では上述の等価性を用いて繰り込み値のシャッフル型の積和公式より特異点解消値の積和公式が示されている。3.2 節では、この積和公式を一般化させた特異点解消多重ゼータ関数と「一変数」特異点解消値の積を特異点解消多重ゼータ関数で書き下す積和公式が得られている。特異点解消多重ゼータ関数を多重ゼータ関数で書き表す際に現れる係数の組み合わせ論的な性質を巧妙に用いることにより証明されている。3.3 節では、特異点解消多重ゼータ関数と「多変数」特異点解消値の積を特異点解消多重ゼータ関数で書き下す積和公式を得ている。これは前節の積和公式の多変数一般化にあたるが、こちらの証明法はより解析的な議論を用いており先の組み合わせ論的な証明とは異なる手法での証明になっている。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

第4章では、Guo-Zhang による繰り込み値と Manchon-Paycha による繰り込み値との共通の性質を抽出した「調和型」という概念を導入し、EMS 繰り込み値を調和型な繰り込み値を使って書き表す普遍的な明示式を得ている。この明示式は Singer (2020) が提出したシャッフル型の繰り込み値と調和型の繰り込み値の関係についての問題に肯定的な答えを与える結果であり、今後の多重ゼータ関数の繰り込み値の研究に関して意義のある結果と言える。

このように、小見山氏の学位論文は多重ゼータ関数の繰り込み値の研究を着実にすすめるものであり、学位論文として十分な内容を持つものである。第2章の成果は副論文として IMRN へ掲載されており第3章1節と2節は副論文として RIMS Kokyuroku Bessatsu へ掲載されている。第3章3節は副論文として J. Number Theory への掲載が決定している。第4章の結果は改良整備したのちに学術雑誌へ投稿する予定でいる。

2021 年 2 月 26 日に行われた公開学位審査会においても、小見山氏の問題意識、本学位論文の主要結果とその意義、問題解決への基本的アプローチなどが明快に示され、学位審査委員からの質問にも的確に応答がなされた。

以上のことから、学位審査委員会は申請者が博士（数理学）の学位を授与される資格を有すると判断する。