

## 別紙 4

報告番号	※	第	号
------	---	---	---

## 主 論 文 の 要 旨

論文題目：A new approximate formula for  $L$ -functions and its applications to the value distribution of  $L$ -functions

( $L$ 関数に対する新しい近似公式とその近似公式による $L$ 関数の値分布論への応用)

氏 名：井上 翔太

## 論 文 内 容 の 要 旨

**Riemann** ゼータ関数の値分布論は同関数の零点分布や素数の分布と深い関係がある重要な研究テーマの一つであり、近年においても活発に研究がされている。また、**Dirichlet**  $L$ 関数を始めとする多くの $L$ 関数に対しても、その値分布を調べることは零点の分布や対応する数論的対象を調べるうえで有用であることが知られている。例えば、**Dirichlet**  $L$ 関数の値分布の結果は等差数列中の素数分布へ、**Dedekind** ゼータ関数の値分布の結果は素イデアルの分布へ応用がある。

本論文では、**Selberg** クラスと呼ばれる数論的な $L$ 関数の集合もしくは、それを拡張した集合に属する $L$ 関数に対して新しい近似公式を与える。その公式は古典的な **Selberg** による近似公式と、比較的最近に証明された **Gonek, Hughes, Keating** による近似公式を組み合わせたものである。その新しい近似公式は元々の彼らの公式からでは導出できないような応用を持つ公式である。それらの応用をまとめることが本論文の目標の一つである。

まず、本論文の第 2 章で **Riemann** ゼータ関数の対数関数とその反復積分に対し、前述した新しい近似公式を与え、その応用を述べる。最初の応用として、**Riemann** ゼータ関数の反復積分の大きさに関するある評価と、**Riemann** ゼータ関数の非零領域に関するある同値命題を与える。特に、その特殊な例として、**Riemann** 予想に対するある同値命題も与える。この結果は **Fujii** により得られた結果の一般化である。次に、**Riemann** ゼータ関数の零点の虚部の分布と、素数が成す **Dirichlet** 多項式との新しい関係性を **Riemann** 予想下で与える。この関係性は非自明零点の重複度に対する応用がある。例えば **Farmer, Gonek, Hughes** が確立したある予想から導出される零点の重複度に対する評価があるが、ここで得られた素数と零点の関係性と、彼らの議論を組み合わせることで、彼らの予想の帰結から得られる重複度の評価よりも鋭い評価を与えることができる。さらに、我々の近似公式の応用として、**Riemann** ゼータ関数やその反復積分の値分布に対する新しい結果も導出する。その結果は **Soundararajan** が言及したある問題に関係するもので、

ゼータ関数のモーメントや Lindelöf 予想の研究に一つの進展を与えるものである。加えて、その結果は Radziwiłł が予想した評価の一部を証明するものでもある。

第 2 章の後半と第 3 章では、Riemann ゼータ関数の反復積分の分布関数の大偏差についての結果を与える。この結果は Hattori, Matsumoto や Lamzouri により得られた分布関数に対する結果を、Riemann ゼータ関数の反復積分へ拡張するものである。特に、その反復積分の臨界線上での分布関数の減少度合いに対する明示的な公式はここで初めて得られる結果である。またその公式の応用として、Tsang により与えられた Riemann ゼータ関数の反復積分の極値の大きさに対する評価を復元することもできる。

第 4 章では Riemann ゼータ関数の反復積分が臨界線上で取る値の集合が複素平面で稠密になることを示す。これは Ramachandra が提起した「Riemann ゼータ関数の臨界線上での値の集合は複素平面で稠密になるか」という問題と関係している。これまでの先行研究では、その集合が実際に稠密になるかどうかを推測することも難しい問題であった。これに対して、我々の結果は積分という元の値の情報を持つ演算で smoothing することでこの問題の類似が解決できることを示した。この結果は元々の Riemann ゼータ関数の臨界線上での値が複素平面で稠密になることを示唆する一つの根拠となるであろう。

第 5 章では Riemann ゼータ関数の対数関数及びその反復積分の確率論的極限定理に関する discrepancy 評価と大偏差について議論する。この章の最初の結果として、Lamzouri, Lester, Radziwiłł らが最近証明した discrepancy 評価を反復積分へと一般化する。さらに二つ目の結果として、Lamzouri, Lester, Radziwiłł らが証明した大偏差に対する結果を改良し、さらにその結果を任意の偏角と反復積分へと拡張する。

第 6 章では第 2 章で与えた Riemann ゼータ関数に対する近似公式を、Selberg クラス、もしくはそれを拡張したクラスに属する  $L$  関数へ一般化する。その公式を用いて、この章では  $L$  関数の臨界線上での値を成分とするベクトル値関数の値分布を調べる。この章での最初の結果として、Bombieri と Hejhal による  $L$  関数のベクトル値関数に対する中心極限定理を大偏差の意味で精密化する。加えて、その他いくつかの大偏差に関する結果を与える。それら大偏差の結果の応用として、 $L$  関数のモーメントに対する新しい結果をいくつか導出する。特にモーメントに関する結果は Riemann ゼータ関数で知られている結果を単純に一般化するようなものではなく、Riemann ゼータ関数に対しても新しい結果を含むものである。例えば、今まで証明されていなかった Riemann ゼータ関数の負のモーメントに対する結果や、Riemann ゼータ関数の偏角に関するモーメントの下からの評価に対する結果を与えることができる。特に Riemann ゼータ関数の偏角のモーメントに対する研究は、ごく最近の Najnudel による研究結果に対して別証明を与えている。さらに、多次元の極限定理の大偏差を考えたことで、複数の  $L$  関数の最小値を値を持つ関数に対するモーメントの結果も証明する。

第 7 章では Riemann ゼータ関数と 2 次指標に付随する Dirichlet  $L$  関数の確率的依存性を議論する。第 6 章の先行研究である Bombieri と Hejhal の結果から「臨界線上」では Selberg クラスに属する  $L$  関数はある予想の下では確率変数として独立であることがわかる。一方で、臨界線上以外では独立にならないことが特性関数の計算から示唆される。本章では、この非独立性を Riemann ゼータ関数と 2 次指標に付随する Dirichlet  $L$  関数に対して証明する。