論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　　　　　第　　　　号

氏　　　　名　　井上　翔太

論　文　題　目

A new approximate formula for L-functions and its applications to the value distribution of L-functions
（L関数に対する新しい近似公式とその近似公式によるL関数の値分布論への応用）

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（理学）
吉　田　伸　生

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
松　本　耕　二

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（数理学）
植　田　好　道

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　理学博士
鈴　木　浩　志

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

井上翔太氏の学位論文は、ゼータ関数、L 関数の解析的な挙動に関する多くの新知見を提示したものである。氏の論文は７章からなり、第１章は序論で、この分野の歴史的な流れや先行研究の紹介と共に、氏の得た主要な結果のいくつかが簡潔に述べられている。第２章以降が本論で、それぞれの章が氏の個別の論文一編ずつに対応している。第２章と第３章は単著論文（文献表の [50] [51]) に対応し、第４章以降は遠藤健太氏、峰正博氏、Junxian Li 氏といった共同研究者たちとの共著論文 ([22] [23] [52] [53]) の内容となっている。このように、氏の学位論文の内容には共同研究の部分も多いが、特筆すべきことは、第２章で与えられる（従って井上氏単独の成果である）ある種の近似公式が根本的に重要な役割を果たしていることである。実際、この学位論文で述べられていることはその近似公式の種々の応用と一般化に他ならない。

Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の対数 $\log\zeta(s)$ の虚部方向への m 回反復積分を $\eta_m(s)$ と書く。これは $\arg\zeta(s)$ の反復積分で定まる関数 $S_m(t)$ と密接に関係し、$\zeta(s)$ の零点分布の研究上、重要な意味を持つ量である。上で言及した井上氏の近似公式とは、$\eta_m(s)$ をある種の（ゼータ関数の零点の情報を含む）有限和で近似する式 (Theorem 2.1) である。この式は $m = 0$ の場合、Gonek, Hughes と Keating が 2007 年に得た近似式の類似であるが、井上氏は Selberg のアイデアと融合させることで、Gonek たちのものより応用範囲が広い形の式を得ることに成功した。

第２章ではこの近似公式の証明に続いて、その最初の応用として、$\eta_m(s)$ の言葉による Riemann 予想の同値条件 (Corollary 2.1)、$\zeta(s)$ の零点の短区間での個数評価 (Theorem 2.4)、零点の重複度の精密評価、$\log|\zeta(1/2+it)|$ の値分布に関する Radziwiłł の予想の部分的解決 (Theorem 2.5) などの興味深い結果が次々と示されている。

虚部方向への反復積分であった $\eta_m(s)$ は、Littlewood の補題を介して、実部方向への反復積分 $\widetilde{\eta}_m(s)$ とも結びつく。この $\widetilde{\eta}_m(s)$ も Lindelöf 予想と関連する (Proposition 1.1) など大切な意味を持つ量であるが、井上氏は上記の近似公式から、$\widetilde{\eta}_m(s)$ の近似公式 (Theorem 2.2) も従うことを注意している。そこで $\widetilde{\eta}_m(s)$ の値分布の研究も視野に入って来る。

第３章ではこの立場から、$\widetilde{\eta}_m(s)$ が「大きい値」を取る頻度に関する漸近公式 ($\Re s = 1/2$ の場合 Theorem 3.1, $1/2 < \Re s < 1$ の場合 Theorem 3.2) が証明される。この種の問題は近年、Soundararajan や Bondarenko-Seip らの手により大きく進展しているが、井上氏の Theorem 3.1 は Tsang の最良オメガ結果を含む深い結果である。Theorem 3.2 の方は $m = 0$ の場合の Hattori-Matsumoto の先行研究の精密化を与えるものであり、Lamzouri (2011) のほぼ同等の結果もあるが、井上氏の証明方針は Lamzouri とは異なる。（この Theorem 3.2 は後章でさらに精密化される。）

第４章は遠藤健太氏との共同研究である。まず、$1/2 \leq \sigma < 1$ なる σ を一つ固定して、t が正の実数を動くとき、$\widetilde{\eta}_m(\sigma+it)$ の全体が複素平面 $\mathbb{C}$ 上で稠密であることを、第２章で示した $\widetilde{\eta}_m(s)$ の近似式を基盤にして示す (Theorem 4.2)。そしてこの結果に基づいて、(i) Riemann 予想の仮定の下で $\log\zeta(1/2+it)$ の t 方向への積分が $\mathbb{C}$ で稠密であること、さらに (ii) $\eta_m(1/2+it)$ $(m \geq 2)$ が $\mathbb{C}$ で稠密であることが Riemann 予想と同値であること (Theorem 4.1)、を証明している。ゼータ関数の値分布論において、$\zeta(1/2+it)$ が $\mathbb{C}$ で稠密であるか、という問題は有名な未解決問題であるが、井上氏はゼータ関数の反復積分に考察範囲を広げることで、このテーマに新機軸をもたらした、と評価できる。

第５章は遠藤氏、峰正博氏との共同研究で、第３章の Theorem 3.2 をさらに精密化した、Theorems 5.1, 5.2 の証明が目標である。Theorem 5.2 は Lamzouri, Lester と Radziwiłł による 2019 年の漸近公式の改良を特別な場合として含んでいる。証明は Jessen-Wintner 流に確率論の大偏差評価の枠組みに持ち込み、Esseen の不等式や

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

Bessel 関数の性質を援用するなど、技術的には相当に複雑である。

第６章、第７章は Junxian Li 氏との共同研究である。第５章までは Riemann ゼータ関数のみを研究対象としてきたが、第６章において一般の Selberg クラスのゼータ関数に視野を広げる。Selberg クラスは多くの有用なゼータ関数、L 関数を包含する、極めて重要なクラスである。本章ではまず、第２章で示された基本近似公式の Selberg クラスへの一般化 (Theorem 6.6) が証明され、これに基づいて、いくつかの新結果が与えられる。

第一は、Selberg の直交性予想の意味で独立な複数個の Selberg クラスの元の $\Re s = 1/2$ の線上での値分布に対する「同時大偏差」評価を与える漸近式 (Theorems 6.1, 6.2, 6.4) で、個々の大偏差の積として同時大偏差が評価できることが示されており、Bombieri-Hejhal による先行研究 (1995) の改良を与えている。第二には、上と同じ意味で独立な複数個の元 $F_1, \ldots, F_r$ の「同時下限平均値」の上下からの評価 (Theorems 6.3, 6.5) である。ここで言う同時下限平均値とは、各 t に対して $|F_j(1/2+it)|$ $(1 \leq j \leq r)$ の最小値を採用し、その t についての平均を考える、という意味であるが、井上氏の定理は、その平均値が個々の F_j の平均値より真に小さくなることを示している。

さらに第７章では、Riemann ゼータ関数と Dirichlet L 関数のペアの場合に限ってではあるが、第６章と類似した結果を $1/2 < \Re s < 1$ において考察している。

以上のように、井上氏の学位論文はゼータ関数の値分布や平均値の理論への極めて意義ある寄与であり、学位論文として十分な内容を持つものである。2021 年 2 月 25 日に行われた公開学位審査会においても、井上氏の問題意識とその解決への基本的アプローチおよび主結果の意義などが明快に示され、審査委員からの質問にも的確に応答がなされた。

以上のことから、学位審査委員会は申請者が博士（数理学）の学位が授与される資格を有すると判断する.