別紙４

報告番号	※　　　　　第　　　　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目　On the effective problem of the universality theorem and the denseness problem for zeta and L-functions
（ゼータ関数及び L-関数の普遍性定理の定量的評価と稠密性定理について）

氏　　名　遠藤　健太

論 文 内 容 の 要 旨

本論文は, ゼータ関数及び L-関数の値分布について, 著者が得た二つの結果についてまとめたものである.

一つ目の結果は, Riemann ゼータ関数を実軸方向に反復積分した関数と虚軸方向に反復積分した関数の値分布に関するものである. この研究は, 名古屋大学の井上翔太氏との共同研究である. 古典的に, Bohr-Courant によって, 任意に固定された $1/2 < \sigma \leq 1$ に対して, 集合 $\{\zeta(\sigma+it)\ ;\ t \in \mathbb{R}\}$ は複素平面上で稠密になることが知られている. また, Riemann ゼータ関数の臨界線上での値の集合 $\{\zeta(1/2+it)\ ;\ t \in \mathbb{R}\}$ が複素平面上で稠密であるかどうかというのは現在でも未解決問題である. 最近, Kowalski と Nikeghbali により, Riemann ゼータ関数の臨界線上の値の集合の稠密性が成り立つための十分条件が与えられた. しかしながら, この十分条件は非常に強い主張であり, Riemann 予想が正しいと仮定したとしても証明できないほどである. また, Steuding と Garunkštis により集合 $\{(\zeta(1/2+it), \zeta'(1/2+it)); t \in \mathbb{R}\}$ は $\mathbb{C}^2$ において稠密でないという結果も証明されており, これは Riemann ゼータ関数の臨界線上の値の集合の稠密性が成り立たないことを示唆しているかのように捉えることもできる. このように, 現状では, Riemann ゼータ関数の臨界線上の値の集合の稠密性が正しいかどうかを予想することさえ困難であるように思える. 本論文では, このような値の集合の稠密性に関しての問題を Riemann ゼータ関数を実軸方向に反復積分した関数と虚軸方向に反復積分した関数に対して考える. まず, Riemann ゼータ関数を実軸方向に反復積分した関数の値の集合の稠密性に関する結果を与える. この結果を用いることで, Riemann 予想が正しいと仮定すると, 集合 $\{\int_0^t \log\zeta(1/2+it')dt'\ ;\ t \in \mathbb{R}\}$ が複素平面上で稠密となることが示される. さらに, 2 回以上虚軸方向に反復積分した関数の臨界線での値の稠密性と Riemann 予想が正しいことが同値になることを証明する.

二つ目の結果は, ゼータ関数及び L-関数の普遍性定理の定量的な評価に関する問題についてである. Voronin によって, Riemann ゼータ関数の普遍性定理が証明されて以来, ゼータ関数及び L-関数の普遍性定理の研究は, 様々な方向に発展している. それらの研究のうちの一つとして, 普遍性定理を定量的な形に精密化するという試みがなされている. Voronin による普遍性定理の証明には, Kronecker の定理と Pečerskiĭ による Hilbert 空間における点列の並べ替えに関する定理が用いられる. 一般的に, これらの定理の定量的な評価を得ることは困難である. よって, 普遍性定理を定量的に精密化しようとすると, これらの定理が障害となる. 最近, Garunkštis, Laurinčikas, Matsumoto, J. & R. Steuding は, Matsumoto によって証明されていた Riemann ゼータ関数の普遍性定理型の近似定理を定量的に精密化している. ここで, 普遍性定理型と書いたのは, 結果の主張が通常の普遍性定理と少し異なるためである. Matsumoto の着想は, Riemann ゼータ関数とその導関数たちの値の多次元稠密性定理を Taylor 展開と組み合わせて用いるというものである. この多次元稠密性定理も Voronin によるものである. 多次元稠密性定理の証明でも, Kronecker の定理と Pečerskiĭによる定理が用いられるため, Matsumoto による普遍性定理型の近似定理に関しても定量的な結果は知られていなかった. 実はこの多次元稠密性定理に関しては, Voronin により定量的な精密化がなされており, Garunkštis, Laurinčikas, Matsumoto, J. & R. Steuding らは, この定量的に精密化された多次元稠密性定理を用いて結果を得たのである. Voronin は, 定量的に精密化された多次元稠密性定理を上記の非定量的な二つの定理を用いずに巧妙に証明している. その証明において, Pečerskiĭによる定理は, 初等幾何学的な議論と連立方程式と短区間中の素数定理を用いた議論に置き換えられる. Kronecker の定理は, ある重み付き平均値の評価をする議論で置き換えられる. 本論文では, Voronin による定量的に精密化された多次元稠密性定理と Garunkštis, Laurinčikas, Matsumoto, J. & R. Steuding らによる定量的に精密化された普遍性定理型の近似定理をある条件を満たす Selberg クラスに属する L-関数に一般化する.